

ZARAGOZA, José (S.I.)

Geometriae magnae in minimis : pars
secunda, de planis / authore... Iosepho
Zaragoza... Societatis Iesu... -- Prima
editio. -- Toleti : Apud Franciscum
Calvo..., 1674

[10], 234 p., [8] h. de lám., *5,
A-Z4, 2A-2C4, 2D5, 2E-2F4 ; 4º

1. Geometría 2. Geometria I. Título

R-6501

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS SECUNDA
DE PLANIS.

AUTHORE

A. R. P. IOSEPHO ZARAGOZA,
Valentino Societatis Iesv, in Suprema Hispaniarum
Inquisitione propositionum Fidei Censore: olim in
Collegijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino
Theologiæ Scolasticæ, modo in Matritensi Acadæ-
mia Imperialis Collegij Matheseos
Professore Regio.

AD ILLVSTRISSIMVM DOMINVM
D. PETRVM FERNANDEZ DEL
*Campo, Angulo, & Velasco, Marchionem de
Mejorada, Catholicæ Maiestati ab
universis Secretis, &c.*

PRIMA EDITIO.

TOLETI. Apud Franciscum Calvo, Typogr. Reg.
Anno Domini 1674.

Cum Superioriorum licentia.



FACULTATES SUPERIORVM.

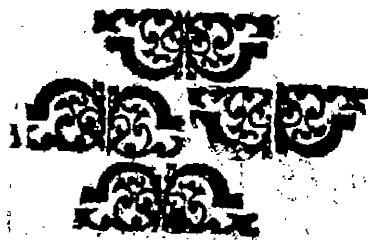
Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zaballos, Vic. Tol.

FACULTAS R. P. PROVINCIALIS

Provinciae Toletanae Societatis Iesv.

Didacus de Valdès.



ILLVSTRISSIMO DOMINO

D. P E T R O

FERNANDEZ DEL

CAMPO , ANGVLO , ET VELASCO,

Marchionide Mejorada, B. Iacobi Stemmate
insignito , & inter Primarios eius Ordinis
Equites vulgo *Treze* numerato, Catholicæ
Maiestatis in Supremo Belli, ac Status Senatu
Secretario, in Camera Indiarum Consiliario,

& pro vniuersa negotiorum expeditione

Catholicæ Hispaniarum Reginae

à Secretis, &c.



Geometriae Magnae in Mini-
mis Pars secunda de Planis
T. Dominationis patrocini-
um ambit, tum quia me tā-
to nomini deuinctum ag-
noscit, tum quia nē in angu-
lo lateat in *Angulo* parere, & in *Campo* conf-
picua esse vult , vt omnibus plana fiat , quæ
aliàs prærupta, & inaccessa culmina degere vi-
debatur. Apertam planitiem fugiunt ferina
ingenia, quæ oderunt lucem, & speculas tene-

brofas amant in quibus deliteant, ne ab in-
quirentibus capiantur. Mihi quidem Plana
tractanti apertus Campus adeundus fuit, ac
ingenti perfusus lumine, cum ab omnibus
etiam animi causa transeuntibus capi deside-
rem, ac reperiri etiam non quæsitus. Plana
percurro, sed fortè parum trita, non commu-
nia, nec humilia, quæ enim silvis horrebant
auiæ, omnibus pervia iterato securis ictu ster-
nere conatus sum, aliquibus scilicet nouo lu-
mine donatis, non omnibus, cum hoc in im-
menso Geometriæ latifundio, nec vnius inge-
nij sit, nec forte omnium, ni Deus vltro super
infusa luce tanti doni, quem voluerit esse par-
ticipem.

Campus igitur Geometricus, & Gentili-
tius T. Dom. hanc mirabilem servant analo-
giam, vt vterque immensè difusus pari ferti-
litate, iuges, ac perennes laboris, & sudoris
fructus cultoribus subministret. Perspicua
sunt in Geometriæ fundo Archimedis, Apol-
linij, & aliorum siue antiquos percurrere, siue
Recentiores libeat, clarissima inventa: sed me
iudice clariora Maiorum tuorum gesta ad
hunc nostrum diem ordine non intercisso de-
ducta, & similia spero ad præfinitum mundi
terminum à Successoribus deducenda.

Heu

Heu quantum Gentilitia tuis laudibus aperiebant campum, si diutius in eo immorari liceret. Fuit ex Progenitoribus, qui Martis æmulus inimicorum copias fuderit, & ut belli fulmē in hostes irruens, hostilem comprefert Tyrannidem Regemque subegerit. Hinc gloriosum stemma præcisi capitis, squalentis tabo, regia corona insigniti originem duxit, quo atauorum gloria recens perēnet. Turribus superimposita sydera fortitudinis claritatem indignant, & armatæ Gryphes leoninum robur, & aquilinam celeritatem in prælijs conficiendis adurbrant. Ommitto Velascos de Vngo, & Ziella, quorum es fælicissima proles, & gloriam immortalem nouis splendoribus toto orbi vegetiorem sistis. Sileo Comites-Stabiles Castellæ militari gloria conspicuos inter maiores tuos enumerādos. Prætereō maternam stirpem in qua Turrianos veneror, Lopezios colo alta nobilitatis cognomina, illud se ipso illustrissimum, hoc verò egregijs Lupi Lopezij Salzedo vallis Ayalæ tertij Domini facinoribus clarum, quibus Aulam de Velasco sublatam propriæ ditioni restituit. Quid hos, & alios Progenitores clarissima Hispaniarum lumina in medium proferam, cum tuæ virtutes, & egregia facta amplif-

plissimum æquè, ac feracissimum tuis laudibus Campum aperiant? Te enim ita ab incubulis magnum intueor, vt præcoces tuæ pueritiæ annimaturam aliorum senectutem excelluisse videantur: virtutem à puero coluisti, vt vitiorum insurgentium monstra fæliciter debellares: ab ineunte ætate, vt otium maiorum omnium radicem fugeres, diuersarum nationum idiomata didicisti. Fælix quidem omen cum enim lingua mentis sit intepres, altissima Regij capitis consilia te expressurū, communique tanti imperij bono, & saluti consulturum præclara tua indoles innuebat. Ætate provec̃tior in prælio Norligenſi cum Ferdinando Austriaco adeò magnum consilij tui specimen posteris reliquisti, vt non exigua tantæ victoriæ pars tibi cedat.

Magnus Philippus in concilijs Belli, & Status secretorum te participem fecit, & custodem. Heros ille maximus ad ardua, & sublimiora virtutem, ac industriam tuam elegit, vt stratum haberes viam, qua ingenium tuum ad summa vniuersæ expeditionis secreta ascenderet. Regiæ mentis consilium, & rectissimæ voluntatis decretum coniugem latere nō potuit. Hinc autumo, Serenissima Hispaniarum Regina Mariana Austriaca, potentissimi
hu-

huius Imperij Gubernatrix, vt illud Carolo
Secundo Catholico, & Maximo incolne si-
stat, merita singularia, quibus fulges, ad sum-
mam rerum occurrentium expeditionē eue-
xit: ea nempe fælicitate, vt parem Ministrum
vix in idæis Platonice liceat invenire. Atlan-
tis humeri cœlo licet non impares, Catholi-
co imperio sustinendo pares non essent: at ve-
ro Atlante maior Philippus Quartus vniuer-
sam hanc machinam sustinuit, & rexit, cui ad
superos translato successit, non impar Alci-
des, sed Mariana Heroinis superior, & Alcide
robustior, cuius leuamini demandatus es, vt
qui sine comite tãto ponderi crederis suppar.
Nescio quid diuinum redolet Prouidentia
tua, vt ad consilium tuum, & nutum volvatur
orbis iste, & quidem sine violenta coactione,
non tam grauitatis suæ, quàm prudentissimæ
tuæ dispositionis centro innixus. Omnia in
rerum multitudine innumera, & magnitudi-
ne immensa ita suauiter ad numerum, & mē-
suram redigis, vt vtraque infinitudo a tuo in-
genio circumscribi patiatur. Fælicitas hæc
vnius hominis nō est, nisi à Summo Deo quid
supra humanum menti tuæ fuerit gratis, &
largè superinfusum. Hæc mihi sæpius confi-
deranti, nihil aliud occurrit, quàm singularis
illa

illa beneuolentia, qua Deus Optimus Maximus Catholicum hoc regnum intuetur, & protegit. Ex hac indeficienti scaturigine Pro- uidentiaæ tuæ certitudo, regiminis suauitas; & reliquæ virtutes Supremo Gubernatori ad felicem rerum administrationem idoneæ largissimè fluunt. Singularis tua dispositio, quod æmulari possit nullum habet exemplar, in ea tamen habent singulare, quod veneren- tur posteri. Suauitas ea est vt iugū subiectio- nis nemo sentiat, cum labores omnes tui sint, vt omnibus sis leuamini, salutis tuæ nihil aliud tribuens, quam quod alienæ consulis. De vir- tutibus alijs Regio Ministro dignis satius est tacere, quam pauca dicere. Ea es vigilantia, vt omnibus videaris præfens, maiora ita prospi- cis, ac si nihil de minimis tibi curæ esset: mini- ma tamen, quæ ad Regni administrationem pertinent ita curas, ac si Maxima quæque so- licitudini tuæ non essent tradita. Hæc tua so- licitudo ubique præfens Antiquorum fatua deliramenta refellit. Credidèrè Gentes pro diuersitate munerum numerum Deorum fo- re multiplicandum; alijs Reipublicæ com- mendabant tutelam; alijs imperij clavum, alijs familiæ curam; & eo infaniae processit delirium vt æquè vitijs, ac virtutibus sua præ-
es-

essent numina ; præter innumeram Deorum
urbam minimis rebus præfectam, cum penes
selectos (vt credebant ipsi) Deos minimarum
rerum prouidentia esse non posset. *Operiat
igitur confusio faciem eorum*: impudentes qui-
dè sunt si pudori ipsis non es, Homo enim
cum sis, tantam rerum machinam sustines,
quantæ non sufficeret, vel Iuppiter ipse, vel in-
numera Deorum multitudo : vt Phœbeis ra-
dijs sensibilia viuunt, ita calore tuo viget om-
nia, nullusque est in hoc difuso imperio, quẽ
benefica tua virtus non foueat, in dies, mirũ,
vegetior, & robustior: viue fœlix, vt tot bello-
rum terminum, tot imminentium inimico-
rum stragem, tot machinantium interitum,
tot dubiarum rerum fœlicem exitum videa-
mus, & aurea per te sæcula, vt cessura credi-
mus, Carolo Secundo nouissimè cedant.

Væ Dominationis
obsequentissimus Servus

Iosephus Zaragoza.

ERRORES CORRIGENDI.

Pag.	Lin.	Error.	Correct.	Pag.	Lin.	Error.	Correct.
8.	1.	OD.DO.	OB.BO.	124.	10.	CA in B.	DA in C.
11.	11.	<i>ex.</i>	<i>est.</i>	126.	9.	in G.	in F.
15.	17.	EN.	EO.	137.	2.	& HK.	& HN.
15.	24.	2EB.	2ED.	143.	23.	vel HY.	vel VY.
17.	6.	EO.	EA.	149.	9.	minus	maius
17.	14.	FB.	FG.	152.	15.	SV.	OV.
21.	19.	SX.	SZ.	156.	3.	2.	20.
22.	27.	SZ.	SX.	166.	22.	BOR.	BCR.
31.	5.	IC.	IR.	169.	24.25.	AD.	AB.
41.	1.	ctione.	ctio.	175.	12.	omnium.	omnia.
52.	3.	EC.	EA.	192.	15.	HC.	RC.
56.	4.	<i>ut.</i>	<i>et.</i>	193.	22.	in E.	in G.
60.	15.	CL.	AL.	197.	19.	AB.	ABPētagoni.
76.	8.	AB.	AC.	211.	2.	44388.	43388.
83.	18.	B.	H.	219.	2.	NARIA.	NATA.
94.	21.	GH.	DH.	223.	20.	ad GM.	ad GB.
101.	8.	æquatur.	æquatur 2.	226.	17.	ad EC.	ad BC.
104.	1.	DC.	BC.	227.	21.	5 RQ.	5 BQ.
104.	6.	gonibus.	gonijs.	229.	21.	BB.	BC.
113.	17.	GE.	GC.	233.	6.	eq.4.	eq.



GEO-

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS SECVNDA DE FIGVRIS PLANIS.



Einus in priori parte de centro minimo, nullo figurarum, quas puncta constituunt, respectu habito. Iam in determinatis planis centrum minimum est nobis determinandum, & quæ forte magna ex minimo inferantur sedula meditatione investiganda veniunt. Omnia ferè, quæ in hac parte aguntur, ad centrum figurarum similium spectant. Aliquid tamen concluditur de dissimilibus, quod scilicet perspicua breuitate, iam diu nobis præfixa, & altè animo insculpta comprehendi potuit, ac observatione dignum occurrit. Multa igitur consulto quia proluxa, plura autem, quæ nõ occurrere ommissimus. Quem enim licet oculis præditum lynceis minima non subterfugient?

CAPVT I.

DE TRIANGVLIS.

 *Secundam Geometria partem in quatuor diuissimis capita, quorum primis de triangulis agit, ut quæ simpliciora sunt, & ab illis incipiendum esse, doctrinae methodus, & demonstrationum ordo prescribit. Secundum de quadrilateris, & irregularibus, siue inordinatis Polygonis agit. Tertium continet ea, quæ ad figuras regulares spectant. In quarto Problemata ex specularibus orta solvuntur. Seiunximus ergo Problemata à Theorematibus, ut qui praxi delectantur, omnia quæ ad earum finem cōducunt in unum collecta reperiunt, quod etiam in Euclidæis elementis, & in prima huius Geometria parte obseruatum est, ac in tertia retinendum.*



PROPOSITIO I.

IN quolibet Triangulo centrum $ff\ ff$ est in tertiâ parte rectæ ex angulo bisecantis latus oppositum.

2 Et in dimidio rectæ trisecantis latera.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Triangulo ABC . recta CF . diuidat bifariam latus AB . & sit FO . tertia pars rectæ FC . Dico punctum O . esse centrum $ff\ ff$. ad angulos $A.B.C$. Item recta HI trisecet latera $AC.BC$. & eius dimidium sit O . Dico etiam O . esse centrum $ff\ ff$. trianguli, scilicet punctorum $A.B.C$.

DEMONSTRATIO.

CUm AB . sit bifariam diuisa in F . erit F . centrum $ff\ ff$. ad $A.B$. (35. M. 1.) Ergo cum FC . sit trifariam diuisa in O . erit O . centrum $ff\ ff$. ad $A.B.C$. (62. M. 1.) Quod, &c.

2 Cum AH ad AC . sit vt BI . ad BC . est HI . parallela ipsi AB (2. l. 6.) Ergo etiam est vt AH . tertia pars AC . ita FO . tertia pars FC . & HO . dimidium HI . sicut AF . dimidium AB (2. l. 6.) Ergo centrum $ff\ ff$. O . quod est in tertia parte FC . est etiam in dimidio HI . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

IN quolibet Triangulo rectæ ex angulis bise-
cantes latera opposita, trifariam invicem di-
viduntur in centro *ff. ff.* & quæ trifecant latera, di-
viduntur bifariam in eodem centro, & e converso.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Triangulo ABC. rectæ AG. BE. CF. bise-
cant opposita latera, & HI. KL. MN. trifecant
eiusdem anguli latera. Dico interfecari in cē-
tro *ff. ff.* O. illas nempe trifariam, & bifariam
istas: & e contra.

DEMONSTRATIO.

Cum recta CF. biseceat latus AB. est *centrum*
ff. ff. O. in tertia ipsius parte (i. p.) Similiter
est in tertia parte rectæ EB. & item rectæ GA.
Tum quia HI. trifecat latera, est *cētrum ff. ff.* O.
in ipsius dimidio: & similiter in dimidio re-
ctarum KL. MN (i. p.) Ergo cum *centrum ff. ff.*
O. sit vnicum punctum (60. M. 1.) omnes se
in eo interfecant modo exposito.

Conversa patet, quia si recta CF. trāsit per O.
recta CO. transibit per F. & HO. per I. Quod
erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

IN quolibet Triangulo si rectæ coniungant laterum bisectiones, constituent Triangulum simile in Versum: & si hoc infinite continuetur, desinent in centrum ff. ff. omnibus commune.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sint latera AB. BC. CD, bisecta in F. G. E. & iungantur EF. FG. GE, quæ iterum bifariam diuidantur in P. Q. X. & ducantur PQ. QX. XP. & ita infinite continuetur. Dico omnia triangula similia esse Triangulo ABC. & habere cõmune centrum ff. ff. O. in quo tandem finietur triangulorum infinita series.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sunt proportionales vt tota CA. ad totam CB. ita dimidium CE. ad dimidium CG. (5. l. 5.) erunt EG. & AB. inter se parallelæ (2. l. 6.) Similiter erunt parallelæ EF, & CB. Tum etiam FG. & AC. (2. l. 6.) Ergo parallelogramma sunt AFGE. BGFE. CEF. Ergo oppositi anguli erunt æquales (7. l. 1.) nempe EAF. & FGE. Tum FBG. & GEF. Tum GCE. & EFG. Ergo Triangula ABC. EFG. æquiangula, & similia sunt.

Deinde cum in Parallelogrammis diagoni

tri

tri bifariam secantur (7. l. 1.) scilicet AG. EF. tum EB. FG. tum CF. EG. erunt latera trianguli EFG. bisecta in P. Q. X. Ergo cum rectæ FX. GP. EQ. bisecantes latera se intersecent in *centro* Trianguli EFG. (2. p.) punctum intersectionis O. erit *centrum* ff. ff. trianguli EFG. & cū idem sit etiam *centrum* ff. ff. trianguli ABC. (2. p.) erit O. commune *centrum*. Vnde PO. erit tertia pars ipsius PG. & XO. ipsius XF. & QO. ipsius QE (1. p.) Idem similiter demonstrabitur de Triangulo PQX. & ita infinite usque ad *centrum* O. Ergo omnia triangula similia sunt, & habent commune *centrum* ff. ff. Quod erat demonstrandum.

Triangulum EFG. inuersum est, quia angulus EFG. similis est ABC. & Triangulum PQX. est parallelum ipsi ABC.

PROPOSITIO IV.

IN quolibet Triangulo rectæ ex angulis per *centrum* ff. ff. bisecantes latera diuidunt ipsum in sex Triangula equalia.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. rectæ AG. BE. CF. transeuntes per *centrum* ff. ff. O. bisecant latera. Dico Triangulum ABC. sectum esse in sex Trian-

Triangula æqualia, scilicet AOF.FOD.DOG.
GOC.COE.EOA.

DEMONSTRATIO.

CVm AC.BC.sint proportionaliter diuisæ,
nempè bifariam, sunt AB. & EG. parallelæ
(2.l.6.) Ergo Triangula ABG BAE supra can-
dem basim AB. & inter parallelas AB.EG sunt
æqualia (8.l.1.) Ergo ablato communi AOB.
erunt æqualia AOE. BOG. similiter quia BC.
& FE. sunt parallelæ, demonstrantur æqualia
triangula EOC.FOB. Tum etiam COG.AOF.
sed etiam AOF.FOB. æqualia sunt, cum ha-
beant æquales bases AF. FB. & æqualem alti-
tudinē in O (8.l.1.) Tū BOG.GOC.& COE.
EOA. Ergo omnia sunt æqualia. Quod,&c.

PROPOSITIO V.

Rectæ ex centro ff. ff. in angulos diuidunt
Triangulum in tria triangula æqualia.

2 Perpendiculara à centro in latera sunt late-
ribus reciprocè proportionalia.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sit centrum ff. ff. O. ex quo
ducantur OA.OB.OC.& perpendiculara OE.
OG.OF. Dico triangula AOB. BOC COA,
esse inter se æqualia, & perpendiculara esse late-
ribus reciprocè proportionalia.

DE-

DEMONSTRATIO.

CVmenim AOF. FOB. sint duæ sextæ partes (4p) erit AOB. tertia pars trianguli ABC. similiter BOC. erit tertia ipsius pars: tum etiã CCA. Ergo sunt triangula inter se æqualia.

2 Cum Triangulum ABO. sit dimidium rectanguli AB.FO. & BOC. dimidium rectanguli BC.GO. erunt rectangula æqualia: Ergo latus AB. ad latus BC. erit vt perpendicularum OG. ad perpendicularum OF. (1. l. 6.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

IN quolibet Triangulo summa ff ff. ex lateribus est sesquitertia summa ff ff. ex bisecantibus latera: vt 4 ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. Dico summam quadratorum, vel quarumlibet ff ff. ex lateribus AB. BC CA. esse sesquitertiam summæ ff ff. ex bisecantibus AG BE CF. scilicet vt 4. ad 3.

DEMONSTRATIO.

CVm AB sit bifariam diuisa in F. est F. centrum ff ff. ad A. B (35. M. 1.) Ergo figuræ ex C. nēpè CA. CB. æquantur ff ff. FA. FB + 2FC (60. M. 1.) Similiter AC. AB. æquantur GC. GB + 2GA. Item BA. BC. æquantur EA. EC + 2EB.

B

(60.

(60. M. 1.) sed AF. FB. sunt æquales, tum BG. GC. tum CE. EC. Ergo $2 AB + 2 BC + 2 CA.$ æquantur $2 AG + 2 BE + 2 CF + 2 AF + 2 BG + 2 CE.$ Ergo $\text{ff. ff. } AB. BC. CA.$ æquantur $AG. BE. CF + AF. BG. CE.$ Ergo illæ superant istas totis $\text{ff. ff. } AF. BG. CE.$ nempe quarta sui parte, cum recta AF. sit dimidium AB. & BG. ipsius BC. & CE. ipsius CA (3. 2.) Ergo $\text{ff. ff. } AB. BC. CA.$ sunt ad $\text{ff. ff. } AG. BE. CF.$ ut 4. ad 3. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

IN quolibet Triangulo summa ff. ff. ex bisecantibus latera est ad minimam summam ex centro, ut 9. ad 4. ista verò est quadrupla, & illa noncupla minima summae trianguli inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sit centrum $\text{ff. ff. } O.$ Dico summam $\text{ff. ff. } AG. BE. CF.$ ad minimam summam OA. OB. OC. esse ut 9 ad 4. & hanc ad minimam OE. OF. OG. ut 4 ad 1. & illam ad eandem ut 9. ad 1.

DEMONSTRATIO.

CUm FO. sit tertia pars ipsius FC. (1. p.) est recta FC. ad OC. ut 3. ad 2. Ergo quælibet figura FC. ad similem OC. est ut $\square FC.$ ad $\square OC$ (4. 6.) scilicet ut 9. ad 4. Idem demonstratur de

de figuris BE. OB. tum AG. OA. Ergo summa
 $\text{ff. ff. AG. BE. CF. ad summam OA. OB. OC. vt } 9.$
 ad $4(4. l. 5.)$ Insuper quoniam OC. est dupla
 ipsius OF. erit $\square \text{OC. quadruplum } \square \text{OF.}$ Er-
 go etiam summa $\text{ff. ff. OA. OB. OC. est quadru-}$
 pla summæ $\text{ff. ff. OF. OG. OE. vt } 4. \text{ ad } 1.$ Ergo
 summa $\text{ff. ff. AG. BE. CF. ad summam OE. OF.}$
 OG. erit vt $9. \text{ ad } 1.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO VIII.

IN quolibet Triangulo summa $\text{ff. ff. ex lateri-}$
 bus ex tripla minima summa: & summa ex
 lateribus inscripti est medioloco proportionalis in-
 ter summam $\text{ff. ff. ex bisecantibus, \& minimam}$
 summam trianguli inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Triangulo ABC. sit centrum ff. ff. O Dico
 summam $\text{ff. ff. AB. BC. CA. esse triplam mi-}$
 nimæ OA. OB. OC. & esse continuas summas
 AG. BE. CF. & EF. FG. GE. & OE. OF. OG.

DEMONSTRATIO.

Summa enim $\text{ff. ff. ex lateribus AB. BC. CA.}$
 est ad summam $\text{ff. ff. ex bisecantibus AG. BE.}$
 CF. vt $4 \text{ ad } 3.$ vel vt $12. \text{ ad } 9. (6. p.)$ sed summa
 $\text{ff. ff. ex bisecantibus AG. BE. CF. est ad minimam}$
 OA. OB. OC. vt $9. \text{ ad } 4(7. p.)$ Ergo summa ff. ff.
 ex lateribus est ad minimam summam vt $12.$

ad 4. scilicet in ratione tripla. Similiter summa $ff. ff.$ EF. FG. GE. erit ad summam OE. OF. OG. vt 3. ad 1. sed hæc ad summam $ff. ff.$ ex bisectionibus est vt 1. ad 9. (7. p.) Ergo cum 9. 3. 1. sint continui, etiam summa $ff. ff.$ AG. BE. CF. & EF. FG. GE. & OE. OF. OG. continuæ erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

IN quibuslibet Triangulis summa $ff. ff.$ ex lateribus minimis summis sunt proportionales.

EXPOSITIO. Fig. 2.

Sit Triangulum ABC. & eius *centrum* O. Item Triangulum EFG. cuius *centrum* O. Dico summam $ff. ff.$ AB. BC. CA. ad summam EF. FG. GE. esse vt minimam summam OA. OB. OC. ad minimam OE. OF. OG.

DEMONSTRATIO.

Summa enim $ff. ff.$ AB. BC. CA. tripla est minimæ OA. OB. OC. & summa $ff. ff.$ EF. FG. GE. tripla est minimæ OE. OF. OG. (8. p.) Ergo & alternando summa ex lateribus ad summam, vt minima ad minimam (4. l. 5.) Quod erat demonstrandum.

13

Pars secunda. Propositio X.
 TABVLA POTENTIARVM
 cuiuslibet Trianguli.

<i>Summa ff. ex lateribus trianguli.</i>	<i>XII.</i>
<i>Summa ff. ex bisecantibus latera.</i>	<i>IX.</i>
<i>Minima summa ex centro.</i>	<i>IV.</i>
<i>Summa ff. ex lateribus inscripti.</i>	<i>III.</i>
<i>Minima summa inscripti.</i>	<i>I.</i>

Hinc rationes continuæ, vel nō continuæ facile colligi possunt.

PROPOSITIO X.

O Mnia Triangula, quæ habent eandem basim, & æqualem summam ff. ff. ex reliquis lateribus, habebunt etiā angulos verticales in eadem peripheria, & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

S Int duo, vel infinita triangula ABC. ABD. &c. supra eandem basim AB. & summa ff. ff. ex lateribus AD. DB. æqualis sit summæ ff. ff. AC. CB. &c. Dico angulos D. & C. &c. esse in eadem peripheria ex E. dimidio basis descripta. *E converso* si anguli D. & C. &c. sint in eadē peripheria ex E. descripta. Dico summam ff. ff. alteri summæ esse æqualem.

DEMONSTRATIO.

E X E. dimidio AB. & radio EC. describatur circulus GCH. cum sit E centrum ff. ff. ad A. &

& B (35. M. 1.) Ergo summa $ff.$ CA. CB. æqualis est $ff.$ AE. EB + 2 EC (60. M. 1.) & summa $ff.$ DA. DB. æquatur $ff.$ AE. EB + 2 ED (60. M. 1.) Ergo cum summa CA. CB. æqualis sit DA. DB. erunt ED. EB. æquales figuræ: Ergo & rectæ æquales radij erunt.

Conuersa patet ex eadem 60. M. 1.

PROPOSITIO XI.

IN omnibus Triangulis æqualem basim habentibus, differentia $ff.$ ex bisecantibus illam est semidifferentia inter summas $ff.$ ex lateribus: & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 3.

Triangula ADB ANB. habeant eandem, vel æqualem basim, quam bisecent DE. NE. Dico differentiam $ff.$ DE. NE. esse semidifferentiam inter summam $ff.$ DA. DB. & NA. NB. & e contra si differentia $ff.$ ED. EN sit æqualis semidifferentiæ inter $ff.$ DA. DB. & NA. NB. Dico bases æquales esse.

DEMONSTRATIO.

Summa $ff.$ DA. DB. æquatur 2AE + 2ED (60. M. 1.) & summa $ff.$ NA. NB. æquatur 2BE + 2EN. sed cum AE. BE. supponantur æquales: differentia inter 2AE + 2ED. & 2BE + 2EN. est differentia inter 2ED. & 2EN. scilicet dupla dif-

differentiæ $ff.$ ED. & EN. Ergo differentiæ $ff.$ ED. EN. est semidifferentia inter $ff.$ DA. DB. & NA. NB.

Conuersa liquet. Si enim differentia inter $ff.$ DA. DB. & NA. NB. sit differentia inter 2 ED. & 2 EN. nulla erit differentia inter $ff.$ 2 EA. & 2 EB. Ergo erunt semibases, & bases æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XII.

SI plura Triangula habeant æqualem summam $ff.$ ex duobus lateribus collectam: differentiæ $ff.$ ex bisecantibus bases, æqualis est differentiæ $ff.$ ex semibasibus, & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 3.

Sint Triangula ABD. GHO. & summa $ff.$ DA. DB. æqualis summæ $ff.$ OG. OH. Dico differentiæ inter $ff.$ ED. EN. æqualem esse differentiæ inter $ff.$ EG. EA. & e contra si istæ differentiæ sint æquales. Dico etiam prædictas summas esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

CVm enim $ff.$ DA. DB. æquales sint 2 AE + 2 ED (60. M. 1.) & OG. OH. æquales 2 EG + 2 EO. æquales etiam erunt 2 AE + 2 EB. ipsis 2 EG + 2 EO. Ergo quantum 2 EG. superant 2 AE. tantum 2 ED. superabunt 2 EO. Ergo eadem

dem est etiam differentia inter ff . EG. EA quæ inter ff . ED. EO.

Econtra verò si eadem sit differentia inter ff . EG. EA. quæ inter ff . ED. EO. erunt ff . ff . $2EG + 2EO$. æquales $2EA + 2ED$. Ergo cū OG. OH. æquales sint $2EG + 2EO$. & DA. DB. æquales $2EA + 2ED$. erunt OG. OH. æquales DA. DB.

PROPOSITIO XIII.

SI duo Triangula habeant æqualem summā ff . ex omnibus lateribus, erunt 3. figurae ex semibasi unius cum simili figura ex bisecante æquales 3. figuris ex semibase alterius cum simili figura ex bisecante: & differentia ff . ff . ex bisecantibus tripla est differentia ff . ff . ex semibasibus.

EXPOSITIO. Fig. 3.

Sint Triangula ABD. GOH. & summa ff . ff . AB. BD. DA. æqualis summæ ff . ff . GH. HO. OG. & DE. bisecet basim AB. & OE. basim GH. Dico 3 ff . ff . AE + ED. æquales esse 3 ff . ff . EG + EO. & differentiam ff . ff . ED. & EO. triplam esse differentia ff . ff . EA. & EG.

DEMONSTRATIO.

CVm figurae DA. DB. æquales sint $2AE + 2ED$ (60. M. 1.) & AB. æqualis quatuor AE (3. l. 2.) erunt ff . AB. BD. DA. æquales 6 ff . AE + 2ED. similiter ff . GH. HO. OG. æquales 6 ff .

6ff. $EG + 2EO$. Ergo cū AB, BD, DA . sint æquales GH, HO, OG . erunt $6AE + 2ED$. æquales $6EG + 2EO$. Ergo etiam $3AE + ED$. æquales $3EG + EO$. Ergo & differentia inter ED . & EO . eadem quæ inter $3EG$. & $3AE$. & tripla quæ inter EG . & EO . Quod, &c.

PROPOSITIO XIV.

S*I intra angulum fuerit datum punctum, recta, quæ per illud ducitur bifariam diuisa, secat Triangulum omnium minimum eorum, quæ per tale punctum secari possunt.*

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus ACB . & intra illum sit datum. punctum D . & ducatur FB . transiens per D . quæ sit in D . bifariam secta. Dico Triangulū GFC . esse omnium minimum eorum, quæ fieri possunt qualibet recta per datum punctū D . transeunte.

DEMONSTRATIO.

DVcatur quælibet RDS . & fiat GT . parallela AC . quæ cadet extra angulum, & Triangula RDF, TDG . erunt æquiangula, & proportionalia (2. l. 6.) Ergo vt GD . est æqualis FD . ita TD . erit æqualis RD . & Triangula RDF, TDG . omninò æqualia (4. l. 1.) Ergo cum DSG . minus sit quàm DTG . etiam erit minus quàm

C

RDF.

RDE. & addito communi FCSD. erit $\triangle GFC$. minusquam $\triangle RSC$. Ergo cum hoc semper demonstretur, erit $\triangle GFC$, omnium minimū. Quod, &c.

PROPOSITIO XV.

SI ex dato intra angulum puncto ducatur lateri parallela, quæ per idem punctum ducta facit æqualia intersegmenta, est bifariam diuisa, & secat triangulum minimum: & e converso.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum sit punctum D. per quod ducatur DL. parallela lateri BC. vel DE. parallela lateri AC. deinde si CL. LF. æqualia intersegmenta sint, vel CE. EG. Dico rectam FDG. vel GDF. esse bifariam diuisam, & secare triangulum minimum.

DEMONSTRATIO.

CUm enim DL. & GC. parallelæ sint, erunt triangula GFC. DFL. similia (2. l. 6.) Ergo ut FL ad LC. ita FD. ad DG. sed FL. est æqualis LC. ex hypothefi: Ergo etiam FD. æqualis erit DG (2. l. 5.) Eadem ratione cum FC. DE. sint parallelæ, ut GE. est æqualis EC. ita GD. erit æqualis DF. Ergo cum GF. sit bifariam secta in D. erit triangulum GFC. minimum (14. p.) Vnde etiam *conuersa* liquet. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI ex dato intra angulum puncto ducantur rectæ lateribus parallelæ, quæ per idem punctum ducitur sectionibus laterum parallelæ, est bifariam diuisa, & secat triangulum minimum: & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum est punctum D. ex quæ ductæ sint DL. DE. lateribus parallelæ, & FDB. sectionibus laterum LE. parallelæ sit. Dico FDB. esse bifariam diuisam in D. & secare triangulum minimum: & e contra.

DEMONSTRATIO.

CUm FC. DE. sint parallelæ, tum DL. BC. & etiam LE. FB. est FE. parallelogrammum, & latera opposita FL DE. æqualia sunt (7. l. 1.) & Triangula LFD. EDB. æquiangula, & latera proportionalia (2. l. 6.) Ergo ut LE. ad FD. ita ED. ad DB. & alternando ut FL. est æqualis ED. ita FD. æqualis erit DG (4. l. 5.) Ergo est FB diuisa bifariam in D. Ergo secat triangulum minimum (14. p.)

Conuersa liquet ex triangulorum analogia.

PROPOSITIO XVII.

Si recta secet triangulum minimum per datum intra angulum punctum, & qualibet alia per idem punctum transeant, quæ illi proximior est, secat triangulum minus, quàm remotior: & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 4.

INtra angulum ACB. datum sit punctum D. & recta GDF. secet triangulum minimum. Transeant etiã per D. rectæ RS. HK. Dico Triangulum RSC. minus esse triangulo HCK. & e converso si illud minus sit. Dico RS. proximiorē esse ipsi FDG. quàm recta HDK.

DEMONSTRATIO.

CUm RD. DT. sint æquales, & DS. sit minor DT. erit etiam minor quàm DR. Ergo ducta RI. parallela CB. erit DK. minor DI (2. l. 6.) & triangulum DSK. minus quàm $\triangle DRI$. Ergo etiam minus quàm DRH. Ergo addito cōmuni spatio RDKC. erit $\triangle RSC$. minus quàm $\triangle HCK$.

Conversa patet, quoniam si triangulum maius non fieret linea remotiore; linea proximior non secaret $\triangle$ minus contra id quod nuper demonstratum est.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

S*I per datum in angulo punctum recta bise-*
ctam secta sit, per quod alia qualibet secet la-
tera data Triangulorum ratione datur ratio la-
terum: & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 5.

S*It angulus ACB. & punctum datum F. & re-*
cta AFD. bisecta in F. per quod trãseat quæ-
libet alia recta EFB. secans anguli latera in E.
& B. dataque sit ratio trianguli ADC. ad $\triangle$
EBC. vt SX. ad SZ. Dico datã esse rationẽ late-
rum, nempe CD. ad CB. & CA. ad CE. & è con-
uerso data laterum ratione, triangulorum ra-
tionem datam pariter esse. Si enim fiat ZR.
media inter ZX. & ZS. Dico CD. ad CB. esse vt
SR. ad SZ. & CA. ad CE. vt SX. ad SR.

DEMONSTRATIO.

C*Vm $\triangle$ ACD. minus sit quàm ECB (14. p.)*
est SX. minor quàm SX (3. l. 5.) Ducatur er-
go DG. parallela ipsi AC. & quia AF. FD. sup-
ponuntur æquales, erit etiam EF. æqualis FG.
(2. l. 6.) & triagula AEF. DGF. æqualia (4. l. 1.)
tum etiam BEC. BGD æquiangula, & similia
(2. l. 6.) Ergo erit $\triangle$ BEC. ad $\triangle$ BGD. in dupli-
cata ratione BC. ad BD (4. l. 6.) Deinde cum
triangula AEF. DGF. sint æqualia addito com-
mu-

muni $EFD C$ erit trapezium $EGDC$. æquale
 $\triangle ADC$. fed $\triangle ADC$. ad $\triangle EBC$. est vt SX . ad
 SZ . ex hypothesi: Ergo $\triangle EDC$. ad $\triangle EBC$. est
 vt SX ad SZ . (2. l. 5.) Ergo & invertēdo totum
 $\triangle EBC$. ad sui partem $\triangle EDC$. erit vt tota
 SZ . ad sui partem SX (4. l. 5.) Ergo etiam totū
 $\triangle EBC$. ad residuum $\triangle DGB$. erit vt tota SZ .
 ad residuū XZ . (5. l. 5.) fed $\triangle EBC$. ad $\triangle DBG$.
 est in duplicata ratione CB . ad BD (4. l. 6.) Er-
 go ratio SZ . ad XZ . est duplicata rationis CB .
 ad BD (1. l. 5.) fed etiam ratio ZS . ad ZX . est du-
 plicata rationis ZS . ad ZR . cum ex constru-
 ctione continuæ sint ZS . ZR ZX . Ergo ratio
 ZS . ad ZR . æqualis, vel similis est rationi laterū
 BC . ad BD (1. l. 5.) Ergo BC . ad CD . erit vt ZS .
 ad SR . Quod erat, &c.

Insuper cum sint tres quantitates SZ . SR .
 SX . est ratio SZ . ad SX . composita ex ratione
 SZ . ad SR . & ex ratione SR . ad SX (21. P) Simi-
 liter cū triangula BCE . DCA . habeant æqua-
 lem angulum, vel communē C . ratio $\triangle BCE$.
 ad $\triangle DCA$. cōposita est ex ratione BC . ad CD .
 & ex ratione EC . ad CA . (1. l. 6.) Ergo cum ra-
 tio $\triangle BCE$ ad $\triangle DCA$. est ipsa ratio SZ . ad
 SX . & ratio BC . ad CD . demonstrata est eadē
 ac ratio SZ ad SR . remanebit ratio CE . ad CA .
 eadē ac ratio SR . ad SZ (1. l. 5.) Quod erat, &c.

Econ-

Econverso autem, si data sit ratio CB. ad CD. ut SZ. ad SR. & CE. ad CA. ut SR. ad SX. cum $\triangle EBC$ ad $\triangle ADC$. habeat rationem compositam ex ratione CB. ad CD. & ex ratione CE. ad CA (1. l. 6.) & ratio SZ. ad SX. ex similibus etiam composita sit, nempe ex ratione SZ. ad SR. & ex ratione SR. ad SX. compositæ ex æqualibus æquales erunt, nempe ratio $\triangle EBC$. ad $\triangle ADC$. & ratio SZ. ad SX. (1. l. 5.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN quolibet triangulo si per centrum ff. ff. ducantur tres rectæ lateribus parallela secantur ab angulis oppositis triacula minima.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Triangulum ABC. & centrum ff. ff. O. & HOI. sit parallela lateri AB. Dico Triangulum HIC. esse minimum eorum quæ ab angulo C. per O. secari possunt. Similiter si KL sit BC parallela, & NM. ipsi AC. erunt triacula KLA. MNB. minima.

DEMONSTRATIO.

Ducta COF. bisecabit basim in F (1. p.) & cū HOI. sit parallela AFB. erit ut CF. ad FA. id est ad FB ita CO. ad OH. (2. l. 6.) Sed etiam ut CF. ad FB. ita CO. ad OI. Ergo cum CO. eandem

dem habeat rationem ad OH. & ad OL. erunt istæ æquales (2. l. 5.) Ergo cum HI. sit bifariā diuisa in O. erit HIC. triangulum minimum (14. p.) Similiter demonstrabitur KL. esse bifariam diuisam in O. & triangulum KLA. esse minimum anguli A. & MNB. esse minimum anguli B. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

Triangula minima per centrum ff. ff. cuiuslibet trianguli secta, similia sunt inter se, & omnino æqualia.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Triangulo ABC. rectæ HI. KL. MN. secant per centrum ff. ff. O. triangula minima. Dico illa esse inter se similia, & omnino æqualia.

DEMONSTRATIO.

CUm rectæ AB. HI. sint parallelæ (19. p.) est triangulum HIC. simile $\triangle ACB$ (2. l. 6.) Similiter KLA. ipsi CBA. & MNB. ipsi ACB. Ergo omnia sunt inter se similia (4 l. 6.) Deindè cum latera trifariam secta sint in H. K. in N. L. in M. I. æquales rectæ erunt AK. HC. & AL. NB. & BM. IC. Ergo cum triagula similia habeant latera proportionalia, quæ habent vnū latus æquale, reliqua latera æqualia habebunt

(2.l.6.) Ergo congruent, & erunt omninò inter se æqualia (4.l.1.)

CONSECTARIUM.

Novem triangula AON. NOL. LOB. &c. æqualia sunt (1.l.6.) sicut etiam trapezia HOMC. HOL. LOM. KON. NOI. IOK. ex tribus æqualibus triangulis composita.

PROPOSITIO XXI.

Recta, quæ per datum punctum efficit triangulum minimum secat triangulum in maxima ratione, quæ ratio per centrum ff est ut 5. ad 4.

EXPOSITIO. Fig. 6.

IN Triangulo ABC, sit datum punctum O, & GOH. secet triangulum minimum. Dico GH. secare $\triangle ABC$. per O. in maxima ratione, & si O. sit centrum ff . esse ut 5. ad 4.

DEMONSTRATIO.

PER datum punctum O. ducatur quælibet alia IOK. erit $\triangle IKC$. maius quam $\triangle GHC$. (14.p.) Ergo $\triangle AIKB$. minuserit quam $\triangle AGHB$. Ergo ratio $\triangle AGHB$. ad $\triangle GHC$. minimum maior erit, quam ratio $\triangle AIKB$. ad maius $\triangle IKC$. (3.l.5.)

Præterea si centrum O. sit cētrum ff . GOH. secans $\triangle GHC$. minimum erit basi AB. paral-

lela (19 p.) Ergo AG. erit tertia pars ipsius CA
(1. p.) Ergo CA. ad CG. erit vt 3. ad 2. vel vt 9.
ad 6. sed $\triangle ABC.$ ad simile $\triangle GHC.$ est in du-
plicata ratione CA. ad CG (4. l. 6.) Ergo cum
sint continuæ 9. 6. 4 erit vt 9. ad 4. Ergo $\triangle AG$
HB. ad $\triangle GHC.$ vt 5. ad 4. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXII.

IN quolibet Triangulo si punctum sit intra
aliud triangulum bisecans latera, ex tribus
angulis secantur triangula minima omninò in-
tra triangulum.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN Triangulo ABC. inscriptum sit $\triangle EFG.$
bisecans latera, in quo sumatur quodlibet
punctum Z. Dico Triangula minima, quæ ex
tribus angulis A. B. C. abscindi possunt, cade-
re omninò intra $\triangle ABC.$

DEMONSTRATIO.

DVcantur per punctum Z. rectæ LK. HI. la-
teribus AC. AB. parallelæ, & sumpta HP.
æquali AH. & LQ. ipsi AL. recta PQ. secabit
per Z. triangulum minimum PQA. ex angulo
A. (15. p.) Ergo cum punctum Z. sit inter pa-
rallelas EG. AB. parallela HZI. erit etiam inter
ipsas: similiter KZL. erit inter AC. FG. Ergo
cum AE. EC. sint æquales, tum AH. HP. & istæ

minores quam AE . EC . cadet P . infra C . & similiter cum AL . LQ . minores sint quam AF . FB . cadet Q . inter A . & B . Ergo tota PQ . & totum $\triangle PQA$. quod est minimum anguli A . cadet intra triangulum CBA .

Præterea ductis per Z . rectis HI . MN . parallelis BA . BC sumantur æquales BI . BR . tum BN . BS . & ducta RZS . erit $\triangle RSB$. minimum anguli B . (15. p.) & quia Z . est infra EG . erunt BI . IR . minores quam BG . BC . Ergo cadet R . inter B . C . & quia Z . est inter EF . BC . erunt BN . NS . minores quam BF . FA . Ergo etiam S . cadet inter A . & B . Ergo tota recta SR . cadet intra $\triangle ABC$. & $\triangle RSB$. minimum anguli B . cadet etiam intra $\triangle ABC$. Idemque demonstrabitur de triangulo minimo anguli C . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

PER quodlibet punctum bisecantis basim, recta basi parallela secat triangulum minimum.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN $\triangle ABC$. recta CF . bisecat basim, si in illa sumatur quodlibet punctum Z . Dico rectam HZI . basi AB . parallelam secare triangulum minimum.

DEMONSTRATIO.

Cum CF. diuidat bifariam HI. in Z. sicut AB. in F (2. l. 6.) erit $\triangle HIC$. minimum (14. p.) Quoderat, &c.

PROPOSITIO XXIV.

PER quodlibet punctum recta bisecantis basim abscinduntur ex angulis supra basim duo triangula minima inter se equalia.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN Triangulo ABC. recta CF. bisecet latus oppositum AB. & in illa sumatur quodlibet punctum Z. per quod abscindantur triangula minima, scilicet $\triangle PAQ$. ex angulo A. & $\triangle RBS$. ex angulo B. Dico illa triangula esse inter se equalia.

DEMONSTRATIO.

DVcatur recta HZI. basi AB. parallela, & cum $\triangle AQP$. sit minimū, erunt HA. HP. æquales (15 p.) & etiam IB. IR. Ergo cum sit RI. ad IB vt PH. ad HA. erunt PR. HI. AB. parallelæ (2. l. 6) & cum CF. diuidat bifariam AB. similiter diuidit HI. PR. & etiam SQ. (2. l. 6.) Ergo si æqualibus SF. FQ. addantur æquales BF. FA. æquales erunt AQ. SB. Ergo cum triangula AQP. SBR. habeant æquales bases AQ. SB. inter

ter parallelas AB. PR. erunt æqualia (1. l. 6.)
Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

IN triangulo si extra inscriptum simile sumatur quodlibet punctum, unum ex triangulis minimis cadet totum intra, reliqua verò duo cadent extra triangulum.

EXPOSITIO. Fig. 8.

Triangulo ABC. inscriptum sit aliud simile EFG bisecans latera, extra quod sumatur quodlibet punctum Z. intra aream trianguli ABC. Dico unum ex triangulis minimis, scilicet $\triangle HIC$. quod est minimum anguli C. cadere totum intra $\triangle ABC$. reliqua verò SRB. XVA. quæ sunt angulorū B. & A. cadere partim extra.

DEMONSTRATIO.

DVcantur per Z. rectæ HI. KL. MN. lateribus parallelæ: cum punctum Z. sit supra EG. bisecantem latera CA. CB. comprehendentia angulum C. erunt CM CK. minores quàm CE CG. Ergo earum duplæ CP. CQ. minores erunt quàm latera CA. CB & tota PQ. secans triangulum PQC. minimum anguli C. (15. p.) cadet intra triangulum ABC.

Vice versa, quia punctum Z. est supra EG. bi-

bisecantem latera, erit BI . maior quàm BG .
 Ergo si sumatur IR . æqualis BI . cadet R . extra
 C . & triangulum RZC . erit minimum (15. p.)
 quod partim cadet extra triangulum ABC .

Similiter cum AH . sit maior quàm AE . si
 fiant æquales AH . HV . cadet punctum V . ex-
 tra triangulum ABC . & $\triangle AVX$. minimum
 anguli A . (15. p.) cadet partim extra $\triangle ABC$.
 Quod erat demonstrandum.

CONSECTARIUM.

Triangula minima à tribus angulis secta,
 vel cadunt omnia intra triangulum, vel
 vnum tantum, nunquàm verò duo; quoniam
 vel punctum assumptum est intra triagulum
 inscriptum, & tunc omnia triangula minima
 cadunt intra ex 22. p. vel extra inscriptum, &
 tunc duo minima cadunt necessariò partim
 extra.

PROPOSITIO XXVI.

Rectæ per datum in triangulo punctum la-
 teri parallela determinat rationem mini-
 morum ad angulos lateri conterminos.

EXPOSITIO. Fig. 8.

IN triangulo ABC . sit assumptum punctum
 Z . per quod recta MN . sit lateri BC . paralle-
 la: & $\triangle PQC$. sit minimum anguli C . & SBR .
 mi-

minimum anguli B. Dico $\triangle PQC.$ ad $\triangle SBR.$ esse vt $MZ.$ ad $ZN.$

DEMONSTRATIO.

Cum sint æquales $SZ.$ $ZR.$ tum $SN.$ $NB.$ & $BI.$ $IC.$ (15.p.) $\triangle SBR.$ habet duplam basim, & altitudinem parallelogrammi $ZB.$ & est ipsius duplum (8.l.1.) Similiter $\triangle CPQ.$ est duplum $\square ZC.$ Ergo $\triangle SBR.$ ad $\triangle CPQ.$ est vt $\square ZB.$ ad $\square ZC.$ (5.l.5.) sed $\square ZB.$ ad $\square ZC.$ est vt basis $ZN.$ ad $ZM.$ cum sint inter parallelas $CB.$ $MN.$ (1.16) Ergo $\triangle SBR.$ ad $\triangle CPQ.$ est vt $NZ.$ ad $ZM.$ (1.l.5.) Quod, &c.

Similiter $\triangle AXV.$ ad $\triangle CQP.$ erit vt $LZ.$ ad $ZK.$ & $\triangle AXV.$ ad $\triangle SBR.$ vt $HZ.$ ad $ZI.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

T*Rapezia facta rectis à centro ff. ff. ductis in dimidia latera determinant triangulum omnium minimum per datum punctum.*

EXPOSITIO. Fig. 8.

IN triangulo $ABC.$ est $O.$ centrum ff ff. & $OE.$ $OF.$ $OG.$ bisecant latera, & punctum $Z.$ est in trapezio $EOGC.$ quod pertinet ad angulum $C.$ Dico $\triangle PQC.$ scilicet minimum anguli $C.$ esse omnium minimum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim recta MZN. lateri BC. parallela diuidatur bifariâ recta AOG. in Y. (2. l. 6.) erit MZ. minor quàm ZN. sed $\triangle PQC.$ est ad $\triangle SBR.$ vt MZ. ZN. (26. p.) Ergo $\triangle PQC.$ minus est quàm $\triangle SBR.$ Similiter demonstrabitur recta KZ. minor quàm ZX. & $\triangle CQP.$ minus quàm $\triangle AXV.$ Ergo $\triangle CQP.$ est absolutè omnium minimum per Z Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

SI Z. fuerit in OE. vel OF. vel OG. erunt duo absolutè minima, & inter se æqualia. Si verò punctum fuerit O. erunt tria absolutè minima, & æqualia.

PROPOSITIO XXVIII.

IN quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis secant latera opposita, vel se ipsas in eadem ratione, earum intersectio est centrum ff. dd. quarum duæ sunt similes, & tertia dissimilis.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SI $\triangle ABC.$ & rectæ AG. BE. secant latera, vt CE. ad EA. sit veluti CG. ad GB. vel etiam AG. BE. se proportionaliter secant in O. & sit AO. ad OG. vt BO. ad OE. Dico intersectionem O. esse centr. ff. dd. quarum similes sint quæ in A. & B collocantur, & quæ in C. dissimilis.

DE-

DEMONSTRATIO.

1. **C**onstituatur supra EC quadratum EC. & supra EA. rectangulum A EC cum sint parallelogramma dissimilia æquè alta erunt minima (10. M. 1.) Ergo pūctum E. erit *centr. ff. dd* ad A & C. (35. M. 1.) sed latus BC. diuisum est in eadem ratione ex *hypoth.* Ergo recta BC. diuisa etiam erit in figuras minimas similes $\square$ EC. & $\square$ AEC (30. M. 1.) Ergo etiam pūctū G. erit *centr. ff. dd.* ad B. & C. (35. M. 1.) sed cum E. sit *centr. ff.* ad A. & C. ducta EB erit in illa *centrum ff.* ad A. C. B. (61. M. 1.) & etiam quia G. est *centrum ff.* ad C. & B. ducta GA. erit in illa *centr ff* ad C. B. A. (61. M. 1.) Igitur cū *centrum* ad tria pūcta A. B. C. demonstratum sit in vtraque recta EB. & GA. erit in earum sectione O. Quod erat, &c.

2. Si rectæ AG & BE. se proportionaliter secant in O. secabunt etiam proportionaliter latera (3. l. 6.) Ergo demonstrabitur omninò idem quod in præcedenti *num.* Quod erat &c.



PROPOSITIO XXIX.

IN quolibet triagulo si recta ex angulis secant latera, vel se ipsas in eadem ratione, earum intersectio est in bisecante basim ex vertice.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN $\triangle ABC$. rectæ AG. BE, secant proportionaliter latera, & ipsæ intersectantur in O. recta autem CF. secat bifariam basim AB. Dico igitur intersectionem O. esse in bisecante CF. vel rectam CF. transire per O. & rectam CO. transire per F. & FO. transire per C. Si autem AG. & BE. secantur invicem proportionaliter idem omnino erit.

DEMONSTRATIO.

1. **C**Um AG. & BE. secant proportionaliter latera, est O. centr. ff. dd. quarum A. & B. similes sunt (28. p.) Ergo diuisa AB. bifariam in F. erit F. centr. ff. ff. ad A & B. (35. M. 1.) Ergo ducta FC. in ea erit centr. ff. ad A. B. C. (61. M. 1.) sed punctum O. est centrum ad A. B. C. quarum duæ A. & B. sint similes, & tertia C. dissimilis (28. p.) Ergo recta CF, bisecans basim, transit per intersectionem O. Ergo pariter cum eadem sit linea COF. FOC. recta CO. transibit per F. & recta FO. transibit per C. sicut FC. transibit per O. Quod erat, &c.

Si

Si autem AG. & BE. secantur invicem in eadem ratione, secabunt etiam proportionaliter latera (3. l. 6.) Ergo eadem omnino erit demonstratio, ut antea. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXX.

INtra triangulum nullum datur punctum, per quod omnes rectæ ab angulis proportionaliter secent latera, & basim, præter centrum ff. ff. per quod basim, & latera bifariam secant.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIT $\triangle ABC$. & Z. sit centr. ff. ff. Dico nullum aliud punctum dari præter Z per quod rectæ ex angulis ductæ secent latera, & basim in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

SINT latera CA. CB. in quacumque eadem ratione diuisa in E. & G. & ducantur BE. AG. se interfecantes in O. ducta CO. bifariam diuidet basim AB. in F. (29. p.) Cum autem hoc semper de quacumque ratione demonstretur, nunquam latera in eadem cum basiratione secari poterunt, nisi bifariam secantur. Ergo si latera sint bifariam secta communis rectarum secto erit centr. ff. ff. (2. p.) Ergo extra centrum ff. ff. nullum est punctum per quod

possint latera in eadem ratione secari. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXI.

IN quolibet triangulo si per quodvis punctum bisecantis basim ducantur rectæ ab angulis, secabunt latera, & se ipsas proportionaliter intra, vel extra ipsum triangulum.

2. Et punctum assumptum intra Triangulum est centr. ss. dd. prout in propositione 28.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN $\triangle ABC$. recta KCF . per angulum verticalem bisecat basim in F . Si ergo in recta FK . sumatur quodvis punctum O . intra triangulū, vel K . extra ipsum, & ducantur BOE AOG . vel BK . & AK . Dico habere eandem rationē CG . ad GB . vt CE . ad EA . tum GO . ad OA . vt EO . ad OB . vel BK . ad KI . vt AK . ad KH . & HC . ad CB . vt IC . ad CA . 2. Dico punctum assumptum O . intra $\triangle$. esse centr. ss. dd. prout in 28. p.

DEMONSTRATIO.

CVm enim AB . sit bifariam diuisa in F . erit F . centrum ss. ad A . & B . (35. M. 1.) Ergo in recta FC . erit centrum ad $\square A$. & $\square B$. & $\square C$. (61. M. 1.) quorū similia sunt $\square A$. & $\square B$. Ducta igitur BOE . si constituatur super EC . quadratum minimum rectangulo $\square AEC$. erit E .

centr. ff. ad $\square A.$ & $\square C.$ (35. M. 1.) Ergo in recta EB. erit *centr. ff. ad* $\square A.$ $\square C.$ $\square B$ (61. M. 1.) igitur cum idem *centrum* demonstratum sit etiam in recta CF. erit in earum intersectione O. Ergo si ex A. per O. quod est *centrum* ad A. B. C. ducatur AOG. transibit hæc per *centrum ff* B. & C. (61. M. 1.) Ergo cum *centrum* ad B. & C. sit in recta BC. (34. M. 1.) & etiam in recta AOG. erit in earum intersectione G. unde punctum G. erit *centr. ff. ad* B. & C. nempe ad $\square C.$ & $\square B.$ (35. M. 1.) igitur cum $\square A.$ & $\square B.$ similia demonstrata sint, & etiam quodvis $\square C.$ cuilibet alteri $\square C.$ erit recta AC. diuisa in figuras minimas similes minimis, in quas diuisa est recta BC. Ergo erit AE. ad EC vt BG. ad GC. (30. M. 1.) Quod, &c.

Insuper cum AG. & BE. proportionaliter secant latera, se ipsas etiam proportionaliter secant (3. l. 6.) Ergo etiam AO. ad OG. est vt BO. ad OE. Quod, &c.

Hoc vltimum etiam hac ratione demonstrari potest. Cum O. demonstratum sit *centrum ff. ad* $\square A.$ $\square B.$ $\square C.$ & E. *centrum ff. ad* $\square A.$ & $\square C.$ & G. *centr. ff. ad* $\square B.$ & $\square C.$ erit recta GA. secta in O. ita vt duæ figuræ GO. similes C. & B. minimæ sint ad $\square A.$ & pariter recta EB. secta erit in O. vt duæ figuræ EO. similes C. &

& A. vel C. & B. (cum $\square A.$ & $\square B.$ similia ostensa sint) minimæ sint ad $\square B.$ (62. M. 1.) Ergo recta GA. secta est in figuras minimas similes minimis, in quas secta est EB. igitur AG & EB. sunt proportionaliter sectæ in O. (30. M. 1.) unde A O. ad OG. erit vt BO. ad OE. Quod &c.

Tandem si punctum assumptum sit extra triangulum, nempe K. fiet $\triangle ABK.$ Ergo cum intra $\triangle ABK$ sit punctum C. in recta KF. biseccante basim, si latera AC. BC. continuentur in I. & H. secabunt proportionaliter noua latera AK. BK. vt antea demonstratum est, & etiam AI. & BH. erunt proportionaliter sectæ in C. Ergo AC. ad CI. erit vt BC. ad BH. & AH. ad HK. vt BI. ad IK. & componendo vt AK. ad KH. vt BK. ad KI. Quod erat demonstrandum.

2. Secunda Propositionis pars constat ex præcedenti. Quoniam punctum O. itra $\triangle ABC.$ sumptum, demonstratum est *centr. ff.* ad rectagula similia $\square A.$ $\square B.$ & ad dissimile $\square C.$ unde punctum O. erit *centr. ff. dd.* quarum duæ similes sint, & tertia dissimilis prout in *prop.* 28. Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

Si ex terminis basis alicuius trianguli duæ rectæ ducenda sint ad latera, coniuuata si opus fuerit,

rit, quæ recta debeant proportionaliter secare latera, vel se ipsas; locus intersectionis erit recta bisecans trianguli basim continuata, si opus fuerit, vel supra verticem, vel infra basim.

PROPOSITIO XXXII.

IN quolibet Triangulo si recta per verticem bisecat basim, & alia utcumque secat latus ex angulo opposito; segmenta istius sunt inter se, ut totum latus ad superius segmentum eiusdem: & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN triangulo ABC. recta CF. secat bifariam basim CB. in F. & recta AOG. secat latus in G. & bisecantem in O. Dico segmentum AO. ad segmentum OG. esse ut totum latus BC. ad superius segmentum CG. & e converso si AO. ad OG. fuerit ut BC. ad CG. Dico rectam COF. secare bifariam basim.

DEMONSTRATIO.

Fiat ut BG. ad GC. ita GC. ad CX. & componendo erit ut BC. ad CG. ita GX. ad CX. & alternando ut BC. ad GX. ita CG. ad CX (3. l. 5) Ergo rectangulum BC. GX. ex antecedenti, & consequenti simile est rectangulo GCX. ex alio antecedenti, & consequenti, quod est simile rectangulo BG. GC. propter eandem rationem:

sed

sed $\square BC.GX$ minimum est ipsi $\square GC + \square GCX$, cum illius altitudo GX æqualis est altitudinibus $GC + CX$ (10. M. 1.) Ergo cum G sit centr. ff. ad $B.C.$ (35. M. 1.) in recta GA , est centr. ff. ad $\square A \square B \square C$, (61. M. 1.) & cum punctum O sit tale centr. ff. ad $A.B.C.$ (31. p.) erit recta GA diuisa in O , in figuras minimas, ita ut $\square GO + \square GO$, simile $\square BGC$, minima sint $\square OA$ simili etiam $\square B$. (62. M. 1.) Ergo recta GA diuisa est in figuras minimas puncto O , sicut recta BC puncto C . Ergo sunt proportionales GO . ad OA . ut CG . ad CB (30. M. 1.) Ergo invertendo erit AO . ad OG ut BC . ad CG (4. l. 5.) Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si AO ad OG . est ut BC . ad CG . ducatur CF . bifecans basim in F . & recta AG . in O . eritque AO . ad OG . ut BC ad CG . sed etiam AO . ad OG . est BC . ad CG Ergo punctum O . est ipsum O . datum: Ergo recta COF . est ipsa quæ bifecat basim. Quod erat demonstr.

CONSECTARIUM

Pro duabus Medijs, & Trisectione.

CUm sint proportionales AO . ad OG . ut BC . ad CG . erit $\square AO.CG$. æq. $\square OG.BC$. (1. l. 6) Si dato angulo BCF . & puncto A . ducatur recta AOG . ut $\square AO.CG$. æquale sit dato spatio, duci poterit etiam AOG . ut OG . sit æqualis datæ

data rectæ: vnde Trisectione anguli, & duæ Mediæ elici possent.

PROPOSITIO XXXIII.

IN quolibet triangulo si recta per verticem bifariam secat basim, & alia secat utcumque latus ex angulo opposito, segmentum inferius bise-
cantis ad superius erit, vt segmentum inferius la-
teris ad duplum segmentum superius eiusdem la-
teris; & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN triangulo ABC. recta CF. bifariam secat
basim AB. & recta BE. secat utcumque latus
AC. in E. & bise cantem CF. in O. Dico seg-
mentum FO ad OC. esse vt segmentum AE. ad
duplū segmenti EC. & e conuerso si FO. ad OC.
fuerit vt AE. ad 2 EC. recta CF. diuidet bifariā
basim AB. in F.

DEMONSTRATIO.

Rectangulum AEC. minimum est quadrato
EC. cum habeant æqualem altitudinem
EC. (10. M. 1.) Si ergo fiat CI æqualis CE. ha-
bebit quadratum EI. duplam altitudinem re-
ctanguli AEC. & erit $\square EI.$ minimū 2 $\square AEC.$
(21. M. 1.) sed etiam cū F. sit centr. ff. ff. ad A. B.
& O. sit centr. ff. ad A. B. C. (28 p.) erit FC. secta
in O. vt duo rectangula supra FO. similia da-

tis AEC. BGC. inter se similibus, minima sint cum $\square$ OC. (62. M. 1.) Ergo recta FC. diuisa est in O. in figuras minimas similes illis, in quas est diuisa recta AI. puncto E. Ergo proportionales sunt FO. ad OC. vt AE. ad EI. vel vt AE. ad $\frac{1}{2}$ EC (30. M. 1.) Quod, &c.

Econuerso. Si FO. ad OC. fuerit vt AE. ad $\frac{1}{2}$ EC. ducatur Cf. bisecans basim in f. & rectam BE. in o. Ergo erit fo. ad o C. vt AE. ad $\frac{1}{2}$ EC. vel vt FO. ad OC. Ergo si CF. Cf. essent diuersæ lineæ, esset recta BE. parallela basi AB (2. l. 6.) cū igitur BE. non sit basi parallela, non erunt CF. & Cf. diuersæ lineæ. Ergo cum CF. sit ipsa Cf. bisecabit CF. basim in F. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXIV.

IN quolibet Triangulo si recta bisecet basim, & alia latus utcumque, segmentum inferius illius ad superius, est vt differentia segmentorum istius ad duplum segmentum minus.

EXPOSITIO. Fig. 9.

IN Triangulo ABC. recta CF. secat bifariam basim, & ex angulo A. recta AG. secat utcumque latus BC. in G. & bisecantem CG. in O. facta OS. æquali OG. erit AS. differentia segmentorum AO. & OG. Dico ergo segmentum FO.

FO. ad segmentum OC. esse vt AS. ad 2 SO.
vel ad 2 OG. hoc est vt AS. ad SG.

DEMONSTRATIO.

QVoniā AO. ad OG. est vt BC. ad CG (32 p.)
erit etiam diuidendo AO—OG. ad OG.
vt BC—CG. ad CG. (4. l. 5.) hoc est AS. ad SO.
vt BG. ad GC. Ergo etiam AS. ad 2 SO. vt BG.
ad 2 GC. vel AS. ad SG. vt BG. ad 2 GC. (sed etiā
FO. ad OC. est vt BG. ad 2 GC (33, p) Ergo FO.
ad OC. est vt AS. differentia segmentorum ad
SG. duplum segmenti OG (1. l. 5.) Quod erat
demonstrandum.

CONSECTARIUM.

Iisdem positis *Recta bisecans basim ad segmen-*
tum superius est, vt recta secans latus ad duplū
sui segmenti minoris. Nempē FC. ad CO. vt AG.
ad 2 GO. cū enim sit AS. ad SG. vt FO. ad
OC. erit AS+SG. ad SG. vt FO+OC. ad OC.
(4. l. 5.) hoc est AG. ad SG. vt FC. ad CO. Quod
erat, &c.

PROPOSITIO XXXV.

IN quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis
supra basim secant latera opposita dissimiliter,
intersectio erit centrum ff. dd. ad tres angulos.

EXPOSITIO. Fig. 10.

Rectæ AG. BE. secant dissimiliter latera.

Dico intersectionem O. esse *centrum ff. dd.* ad angulos A. B. C. nempe ad $\square A.$ & $\square B.$ dissimilia, & $\square C.$

DEMONSTRATIO.

Cum $\square AEC$ & $\square EC.$ habeant eandem altitudinem EC. erunt inter se minima (10. M. 1.) Similiter $\square BGC.$ minimum est $\square GC.$ Ergo E *centr. ff. dd.* erit ad A. C. & pariter G. ad B. C. (35. M. 1.) Ergo si ducatur EB. ad tertium punctum B. in ea erit *centr. ff.* ad A. C. B. & similiter si ducatur GA. ad punctum A. in ea erit *centr. ff.* ad B. C. A. (61. M. 1.) Ergo intersectio O. erit *centr. ff.* ad A. B. C. quarum scilicet OC. similis sit $\square EC.$ vel $\square GC.$ & $\square OA.$ simile $\square AEC.$ & $\square OB.$ simile $\square BGC.$ sed omnes dictæ figuræ sunt inter se dissimiles cum rectangulorum latera non sint proportionalia; etenim BG. ad GC. non est ut AE. ad EC. ex hypothesi & utrumque rectangulum est quadrato dissimile. Ergo punctum O. est *centrum ff. dd.* Quod erat, &c.



PROPOSITIO XXXVI.

S*I ex angulis supra basim cuiusvis Trianguli ducantur rectæ utcumque secantes latera, & ex vertice per intersectionem alia secans basim.*

Basis secatur in figuras minimas, vel in bases minimas rectangulorum similium illis, quæ ex laterum segmentis fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 10.

I*N* $\triangle ABC$ rectæ AG . BE secant utcumque latera, & se intersecant in O . si ducatur COF . Dico basim AB . sectam esse puncto F . in figuras minimas similes rectangulis AEC . & BGO . quæ ex laterum segmentis fiunt.

DEMONSTRATIO.

P*U*nctum O . est *centrum ff. dd.* quæ similes sint rectangulis AEC . & BGC . & quadrato EC . vel CG . (35. p.) Ergo recta COF . transit per F . *centr. ff. dd.* ad A . & B . (61. M. 1.) Ergo cum punctum F . sit *centr. ff. dd.* ad A . & B . erit AB . secta in figuras minimas similes rectangulis AEC . & BGC . (34. M. 1.) Quod erat, &c.



PROPOSITIO XXXVII.

Idem positis, quæ in antecedenti, segmenta basis ad eandem altitudinem eandem habet rationem, quam segmenta laterum conterminorum inter se.

EXPOSITIO. Fig. 10.

IN $\triangle ABC$. ductis utcūque AG . BE . ac COF . si fiat ut AE . ad EC ita AF . ad suam altitudinem Z . Dico etiam esse ut BG . ad GC . ita BF . ad eandem altitudinem Z .

DEMONSTRATIO.

Cum rectangula supra AE . & BF . minima sint (36. p.) habebunt æqualem altitudinē, nēpe Z (10. M. 1.) sed $\square AFZ$. simile est $\square AEC$. & $\square BFZ$. simile est $\square BGC$ (36. p.) Ergo erunt latera proportionalia AF . ad Z . ut AE . ad EC . & BF . ad Z . ut BG . ad GC . (22. P.) Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

Si latera sint proportionaliter secta, basis erit bifariam diuisa.

Quoniam si AE . ad EC supponitur ut BG . ad GC . & AF . ad Z est ut AE . ad EC . tum BF . ad Z . ut BG . ad GC . ex præsentī. Ergo erit AF . ad Z . ut BF . ad Z (1. l. 5.) & cum AF . & BF . habeant eandem rationem ad eādem Z . æquales erunt

(2. l. 5.) Hoc conſectatium eſt ipſa prop. 29. ex hac prop. 37. facilius demonſtrata.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si fuerint tres rectæ, & cuiusvis trianguli latus ex termino basis ſecatur ut ſecunda ad primam, & alterum latus ut ſecunda ad tertiam recta per verticem, & interſectionem ducta ſecabit baſim ex eodem termino ut tertia ad primam, vel in duplicata ratione ſi tres rectæ ſint cōtinuæ.

EXPOSITIO. Fig. 10.

Sint datæ rectæ P. R. Z. & datum triangulum ABC. Latus verò AC. ſectum ſit in E. ut AE. ad EC. ſit veluti R. ad P. & latus BC. ſectum ſit in G. ut BG. ad GC. ſit veluti R. ad Z. ductis AG. BE. & per interſectionem O. recta COF. Dico AF. ad FB. eſſe ut Z. ad P. vel BF. ad FA. ut P. ad Z. nempe in duplicata ratione P. ad R. ſi continuæ ſint P. R. Z.

DEMONSTRATIO.

Flat ut AE. ad EC. vel ut R. ad P. ita AF. ad Q. & erit ut BG. ad GC. vel ut R. ad Z. ita FB. ad eandem Q. (37. p.) Ergo rectangulum RQ. erit æquale $\square$ P. AF. & etiam rectangulum RQ. æquale $\square$ Z. FB. (1. l. 6.) Ergo etiam erit $\square$ P. AF. æquale $\square$ Z. FB. Ergo latera reciproca erunt proportionalia ut P. ad Z. ita FB. ad AF. (1. l. 6.) &

& conuertendo AF. ad FB. est vt. Z ad P. (4. l. 5.)
Vnde si continuæ sint Z. R. P. erit AF. ad FB. in
duplicata ratione R. ad P. vel BG. ad BC. Quod
erat, &c.

CONSECTARIUM.

SI P. & Z. sint æquales, erunt AF. FB. æquales,
& AE. ad EC. vt BG. ad GC. quo demonstra-
tur iterum propositio 29.

PROPOSITIO XXXIX.

IN quolibet Triangulo si dua rectæ ex angulis
secant utcumque latera, & vtraque ratio se-
ctionis laterum habeat idem antecedens, recta ex
vertice ad basim per intersectionem secatur, vt
antecedens ad summam consequentium. 2. Et
basis secatur vt consequentes.

EXPOSITIO. Fig. 10.

IN $\triangle ABC$. rectæ BE. AG. secant latera vtcū-
que, & COF. per intersectionem O. ducta se-
cat basim, si fiat vt BG. ad GC. ita AE ad CI. ra-
tio segmentorum vnus lateris erit AE. ad EC.
& ratio alterius AE. ad CI. & antecedens vtri-
usque est AE. consequentes verò EC. & CI. Di-
co igitur FO. ad OC. esse vt AE. ad EC + CI. &
AF. ad FB. esse vt CI. ad CE.

DEMONSTRATIO.

QUADRATUM EI. habet altitudinem EC + CI.
sed

sed duo rectangula AEC. AE. CI. habent etiā altitudinem EC + CI. Ergo $\square$ EI. minimum est $\square$ AEC + $\square$ AE. CI (10. M. 1.) & cum basis AB sit diuisa in rectangula minima similia AEC. & BGC. vel AE. CI. (36. p.) erit E. *centrum ff dd.* quæ tamen similes sint $\square$ AEC & $\square$ AE CI (34. M. 1.) Ergo cum O. sit *centr. ff. dd.* ad $\square$ A $\square$ B. & $\square$ C. (35. p.) erit recta COF. ita diuisa in O, vt $\square$ CO. minimum sit ad duo rectangula facta ex OF. similia ipsis $\square$ AEC. & $\square$ BGC. vel $\square$ AECI. (62. M. 1.) Ergo CF. diuisa est in O. in similes figuras minimas, in quas est diuisa AI. puncto E. Ergo proportionales sunt vt AE, ad EI. ita FO. ad OC. (30. M. 1.) Quod erat, &c.

2. Insuper quoniam CE. EA. CI. tres rectæ sunt, & AE. ad EC. est vt secunda ad primā, & BG. ad GC. est vt EA. ad CI. ex hypothesi, nempè vt secunda ad tertiam, erit AF. ad FB. vt tertia ad primam, scilicèt vt CI. ad CE (38. p.) Ergo basis secatur vt consequentes. Quod erat, &c.



PROPOSITIO XL.

SI in quolibet triangulo sumatur quodlibet punctum, & ducantur per illud rectæ ab angulis, in quouis alio triangulo datur simile punctum, per quod rectæ, basis, & latera similiter secantur.

Consect. In quolibet $\triangle$ datis rationibus segmentorum laterum, omnium segmentorum rationes datae sunt.

EXPOSITIO. Fig. II.

IN triangulo HIK . sit assumptum punctum D . per quod ducantur HN . IL . KM . & datū sit quodlibet aliud $\triangle ABC$. Dico dari in eo punctū O . per quod si ducantur AG . BE . CF . rectæ basis, & latera secantur similiter, vel prout in $\triangle HIK$. si enim sit ut HL . ad LK . ita AE . ad EC . & iterum ut IN . ad NK . ita BG . ad GC . ductis AG BE . & per intersectionem O . ducta CF . punctum O . erit simile D .

DEMONSTRATIO.

SIt enim ut Q ad P . ita HL . ad LK . & AE . ad EC . tum ut Q . ad R . ita IN . ad NK . & BG . ad GC . Ergo erunt ut R . ad P . ita HM . ad MI . & AF . ad FB (38. p.) Ergo HM . ad MI . erit ut AF . ad FB (1. l. 5.) Similiter ut Q . ad $P+R$. ita MD . ad DK . & FO . ad OC . (39. p.) Ergo, &c. Insuper quo-

quoniam vt P. ad Q. ita KL. ad LH. & CE. ad EA. & vt P. ad R. ita IM. ad MH. & BF. ad FA. erit vt P. ad Q + R. ita ND. ad DH. & GO. ad OA (39. p.) Tandem quia est vt R. ad P. ita HM. ad MI. & AF. ad FB. & vt R. ad Q. ita KN. ad NI. & CG. ad GB. erit vt R. ad P + Q. ita LD. ad DI. & EO. ad OB. (39. p.) Ergo in utroque triangulo omnia similiter secta sunt. Quod, &c.

CONSECTARIUM.

IN $\triangle ABC$. si data sit ratio AE. ad EC. vt Q. ad P. & ratio BG. ad GC. vt Z. ad α . reliquæ omnes rationes datae erunt. Quoniam si fiat vt Z. ad α . ita Q. ad R. iam utraque Q. ad P. & Q. ad R. vel Z. ad α . habebit idem antecedens Q. Ergo omnium segmentorum rationes determinatae erunt in rectis P. Q. R. vt in praesenti propositione demonstratum est. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLI.

SI fuerint quatuor continuæ, & in quolibet triangulo basis dividatur vt extremae, & unum latus ex basi vt prima ad secundam; reliquum ex vertice diuisum erit vt prima ad tertiam, vel e contra.

EXPOSITIO. Fig. II.

Sint quatuor continuæ P. Q. R. Z. & in quolibet $\triangle ABC$. basis BA. diuisa sit BF. ad FA. vt P.

ad Z. & latus BC. diuisum fit BG. ad GC. vt P. ad Q. Dico latus CA. diuisum esse ex C. nempe CE ad EC. vt P. ad R. vel *è conuerso* si latus CA. diuisum fit CE ad EA. vt P. ad R. Dico BG. ad GC. esse vt P. ad Q. Et iterum si BG. ad GC. fuerit vt P. ad Q. & CE. ad EA vt P. ad R. erit BF. ad FA. vt P. ad Z. Ducantur enim CF. AG. & per intersectionem O. recta BOE.

DEMONSTRATIO.

SI enim CA sumatur vt basis, & latus AB. sit diuisum AF. ad FB. vt Z. ad P. & latus CB. sit diuisum CG ad GB. vt Q. ad P. velut Z. ad R. cum rationes Z. ad P. & Z. ad R. habeant idem antecedens erit CE. ad EA. vt consequentes, scilicet vt P. ad R. (29. p.)

Conuersa eadē ratione conuincitur si enim fuerit CE. ad EA. vt P. ad R. & BF. ad FA. vt P. ad Z. erit BG. ad GC. vt consequentes scilicet vt R. ad Z. vel vt P. ad Q. (39. p.) Quod erat demonstrandum.

Tandem si BG. ad GC. est vt P. ad Q. & CE. ad EA. vt P. ad R. erit AE. ad EC. vt R. ad P. & BG. ad GC. vt R. ad Z. Ergo BF. ad FA. erit vt consequentes vt P. ad Z. Quod erat, &c.



PROPOSITIO XLII.

S*I in basi cuiusvis triāguli sumatur punctum per quod ex vertice ducatur recta, unicum in ea est punctum, per quod recta ab angulis secant latera, alterum in duplicata ratione alterius.*

2. *Quo puncto dato, etiam duæ mediæ inter segmenta basis datæ erunt.*

EXPOSITIO. Fig. II.

I**N** Triangulo ABC. sumatur quodlibet punctum basis F. & ducatur FC. Dico in recta FC. vnicum punctum esse O. per quod si ducantur BOE AOG. ratio CE. ad EO. sit duplicata rationis BG. ad GC. Et dico 2. Si tale punctum inventum sit, etiam inventas esse duas medias inter segmenta AF. & FB.

DEMONSTRATIO.

Ratio CE. ad EA. sit vt P. ad R. & ratio BG. ad GC. vt P. ad Q. quoniam ratio CE. ad EA. supponitur duplicata rationis BG. ad GC. erit etiam ratio P. ad R. duplicata rationis P. ad Q. & erunt continuæ P. Q. R. (21. P.) Si ergo addatur Z. quarta continua, erunt quatuor continuæ P. Q. R. Z. Ergo BF. ad FA. erit vt P. ad Z. (41 p.) Ergo ratio BF. ad FA. erit triplicata rationis P. ad Q. vel BG. ad GC. (21. P.) sed si in recta FC. sumatur præter O. quodlibet aliud pun-

punctum O . & ducatur Aob . non potest ratio BF . ad FA . esse triplicata rationis Bb . ad bC . cū non sit eadem ratio BG . ad GC . quæ Bb . ad bC . (31.5.) Ergo præter O . nullum est punctum in recta FC . per quod possint vnum latus secari in duplicata ratione alterius. Quod erat, &c.

2. *Dato puncto O . datæ erunt duæ mediæ inter AF . & FB .* Si enim fiat vt BG . ad GC . ita BF . ad x . cum ratio BF . ad FA . sit triplicata rationis BG . ad GC . vt supra demonstratum est, erit etiam ratio BF . ad FA . triplicata rationis BF . ad x . Iterum si fiat vt CE ad EA . ita BF . ad z . cū ratio CE . ad EA . sit duplicata rationis BG . ad GC . vel BF . ad x . erit ratio BF . ad z . duplicata rationis BF . ad x . Ergo cum BF . ad FA . sit duplicata rationis BF . ad x . & triplicata rationis BF . ad z . erunt quatuor cōtinuæ BF . x . z . FA . (21.P.) Ergo inuentæ erunt duæ mediæ x . & z . inter segmenta basis BF . & FA . Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

Q Vi inuenerit geometricè locum vbi rectæ AG . BE . secari debeant vt segmenta vnius lateris sint in duplicata ratione segmentorum alterius, inueniet duas medias inter datas extremas.

PROPOSITIO XLIII.

S*I fuerint quatuor continuæ, & basis cuiusvis trianguli diuidatur ut extrema, & quæ inde ad verticem ducitur, diuidatur ut tertia ad compositam ex prima, & ultima; diuidentur latera ut prima ad secundam, & ut prima ad tertiam.*

EXPOSITIO. Fig. II.

S*int continuæ P. Q. R. Z. & in triângulo ABC. fit BF. ad FA. ut P. ad Z. & recta FC. diuidatur in O. ut FO. ad OC. fit veluti R. ad P + Z. ductis AOG BOE. Dico BG. ad GC. esse ut P. ad Q. & CE. ad EA. ut P. ad R.*

DEMONSTRATIO.

Q*uoniam si BC. diuidatur in G. ut fit BG. ad GC. veluti P. ad Q. vel R. ad Z. erit CE. ad EA. ut P. ad R. (41. p.) Ergo conuertendo AE. ad EC. ut R. ad P. (4. l. 5.) Ergo FO. ad OC. ut antecedens R. ad summam consequentium P + Z. (39. p.) Ergo recta AG. transibit per O. & consequenter recta AO. trásit per G. & BO. per E. Ergo BG. ad GC est ut P. ad Q. & CE. ad EA. ut P. ad R. Quod, &c.*



PROPOSITIO XLIV.

S Ifuerint quatuor continua, vel non continua, & ex his rationibus prima ad quartam + tertiam, ut tertia ad primam + quartam, & quarta ad primam + tertiam sumantur duae quaelibet illarum, in quas secantur rectae ab angulis cuiuscumque trianguli, latera eiusdem secta erunt ut prima ad secundam, & ut prima ad tertiam, & ut prima ad quartam.

EXPOSITIO. Fig. 11.

S Int quatuor rectae P.Q.R.Z. & data sit ratio P. ad Z + R. tū ratio R. ad P + Z. & in $\triangle ABC$. recta AG. secta sit ut P. ad Z + R. ita GO. ad OC. & recta CF. secta sit ut R. ad P + Z. ita FO. ad OC. Dico BG. ad GC. esse ut P. ad Q. & CE. ad EA. ut P. ad R. & BF. ad FA. ut P. ad Z. Idem omninò erit si GO. ad OA. sit ut P. ad Z + R. & EO. ad OB. ut Z. ad P + R. tum si FO. ad OC. sit ut R. ad P + Z. & EO. ad OB. ut Z. ad P + R.

DEMONSTRATIO.

D Vcta BOE. si fiat ut BG. ad GC. ita AE. ad α . cum AE. ad EC. sit ut AE. ad EC. erit BF. ad FA. ut consequentes, scilicet ut EC. ad α . Ergo cum CE. ad EA. sit ut CE. ad EA. BF. ad FA. ut EC. ad α . erit GO. ad OA. ut antecedens ad summam consequentium, scilicet ut EC. ad EA

EA + x. (39. p.) sed GO. ad OA. ex hyp. est vt P. ad R + Z. Ergo EC. ad EA + x est vt P. ad R + Z. Insuper cum AE. ad EC. sit vt AE. ad EC. & BG. ad GC. vt AE. ad x. erit FO. ad OC. vt antecedens ad summam consequentium, nempe vt AE. ad EC + x. sed FO. ad OC. ex hyp. est vt R. ad P + Z. Ergo AE. ad EC + x, est vt R. ad P + Z.

Rationes cognita sunt.

vt.	EC.	AE.
ad.	EA + x.	EC + x.
ita.	P.	R.
ad.	R + Z.	P + Z.

Ergo etiam componendo (4. l. 5.)

vt.	EC.	AE.
ad.	EC + EA + x.	AE + EC + x.
ita.	P.	R.
ad.	P + R + Z.	R + P + Z.

Ergo etiam alternando (4. l. 5.)

vt.	EC.	AE.
ad.	P.	R.
ita.	EC + EA + x.	AE + EC + x.
ad.	P + R + Z.	R + P + Z.

Ergo EC. ad P. est vt AE. ad R. (1. l. 5.) & alternando EC ad AE. vt P. ad R. Quod erat, &c.

Rursus fiat P. ad z. vt BF. ad FA. & quia est CE. ad EA. vt P. ad R. erit GO ad OA. vt P. ad R.

+Z. (39 p.) sed GO. ad OA. ex hyp. est vt P. ad R+Z. Ergo Z. est æqualis Z. (2. l. 5.) Ergo cum BF. ad FA. sit vt P. ad Z. erit vt P. ad Z. Quod erat, &c.

Tandem quia BF. ad FA. est vt P. ad Z. & CE. ad EA. vt P. ad R. erit BG. ad GC. vt P. ad Q. vel vt R. ad Z. (39. p.) & EO. ad OB. vt Z. ad P+R. (39. p.) Ergo omnium rationes determinatæ sunt. Quod erat, &c.

Eadem ratione secundus, & tertius casus demonstrari poterunt, quod omitto, ne cui prolixior videar.

PROPOSITIO XLV.

SI intra quodlibet Triangulum sumatur punctum per quod ducantur rectæ in latera opposita, datis duabus rationibus reliquæ omnes determinatæ sunt.

EXPOSITIO. Fig. II.

SIt $\triangle ABC$. & punctum assumptum O. per quod ducantur AOG. BOE. FOC. Rationes verò datæ quatuor casus admittūt. Vel enim rationes sunt duorum quorumlibet ex tribus lateribus, vel duarum rectarum angularium, vel lateris, & rectæ oppositi anguli, vel lateris, & rectæ anguli contermini, in omnibus casibus.

bus. Dico reliquas omnes rationes determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

Primus casus demonstratus est *prop.* 38. secundus verò *prop.* 44. & tertius *prop.* 39 ultimus tantum est hic demonstrandus. Data ergo sit ratio BF. ad FA. vt P. ad Z. & GO. ad OA. vt P. ad R+Z. fiat ergo vt CE. ad EA. ita BF. ad x . & erit BG. ad GC. vt x . ad FA. & GO. ad OA. vt BF. ad FA+ x . (39. p.) sed GO. ad OA. ex hyp. est vt P. ad R+Z. Ergo BF. ad FA+ x . est vt P. ad R+Z.

1. Ratio.

2. Ratio.

vt.	BF.	BF.
ad.	FA+ x .	FA.
ita.	P.	P.
ad.	R+Z.	Z.

Ergo (ex 1. l. 6.) $\square$ BFR + $\square$ BFZ æquatur $\square$ FAP + $\square$ x P. sed in 2. ratione $\square$ BFZ. æquatur $\square$ FAP. Ergo ablatis æqualib. remanebit $\square$ BFR. æquale $\square$ x P. Ergo latera reciproca sunt proportionalia (1. l. 6.) vt P. ad R. ita BF. ad x . vel ex hyp. ita CE ad EA. Cùm Ergo cognitæ iam sint rationes BF. ad FA. vt P. ad Z. & CE. ad EA. vt P. ad R. & GO. ad OA. vt P. ad R+Z. reliquæ omnes cognitæ sunt (38. p.) Quod erat, &c.

Si ratio data GO. ad OA. sit vt x . ad Z. redu-

cetur ad antecedens P. & ex consequenti auferetur Z. vt habeatur R. & erit ratio P. ad R + Z.

PROPOSITIO XLVI.

IN quolibet Triangulo si per centrum ff. ff. ducatur qualibet infinita, ad quam ex angulis demittantur perpendiculara, segmentum, & perpendicularum maius æquantur reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 12.

IN $\triangle ABC$ sit O. centr. ff. ff. per quod transeat quævis infinita QOR. cui ex angulis A. B. C. perpendicularares sint AL. BN. CM. Dico segmentum maius ON. æquari segmentis OL + OM. & perpendicularum maius CM. æquari reliquis CL + BN.

DEMONSTRATIO.

1. **C**Vm O. sit centr. ff. ff. ad A. B. C. erit etiam O. centr. ff. ff. ad perpendicularorum sectiones N. M. L. (44. M. 1.) Ergo ON. æqualis erit OM + OL (42. M. 1.)

2. Continuata BOP. sit OP. æqualis OB. & PQ. perpendicularis QR. & PY. ipsi parallela: Ergo PQ. YM. æquales erunt (7. l. 1.) & cum OP. OB sint æquales, & anguli verticales etiā POQ. BON (1. l. 1.) & anguli Q. N. recti, in triangulis OPQ. OBN. reliqua omnia erunt æqua-

æqualia, scilicet PQ. & BN (4. l. 1.) Ergo & BN. PQ. MY. æquales sunt inter se.

Deinde cum EOB. transeat per *centr. ff. ff.* est EO. dimidium OB (1. p.) & quia OP. & OB. sunt æqu. *ex constr.* erit OE. æqualis EP. anguli præterea verticales PEK. OEV. æquales sunt (1. l. 1.) & anguli recti æquales OEV. PEK. Ergo in triāgulis PEK. EVO. reliqua omnia sunt æqualia, nempe EK & EV (4. l. 1.) Ergo cū EC. & EA. sint æquales (1. p.) ablatis æqualibus EK. EV. remanebunt æquales KC. VA.

Insuper in triangulis ALV. CKY. anguli alterni LAV. KCY. in parallelis CM. AL. æquales sunt (2. l. 1.) & L. Y. recti æquales. Ergo reliqua sunt æqualia (4. l. 1.) nempe CY. AL. sed CM. componitur ex CY. YM. Ergo cū YM. demonstrata sit æqualis ipsi BN. erit perpendiculum CM. æquale ipsis AL. & BN. Quod erat demonstr.



PROPOSITIO XLVII.

SI ex centro ff . cuiusvis trianguli ducantur rectæ ad angulos, ad quas utrinque cōtinuatæ demittantur perpendiculara ex quouis puncto intra, vel extra triangulum sumpto, rectangulus ex recta à centro in angulum, & ex maiori segmento, vel perpendicularo, æquatur rectangulis reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 12.

IN $\triangle ABC$. sit centr. ff . O . & rectæ angulares AOX . BOP . COF . & assumpto quolibet puncto R . intra, vel extra demittantur perpendiculara RZ . RX . RS . Dico 1. $\square BOZ$ æquale esse $\square AOX + \square COS$. Dico 2. $\square CO$. RS . æquale esse $\square AO$. $RX + \square BO$. RZ .

DEMONSTRATIO.

1. **I**N triangulis ROZ . BON . angulus O . est cōmunis: & N . Z . recti sunt æquales. Ergo reliqui OBN . ORZ . sunt æquales, & triangula æquiangula (3. l. 1.) Ergo latera homologa sunt proportionalia (2. l. 6.) nempè BO . ad ON . vt RO . ad OZ . Ergo $\square BOZ$. æq. $\square RON$ (1. l. 6) Similiter æquiangula sunt triangula ROX . AOL . quia anguli in O . verticales æquantur (1. l. 1.) & L . X . sunt recti: Ergo etiam proportionales sunt RO . ad OX . vt AO . ad OL (2. l. 6)

Er-

Ergo $\square AOX \approx \square ROL$. Tum in Triangulis ROS.COM. similiter demonstrabitur $\square COS.$ $\approx$ $\square ROM$. sed $\square RON.$ $\approx$ $\square ROL + \square ROM$. quia habet eandem basim RO. & altitudo ON. $\approx$ $\square OL + \square OM$ (46 p.) Ergo cum $\square BOZ.$ demonstratum sit $\approx \square RON.$ erit $\square BOZ.$ $\approx \square ROL + \square ROM$. hoc est $\square AOX + \square COS$. Quod erat, &c.

2. Eadem ratione in triangulis similibus ROS.COM. est $\square RO. CM.$ $\approx \square CO. RS.$ & in $\triangle \triangle$ similibus ROX ACL. est $\square RO. AL.$ $\approx \square AO. RX.$ & in $\triangle \triangle$ similibus ROZ.BON. est $\square RO. BN.$ $\approx \square BO. RZ.$ (ex 2. & 1. l. 6.) sed $\square RO. CM.$ $\approx \square RO. AL + \square RO. BN.$ quia basis RO. est eadem, & altitudo CM. $\approx$ $AL + BN$ (46 p.) Ergo $\square CO. RS.$ $\approx \square AO. RX + \square BO. RZ.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis quæ in precedenti, si Triangulum sit æquilaterum maius inter segmenta æquatur reliquis, & perpendiculum maius etiam duobus minoribus.

EXPOSITIO. Fig. 12.

Sit ABC. Triangulum æquilaterum, & punctum assumptum R & perpendicula RX. RS. RZ.

RZ. segmenta verò rectarum per centr. ff. ff. sint
 OZ OX. OS. Dico OZ. æquari ipsis OX + OS.
 & perpendiculum RS. æquari RX + RZ.

DEMONSTRATIO.

Quia rectangulum BOZ. æquatur $\square$ AOX
 + $\square$ COS (47. p.) Ergo cum bases BO.
 AO. CO. sint æquales ex centro circuli circun-
 scripti ad angulos in circumferentia, erit alti-
 tudo OZ. æqualis ipsis OX + OS (8. l. i.) Quod
 &c.

2. Similiter $\square$ CO. RS æq $\square$ AO. RX + $\square$
 BO. RZ (47. p.) Ergo cum bases CO. AO. BO.
 sint æquales, erit altitudo RS. æqualis RX +
 RS. (8. l. i.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLIX.

SI Triangulum sit æquilaterum, & intra su-
 matur quodlibet punctum, ex quo demittan-
 tur perpendiculara ad tria latera, omnium summa
 semper est æqualis Trianguli perpendiculo.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt Triangulum æquilaterum ABC. intra
 quod assumatur quodlibet punctum $\square$, ex
 quo ducantur perpendiculara OE. OF. OG. &
 perpendiculum CF ab angulo in basim. Dico
 OE + OF + OG. æquari perpendiculo CF.

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex puncto assumpto O. ad angulos rectæ OA. OB. OC. fientque triangula ABO. BCO. CAO. sed Triangulū ABC. æquatur illis omnibus, quia ex ipsis componitur: Ergo cum omnia æquales bases habeant AB. BC. CA. erit perpendiculum CF. æquale tribus reliquis OE + OF + OG (8. l. 1.) Quod erat, &c.

Hæc Propositio adducitur à Francisco Schooten, sed nè huic operi videretur deficere omittenda non fuit.

PROPOSITIO L.

SI Δ sit æquilaterum, & inter latera extra tertium latus continuata sumatur punctum, ex quo ad omnia latera mittantur perpendicula, quod est ad tertium latus cum perpendiculo ipsius trianguli æquatur reliquis.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Δ ABC. æquilaterum, & inter latera AB. AC. continuata extra tertium BC. sumatur punctum quodlibet O. & sint OX. OH. OZ. perpendicula, & AG. perpendiculum trianguli ABC. Dico OH + AG. æquari ipsis OX + OZ.

DEMONSTRATIO.

Flat LOK. parallela BC. erit vt AC. æqualis AB. ita AL. æqualis AK. & vt AC. æqualis CB. ita AL. ipsi LK (2.l.5.) Ergo $\triangle ALK$. erit æquilaterum: Ergo $OX + OZ$. æquantur ipsi AE. perpendiculo totius ALK (49.p.) sed AE. æquatur $AG + GE$. vel $AG + HO$. quia HO. GE sūt æquales (7.l.1.) Ergo $OX + OZ$. æquatur $AG + OH$. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LI.

SI $\triangle$ fuerit æquilaterum, & inter latera supra verticem continuata sumatur punctum, ex quo ducantur perpendicula ad tria latera, quod est ad tertium latus æquatur reliquis + perpendiculo totius trianguli.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt $\triangle ABC$. æquilaterum, & inter latera continuata supra verticem ACS. BCR. sumatur quodlibet punctum P. indeque fiant perpendiculares PQ. PT. PV. & sit CF. perpendiculā $\triangle ABC$. Dico PQ. æquari ipsis PT + PV + CF.

DEMONSTRATIO.

Flat RPS. parallela basi AB. & erit $\triangle RCS$. æquilaterum sicut ABC (2.l.6.) Ergo perpendicula PT + PV. æqualia sunt ipsi CI. (44.p.)
sed

sed $IC + CF$. æquantur ipsi IF . hoc est PQ . (7. l. 1.) Ergo PQ . æquatur ipsis $PT + PV + CF$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

IN omni Triangulo si recta ex vertice bisecat basim, summæ $ff.$ ex lateribus est dupla summæ $ff.$ ex bisecante, & ex semibase.

EXPOSITIO. Fig. 14.

Sit $\triangle AFC$. & basis AC . bifariam diuisa in O . recta FO . Dico summam $ff.$ nempe $\triangle AF + \triangle FC$. duplam esse summæ $ff.$ $\triangle OF + \triangle OA$.

DEMONSTRATIO.

INtelligatur AB . CB . parallelæ ipsis FC . FA . & erit $AFCB$. parallelogrammum, & cum diameter AC . bifariam diuidatur in O erit FO . continuata diameter etiam bifariam diuisa. (7. l. 1.) Iam summæ $ff.$ AF . FC . CB . BA . æqualis est in parallelogrammo summæ $ff.$ AC . FB . (57. p.) sed AF . FC . sunt dimidium AF . FC . CB . BA . quia opposita latera sunt æqualia: & $ff.$ AO . OF . ex dimidijs rectis sūt quarta pars $ff.$ AC . FB . (3. l. 2.) Ergo $ff.$ AO . FO . sunt dimidium $ff.$ AF . FC . Quod, &c.

PROPOSITIO LIII.

IN quolibet Triangulo differentia summa ff. ex lateribus, & figura ex basi est dupla differentie figurarum ex bisecante, & ex semibasse.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN $\triangle AFC$. recta AO . bisecat basim AC Dico differentiam inter summam ff. ff. $AF + FC$. & figuram AC . duplam esse differentiae ff. ff. AO . & OF .

DEMONSTRATIO.

DUctis ut antea parallelis AB . CB . in parallelogrammo $ABCF$. differentia ff. ff. ex lateribus conterminis $AF + FC$. & diametri AC . est semissis differentiae ff. ff. ex diametris AC . & FB (59. p.) sed differentia ff. ff. ex AO . & OF . est quarta pars differentiae ff. ff. ex AC . & FB cū figura ex tota recta sit quadrupla figuræ ex dimidio (. 3. 2.) Ergo differentia ff. ff. ex lateribus $AF + FC$. & basis AC . est dupla differentia ff. ff. ex bisecante FO . & semibasse AO . quia semissis est dupla quartæ partis. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO LIV.

IN quolibet triangulo rectangulo recta, quæ basim bisecat est dimidium basis; in acutangolo est plus dimidio; in obtusangolo minus, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

Sit $\triangle ACF$. & recta FO . bisecet basim AC . Dico AO . & OF . esse æquales si angulus AFC . sit rectus: si verò acutus erit OF . maior quàm AO . si autem obtusus erit OF . minor quàm AO . & è conuerso.

DEMONSTRATIO.

1. **S**it AFC . angulus rectus erunt $ff. ff.$ AF . FC . æquales ipsi AC . (4. l. 2.) sed $ff.$ AO . OC . sunt dimidium AC (3. l. 2.) & etiam AO . OF . sunt dimidium ipsius AC . vel AF . & FC (52. p.) Ergo OF . + OC . æquales sunt inter se. Quod &c.

2. Si angulus AFC . sit acutus, sunt $ff. ff.$ AF . FC . plus quàm AC (3. l. 2.) sed AO . & OF . sunt dimidium AF . FC . (52. p.) Ergo AO . OF . sunt plus quàm dimidium AC . Ergo cum AO . & OC . sint dimidium figuræ AC . (3. l. 2.) erunt $ff. ff.$ AO . & OF . plus quàm AO . & OC . Ergo ablata vtriusque AO . erit OF . plus quàm OC . Quod &c.

3. Sit

3. Sit tandē angulus AFC. obtusus erunt
 $\text{ff. ff. AF. FC. minus quā AC (4. l. 2.)}$ sed AO.
 OF. sunt dimidium AF. FC. (52. p.) Ergo AO.
 OF. sunt minus quā dimidium AC. sed AO.
 OC. sunt dimidium AC (3. l. 2.) Ergo AO. OF.
 minus sunt quā AO. OC. Ergo ablata vtrin-
 que AO. remanebit OF. minor quā OC. Quod
 erat, &c.

Conuersa ordine retrogrado demonstrabi-
 tur. Si OF. sit æqualis OC. erunt ff. ff. AO. OF.
 æquales AO. OC. sed AO. OF. sunt dimidium
 AF. FC. (52. p.) & AO. OC. dimidium AC (3. l.
 2.) Ergo $\text{ff. ff. AF. FC. æq. AC.}$ Ergo angulus
 AFC. erit rectus (4. l. 2.) Similiter demonstra-
 bitur acutus si OF. est maior OC. vel obtusus
 si minor. Quod, &c.

Tres istæ propositiones pendent à prop. 57.
 & 59. quæ ab his non dependent, quibus tamē
 præpositæ sunt, ne triangulorum doctrina in-
 terrupta maneret, licet demonstrationis ser-
 uato ordine postponi debuissent.



CAPVT II.

DE QVADRILATERIS, ET POLYGONIS INORDINATIS.



*Q*uadrilatera figurae, vel parallelogramma sunt, vel Trapezia. De utrisque agendum est in hoc capite; primo loco de parallelogrammis, quae scilicet ex oppositorum laterum aequalitate singularem exigunt meditationem. Deinde ea, quae omnibus quadrilateris Trapezis, vel parallelogrammis sunt communia, persequemur. Quae verò ad Polygonainordinata spectant paucis complectar, nè intacta videatur relinqui. Si enim omnia quae ex minimis deduci possunt, velit quis meditari, in immensum abibit. Sufficiat mihi aperuisse viam, qua ingeniosus Lector eorum meditationem, & Geometriam simul promovere possit.



PROPOSITIO LV.

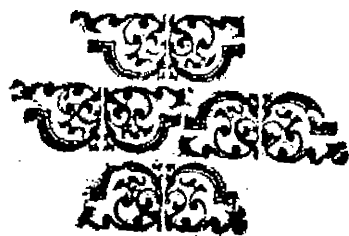
IN omni parallelogrammo centr. ff. ff. est in cōmuni diametrorum sectione. 2. Et etiam in medio diametri, vel rectæ secantis subcontrariè latera opposita in partes æquales.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN parallelogrammo ABCF. diametri AC. FB. se intersecant in O. Dico O. esse centr. ff. ff. in medio diametri AC. vel BF. vel rectæ MN. facientis æqualia segmenta FM. BN.

DEMONSTRATIO.

Diametri AC FB. diuisæ sunt bifariam in O. (7. l. 1.) Ergo O. est centr. ff. ff. ad A. C. tum etiam ad F. B. (35. M. 1.) Ergo etiam ad A. B. C. F. (64. M. 1.) Vnde centr. ff. ff. O. est in medio diametri AC vel FB. Tum si FM. & BN. sunt æquales, & anguli alterni OFM. OBN. tum OMF. ONB. (2. l. 1.) erunt FO. OB. æquales, tū MO. ON. (4. l. 1.) Ergo erit O centr. ff. ff. in medio rectæ MO. Quod, &c.



PROPOSITIO LVI.

SI *Quadrilaterum* habeat *centr. ff. ff.* in *communi* *diametrorum* *sectione*, illud erit *parallelogrammum*: & tale non erit si *centrum* non sit in *sectione*.

EXPOSITIO. Fig. 14.

Quadrilaterum ABCF. habeat *centr. ff. ff.* in *sectione* *diametrorum* O. Dico illud esse *parallelogrammum*, secus verò si *centrum* *ff. ff.* non sit in O.

DEMONSTRATIO.

Cum O. sit *centr. ff. ff.* ad A. B. C. F. recta FOB. transit per *centr. ff. ff.* ad A. B. C. (61. M. 1.) Ergo BO. bisecat AC (1. p.) Similiter FB. demonstrabitur bisecta in O. Ergo cum æquales sint FO. & OA. ipsis BO. OC. & anguli verticales AOF. COB. (1. l. 1.) reliqua erunt æqualia in triangulis AOF. COB (4. l. 1.) nempe AF. BC. tum anguli OAF. OCB. alterni: Ergo FA. BC. sunt parallelæ æquales (2. l. 1.) Ergo AB CF. est *parallelogrammum* (7. l. 1.) Quod, &c.

Si *centr. ff. ff.* non sit in O. non erit ABCF. *parallelogrammum*: quia si tale esset, foret O. *centr. ff. ff.* (55. p.)

PROPOSITIO LVII.

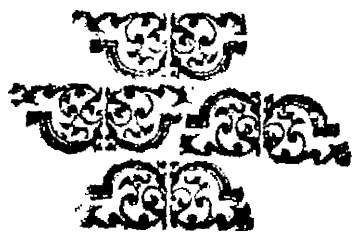
IN omni Parallelogrammo summa ff. ss. ex 4. lateribus aequalis est summa ff. ss. ex duabus diametris.

EXPOSITIO. Fig. 14.

Sit Parallelogrammum A B C F. & diametri A C F B. Dico figuras similes ex lateribus A B. B C. C F. F A. aequales esse figuris similibus ex diametris A C. F B.

DEMONSTRATIO.

Cum A C. bifariam diuisa sit in O. erit O. *centr. ff. ss.* ad A. C. (35. M. 1.) Ergo cum punctum B. sit extra *centr. ff. ss.* figurae B A. B C. aequantur ff. ss. O A. O C + 2 O B (60. M. 1.) Similiter ff. ss. F A. F C. aequantur O A. O C + 2 O F. Ergo 4 figurae ex lateribus A B. B C. C F. F A. aequantur 2 O A + 2 O C + 2 O B + 2 O F. & cum O A. O C. sint aequales, tum O F. O B erunt ff. ss. A B. B C. C F. F A. aequales 4 O A + 4 O B. sed 4 $\square \square$ O A + 4 $\square \square$ O B. aequalia sunt $\square$ A C + $\square$ F B. (3. l. 2.) Ergo cum omnes ff. ss. sint in ratione quadratorum (4. l. 6.) erunt ff. ss. A B. B C. C F. F A. aequales ff. ss. A C. F B. Quod erat, &c.



PROPOSITIO LVIII.

IN omni Parallelogrammo minima summa
ex centro ff. ff. est dimidium summa ff. ff. ex la-
teribus, vel diametris. Et est equalis summa ff. ff.
quæ ex lateribus conterminis fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 14.

Sit ABCF. Parallelogrammum, & illius cen-
trum ff. ff. O Dico summa ff. ff. OA. OB. OC.
OF. esse dimidiũ summa ff. ff. AB. BC. CF. FA.
vel ff. ff. AC. FB. & esse æqualem summa ff. ff.
AB. BC. vel AF. FC.

DEMONSTRATIO.

Minima ff. ff. summa est OA. OB. OC. OF &
cum OA. & OC. sint æquales, tum OF. OB.
erit minima summa $2\text{ OA} + 2\text{ OB}$. sed figura
AC. est 4 OA . & figura FB. est 4 OB . (3 l. 2.) Er-
go figuræ AC. FB. duplæ sũt ff. ff. $2\text{ OA} + 2\text{ OB}$.
vel ff. ff. OA. OB. OC. OF. (sed figuræ AB. BC. CF.
FA. sunt æquales ipsis AC. FB. (57. p.) & duplæ
figurarum AB. BC. Ergo etiam sunt duplæ fi-
gurarum OA. OB. OC. OF. & istæ æquales ip-
sis AB. BC. Quod erat, &c.



PROPOSITIO LIX.

IN quolibet Parallelogrammo differentia ff. ff. ex lateribus conterminis, & quavis diametro eadem est; & est semidifferentia ff. ff. ex diamentris.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallelogrammo ABCF. Dico differentiam inter ff. ff. AF+FC. & AB. esse eandem quæ inter ff. ff. AF+FC. & FB. & hanc esse ipsam semidifferentiam inter ff. ff. AC. & FB.

DEMONSTRATIO.

Differentia inter ff. ff. AC. & FB. sit $2X$. Ergo $FB + 2X$ erit æq. AC. Ergo si X . auferatur ex vtraque parte erit $FB + X$ æq. $AC - X$. sed summa vtriusque est $FB + AC$. quæ æqualis est summæ AB. BC. CF. FA (57. p.) hoc est $2AF + 2FC$ Ergo $FB + X + AC - X$. æquatur $2AF + 2FC$. Ergo dimidium est æquale dimidio, nempe $AF + FC$ æq. $FB + X$ & differentia inter $AF + FC$. & FB. est X similiter $AF + FC$. æq. $AC - X$. & differ. inter $AF + FC$. & AC. est eadē X . nempe dimidium $2X$ vel differentia inter AC. & FB. Quod, &c.



PROPOSITIO LX.

S*I plura parallelogramma dissimilia habeant æqualia latera, minimæ summæ ff. ff. æquales erunt.*

DEMONSTRATIO. Fig. 14.

Q*uia si latera sint æqualia in utroque, summæ ex lateribus æquales erūt: Ergo minimæ summæ, quæ sunt illarum semisses (58. p.) æquales erunt.*

PROPOSITIO LXI.

S*I in Parallelogrammo recta bisecat opposita latera, & alia secat utcumque reliqua duo, hæc erit bifariam diuisa.*

EXPOSITIO. Fig. 14.

R*ecta RS. bisecat FC. & AB. & recta PQ. secat utcumque FA. CB. Dico PQ. bifariam secari in O.*

DEMONSTRATIO.

C*um RS & CB. sint parallelæ (2. l. 6.) ducta BP. erit in $\triangle ABP$. ut AS. dimidium AB. ita PZ. dimidium PB (2. l. 6.) Ergo ut PZ. dimidiū est BB. ita PO. est dimidium PQ. (2. l. 6.) Quod erat, &c.*

PROPOSITIO LXII.

SI in Parallelogrammo sumatur quodlibet punctum, erit centrum ff. dd. similium illis, quæ rectis comprehenduntur lateribus parallelis.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallelogrammo ABCF. assumptum sit quodlibet punctum G. per quod ducantur rectæ LH. ED. oppositis lateribus parallelæ. Dico G. esse centr. ff. dd. similium tamen factis GF. GA. GB. GC.

DEMONSTRATIO.

CVm $\square$ EL. & $\square$ EH. habeant æqualem altitudinem, erunt inter se minima (10. M. 1.) & E. est centr. ff. ad A. F. (34. M. 1.) similiter DL. DH. sunt ff. minimæ: & D. centr. ff. ad B. C. Ergo centr. ff. ad F. A. B. C. est in recta ED (63. M. 1.) Pariter LE. LD. sunt minimæ, & L. centr. ff. ad F. C. tū HE. HD. sunt minimæ, & H. est centr. ff. ad A. B. Ergo in HL. erit centr. ff. ad F. C. A. B. Ergo cum sit in ED. & in HL. erit in sectione G. Quod erat, &c.



PROPOSITIO LXIII.

SI ex lateribus conterminis Parallelogrammi unum diuidatur in duplicata alternis ratione, totum erit diuisum in quatuor parallelogramma continue proportionalia.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Parallelogrammo AC. sit latus FC. utcuque diuisum in L. & FE. ad EA. sit ratio duplicata FL ad LC. ductis ED. LH quæ oppositis lateribus sint parallelæ. Dico Parallelogramma GF. GC. GA. GB. esse continue proportionalia.

DEMONSTRATIO.

QVoniam GF. ad GC. est ut EG. ad GD. & GF. ad GA. ut LG. ad GH (1. l. 6.) erit FG. ad GA. in duplicata ratione FG. ad GC. & erunt continua GF. GC. GA. sed ratio GA. ad GB. est eadem GE. ad GD. vel GF. ad GC. (1. l. 6.) Ergo erunt quatuor in eadem cōtinua ratione GF. GC. GA. GB. nempe in ratione EG. ad GD. Quod erat, &c.



PROPOSITIO LXIV.

SI in quolibet parallelogrammi diametro punctum summatur, per quod rectæ lateribus oppositis parallele efficiant complementum toti simile, erunt latera in quatuor continuas diuisa, & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 15.

Sit $\square AC$. & in diametro FB . assumptum punctum G . ita ut ductæ EGD . LGH . sit AG . simile toti AC . Dico esse quatuor continuas GL . GE . GH . GD . vel EF . FL . EA . LC . & e conuerso si continuæ sint EF . FL . EA . LC . Dico AG . esse simile ipsi AC .

DEMONSTRATIO.

Quoniam EL . & HD . similia sunt ipsi AC . (4. l. 6.) & AG . simile supponitur AC . similia erunt inter se EL . AG . HG . (4. l. 6.) Ergo latera homologa erunt proportionalia, ut GL . ad GE . ita GE . ad GH . & ita GH . ad GD . (22 P) Ergo sunt continuæ GL . GE . GH . GD . Quod erat demonstrandum.

Econuerso, Si continuæ sint GL . GE . GH . GD . erunt latera proportionalia GL . ad GE . ut GE . ad GH . deinde parallelogramma EL . EH . sunt æquiāgula ex parallelis (2. l. 1.) Ergo cum sint æquiangula, & habeant latera proportio-

na-

nalia erunt EL. EH. similia (22. P.) Quod, &c.

PROPOSITIO LXV.

IN quocumque Parallelogrammo rectæ per idem diametri punctum lateribus parallela secant latera in eadem ratione.

2. Complementum est medium inter parallelogramma circa diametrum.

Consect. Parallelogrammum ex quibusvis 2. rectis medium est inter ipsarum quadrata, vel Rhombos sub eodem angulo.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SI in diametro FB. sumatur quodlibet punctum G. per quod ducantur EGD, LGH. Dico FL. ad LC esse vt FE. ad EA.

2. Et complementum GC. vel GA. mediū esse inter $\square$ EL. & $\square$ HD.

DEMONSTRATIO.

CVm FE. BD. sint parallelæ, est EG. ad GD. vel FL. ad LC. vt FE. ad DB. vel FE. ad EA (2. l. 6.) 2 $\square$ EL. ad LD. est vt EG. ad GD (1. l. 6.) & LD. ad DH est vt CD. ad DB, vel vt FE. ad EA. (1. l. 6.) Ergo vt EL. ad LD. ita LD. ad DH (1. l. 5.) Quod, &c.

Consect. Liquet ex dictis, si enim rectæ sint FL. LC. & ex composita FL + LC. fiat quadra-

L tum,

tum, vel Rhombus, circa diametrum fient quadrata, vel Rhombi, &c.

PROPOSITIO LXVI.

SI latera circa eundem parallelogrammi angulum continentur, & ex angulo opposito ducatur recta faciens unum segmentum medium inter latus conterminum, & segmentum reliquum, data erunt duae mediae inter latera parallelogrammi.

EXPOSITIO. Fig. 15.

Sit parallelogrammum GC . continentur latera CLF . CDB . infinite, si ex G . ducantur BGF . ut FL . media sit inter LG . & DB . Dico FL . & DB . medias esse inter latera LG . & LC .

DEMONSTRATIO.

Cum LG . & CB . sint parallelæ, est GL . ad LF . ut BD . ad DG (2. l. 6.) sed ex hypothese ut GL . ad LF . ita LF . ad BD . Ergo continuæ sunt GL . LF . BD . DG . Quod erat demonstrandum.

Hæc Propositio licet duas medias non cōcludat, omnittenda non fuit cum viam ad earum inquisitionem aperiat.



PROPOSITIO LXVII.

SI planum aliquod secat planum parallelogrammi per centr. ff. ff. ex angulis ducantur quævis parallelæ secantes illud, sectiones constituent parallelogrammum cum eodem centro ff. ff.

EXPOSITIO. Fig. 16.

SIt Parallelogrammum A B C D. & illius centr. ff. ff. O per quod transeat quodlibet planum EF. secans planum parallelogrammi, & communis sectio MN. Deinde ex punctis, vel angulis parallelogrammi A. B. C. D. prodeant quælibet parallelæ A G. B H. C I. D K. secantes planum EF. in G. H. I. K. Dico G H I K. esse parallelogrammum, & illius centr. ff. ff. etiam esse punctum O.

DEMONSTRATIO.

CVm planum EF. transeat per centr. ff. ff. ad A. B. C. D. & sint parallelæ A G. B H. C I. D K. erit etiã O. centr. ff. ff. ad G. B. I. K. (51. M. 1.) Deinde si per O. intelligatur parallela ipsis A G. B H. C I. D K. cum puncta A. O. C in eadem sint recta, erunt parallelæ A G. C I. in eodẽ plano (2. l. 11.) quod facit cum plano EF. communem sectionem G O I. (1. l. 11.) Similiter planum tranfiens per parallelas D K. B H. faciet cum plano EF. communem sectionem K O H. Ergo centr. ff. ff.

O. ad puncta G. H. I. K. est in communi diame-
trorum KH GI sectione O. Ergo quadrilate-
rum GHIK. habens *centr. ff. ff.* in diamentrorū
sectione erit parallelogrammū (56. p.) Quod
erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Quodlibet quadrilaterum habet *centr. ff. ff.*
in medio rectæ bisecantis latera opposita,
& in communi sectione bisecantium, quæ
se bifariam intersecant.

EXPOSITIO. Fig. 17.

Sit Quadrilaterum ABCD. & latera AB.
BC. CD. DA. sint bifariam diuisa in E. F.
G. H. ductis GE. HF. se intersecantibus in O.
Dico punctum O. esse *centrum ff. ff.* ad A. B.
C. D. & GE. HF. esse in O. bifariam diuisas.

DEMONSTRATIO.

Cum omnia latera supponantur bifariam
diuisa erit E. *centr. ff. ff.* ad A. B. (35. M. 1.) &
similiter G. ad D. C. Ergo *centr. ff. ff.* ad A. B.
C. D. erit in dimidio rectæ GE (64. M. 1.) Eodē
modo demonstrabitur H. esse *centr. ff. ff.* ad A.
D. & F. ad B. C. & *centr. ff. ff.* ad A. D. B. C. esse in
dimidio rectæ HF. Ergo cum sit in dimidio
vtriusque rectæ GE. & HF. erit *centr. ff. ff.* in cō
muni sectione O. & punctum O. bifariam di-

uidet vtramque rectam GE. HF. Quod erat
&c.

PROPOSITIO LXIX.

*SI Trapezium habeat duo latera parallela,
quodlibet diagonum secat ipsum in ratione
laterum parallelorum.*

EXPOSITIO. Fig. 17.

SI Trapezium ABCD. & latera AB. BC. pa-
rallela. Dico diagona AC. & BD. secare ip-
sum in ratione AB. ad DC.

DEMONSTRATIO.

*C*Um Triangula ABC. DCA. sint inter paral-
lelas, sunt æque alta (8. l. 1.) Ergo se habent
vt basis AB. ad basim DC (1. l. 6.) Idem omni-
nò est de Triangulis ABD. CDB. Ergo, &c.
Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXX.

*SI Quadrilaterum habeat cētrum ff. ff. in dia-
metro, altera diameter erit bifariam diuisa,
& e conuerso.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SI Quadrilaterum quodlibet ABCF. & illius
centr. ff. ff. fit in diametro FB. Dico reliquam
diametrum AC. esse bifariam diuisam in cō-
muni sectione O. & e conuerso si diameter AC.

fit

fit bifariā diuisa in sectione O. Dico *centr. ff. ff.* Quadrilateri esse in diametro FB.

DEMONSTRATIO.

Quia *centr. ff. ff.* ad A. B. C. F. est in recta FB. transit hæc per *centr.* & per punctum B. Ergo in BF. est *centr. ff. ff.* ad A. C. F. (61. M. 1.) Ergo cum recta FO B. transeat per *centrum* $\triangle ACF$. diuidet bifariam basim, vel diametrū AC. (1. p.) Quod, &c.

Econuerso si FB. diuidat bifariam AC. erit in FO. *cētrum ff. ff.* ad C. F. A. (1. p.) Ergo cū FOB. transeat per *centrum* ad A. C. F. & per punctum B. in recta FOB. erit *centr. ff. ff.* ad B. C. F. A. (61. M. 1.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXI.

Si diameter quadrilateri ipsum bifariam secet, etiam secundam diametrum bifariam secabit, & in prima diametro erit *centr. ff. ff.* & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Quadrilaterum ABCF. bifariam diuiditur diametro FB. Dico diametrum AC. etiā esse bifariam diuisam in O. & Quadrilateri *cētrum ff. ff.* esse in diametro FB. & *econuerso* si diameter AC. fuerit bifariam diuisa, vel *centr. ff. ff.* sit in FB. Dico FB. diuidere bifariam Quadrilaterum ABCF.

DEMONSTRATIO.

1. **D**Vcantur CH.& AG. parallelæ ipsi FB.
& OHG. vtrique perpendicularis. Cū
Triagula FBC. FAB. supponantur æqualia, &
habeant eandē basim FB. habebūt æquales al-
titudines OH. OG (8. l. 1.) Ergo cū sint paral-
lelæ HC. & AG. erunt proportionales, vt OH.
æqualis OG. ita OC. æqualis ipsi OA (2. l. 6.) Er-
go diameter AC. est bifariā diuisa in O. Ergo
centr. ff. ff. Quadrilateri ABCF. erit in diame-
tro FB (70. p.) Quod erat, &c.

2. *Econuerso* si diameter AC. bifariam sit
diuisa in O. erit vt AO. æqualis OC. ita per-
pendiculum GO. æquale ipsi OH (2. l. 6.) Ergo
cū Triangula FBC. FBA. habeant æqualē ba-
sim FB. & æquales altitudines OH. OG. erunt
æqualia (8. l. 1.) & sic diameter FB. diuidet bi-
fariam quadrilaterum ABCF. & in illa erit *cē-
tr. ff. ff.* vt modo est demonstratum 1. *num.*

3. Si autem *centr. ff. ff.* supponatur in FB
erit diameter AC. bifariam diuisa (70. p.) Er-
go cum AC. bifariam diuisa erit in FB. *centr.
ff. ff.* vt demonstratum est 2. *num.*



PROPOSITIO LXXII.

SI Quadrilaterum habeat *centrum ff. ff.* in diametro, vel hac secet ipsum bifariam, recta à reliquis angulis per quodlibet diametri punctum secant latera, & se ipsas proportionaliter. & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

QUadrilaterum ABCF. habeat *centr. ff. ff.* in diametro FB. vel diameter FB. bifariam secet quadrilaterum, si in FB sumatur quodlibet punctum L. & ducantur ALP. CLR. Dico AR. ad RB. esse vt CP. ad PB. & AL. ad LP. vt CL. ad LR. Et è conuerso si AL. ad LP. sit vt CL. ad LR. Dico FB. secare bifariam quadrilaterum, & huius *centr. ff. ff.* esse in FB.

DEMONSTRATIO.

Quia in utroque casu erit AC. bifariam diuisa (70. & 71. p.) Ergo in triangulo ABC. erunt latera proportionaliter secta, & etiam rectæ angulares (31. p.)

E conuerso, si rectæ, & latera secantur proportionaliter, erit AC. bisecta (29. p.) Ergo FB. bisecabit quadrilaterum, & *centr. ff. ff.* quadrilateri ABCF. erit in diametro FB (70. & 71.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

Si latera *Quadrilateri* circa oppositos angulos proportionaliter diuidantur, rectæ, quæ iungunt sectiones, constituent parallelogrammum, non e contra.

EXPOSITIO. Fig. 19.
IN *Quadrilatero* ABCD. diuisa sint latera circa oppositos angulos B. & D. vt DH. ad HA. ita DG. ad GC. & BE. ad EA. BF. ad FC. Dico EFGH. esse parallelogrammum: non e contra.

DEMONSTRATIO.
DVctis diametris AC. DB. quia in $\triangle$ ADC. recta HG. secat proportionaliter latera sūt HG. AC. parallelæ (2. l. 6) Similiter AC. EF. Ergo & HG. EF. idem ostendetur de HE. GF. Ergo cum latera opposita sint parallela, erit EF GH. parallelogrammum. Quod, &c.

Non e conuerso, quia parallelogrammum potest esse inscriptum, quin Trapezij latera sint proportionaliter secta.



PROPOSITIO LXXIV.

SI intra, vel extra parallelogrammum sumatur quodlibet punctum, ex quo ducantur per quosvis duos angulos non oppositos rectae in eadem ratione divisa, & ex terminis ducantur aliae per reliquos angulos, haec concurrent si non fuerint eadem recta, & erunt in eadem ratione divisa, & facient quadrilaterum.

EXPOSITIO. Fig. 19.

Sit Parallelogrammum EFGH. & punctum assumptum intra, vel extra sit A. ex quo ducantur AEB. AHD. in eadem ratione: & ex D. & B. ducantur DGC. BFC. Dico has concurrere in C. & esse CG. ad GD. ut CF. ad FB. & ut AE. ad EB. &c.

DEMONSTRATIO.

DVcatur BD. cum AE. ad EB. sit ut AH. ad HD. sunt HE. DB. parallelæ (2. l. 6.) Ergo cum HE. GF. sint parallelæ; erit DB. eadem GF. vel ipsi parallela: sed DGC. BFC. si non fuerint eadem recta DB. nequeunt esse parallelæ, quia DB. est maior quam HE. vel GF. & sic non est parallelogrammum BFGD (7. l. 1.) Ergo DGC. BFC. concurrunt in C. & cum sint parallelæ DB. GF. erunt proportionales CF. ad FB. ut CG. ad GD (2. l. 6.) sed etiam proportionales sunt CG.

CG.ad CD.vt GF.ad DB. & item AH.ad AD.
vt HE.ad DB(2.l.6.) Ergo cum HE.GF.æqua-
les sint,eadem erit ratio FG.ad DB.quæ HE.ad
DB(2.l.5.) Ergo pariter eadem erit ratio CG.
ad CD.quæ AH.ad AD(1.l.5.) Ergo etiam di-
uidēdo CG.ad CD—CG.vt AH.ad AD—AH.
(4 l.5.) hoc est vt CG.ad GD. vt AH.ad HD.
Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

S*I duæ rectæ quadrilateri opposita latera sub
cōtrariè secant in eadem ratione, se ipsas mu-
tuo bifariam diuident.*

2. *Si autem se ipsas bifariam diuidant, &
duo latera contermina in eadem ratione, etiam
reliqua latera in eadem ratione diuident.*

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN quadrilatero ABCD, rectæ HF, EG, secant
opposita latera subcōtrariè in eadem ratio-
ne, hoc est vt BE. ad EA. ita DG. ad GC. & ita
BF.ad FC. tum DH.ad HA. Dico HF. & GE. ef-
se bifariam diuisas in O. Si autem HF. GE. sint
bifariam diuisæ, & DH.ad HA. vt DG. ad GC.
etiam BE.ad EA. & BF.ad FC. erunt in eadem
ratione.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DH.ad HA. est vt DG. ad GC. &

M 2

vt

vt BE. ad EA. & vt BF. ad FC. erit EFGH. parallelogrammum (73. p.) Ergo diametri HF. GE. sunt bifariam diuisæ (7. l. 1.) Si autem HF. GE. sint bifariam diuisæ erit EFGH. parallelogrammum (4. & 7. l. 1.) Ergo cum ex puncto D. rectæ DH A. DGC. sint in eadem ratione diuisæ, erunt etiam BEA. BEC in ipsamet ratione diuisæ (74 p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVI.

O Mne Quadrilaterum habet centrum ff. ff. in dimidio rectæ bisecantis diagonales.

EXPOSITIO. Fig. 19.

Sit Quadrilaterum ABCD. cuiusque diagonales AC. BD. sint bifariam diuisæ in S. & R. Dico centr. ff. ff. ad A. B. C. D. esse in dimidio rectæ R. S. quæ diagonales bifariam diuidit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC. est bifariam diuisa in S. erit S. centr. ff. ff. ad A. C. (35. M. 1.) Similiter R. erit centr. ff. ff. ad B. D. Ergo centr. ff. ff. ad A. B. C. D. erit in recta RS (63 M. 1.) Ergo si RS. bifariam diuidatur, duæ figuræ similes ex vna parte minimæ erunt duabus similibus ex altera (29. M. 1.) Ergo punctum bisectionis erit centr. ff. ff. ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

S*I recta Quadrilateri latera opposita subcontrarie in eadem ratione secet, etiam bisecantem diagonales in eadem ratione secabit, & se ipsam bifariam.*

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN quadrilatero ABCD. diagonales sunt AC. DB. quas bisecat RS. & recta GE. subcontrarie secat in eadem ratione latera opposita AB. DC. scilicet DG. ad GC. vt BE. ad EA. Dico RO. ad OS. etiam esse vt DG. ad GC. & GE esse bifariam diuisam in O.

DEMONSTRATIO.

Punctum G. est *centrum ff. dd.* nempe quadrati GGC. & rectanguli DGC (35. M. 1.) & cum BA. sit diuisa, similiter est E. simile *centrum* ad B. & A: Ergo cum figuræ ad D. & C. similes sint figuris ad B. & A. in medio rectæ GE. erit *centr. ff. ad A. B. C. D.* (64. M. 1.)

Deinde cum figuræ ad A. & C. similes sint, nempe quadrata, & AC. bifariam sit diuisa in S. erit S. *centr. ff. ff.* vel quadratorum (35. M. 1.) & similiter quia figuræ ad D. & B. similes sunt, nempe rectangula similia DGC. BEA. erit R. *centrum* rectangulorum similium, quia DB. est bifariam diuisa in R. (35. M. 1.) Ergo *centr. ff.*
ad

ad A. C D. B. erit in recta RS. (63. M. 1.) sed si recta RS. diuisa sit in O. in ratione DG. ad GC. du o rectangula ROS. erunt similia rectangulis DGC. BEA. & erunt minima duobus quadratis OS. propter altitudinem æqualem (10. M. 1.) Ergo erit punctum O. *centr. ff.* ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Ergo cum *centr. ff.* sit in dimidio GE. & in recta RS. diuisa vt DG. ad GC. erit in communi sectione O. Ergo punctum O. diuidit R. S. in ratione laterum, & GE. Bisariam. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVIII.

SI duæ rectæ secant quadrilateri opposita latera subcontrariè in eadem ratione, locus intersectionis ipsarum est in bisecante diagonales similiter diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt quadrilaterum ABCD. & diagonales AC. BD. quas bisecet RS. & GE. HF. secant opposita latera subcontrariè in eadem ratione, scilicet DG. ad GC. vt BE. ad EA. & ita GH. ad HA. & BF. ad FC. Dico punctum O. in quo se interfecant GE. HF. esse in recta RS. diuisa vt DG. ad GC.

DEMONSTRATIO.

CVm DG. ad GC. sit vt BE. ad EA. recta GE. se-

secabit RS. in eadem ratione (77. p.) & quia DH. ad HA. est vt BF. ad FC. recta HF. secat RS. in eadem ratione DH. ad HA. (77. p.) Ergo cū ratio DG. ad GC. sit eadem, quæ DH. ad HA. vtraque recta GE. HF. secat rectam RS. in eadem ratione, hoc est in eodem puncto O. rectæ RS. Ergo locus intersectionis rectarum GE. HF. est recta RS. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIX.

SI recta secans opposita latera quadrilateri, secet unum latus in ratione bisecantis diagonales, secabit etiam latus reliquum subcontrariè in ratione bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

RECTA GE. secet DC. AB. in G. & E. & sit DG. ad GC. vt RO. ad OS. Dico etiam BE. ad EA. esse vt RO. ad OS.

DEMONSTRATIO.

INtelligentur in A. & C. duo quadrata: & in D. & B. duo rectangula similia $\square$ ROS. vel $\square$ CGD. Cū A. C. sint ff. ff. erit S. centr. ff. ff. ad A. C. & quia D. B. sunt ff. ff. erit R. centr. ff. ff. ad D. B. (35. M. 1.) Ergo cū RS. sit diuisa in O. vt DC. in G. erit O. centr. ff. ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Ergo cū G. sit centrum ad D. C. (35. M. 1.) recta GOE. transit per E. centrū ad A. B. (63. M. 1.)

Er-

Ergo cum figuræ B. A. similes sint D. & C. erit BA. diuisa in E. sicut DC. in G. (30. M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LXXX.

Quodlibet punctum bisecantis diagonales quadrilateri est centr. ff. dd. quarum duæ oppositæ sint quadrata, & reliquæ rectangula similia rectangulo ex partibus bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Recta RS. bisecat diagonales. Dico quodlibet punctum O. esse *centrum* ad quadrata A. C. & ad rectangula D. B. similia $\square$ ROS.

DEMONSTRATIO.

Cum Quadrata A. C. similia sint, & A. C. bisecta in S. erit S. *centr. ff. ff.* ad A. C. & similiter R. ad $\square$ D. & $\square$ B. (35. M. 1.) sed RS diuisa est in O. ut duo rectangula ROS. minima sint duobus quadratis OS (10. M. 1.) Ergo erit O. *centr. ff.* ad duo quadrata A. C. & duo rectangula D. B. similia $\square$ ROS (64. M. 1.) Quod erat, &c.



PROPOSITIO LXXXI.

Quodlibet punctum bisecantis diagonales quadrilateri est centr. ff. ff. parallelogrammi secantis latera circa oppositos angulos in ratione bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Recta RS. bisecat diagonales. Dico quodlibet punctum O. esse centr. ff. ff. parallelogrammi EFGH. secantis latera circa oppositos angulos D. B. in ratione RO. ad OS. incipiendo à punctis eiusdē diagonalis: D. R. B. nempe DG. ad GC. & DH. ad HA. & BF. ad FC. & FE. ad EA. esse vt RO. ad OS.

DEMONSTRATIO.

Sumantur DC. DA. diuisæ in G. & H. vt RO. ad OS. ducta GOE. erit BE. ad EA. vt RO. ad OS. & ducta HOF. erit BF. ad FC. vt RO. ad OS. (79. p.) Ergo cū latera circa angulos D. B. sint in eadem ratione diuisa, erit EFGH. parallelogrammum (73. p.) Ergo punctum O vbi secantur diametri AC. DB. erit centr. ff. ff. parallelogrammi EFGH. (55. p.) Quod erat, &c.



PROPOSITIO LXXXII.

EX omnibus parallelogrammis secantibus latera Quadrilateri proportionaliter, solum quod diuidit bifariam latera habet commune centrum ff. ff. & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Sit Quadrilaterum ABCD. & parallelogrammum EFGH diuidit bifariam latera. Dico vtrumque habere commune centrum ff. ff. & nullum aliud posse idem centrum habere, & e conuerso. Si EFGH. habeat idem centr. ff. ff. & fecet proportionaliter latera. Dico secare illa bifariam.

DEMONSTRATIO.

CVm recta GE. bifariam fecet latera opposita, in eius dimidio O. est centr. ff. ff. quadrilateri ABCD. (68. p.) sed etiã quia GE. est diameter parallelogrammi in eius dimidio O. est centr. ff. ff. parallelogrammi EFGH (55. p.) Ergo vtrumque habet idem centr. ff. ff. Quod erat.

Deinde cum centr. ff. ff. quadrilateri ABCD. sit in dimidio rectæ RS. (76. p.) sed punctum O. est centrum ff. ff. parallelogrammi secantis latera in ratione RO. ad OS. (81. p.) Ergo cū RS. sit bifariam diuisa, solum parallelogrammum di-

Pars secunda. Propositio LXXXIII. 99

diuidens bifariam latera habebit *centr. ff. ff.* in O. Quod &c.

Econuerso si ABCD. & EFGH. habeant idem *centr. ff. ff.* O. erit in medio RS (76. p.) Ergo parallelogrammum EFGH. secabit latera in eadem ratione, scilicet bifariam (81. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIII.

IN *Quadrilatero minima summa ff. ff. æqualis est semisumma ff. ff. ex lateribus oppositis cū simili figura rectæ & bisecantis latera.*

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Quadrilaterum ABCD. & GE. bifariam secet latera opposita, in cuius medio O. erit *centr. ff. ff.* (68. p.) Ductis AO. BO. CO. DO. harum figuræ erunt minimæ. Dico igitur minimam summā ff. ff. AO. BO. CO. DO. esse æqualem semisummæ ff. ff. AB. DC. cum tota figura GE.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. DC. bisectæ sint in E. & G. erit E. *centr. ad A. B. & G. ad D. C.* (35. M. 1.) Ergo figuræ OA. OB. æquales sunt ff. AE + EB + 2OE. (32. M. 1.) Similiter ff. DO. OC. æquantur 2 ff. DG + GC + 2GO sed figura GE. æqualis est 4 ff. GO (3. l. 2.) vel 2 GO + 2OE. & cum AB. æqua-

lis sit 4 ff. AE. sunt AE + EB. dimidium figuræ AB. & similiter DG + GC. sunt dimidium figuræ DC (3. l. 2.) Ergo ff. ff. AO. BO. CO. DO. cum sint æquales AE + EB + 2EO. & DG + GC + 2GO. æquales etiam erunt dimidio ff. ff. AB. DC. & figuræ ex integra GE. Similiter demonstrabitur AO. BO. CO. DO. æquales esse dimidio ff. ff. AD. BC. cum figuræ ex tota HF. Ergo minima summa ff. ff. æqualis est semisummæ ff. ff. ex lateribus oppositis cum simili figuræ ex tota recta bisecante latera. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

IN Quadrilatero figuræ ex lateribus oppositis cum 2 ff. ff. ex bisecante reliquis oppositis sunt æquales.

2. Differentia ff. ff. ex bisecantibus æqualis est semidifferentiæ ff. ex binis lateribus oppositis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Sit Quadrilaterum ABCD. Dico ff. ff. AB + DC + 2GE. æquales esse ff. ff. AD + BC + 2HF. & differentiam inter ff. GE. & HF. æqualē esse semidifferentiæ inter ff. AD + CB. & AB + DC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam dimidium ff. ff. AB + DC. cū tota GE.

GE. æquatur minimæ summæ, cui etiã æquatur dimidium $ff. ff.$ AD + BC. cum tota HF. (83 p.) erunt hæ summæ inter se æquales: Ergo earum dupla erunt etiam æqualia, scilicet $ff. ff.$ AB + DC + 2GE. æquabuntur $ff. ff.$ AD + BC + 2HF. Quod erat, &c.

2. Sit $\square$ GE + $\square$ X æquale $\square$ HF. Ergo $2\square$ GE + $2\square$ X. æquatur $\square$ HF. sed $\square$ AB + $\square$ DC + $2\square$ GE. æq. $\square$ AD + $\square$ BC + $2\square$ HF (1. n.) Ergo $\square$ AB + $\square$ DC + $2\square$ GE. æqu. $\square$ AD + $\square$ BC + $2\square$ GE + $2\square$ X. Ergo si utrinque auferantur $2\square$ GE. remanebunt $\square$ AB + $\square$ DC. æqu. $\square$ AD + $\square$ BC + $2\square$ X. Ergo differentia inter $ff. ff.$ AB + DC. & AD + BC. sunt $2ff. X.$ & semidifferētia est figura X. sed figura X. est differentia $ff. ff.$ GE. & HF. ex *hypoth.* Ergo differentia $ff. ff.$ ex bisecantibus GE. & HF. æqualis est semidifferentiæ $ff. ff.$ ex binis lateribus oppositis AB + DC. & AD + BC. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXV.

IN Quadrilatero summa $ff. ff.$ ex bisecantibus latera opposita æquatur $ff. ff.$ ex bisecantibus cōtermina: summa verò $ff. ff.$ ex diagonijs uniuscuiusque est dupla, & utrique simul æqualis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Rectæ GE. HF. bisecant latera opposita, & EF.

EF.FG.GH.HE. contermina, diagonia verò sunt AC.DB. Dico igitur $\text{ff.}\text{ff.}$ GE+HF. æquales esse $\text{ff.}\text{ff.}$ EF+FG+GH+HE. tum $\text{ff.}\text{ff.}$ AC+DB. duplas esse $\text{ff.}\text{ff.}$ GE+HF. vel EF+FG+GH+HE. vnde $\text{ff.}\text{ff.}$ AC+DB. æquales esse $\text{ff.}\text{ff.}$ GE.HF.EF.FG.GH.HE.

DEMONSTRATIO.

CUm latera sint proportionaliter secta nēpè bifariam, est EFGH. parallelogrammū (73.p.) Ergo $\text{ff.}\text{ff.}$ GE.HF. æquales sunt $\text{ff.}\text{ff.}$ EF.FG.GH.HE. (57.p.)

2. Quia vt AH. est dimidium AD. ita AE. ipsius AB. sunt HE.DB. parallelæ, & vt AH. est dimidium AD. ita HE. ipsius DB. & similiter FE. ipsius AC. (2.l.6.) Ergo $\square$ HE. est quarta pars $\square$ DB. & $\square$ FE. est quarta pars $\square$ AC (3.l.2.) Ergo cum HE. & GF. sint quales (7.l.1.) erunt $\square$ HE+ $\square$ GF. dimidium $\square$ DB. & similiter $\square$ EF+ $\square$ HG. dimidium $\square$ AC. Ergo $\text{ff.}\text{ff.}$ DB.AC. sunt duplæ figurarum similium EF.FG.GH.HE. sed figuræ GE.HF. sunt æquales ipsis EF.FG.GH.HE. (84.p.) Ergo etiam $\text{fig.}\text{ff.}$ DB.AC. duplæ sunt $\text{ff.}\text{ff.}$ GE.HF. Vnde etiam $\text{ff.}\text{ff.}$ BD.AC. æquales erunt vtrique summæ, scilicet $\text{ff.}\text{ff.}$ GE.HF.EF.FG.GH.HE. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXVI.

IN quadrilatero minima summa $ff. ff.$ est quarta pars $ff. ff.$ ex lateribus, & diagonijs simul.

EXPOSITIO. Fig. 20.

Centrum $ff. ff.$ quadrilateri ABCD. sit O. Dico minimam summam $ff. ff.$ AO. BO. CO. DO. esse quartā partem $ff. ff.$ AB. BC. CD. DA. AC. DB.

DEMONSTRATIO.

Minima summa $ff. ff.$ AO. BO. CO. DO. æqualis est dimidio $ff. ff.$ AB. DC cum simili figura GE (83. p.) Similiter eadē minima summa æqualis dimidio $ff. ff.$ DA. BC. cum simili figura HF (83. p.) Ergo duæ minimæ summæ æquantur dimidio $ff. ff.$ ex omnibus lateribus AB. BC. CD. DA. cū similibus figuris GE HF. Ergo si utraque pars bifariam diuidatur, vna minima summa $ff. ff.$ æqualis erit quartæ parti summæ $ff. ff.$ ex omnibus lateribus AB. BC. CD. DA. cum dimidio $ff. ff.$ GE. HF. sed figuræ GE HF. sunt dimidium $ff. ff.$ ex diagonijs AC. DB (85. p.) Ergo dimidium $ff. ff.$ GE. HF. æquabitur quartæ parti $ff. ff.$ ex diagonijs AC. DB. Ergo si pro dimidio $ff. ff.$ GE. HF. substituatur quarta pars $ff. ff.$ ex diagonijs AC. DB. erit minima summa $ff. ff.$ æqualis quartæ parti $ff. ff.$ ex

oni-

omnibus lateribus AB. DC. CD. DA. cū quarta parte simul ff. ff. ex diagonijs AC. DB. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXVII.

IN quadrilatero Minima summa ff. ff. equalis est dimidio ff. ff. ex diagonibus cum simili figura ex recta bisecante ipsas.

EXPOSITIO. Fig. 20.

RECTA SR. bisecat diagonales AC. DB. & in illius dimidio O. est *centrum* ff. ff. (76. p.) Dico minimam summam ff. ff. AO. BO. CO. DO. æqualem esse dimidio ff. ff. AC. DB. cum simili figura SR.

DEMONSTRATIO.

CVM AC. DB. sint bifariam diuisæ est S. *cētr.* ff. ff. ad A. C. & R. ad D. B. (35. M. 1.) Ergo cum O. sit extra *centra* S. R. erunt figuræ AO. CO. æquales 2 ff. ff. AS. SC + 2 SO (60. M. 1.) tū BO. DO. æquales sunt 2 ff. DR. RB + 2 OR. (60. M. 1.) Ergo AO. CO. BO. DO. scilicet minima summa ff. ff. æqualis est 2 ff. AS. 2 SC. 2 DR. 2 RB. 2 SO. 2 OR. sed cum omnes rectæ sint bifariam diuisæ, est figura totius quadrupla figuræ ex dimidia recta (3. l. 2.) Ergo 2 ff. AS + 2 SC + 2 DR + 2 RB. æquales dimidio ff. ff. AC. DB. & 2 SO + 2 OR. æquales sunt figuræ SR.

Er-

Ergo $\text{ff. ff. AO. BO. CO DO.} \approx \text{quales dimidio}$
 $\text{ff. ff. AC. DB. cū simili figura ex tota SR}$ Quod
 erat, &c.

PROPOSITIO LXXXVIII.

IN quadrilatero figura ex lateribus æquantur
 figuris similibus ex diagonalibus, & ex dupla
 bisecante ipsas.

EXPOSITIO. Fig. 200.

Recta RS. bisecat diagonia AC. DB. Dico
 summam $\text{ff. ff. AB. BC. CD. DA.} \approx \text{qualem}$
 esse figuris similibus AC. DB. cum simili figu-
 ra duplæ RS.

DEMONSTRATIO.

Minima summa $\text{ff. ff. AO. BO. CO. DO.} \approx \text{qua-}$
 tur dimidio $\text{ff. ff. AC. DB. cum simili figu-}$
 ra RS. (87. p.) sed eadem minima summa est
 quarta pars $\text{ff. ff. AB. BC. CD. DA. AC. DB}$ (86.
 p.) Ergo dimidium $\text{ff. ff. AC. DB. cum simili}$
 figura RS. est quarta pars $\text{ff. ff. AB. BC. CD. DA.}$
 AC. DB. Ergo utriusque partis quadruplum
 æquale est: nempe 2 AC. 2 DB. 4 RS $\approx$ quæ AB. BC.
 CD. DA. AC. DB. Et si utrinque auferantur se-
 mel AC. DB. erunt $\text{ff. ff. AB. BC. CD. DA.} \approx$
 AC. DB. + 4 RS. vel + figura duplæ RS. quæ est
 $\approx$ 4 RS (3. l. 2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIX.

SI recta bifariam secet opposita latera quadrilateri, quodlibet recta punctum est *ctr. ff. dd.* quarum bina sint quadrata, & bina rectangula similia illi, quod fit ex partibus rectæ.

EXPOSITIO. Fig. 21.

RECTA GE. bifariam secet opposita latera AB. DC. Dico quodlibet punctum L. rectæ EG. esse *ctr. ff. dd.* quarum D. C. sint quadrata, & A. B. rectangula similia rectangulo E L G. ex partibus rectæ.

DEMONSTRATIO.

CUM AB sit bifariam diuisa in E. erit E. *ctr. ff. ff.* ad A. B. quæ figuræ similes sint $\square$ ELG. (35. M. 1.) Similiter G. erit *ctr. ff. ff.* ad D. C. quæ figuræ sint quadrata: Ergo in recta GE. erit *ctr. ff.* ad A. B. D. C. (63. M. 1.) Ergo cum GE. ita sit diuisa in L. vt duo quadrata GL. minima sint duobus rectangulis ELG. (10. M. 1.) erit L *ctr. ff.* ad A. B. C. D. (64. M. 1.) Quod, &c.



PROPOSITIO XC.

Si è duabus rectis altera bisecet opposita latera quadrilateri, & altera in quacumque similiratione secet reliqua latera; se ipsas in iisdem rationibus oppositè secant; & econverso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

In quadrilatero ABCD. rectæ EG. bisecat latera opposita AB. CD. & recta HF. similiratione secat reliqua latera AD. BC. nempe DH. ad HA. vt CF. ad FB. Dico HF. esse bifariam diuisam in L & GL. ad LE. esse vt DH. ad HA. Et econverso, si GE. bifariam diuidat opposita latera, & sint DH. ad HA. vt GL. ad LE. Dico etiã esse CF. ad FB. vt DH. ad HA. vel GL. ad LE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectangulum AHD. & quadratũ HD. habent æqualem altitudinem HD. sunt figuræ minimæ (10. M. 1.) Ergo cum recta DA. sit diuisa in figuras minimas, erit H. centr. ff. ad A. D. (34. M. 1.) Eadem ratione cum BC. sit diuisa similiter, erit F. centr. ff. ad BC. Ergo centr. ff. ad A. B. C. D. est in recta HF (63. M. 1) & quia figuræ A. D. similes sunt ipsis B. C. erit centr. ff. ad A. B. C. D. in dimidio rectæ HF. (64. M. 1.)

Insuper cum quadrata D. C. similia sint: &

etiam rectangula A. C. & rectæ DC, AB bifariam diuisæ, erit G. *centr. ff.* ad D. C. & E. ad A. B. 35. M. 1.) Ergo *centr. ff.* ad A. B. C. D. erit in recta EG (63. M. 1.) Ergo cū *centr. ff.* sit in vtraque recta HF. EG. erit in communi sectione L. Ergo recta EG. diuisa est in L. vt duo rectangula supra EL. similia dato A H D. minima sint duobus quadratis supra L G. similibus dato HD (64. M. 1.) Ergo recta EG. diuisa est in L. sicut AD. in H. (30. M. 1.) Ergo cum HF. sit bifariam diuisa in L. sicut DC. in G. & EG. sit diuisa in L. sicut AD. in H. rectæ HF. EG. se ipsas in iisdem rationibus oppositè secāt. Quod erat, &c.

Conuersa demonstratur. Quoniam si CF. ad FB. esset vt DH. ad HA. recta HF. transiret per punctum L. vt modo demonstratum est: Ergo cum eadem recta sit FLH. & HLE. recta HL continuata transiret per F. & efficit CF. ad EB. vt DH. ad HA. & vt GL. ad LE. & erit HF. bisecta in L. vt antea. Quod erat, &c.



PROPOSITIO XCI.

Si recta secet opposita quadrilateri latera in eadem ratione, & alia per eius dimidium sit in eadem ratione secta, hæc secabit bifariam reliqua latera non parallela.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN quadrilatero ABCD. recta HF. secat in eadem ratione latera DA. CB. & per eius dimidium L. recta GLE. sit in eadem ratione secta. Dico GE. bifariam diuidere latera DC. AB. si hæc non sint parallela.

DEMONSTRATIO.

SI enim recta GE. non diuidit bifariam latera DC. AB. præstet hoc recta XZ. quæ transibit per L. & erit XL ad LZ vt DH. ad HA. (90. p.) sed ex hyp. GL. ad LE. est vt DH. ad HA. Ergo XG. & EZ. erunt parallelæ, quod est contra hypothesein: Ergo impossibile est rectam GLE. sectam esse in ratione DHA. quin bifecet latera non parallela DC. AB. Quod erat, &c.



PROPOSITIO XCII.

Si recta bifecet opposita latera quadrilateri, & alia ipsam secans sit bifariam diuisa, secabit reliqua latera in ratione prioris.

EXPOSITIO. Fig. 21.

In quadrilatero ABCD. recta GE. bifecat latera DC. AB. & HLF. est bifariam secta in L. secans latera reliqua DA. CB. nō parallela. Dico DHA. CFB. sectas esse, sicut GLE.

DEMONSTRATIO.

Si enim HLF. nō secat latera in ratione GLE. fiat DP. ad PA. vt GL. ad LE. & erit etiam CR. ad RB. vt GL. ad LE. & PR. bifariam diuisa in L. (60. p.) Ergo cum HL. ad LF. sint in ratione æqualitatis, sicut PL. ad LR. erunt PH. & FR. parallelæ. (1. l. 6.) Quod est cōtra hypothesein: Ergo nulla recta HLF. que non secet latera in ratione GLE. poterit esse bifariam secta in L. Ergo, &c. Quod erat, &c.



PROPOSITIO XCIII.

SI recta bisecet quadrilateri opposita latera, & alia diametros fecet in quacumque ratione similiter, interfectio erit cētrum ff. dd. quarum duæ sint quadrata, & duæ rectangula similia illis, quæ ex partibus diametrorum fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE. bisecat latera DC. AB. & RS. fecat DR. ad RB. vt CS. ad SA. Dico intersectionē L. esse centr. ff. dd. quarum D. C. sint quadrata, & A. B. rectangula similia rectangulo DRB. vel CSA.

DEMONSTRATIO.

QVoniam DC. est bifariam diuisa erit G. cētr. quadratorū D. C. (35. M. 1.) & quia AB. est bifariam diuisa, erit E. centr. rectangulorū A. B. similium ipsis ASC. BRD (35. M. 1.) Ergo in recta GE. erit centr. $\square D. \square C. \square A. \square B.$ (63. M. 1.)

Deinde S. est centr. ff. dd. nempè $\square C. \square A.$ similis ASC (35. M. 1.) & similiter R. est centr. $\square D. \square B.$ similis BRD. vel ASC (35. M. 1.) Ergo in recta RS. erit centr. ff. dd. nempè $\square D. \square C. \square A. \square B.$ (63. M. 1.) Ergo cū idem centrum sit in vtraque recta GE. RS. erit in earum sectione L. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIV.

Si recta bisecet Quadrilateri opposita latera, & alia diametros in quacumque simili ratione, se ipsas pariter in iisdem ratio nibus oppositè secant.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE. bisecat DC. AB & recta RS. secat similiter DB. AC. Dico RS. bisectam esse in L. & GL. ad LE. esse vt DR. ad RB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam G. est centr. ff. ff. $\square D. \square C.$ & E. centr. ff. ff. $\square A. \square B.$ (35. M. 1.) & L. est centr. ff. dd. ad A. B. C. D. (93. p.) erit GE. diuisa, vt duo quadrata GL. minima sint duobus rectangulis supra LE. similibus dato BRD (64. M. 1.) Ergo cum EG. diuisa sit in L. in figuras minimas, sicut BD. in R. erit GL. ad LE. vt DR. ad RB. (30. M. 1.)

Deinde cum R. sit centr. ff. $\square D. \square B.$ & S. sit centr. ff. $\square C. \square A.$ (35. M. 1.) quoniam $\square D. \square B.$ similes figuræ sunt $\square C. \square A.$ centr. ff. dd. A. B. C. D. erit in dimidio rectæ RS (64. M. 1.) sed centr. ff. dd. A. B. C. D. est punctum L. (93. p.) Ergo recta RS. erit bifariam diuisa in L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCV.

S I è duabus rectis altera diagonales quadrilateri similiter secet, altera verò latera subcontrariè in quavis alia ratione, se ipsas pariter in iisdem rationibus oppositè secant: & qualibet est locus sectionis alterius.

EXPOSITIO. Fig. 22.

R ECTA RS. secat diagonia AS. ad SC. vt BR. ad RD. & IK. secat latera opposita subcontrariè in quavis alia ratione. DI. ad IC. vt BK. ad KA. Dico RS. & IK. secari oppositè in easdē rationes: nempe RM. ad MS. vt DI. ad IC & IM. ad MK. vt DR. ad RB. &c.

DEMONSTRATIO.

P RIMO diuidat GE. latera opposita æqualiter, & erit GL. ad LE. vt DR. ad RB. tum RL. ad LS. vt DG. ad GE (94. p.) Deinde si DG. & EB. diuidantur bifariā in I. & K. & ductæ intelligantur DE. BG. erit DEBG. quadrilaterum, & GE. DB. diametri: Ergo cum RL. secet in eadem ratione diametros, nempe DR. ad RB. vt GL. ad LE. erit etiam IM. ad MK vt DR. ad RB. & RM. ad ML vt DI. ad IG (94. p.) Ergo & componendo RM. ad RM + ML. vt DI. ad DI + IG (4. l. 5.) hoc est vt RM. ad MS. vt DI. ad IC. &c.

Tandem si IG. & EK. bifariam diuidantur

in X. & Z. tum DI. & KB. & ita infinitè eadem erit demonstratio: Ergo de quacumque recta IK. subcontrariè diuidentelatera in eadem ratione concludetur diuidi in M. vt DB. in R. & RS. in M. vt DC. in I. Quod erat, &c.

Hæc demonstratio ostensiuæ est de continua bisectione, illatio verò vniuersalis cōcluditur ad modum primæ libri sexti Elementorum Euclidis.

Vnde fit rectam RS. esse locum vbi quæuis recta IK. subcontrariè diuidens latera opposita, secatur vt diametri; & rectam IK. locum esse vbi quæuis RS. secans diametros in eadem ratione, secatur vt latera.

PROPOSITIO XCVI.

SI duæ rectæ diuidant in eadem ratione latera opposita, & diametros Quadrilateri, erunt ipsæ bifariam diuise, & locus intersectionis ipsarum erit recta bifecans reliqua latera.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta HF. diuidit latera DA. CB. & RS. diametros DB. CA. in eadem ratione: & recta GE. bifecat reliqua latera DC. AB. Dico rectas HF. & RS. bifariam secari in L. & intersectionē L. esse in recta GE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam HF. secatur in eadem ratione latera;
erit GL. ad LE. ut DH. ad HA (90. p.) Si-
militer quia RS. in eadem ratione secatur dia-
metros, erit GL. ad LE. ut DR. ad RB (94. p.) hoc
est ut DH. ad HA. *ex hypothesis*: Ergo utraque re-
cta interfecatur in eodem puncto L. rectæ GE.
sed HF. est bifariam diuisa in L. (90. p.) & RS.
bifariam diuisa in L. (94. p.) Ergo mutuo bise-
cantur, & locus intersectionis est recta GE.
Quod, &c.

PROPOSITIO XCVII.

SI duæ rectæ in eadem ratione diuidant latera
opposita quadrilateri, & diametros, quæ ex-
trema coniungunt. efficiunt parallelogrammum,
cuius centr. ff. ff. est in biseicante reliqua latera si-
militer diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta HF. diuidit latera DA. CB. in eadē ra-
tione, & similiter RS. diametros DB. CA.
Dico HR. RF. FS. SH. efficere parallelogram-
mum, cuius centr. ff. ff. est L. in recta GE. bise-
cante latera DC. AB. & GL. ad LE. ut DR. ad
RB.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in $\triangle ABD$. recta HR. in eadem ra-
tio-

tione diuidit latera DA.DB. sunt HR. AB. parallelæ (2.l.6.) Similiter in $\triangle ABC$. sunt SF. AB. parallelæ: Ergo HR. SF. sunt inter se parallelæ. Deinde in $\triangle DCA$. sunt DC. HS. parallelæ, & in $\triangle DCB$. sunt DC. RF. parallelæ (2.l.6.) Ergo sunt HS. RF. parallelæ inter se, & HRSF. parallelogrammum: Ergo æquales sunt HR. SF. tum RF. HS. (7.l.1.) Ergo cum HF. RS. sint diametri, & earum intersectio sit *centr. ff. ff.* (55. p.) & locus intersectionis sit recta GE, (96.p.) erit L. *centr. ff. ff.* parallelogrammi in recta GE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

Si recta in eadem ratione diuidat quadrilateri diametrum, & secantem subcontrariè similiter opposita latera, reliqua diametrum in eadem ratione diuidet, & ipsa diuidetur ut latera.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE. diuidat subcontrariè latera DG. ad GC. ut BE. ad EA. in quacumque ratione: & RLS efficiat DR. ad RB. ut GL. ad LE. Di- co etiam CS. ad SA. esse ut GL. ad LE. & RL. ad LS. esse ut DG. ad GC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam si CS. ad SA. sit ut DR. ad RB. tran- sit RS. per L. ubi est GL. ad LE. ut DR. ad RS.

RS. & RL. ad LS. vt DG. ad GC. (95. p.) Ergo cum recta RS. transeat per L. recta RL. transit per S. efficiens easdem rationes. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XCIX.

Si recta in eadem ratione subcontrariè secet latera opposita quadrilateri, & per quodlibet eius punctum ducatur alia inter diametros diuisa vt latera, diametros hec diuidet in ratione prioris: Vnde prior locus est, &c.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE subcontrariè efficiat in quacumque ratione DG. ad GC. vt BE. ad EA. & per quodlibet punctum L. rectæ GE. transeat RLS. inter diametros vt RL. ad LS. sit veluti DG. ad GC. Dico DR. ad RB. & CS. ad SA. esse vt GL. ad LE. &c.

DEMONSTRATIO.

Si non ita, fiat DP. ad PB. vt GL. ad LE. & ducta PLQ. erit CQ. ad QA. vt GL. ad LE & PL. ad LQ. vt DG. ad GC (98. p.) Ergo etiam erit vt RL. ad LS. ita PL. ad LQ. (1. l. 5.) Ergo PR. & SQ. vel diametri DB & CA. erunt parallelæ (2. l. 6.) quod est impossibile: Ergo nulla recta præter RS. potest in eadem ratione secare diametros. Quod erat. &c.

PRO-

PROPOSITIO C.

Recta quæ in eadem ratione subcontrariè secatur la tera opposita, secatur etiam diametros in eadem ratione, & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta GE. secatur opposita latera DG. ad GC. ut BE. ad EA. in quacunque ratione, & diametros DB. CA. in $z.$ & $x.$ Dico Dz. ad $zB.$ esse ut Cx. ad $xA.$ & e conuerso si Cx. ad $xA.$ sit ut Dz. ad $zB.$ & $zx.$ secet latera in G. & E. erit DG. ad GC. ut BE. ad EA.

DEMONSTRATIO.

Intersegmentum $xz.$ diuidatur in $o.$ ut $zo.$ ad $ox.$ sit veluti DG. ad GC. Quoniam punctum $o.$ est in recta GE. & $zx.$ transit per $o.$ diuisa $zo.$ ad $ox.$ ut DG. ad GC. secabit $zx.$ vel GE. diametros in eadem ratione (99. p.) Ergo Dz. ad $zB.$ est ut Cx. ad $xA.$ Quod erat, &c.

Conuersa patet, quoniam si GE. transit per $x.$ & $z.$ necessario $xz.$ transibit per G & E. &c.



PRO-

PROPOSITIO CI.

Omnēs rectæ secantes subcontrariè similiter opposita latera quadrilateri, diuiduntur ut diametri à bisecante latera; & intersegmentum bisecantis diuiditur ut latera.

Consect. Intersegmentum est locus ubi quæuis subcontraria secatur ut diametri.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Recta IK. in quacūque ratione efficiat subcontrariè DI. ad IC. ut BK. ad KA. & GE. diuidat bifariam eadem latera in G. & E. & secet diametros in x. & z. eritque xz. intersegmentum, vel pars bisecantis à diametris intercepta. Dico IK. secari in o. ut diametri in x. & z. & zx. secari ut latera in I. & K. nempe Io. ad oK esse ut Dz. ad zB. vel ut Cx. ad xA. & zo. ad ox. esse ut DI. ad IC. vel ut BK. ad KA. Vnde xz. locus est ubi quæuis IK. subcontrariè secans latera opposita diuiditur in ratione Dz. ad zB.

Idemque est de recta XZ. si ducatur vel quæuis alia, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam GE. bisecat latera, erunt subcontrariè ut DG. ad GC. ita BE. ad EA. Ergo GE. secat diametros in eadem ratione Dz. ad zB. ut Cx. ad xA. (100. p.) sed IK. subcontrariè se-

secat latera in eadem ratione ex *hyp.* & xz . quæ est ipsa GE . diametros etiam secat in eadem ratione: Ergo IK . & xz . secantur invicem oppositè in iisdem rationibus, nempe Io . ad oK . vt Dz . ad zB . vel vt Cx . ad xA . & zo . ad ox . vt DI . ad IC (95. *p.*) Quod erat, &c.

CONSECTARIUM.

Satis perspicuum est. Quoniam si quævis rectæ IK . XZ . secantes subcontrarie latera in eadem ratione diuidantur vt Dz . ad zB . quævis sectio incidet in aliquod punctum rectæ xz . vt patet ex demonstratis. Quod etiam liquet ex 95. *prop.*

PROPOSITIO CII.

Si in quolibet polygono omissis singulis angulis reliquorum centra inueniantur à quibus ducantur rectæ ad omissos angulos, omnes in eodem puncto se in eadem ratione secabunt: & centra constituent simile polygonum inuersum, & parallelum priori, cum eodem centro *ff. ff.*

EXPOSITIO. Fig. 23.

Sit Quadrilaterum, vel Pentagonum, &c. $ABCD$. & omissio angulo A . sit F . *cetr. ff. ff.* angulorum B . C . D . & E . *centr.* C . D . A . & H . *centr.* D . A . B . & G *centr.* A . B . C . Dico rectas FA . EB . HC . GD . omnes in eodem puncto I . secari in
ca-

eadem ratione, & EFGH. esse figuram similē
BADC. inversam, & EF. esse parallelam A B.
tum EH. CB. tum HG. DC. tum GF. DA. & I.
esse commune *centr. ff. ff.*

DEMONSTRATIO.

CUm anguli A. B. C. D. in data figura sint
quatuor, & F. sit *centr. ff. ff.* B. C. D. transibit
FA. per I. *centr. ff. ff.* B. C. D. A. & erit FI. quarta
pars totius FA (62. M. 1.) Eadem ratione de-
monstrabitur EB. trāsire per I. & EI. esse quar-
tem partem totius EB. similiter FA. GD. Ergo
vt EI. ad IB. ita HI. ad IC. & GI. ad ID. & FI. ad
IA. Ergo quoniam EI. ad IB. est vt FI. ad IA.
sunt EF. & BA. parallelæ (2. l. 6.) & similiter
GF. DA. tum GH. DC. tum HE. CB. Cum ergo
anguli sint æquales ex parallelismo H. C. tum
G. D. tum F. A. tum E. B. & latera proportiona-
lia HG. ad DC. vt EH. ad CB. &c. erunt figuræ
similes. Quod erat, &c.

Deinde cum BI. CI. DI. AI. concurrent in I.
centro ff. ff. ABCD & EI. HI. GI. FI. similiter di-
uidant angulos figuræ similis FEHG. concu-
rent etiam in *centro ff. ff.* Ergo I est commune
centrum ff. ff. vtriusque figuræ ABCD. & FE
HG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CHII.

SI in quolibet Polygono æquilatero etiam non regulari ex quolibet puncto ducantur perpendicularares in latera, omnium summa æqualis est summæ perpendicularium ex centro ff. ff. & semper est eadem.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Pentagonum æquilaterum A B C D E. & centr. ff. ff. F. si sumatur intra Polygonum quodlibet punctum X. vel Z. Dico summam perpendicularorum ex X. vel Z. æqualem esse summæ ex F. & ex X. & Z. esse eandem.

DEMONSTRATIO.

DVcantur FA. FB. FC. FD. FE. tum XA. XB. XC. XD. XE. & perpendiculara ex F. & X. Quoniam triacula ABF. ABX. habent eandem basim, se habent vt perpendiculara (1. l. 6.) Idemque est de reliquis: & de summa ad summam: Ergo quia summa triangulorum in F. æqualis est summæ triangulorum in X. etiam summa perpendicularorum, prout in 49. prop. Quod, &c.



CAPVT III.

DE FIGVRIS REGVLARIBVS.



*I*ndem ad regulares figuras peruenimus, in quibus Minimorum dignitas, & prestantia luculentius apparebit; cum omnia, quæ Magnus Euclides in decimo tertio libro de ordinatis spatijs demonstrabit, & multa non ignobilia Campani, & Hypsiclis Theoremata, aspera quidem, & senticosa, imò pleraque alia studio, ut spero, Iucunda Minime huius Geometriæ beneficio clarius, & facilius mirabili quodam compendio plana, & cum obvia fiant. Prius tamen aliqua de recta proportionaliter secta venient exponenda, quæ, licet ex decimo tertio Elementorum supponi potuissent, nè tamen Lectorem extra nostram Geometriam progredi cogeremus, non licuit hac in parte omitti.



PROPOSITIO CIV.

Si recta sit proportionaliter secta, & toti addatur maius segmentum, composita erit proportionaliter diuisa.

2. Si autem minus auferatur à maiori, hoc erit proportionaliter sectum.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit AC. proportionaliter secta in B. & continuetur CD. æqualis maiori segmento BC. Dico CA. esse in B. proportionaliter sectam.

2. Sit DA. proportionaliter secta in C. & fiat CB. æqualis minori segmento CD. Dico AC. esse proportionaliter sectam in B.

DEMONSTRATIO.

Cum sint continuæ AB. BC. AC. invertendo erit AC. ad BC. vel CD. vt CB ad AB (4. l. 5) Ergo AD. est diuisa in C. vt CA. in B. scilicet proportionaliter. Est. 5. lib. 13. Eucl.

2. Cum sint continuæ DA. AC. CD. erit DA. ad AC vt AC. ad CD. vel CB. Ergo AC. est proportionaliter secta in B. sicut DA. in C. Quod, &c.



PROPOSITIO CV.

Si recta sit proportionaliter secta, & minus extremum assumat dimidium maioris, composita poterit quintuplum assumpti, & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit recta proportionaliter secta FH. in G. & GX. sit dimidium segmenti maioris GH. Dico FX. posse quintuplum ipsius GX. *Econuerso* si FX. possit quintuplum ipsius GX. & fiat XH. æqualis GX. Dico FH. esse proportionaliter sectam in G.

DEMONSTRATIO.

Cum FG. sit differentia inter FX. & XH. vel XG. erit $\square FX.$ æquale $\square XH + \square HFG$ (2. l. 2.) sed quia sunt cōtinuæ FG. GH. HF. ex *hyp.* $\square GH.$ æquatur $\square HFG$ (1. l. 6) Ergo $\square FX.$ æq. $\square XH + \square GH.$ sed $\square GH.$ æq. 4 $\square XH$ (3. l. 2.) Ergo $\square FX.$ æq. $\square XH + 4 \square XH.$ hoc est $\square FX.$ æq. 5 $\square XH$ Ergo FX. potest quintuplum ipsius XH. Quod erat, &c. Est. 3. lib. 13. *Eucl.*

Econuerso si FX. possit quintuplum ipsius XH. sumatur KM. proportionaliter diuisa in L. & ZM. sit dimidium segmenti maioris LM. & $\square KL.$ erit æquale 5 $\square ZL.$ vt demonstratum est: sed etiam $\square FX.$ est æquale 5 $\square GX.$ ex *hyp.*
Er-

Ergo FH. est proportionaliter secta in G. sicut KM in L. Quod erat, &c.

Conuersa Euclidis non est.

PROPOSITIO CVI.

Si recta sit proportionaliter secta, & maius extremum assumat dimidium totius, composita potest quintuplum assumpti, & e conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit EG. proportionaliter diuisa in G. & GH. æqualis EG. & GX. dimidium GH. vel EG. Dico FX. compositam ex maiori segmēto FG. & ex GX. dimidio totius posse quintuplum ipsius GX. *Econuerso* si GX. possit quintuplum ipsius XG. vel XH. & fiat GE. æqualis GH. Dico EG. esse proportionaliter sectam in F.

DEMONSTRATIO.

Cum GH. æqualis sit toti GE. illique sit additum maius segmētum GF. erit composita FH. proportionaliter secta in G. (104. p.) Ergo cum GX. sit dimidium maioris segmēti GH. erit $\square FX. \text{eq. } 5 \square GX.$ (105. p.) Quod erat, &c. Est, 1. lib. 13. Eucl.

Econuerso si FX. possit quintuplum GX. sumatur IL. proportionaliter secta in K. & LZ. dimidium IL. vel LM. & $\square KZ.$ erit æquale $5 \square LZ.$ vel ZM. vt demōstratum est: Ergo EH. erit pro-

proportionaliter secta in G. & EG. in F. sicut KM. in L. & IL. in K. Quod erat, &c. Est. 2. lib. 13. Eucl.

PROPOSITIO CVII.

Si recta sit proportionaliter secta, composita ex tota, & minori segmento potest quintuplum maioris, & e converso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit PR. proportionaliter secta in Q. & OP. sit æqualis minori segmento PQ. Dico OR. posse quintuplum maioris segmenti QR. Et e converso si OR. possit quintuplum segmenti QR. diuisa OQ. bifariam Dico PR. proportionaliter fore diuisam in Q.

DEMONSTRATIO.

Diuisa QR. bifariam in S. cum sint æquales OP. PQ. tum QS. SR. erit PS. dimidiū OR. Ergo $\square OR. \text{eq. } 4 \square PS$ (3. l. 2) sed $\square PS. \text{eq. } 5 \square QS.$ (105. p.) Ergo $\square OR. \text{eq. } 20 \square QS.$ sed $4 \square QS. \text{eq. } \square QR.$ (3. l. 2) Ergo $\square OS. \text{eq. } 5 \square QR.$ Quod erat, &c.

Conuersa demonstr. Si quæuis pr. sit proportionaliter diuisa in q. & po. æqualis pq. erit $\square or. \text{æquale } 5 \square qr.$ vt antea: Ergo erit OR. diuisa vt or. & PR. proportionaliter in Q. sicut pr. in q. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CVIII.

Si recta sit proportionaliter secta $\square$ totius cum $\square$ minoris segmenti æquantur 3 $\square$ maioris segmenti, & e contra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

Sit recta FH. proportionaliter secta in G. Dico $\square$ FH + $\square$ FG. æquari 3 $\square$ GH. Et e converso si $\square$ FH + $\square$ FG. æquantur 3 $\square$ GH. Dico FH. esse proportionaliter sectam in G.

DEMONSTRATIO.

Dividatur GH. bifariam in X. cum FH. sit inæqualiter diuisa in X. & FG. sit differentia inter FX. XH. erit $\square$ FH + $\square$ FG. æquale 2 $\square$ FX + 2 $\square$ XH (2. l. 2.) sed $\square$ FX. æq. 5 $\square$ XH (105. p) Ergo 2 $\square$ FX + 2 $\square$ XH. erunt 12 $\square$ XH. Ergo $\square$ FH + $\square$ FG. æquantur 12 $\square$ XH. sed $\square$ GH. æquatur 4 $\square$ XH. & 3 $\square$ GH. æq. 12 $\square$ XH. Ergo $\square$ FH + $\square$ FG. æquantur 3 $\square$ GH. Quod erat, &c. Est 4. lib. 13. Eucl.

Conuersa demonst. Sit KM. proportionaliter secta in L. & erunt $\square$ KM + $\square$ KL. æq. 3 $\square$ LM. vt antea: Ergo FH. erit secta in G. vt K M. in L. scilicet proportionaliter. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CIX.

IN figuris regularibus centrum ff ff. est ipsum centrum circuli circumscripti.

DEMONSTRATIO. Fig. 26. 27.

Sit figura laterum parium ABCDEF fig. 26. Cum G centrū circuli diuidat bifariam omnes diametros erit G. centr ff. ff. ad A. D. (35. M. 1.) tum ad B. E. Ergo cum ex G. in G. nulla possit duci recta linea, ipsum G. erit centr. ff. ff. ad A. D. B. E (63. M. 1.) & cum G. sit etiam centrum ff. ff. ad C. F (35. M. 1.) ipsum G. erit etiā centr. ff. ff. ad A. B. C. D. E. F. (63. M. 1.) Quod, &c.

Deinde sit HIKLM. figura laterum impariū fig 27. & ex angulo H. ducatur diameter H P. quæ diuidet bifariam arcus I P M K P L. & consequenter etiam rectas IM. KL (2. l. 3) Ergo centr. ff. ff. ad I. M erit S. & R. centr. ad KL. (35. M. 1.) Ergo centr. ff. ff. ad I. K. L. M. est in diametro H P. (63. M. 1.) Ergo cum diameter H P. transeat per centr. ff. ff. ad I. K. L. M. & per punctum H. centrum ff. ff. ad omnia puncta H. I. K. L. M. erit in diametro H P. (63. M. 1.) Eadem ratione si ducatur diameter MN. bisecabit rectas HL & I K. & demonstrabitur in MN. esse centrum ff. ff. ad H. I. K. L. M. Ergo cum sit in

utraque diametro erit in *centro*, siue in com-
muni sectione O. Idēque est de quolibet alio
polygono. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CX.

IN omnibus spatijs ordinatis minima summa
ff. ff. æqualis est tot ff. ff. ex radio circuli circu-
scripti, quot sunt figurae regularis latera, aut an-
guli.

EXPOSITIO. Fig. 26.

Sit figura regularis ABCDEF. Hexagona: Di-
co minimam summam ff. ff. æqualem esse
6 ff. ff. ex radio GA. & in triangulo tribus, in
quadrato quatuor, & ita infinite.

DEMONSTRATIO.

QVoniam *centrum* circuli G. est *centrum* ff. ff.
spatij regularis (109. p.) si ex G. ducantur
radij ad omnes angulos, erit minima summa
GA + GB + GC + GD + GE + GF. scilicet to-
tidem figuræ ex radio circuli quot sunt angu-
li, vel latera; idemque est in omnibus spatijs
ordinatis: Ergo, &c. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXI.

IN spatijs ordinatis summa ff. ff. ex quolibet angulo ad reliquos est dupla minima: & equalis summa ff. ff. ex diagonijs cum 2. ff. ff. ex latere.

EXPOSITIO. Fig. 26.

Dico summā ex quolibet angulo æqualem esse duplo numero figurarū ex radio, quot sunt latera: Vnde in $\triangle$ erunt 6. in $\square$ erunt 8. in $\diamond$ erunt 10. &c. Idemque est de figuris ex diagonijs + 2 ff. ex latere polygoni.

DEMONSTRATIO.

Sit figura ABCDEF. si ex angulo A. ducantur AB. AC. AD. AE. AF. summa ff. ff. excedet minimam tot figuris ex radio quot sunt latera, vel puncta angularia (60. M. 1.) Ergo cum minima summa sit æqualis tot ff. ff. ex radio quot latera (110. p.) summa ex angulo continet bis minimam, & erit eius dupla. Vnde figuræ ex diagonijs AC. AD. AE. cum 2 ff. ex lateribus AB. AE. sunt ipsæ figuræ ex angulo A. Ergo duplæ sunt ipsius minimæ.



PROPOSITIO CXII.

Latus Trianguli regularis potest triplum radij circularis. 2 Et duodecuplum perpendiculi à centro 3 Et sesquitertium perpendiculi à vertice.

EXPOSITIO. Fig. 26.

Sit Δ regulare circulo inscriptum ACE. Dico AC. posse triplum GA. & duodecuplum GQ. & sesquitertium AQ.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC. AE. possunt 6 $\square$ AG. (111. p.) Ergo cum AC. AE. sint æquales potentia AC. erit 3 $\square$ AG. Est 12. lib. 13. *Eucl.*

2. Quoniam QG. est dimidium GA (1. p.) si potentia QG. est 1. erit potentia GA. 4 (3. l. 2) sed potentia AC. est tripla GA. Ergo potentia AC. erit 12. nempe duodecupla GQ.

3. Cum AQ. sit tripla GQ. (1. p.) si $\square$ GQ. est 1. erit $\square$ AQ. 9. sed $\square$ AC. est 12. Ergo $\square$ AC. ad $\square$ AQ. est vt 12. ad 9. vel vt 4. ad 3. vel sesquitertium.



PROPOSITIO CXIII.

IN Triangulo regulari potentia perpendiculari à vertice est noncupla potentia perpendiculari à centro. 2. Et dupla sesquiquarta radij. 3. Et tripla potentia segmentorum basis.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN $\triangle$ regulari ACE. Dico $\square$ AQ. esse ad $\square$ GQ. ut 9. ad 1. & ad $\square$ GA. ut 9. ad 4. & ad $\square$ CQ. ut 9. ad 3. vel 3. ad 1.

DEMONSTRATIO.

QVoniam GQ. est tertia pars ipsius AQ. (1. p.) qualium $\square$ GQ. est 1. erit $\square$ AQ. 9. Ergo $\square$ AQ. ad $\square$ GQ. est ut 9. ad 1. sed etiam qualium $\square$ GQ. est 1. est $\square$ GA. 4 (112. p.) Ergo $\square$ AQ. ad $\square$ AG. est ut 9. ad 4. vel duplum sesquiquartum. Deinde cum CQ. fit dimidium CE. vel AC. qualium $\square$ AC. est 12. erit $\square$ CQ. 3. scilicet quarta pars $\square$ AC. (3. l. 2.) sed qualium $\square$ AC. est 12 est $\square$ AQ. 9. (112. p.) Ergo $\square$ AQ. ad $\square$ CQ. est ut 9. ad 3. vel ut 3. ad 1. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXIV.

Latus Quadrati potest duplum radij circuli circumscripti.

2. Latus Quadrati, & Hexagoni aequè possunt ac latus Trianguli.

3. Diagonia Hexagoni possunt decuplum radij circularis.

DEMONSTRATIO. Fig. 26.

Si Quadratum circulo inscriptum ASDT. & quadrata AS. AD. AT. æqualia erūt $8 \square GA$. (III. p.) sed quia AD. est dupla GA. est $\square DA$. æquale $4 \square GA$. (3. l. 2.) Ergo $\square AS + \square AT$. æquantur $4 \square GA$. & cum AS. AT. sint æquales erit $\square AS$, æquale $2 \square AG$. Quod erat, &c.

2. Quoniam latus Hexagoni est ipse radius, & $\square AC$. est $2 \square AG$. erunt $\square AB + \square AS$. æqualia $3 \square AG$. hoc est ipsi $\square AC$ (III. p.) Quod erat, &c.

3. Quoniam $\square AB + \square AC + \square AD + \square AE + \square AF$. æquantur $12 \square AG$ (III. p.) si auferantur $\square AB + \square AF$. nempe $2 \square$ radij remanebunt quadrata diagoniorum æqualia $10 \square$ radij, &c.



PROPOSITIO CXV.

IN Pentagono Latus, & diagonum possunt
quintuplum radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum $HIKLM$. & eius diagonia
 HK . HL . Dico latus HI . & diagonum HK .
posse quintuplum radij OH .

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim HI . HK . HL . HM . æquantur
10. quadratis radij HO (III p.) Ergo cū
sint æqualia quadrata HI . HK . ipsis HM . HL .
erunt quadrata HI . HK . æqualia quinque qua-
dratis radij OH . Ergo possunt quintuplum ra-
dij. Quod erat, &c.

Hæc propositio fuit Hypsiclis.

PROPOSITIO CXVI.

Diagonum Pentagoni, & latus decagoni
possunt quadruplum radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono $HIKLM$. sit diameter HO P .
perpendicularis lateri KL . bifariam diuidēs
arcum KPL (2. l. 3.) eritque KP . latus Decago-
ni. Dico Diagonum HK . & latus KP . quadru-
plum posse radij.

DEMONSTRATIO.

QVoniam HP. est diameter dupla radij HO.
erit $\square HP \text{ aq. } 4 \square OH$ (3. l. 2.) sed cum an-
gulus HKP. in semicirculo rectus sit (3. l. 3.) $\square$
HK + $\square KP \text{ aq. } \square HP$ (4. l. 2.) Ergo $\square HK + \square$
KP. $\text{aq. } 4 \square OH$. Ergo possunt quadruplum ra-
dij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXVII.

Latus Pentagoni æquè potest, ac latus Hexa-
goni, & decagoni simul.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Cum radius HO. sit ipsum latus Hexagoni.
Dico latus Pentagoni HI. æquè posse, ac
Radius OH, & latus Decagoni KP.

DEMONSTRATIO.

QVoniam $\square HK + \square HI$. æquantur $5 \square OH$.
(115. p.) sed HK æquatur $4 \square HO - \square$
KP (116. p.) Ergo $\square HI$. æquatur $\square HO + \square$
KP. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXVIII.

IN Decagono primum, & secundum diagonum
æquè possunt ac latus, & tertium diagonum,
scilicet quatuor quadrata radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Decagonum HTIN, &c. primum diago-
nium

nium HI. secundum HN. tertium HK. Dico HI. & HK. æque posse ac HK & latus HT. vel KP. scilicet quatuor quadrata radij.

DEMONSTRATIO.
Quoniam HT. HI. HN. HK. HP. HL. HG. HM. HD, possunt 20. quadrata radij (111. p.) Ergo cum HP. possit 4 □ radij (3. l. 2.) reliquæ poterunt 16 □ radij: Ergo cum sint æquales HT. HI. HN. HK. ipsis HD. HM. HG. HL. ipsæ HT. HI. HN. HK. poterunt 8 □ radij: sed HK. & HT. vel KP. possunt 4 □ radij (116. p.) Ergo HI. HN. primum, & secundum diagonum poterunt alia 4 □ radij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXIX.

IN Decagono Latus, & secundum diagonum æque possunt, ac latus Trianguli nempe triplū radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Decagono HTIN, &c. Dico latus HT. & diagonum HN. posse triplum radij, & æquē ac latus Trianguli in eodem circulo inscripti.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI. HN. possunt 4 □ radij (118. p.) sed primum diagonum HI. cum sit latus Pentagoni potest □ Radij + □ HT. lateris decagoni (117. p.) Ergo HN potest 3 □ radij — □ HT.

HT. Ergo $\square HN + \square HT$. æquantur $3 \square$ radij, scilicet $\square$ Trianguli (112. p.) Quod erat, &c.

Aliter. HT. HI. HN. HK. possunt $8 \square$ radij ex *demonst. prop.* 118 sed HI. HK. possunt $5 \square$ radij (115. p.) Ergo HT. HN. possunt $3 \square$ radij. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXX.

IN Decagono tertium diagonium æquè potest ac secundum, & radius: Vnde $\square$ tertij superat $\square$ secundi toto $\square$ radij.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN decagono HTIN, &c. Dico $\square$ HK. superare $\square$ HN. toto $\square$ radij, vel $\square$ HK. esse æquale $\square$ HN + $\square$ OH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\square$ HN. æquale est $3 \square$ OH — $\square$ HT. (119. p.) sed $\square$ HK. est æquale $4 \square$ OH — $\square$ HT (118. p.) Ergo $\square$ HK. superat $\square$ HN. toto $\square$ OH. scilicet radij. Quod erat, &c.

Aliter. $\square$ HN + $\square$ HT. æquantur $3 \square$ OH. (119. p.) sed $\square$ HK + $\square$ HT. vel KP. æquantur $4 \square$ OH (118. p.) Ergo ablato vtrunque $\square$ HT. superabit $\square$ HK. ipsum $\square$ HN. toto $\square$ OH. Ergo tertium diagonium HK. æquè potest ac secundum HN. & radius OH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXI.

IN figuris regularibus potentiarum ratio est prout in sequenti tabella, qualium semi radius est 1.

In Δ & $\square$ Fig. 26.

1. $\square GQ$.	11.	ex hypoth.
2. $\square GA$. radij.	4.	3. l. 2.
3. $\square CQ$.	3.	112. p.
4. $\square AQ$. perpend.	9.	113. p.
5. $\square AC$. lateris Δ .	12.	112. p.
6. $\square AS$. lat. $\square$.	8.	114. p.
7. $\square AC + \square AE$.	24.	112. p.
8. $\square AQ - \square GA$.	5.	ex 3. $\square$ 4.
9. $\square AS - \square CQ$.	5.	ex 3. $\square$ 6.
10. $\square GA + \square GQ$.	5.	ex 1. $\square$ 2.
11. $\square AQ - \square CQ$.	6.	ex 4. $\square$ 3.

In $\square$ & decag. Fig. 27.

12. $\square HI + \square HK$.	20.	115. p.
13. $\square HN + \square HT$.	12.	119. p.
14. $\square HT + \square HK$.	16.	118. p.
15. $\square HI + \square HN$.	16.	118. p.
16. $\square HI - \square HT$.	4.	117. p.

Omnia hac constant ex precedentibus.

PROPOSITIO CXXII.

IN Pentagono regulari diagona interfecantur media, & extrema ratione, & maius segmentum est Pentagoni latus.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum $HIKLM$. & diagona IM HL . se interfecantia in V . Dico utrumque secari media, & extrema ratione, vel proportionaliter, & maius segmentum VL . æquale esse lateri ML . ipsius Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus HI . ML . sunt æquales, etiam anguli HMI . MHL (3. l. 3.) Ergo cum angulus MVL . externus sit duobus illis æqualis, erit duplus unius (3. l. 1.) sed etiam quia arcus IKL est duplus LM . angulus IML . erit duplus LHM (3. l. 3.) Ergo anguli VLM . MVL . sunt æquales: Ergo etiam latera opposita LM . LV . (5. l. 1.) Ergo cum recta MV . faciat angulum VMH . æqualem opposito MLH in $\triangle HML$. erit HM . vel ML . vel LV . media inter totam HL . & segmentum HV (3. l. 6.) Ergo cum sint continua HV . VL . LH . erit HL proportionaliter secta in V . & maius segmentum VL . est latus Pentagoni. Quod, &c.

Hæc Propositio est 8. lib. 13. Eucl.

PRO-

PROPOSITIO CXXIII.

IN Pentagono regulari diagonum basi paral-
lelura secat media, & extrema ratione per-
pendiculum.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN eodem Pentagono sit IM diagonum, ba-
si KL. parallelum, & HR. perpendiculum. Di-
co hoc secari in S. media & extrema ratione.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Triangulo RHL. recta LM. est
basi parallela, secabit proportionaliter
latera in S. & V. (2. l. 6.) sed recta HL. est secta
in V. media & extrema ratione (122. p.) Ergo
& HR. erit secta in S. media & extrema ratio-
ne. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXIV.

SI recta linea sit proportionaliter secta, & ma-
ius segmentum fiat circuli radius, minus erit
latus decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit LH. proportionaliter secta in V. & radio
LV. describatur circulus KVM. Dico minus
segmentum VH. esse latus decagoni circulo
KVM. inscripti.

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli HMV . VHM . sunt æquales (3. l. 3.) erunt æquales HV . VM (5. l. 1) sed quia arcus HM . est quinta pars circuli HMK . angulus MLM . erit decima pars circuli (3. l. 3.) Ergo quia angulus MLV . est in L . cētro circuli KVM . erit arcus VM . decima ipsius circuli pars. Ergo recta VM . subtendens hunc arcum erit latus decagoni: sed VM . est æqualis VH . minori segmento: Ergo minus segmentum est latus decagoni si maius fiat circuli radius. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXV.

Si Radius circuli, vel latus Hexagoni fuerit proportionaliter sectum, maius segmentum erit latus decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit radius LV . circuli KVM . proportionaliter sectus in Y . Dico maius segmentum VY . esse latus decagoni.

DEMONSTRATIO.

Si LH . sit proportionaliter secta in V . & auferatur minus HV . vel HY . à maiori VL . erit VL . proportionaliter secta (104 p.) sed si VL . sit radius, est HV . latus decagoni (124 p.) Ergo si radius VL . sit proportionaliter sectum, maius

ius segmentum VY. est latus decagoni. Quod erat, &c.

Hæc Propositio est Campani.

PROPOSITIO CXXVI.

Composita ex latere Hexagoni, & Decagoni est proportionaliter secta.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Si radio LV. addatur latus decagoni: Dico totam LH esse proportionaliter sectam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam si radio VL. proportionaliter secto, addatur maius segmentum VY. latus decagoni, vel VH. erit tota LH. proportionaliter secta (104. p.) Quod erat, &c.

Hæc prop. est 9. lib. 13. Eucl.

PROPOSITIO CXXVII.

In Pentagono perpendiculum a centro est dimidium composita ex latere decagoni, & Hexagoni, vel radio. 2. Et est æquale lateri decagoni, & continuationi eiusdem perpendiculi in peripheriam.

EXPOSITIO. Fig. 27.

In Pentagono HIKLM. si ex L. describatur arcus KVM. cum anguli MLH. & HLI. sint æquales, & quiuis decima pars circuli, erit

ar-

arcus QVM. quinta circuli pars: & recta QM. latus Pentagoni, & LZ perpendicularum a centro, & VM. latus decagoni. Dico LZ. esse dimidium radij LV. & lateris decagoni VM. vel LZ esse æqualem ZV. & VM.

DEMONSTRATIO.

Recta LH. est composita ex radio LV. & ex latere decagoni VH. vel VM. (125.p) sed radius OM. bisecat arcum HML. & chordam LH (2. l. 3.) Ergo LZ. est dimidiũ LH. & æqualis ZH vel ZV + VM. Quoderat, &c.

Hæc prop. est Hypsiclis.

PROPOSITIO CXXVIII.

Si radius lateri Pentagoni perpendicularis bifariam dividatur, erit perpendicularum proportionaliter sectum, & e converso.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum HIKLM. & Radius OR perpendicularis lateri KL. sit bifariam divisus in F. Dico perpendicularum OR a centro O. esse divisum in F. media, & extrema ratione. Et e converso si OR. sit proportionaliter divisum in F. Dico FO. esse semiradium.

DEMONSTRATIO.

Quia OR. est dimidium radij OP. & lateris decagoni PK (127.p.) cū OE sit dimidium

dium OP . erit FR . dimidium PK . Ergo OF . ad FR . erit vt OP . ad PK (5. l. 5.) sed $OP + PK$. est recta proportionaliter diuisa (125. p.) Ergo $OF + FR$. erit etiam proportionaliter diuisa. Quod, &c.

Econuersò. Si OF . ad FR . sit vt OP . ad PK . quia $OF + FR$. est dimidium $OP + PK$ (125. p.) erit OF . dimidium OP (4. l. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

SI Radius lateri Pentagoni perpendicularis bifariam diuidatur, erit semiradius à latere diuisus media, & extrema ratione, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pentagono $HIKLM$. sit radius OP . lateri KL . perpendicularis, & bifariam diuisus in F . Dico semiradium FP . esse proportionaliter sectum in R . Et *econuersò* si recta PF . sit proportionaliter secta in R . Dico PF . esse semiradium.

DEMONSTRATIO.

Perpendiculum OR . est proportionaliter sectum in F (128. p.) & maius segmentum est OF . vel FP . Ergo si à maiori segmento FP . auferatur minus FR . erit FP . proportionaliter sectum (104. p.) Quod erat, &c.

Econuersò si FP . sit proportionaliter secta, erit

erit PR. ad PF. vt PR. ad semiradium : Ergo PF. erit semiradius (2. l. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXX.

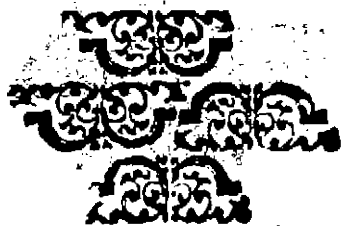
Radius per intersectionem diagonorum Pētagoni ductus secatur media, & extrema ratione.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Pētagono HIKLM. sint duo diagonia IL. KM. se intersecantia in C. quā ducatur radius OCP. Dico Radium OP. esse diuisum media, & extrema ratione in C.

DEMONSTRATIO.

IN Triāgulis CPK. CMH. anguli CPK. CMH. in eodem segmento KGH. sunt æquales (3. l. 3.) & anguli KCP. HCM. quia verticales (1. l. 1.) Ergo triangula sunt æquiangula (3. l. 1.) & latera proportionalia vt CM. ad MH. ita CP. ad PK (2. l. 6.) sed CM. est æqualis MH (122. p.) Ergo CP. est æqualis PK. lateri decagoni: sed PK. est maius segmētum radij OP. proportionaliter secti (125. p.) Ergo etiam PC. Vnde OP. est proportionaliter secta in C. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXXXI.

IN Pentagono si diameter per intersectionem diagonorum ducatur, maius segmentum ipsius potest quintuplum minoris.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum $HIKLM$. & illius diagonia KM . LI . se intersecantia in C . qua ducatur HCP . Dico segmentum maius HC . posse quintuplum minoris CP .

DEMONSTRATIO.

Radius enim OP . est diuisus media, & extrema ratione in C (130. p.) sed radius OH . aequalis est radio OP . Ergo CH . composita est ex minori segmento OC . & ex tota proportionaliter diuisa OH . vel OP . sed si recta sit proportionaliter diuisa, composita ex minori segmento, & tota potest quintuplum maioris (107. p.) Ergo CH . potest quintuplum CP . scilicet maius segmentum diametri potest quintuplum minoris. Quod, &c.



PROPOSITIO CXXXII.

Sex angulo Pentagoni cadant duo perpen-
dicula in diagonum, & latus continuatum,
perpendicularum minus eſt maius ſegmentum ma-
ioris proportionaliter ſecti.

IN PENTAGONO HIKLM. ſit HS perpendicularis diagono IM. & HB lateri LM. conti-
nuato. Dico HS. eſſe minus ſegmentum ipſius
HB proportionaliter ſectæ.

IN Pentagono HIKLM. ſit HS perpendicularis diagono IM. & HB lateri LM. conti-
nuato. Dico HS. eſſe minus ſegmentum ipſius
HB proportionaliter ſectæ.

DEMONSTRATIO.

IN $\triangle LHB$. MHS. ſunt æquales anguli MLH.
HMI. æqualibus arcubus MH. HI. inſisten-
tes (3. l. 3.) ſed anguli S. & B. ſunt recti æquales:
Ergo æquiangula ſunt triangula LHB. MHS.
(3. l. 1.) Ergo & latera proportionalia HS. ad
HM. ut HB. ad HL (2. l. 6.) Ergo alternando HS.
(ad HB) ut HM. ad HL. (4. l. 5.) ſed HM. eſt ma-
ius ſegmentum HL (122. p.) Ergo HS. eſt ma-
ius ſegmentum ipſius HB. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXXXIII.

IN Pentagono si ex angulo cadat perpendicularum in latus continuatum, lateris continuatio equalis est dimidio minoris segmenti diagonorum.

EXPOSITIO. Fig. 27.

EX H. cadat perpendicularū HB. in latus LM. continuatum. Dico continuationem MB. esse dimidium segmenti minoris diagonorum HV. vel VM.

DEMONSTRATIO.

CVM HÆK. & ML. sint parallelæ, in $\triangle \triangle$ ÆHV. MLV. proportionalia sunt latera ÆV. ad VM. vt HV. ad VL. (2. l. 6.) Ergo vt SV. dimidium ÆV. ad VM. vel VH. ita dimidium HV. ad VL (5. l. 5.) sed $\triangle \triangle$ SHV. BHM. cum anguli SHV. MHB. sint æquales ex æqualibus arcibus PL. DM. & anguli B. S. recti, sunt æquiangula (3. l. 1.) & proportionalia (2. l. 6.) Ergo SV. ad VH. vel VM. vt BM. ad MH. hoc est ad VL (122. p.) Ergo etiam BM. ad VL. est vt dimidium HV. ad VL (1 l. 5.) Ergo BM. est dimidium HV (2. l. 5.) Quod, &c.



PROPOSITIO CXXXIV.

SI ex angulo Pentagoni ducatur perpendicularum in latus continuatum, semidiagonium erit segmentum maius lateris continuati proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 27.

EX angulo H. pentagoni HKLM. cadat perpendicularum HB in latus LM. continuatū. Dico semidiagonium ZL. esse maius segmentum rectæ LB. proportionaliter sectæ.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Triangula ZLM. BLH. habent angulum ZLM. communem, & Z. B. rectos æquales, sunt æquiangula (3./1.) Ergo latera sunt proportionalia ZL. ad LM. vt BL. ad LH. (2./6.) & alternando ZL. ad BL. vt LM. ad LH. (4./5.) sed LM. est maius segmentum diagonij LH. proportionaliter secti (122. p.) Ergo LZ. erit maius segmentum rectæ LB. proportionaliter sectæ. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXXXV.

Perpendiculum à centro Pentagoni est minus
segmentum perpendiculi in latus proportio-
naliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum $HIKLM$. centrum ipsius O .
& OS perpendiculum in diagonum IM . &
 OE perpendiculum in latus HM . Dicb. OS . ef-
se minus segmentum perpendiculi OE . pro-
portionaliter secti.

DEMONSTRATIO.

Triangula OSV OEH . habent angulū SOV .
communem, & S . Erectos æquales: Ergo
sunt æquiangula (3. l. 1.) & habent latera pro-
portionalia OS . ad SV . vt OE ad OH (2. l. 6.) &
alternando OS . ad OE . vt OV . ad OH (4. l. 5.)
sed OV . per intersectionem diametrorum est
minus segmentum radij OD . vel OH . (130. p.)
Ergo OS . est minus segmentum perpendicu-
li OE . proportionaliter secti. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXXXVI.

IN Pentagono segmenta perpendiculari, inter verticem, & diagonia equalia sunt, & totum proportionaliter secatur à diagonijs in quatuor continuas.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit Pentagonum HIKLM. perpendicularum verticis H R. quod secatur à diagonijs I M. IL. in S. C. Dico segmenta HS. SC. esse equalia, & R C. CS. SR. RH. esse quatuor continuas.

DEMONSTRATIO.

CVm IS. RL. sint parallelæ erunt $\triangle\triangle$ CRL. CSI. proportionalia (2. l. 6.) sed CL. est minus segmentum, & CI. maius rectæ proportionaliter sectæ (122. p.) Ergo RC. erit minus segmentum, & CS. maius rectæ RS. proportionaliter sectæ: Ergo etiam SC. erit minus segmentum respectu totius SR (104. p.) sed etiam HS. est minus segmentum respectu maioris SR. (123. p.) Ergo æquales sunt SC. & SH (2 l. 5.) Ergo CR. ad CS. est vt CS. ad SR. & vt CS. vel HS ad SR. ita SR ad RH (22. P.) Ergo sunt continuæ RC. CS. SR. RH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXVII.

IN Pentagono si perpendiculo à vertice aufertur semiradius, residuum in centro, & diagonio basi parallelo secatur in quinque continuas secundum mediam, & extremam rationem.

EXPOSITIO. Fig. 27.

EX vertice H. pētagoni HIKLM. cadat perpendiculum HR. & IM. sit diagonium basi KL. parallelum, & HA. sit dimidium radij OH. Dico AR. in S. & O. secari in quinque continuas AS. SO. AO. OR. RA.

DEMONSTRATIO.

QVia OS. est diametro IM. perpēdicularis est OS. minus segmentum perpendiculi OR. proportionaliter secti (135. p.) sed si radius OP. sit bifariam sectus in F. est FR. minus segmentum ipsius OR. proportionaliter secti (128. p.) Ergo FR. & SO. æquales sunt (2. l. 5.) Ergo si ex æqualibus semiradijs OA. & FP. auferantur æquales rectæ OS. FR. remanebūt æquales AS. & RP. sed PF. est proportionaliter diuisa in R. (129. p.) Ergo etiam AO. erit proportionaliter diuisa in S (2. l. 5.) Ergo si rectæ OR. proportionaliter sectæ in F (128. p.) addatur maius segmentum OF. vel OA. erit AR. proportionaliter secta in O (104. p.) sicut PF. in R. (129.

(129.p.) & sicut OR.in F (128.p.) Ergo continuæ sunt secundum mediam, & extremam rationem PR RF.FO OR RA.Ergo si loco trium priorum substituantur ipsi æquales AS.SO.OA.erunt continuæ secundum mediā, & extremam rationem AS.SO.OA.OR.RA.Quod erat,&c.

PROPOSITIO CXXXVIII.

Latus, & diagonium Pentagoni quadruplū possunt rectæ compositæ ex semiradio, & latere decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN circulo HIKL.inscriptum sit Pentagonū, & decagonū, & radius OP.sit bifariam divisus in F.& sit HK.pentagoni diagonium. Dicolatus HI. & diagonium HK.posse quadruplum rectæ KPF.compositæ ex latere decagoni KP.& ex semiradio PF.

DEMONSTRATIO.

Composita ex radio, & latere decagoni est proportionaliter secta, & latus est minus segmentum (126 p.) sed composita ex minori segmento, & semisse maioris potest quintuplum ipsius semissis (105.p.) Ergo KPF.potest quintuplum semiradij PC sed radius OP. potest quadruplum semiradij PC (3.l.2.) Ergo

$\square OP.$ erunt $20 \square PC.$ sed $\square HI + \square HK.$
 $\text{æquantur } \square OP (115 p.)$ Ergo $\square HI + \square HK.$
 $\text{æquatur } 2 \square PC.$ Ergo quadrupla sunt $\square KPC.$
 quod æquatur $5 \square PC.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXIX.

IN Decagono secundum diagonium æquatur
recta composita ex radio, & latere decagoni.

EXPOSITIO. Fig. 27.

Sit $HTIN,$ &c. decagonum & $HN.$ secundum
 diagonium, & $KPO.$ recta composita ex la-
 tere decagoni $KP.$ & radio $PO.$ Dico diagoniũ
 $HN.$ æquale esse rectæ $KPO.$ vel $KP + PO.$

DEMONSTRATIO.

Quoniam $KPO.$ composita ex latere deca-
 goni, & radio est proportionaliter secta
 in $P.$ (126 p.) quadratum totius compositæ
 $KPO.$ simul cum quadrato minoris segmenti
 $KP.$ æquabũtur tribus quadratis maioris seg-
 menti, vel radij $PO.$ (108 p.) sed etiam qua-
 dratum $HN.$ secundi diagonij cum quadrato
 lateris decagoni $HT.$ vel $KP.$ æquantur tribus
 quadratis radij $OP.$ (115 p.) Ergo ablato com-
 muni quadrato $KP.$ remanebit $\square HN.$ æquale
 $\square KPO.$ Ergo & rectæ æquales erunt. Quod
 erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXL.

IN Heptagono regulari diagonum minus, & maius cum latere possunt septuplum radij.
 2. Si duo minora diagonia se interfecerint, latus est medium inter diagonum, & segmentum minus.

EXPOSITIO. Fig. 28.

Sit Heptagonum regulare circulo inscriptū ABCDEFG. minora diagonia AC. BD. se in H. interfecerint, & AD. sit diagonum maius. Dico 1. AB. AC. AD. posse septuplum radij. Dico 2. latus CB. esse medium inter HC. CA.

DEMONSTRATIO.

Quia AB. AC. AD. AE. AF. AG. possunt 14 □ radij (111. p.) Ergo AB. AC. AD. cum sint æquales AG. AF. AE. poterunt 7 □ radij. Quod &c.

2. Cum arcus BC. CD. sint æquales, etiam anguli CBH. CAB (3. l. 3.) Ergo in ΔABC. quia BH. facit angulum CBH. æqualem opposito BAC. erit latus BC. medium inter CH. CA. (3. l. 6.) Quod, &c.



PROPOSITIO CXLI.

IN Heptagono regulari diagonum minus secant ex maiori differentiam utrumque.

2. Latus est medium inter hanc, & diagonum maius.

3. Si ab hoc auferatur latus remanet maius segmentum minoris diagonij.

EXPOSITIO. Fig. 28.

Diagonum CE. secant AD. in L. Dico DL. esse differentiam inter CE. & AD. & DC. esse medium inter DL. & DA. & si ex EA. auferatur EK æqualis EF. residuum KA. esse æquale AH.

DEMONSTRATIO.

IN Triangulo CLA. Angulus ACE. continet 3 septimas semicirculi, & CAD. vnam septimam (3. l. 3.) Ergo CLA. continet 3 septimas (3. l. 1.) Ergo æquales sunt C. & L. Ergo & AC. AL (5. l. 1.) Ergo DL. est differentia inter AC. vel AL. & AD. Quod erat, &c.

2. In $\triangle ACD$. recta CL facit angulū DCL. æqualē opposito CAD (3. l. 3.) Ergo latus CD. erit mediū inter DL. & DA (3. l. 6) Quod, &c.

3. Anguli FDG. DFE. alterni sunt æquales (3. l. 3.) Ergo DG. EF. sunt parallelæ (2. l. 1.) similiter AE. GF. Tum AE. BD. tum CA. DG. parallelogramma igitur sunt GKEF. AHDK.

Er-

Ergo latera opposita FG. EK. sunt æqualia; tū KA. & HD. (7. l. 1.) Ergo si ex maiori diagonio AE. auferatur latus FG. vel EK. residuum KA. æquale erit maiori segmēto HD. minoris diagonij BD. ab alio minori CA. secti in H Quod &c.

SCHOLIUM.

DATO Heptagoni latere, & duplicis diagonij differentia, vel diagonio maiore, vel ratio lateris ad differentiam dictam, Geometrica Heptagoni descriptio ex hoc theoremate haberi potest. Tum etiam ex præcedenti, si potētia lateris, & vnius diagonij determinetur, quod à Geometriæ studiosis promouendum spero.

PROPOSITIO CXLII.

SI semicirculus diuisus sit in quaslibet partes æquales, ratio figuræ inscriptæ ad triangulare segmentū ex termino diametri, est ut semisumma laterum ad unum latus; & parallela determinans rationem dictam secat laterum semisummam.

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN semicirculo AFB. inscripta sit figura habens æqualia latera, & ex termino diametri B. recta BH. faciat triangulare segmentum

AB

ABH. Dico totum polygonum ABDEFGH. ad $\triangle ABH$. esse vt semisumma laterum æqualium AH. HG. GF. FE. ED. DB. ad vnum latus BD. Si autem ex B. ducantur BE. BF. BG. BH. & ex D. ipsis parallelæ in continuata latera nempe DI. IK. KL. LM. prout in (17. M. 1.) Dico AM. esse semisummam omnium laterum.

DEMONSTRATIO.

EX cetro C. ducatur CH. CG. CF. CE. CD. & $\triangle ABH$. erit duplum $\triangle ACH$. cū basis AB. sit dupla basis AC. & altitudo in H. sit eadem (1. l. 6.) Ergo cum ACH. HCG. sint æqualia, erit $\triangle BAH$. æquale $\triangle ACH + \triangle HCG$ sed totum polygonum componitur ex triangulis æquè altis ACH. HCG. &c. quorum bases sunt AH. HG. &c. Ergo totum polygonum ad $\triangle ACH + \triangle HCG$. est vt summa triangulorum ACH. HCG. GCF. FED. DCB. ad $\triangle ACH + \triangle HCG$. sed cum triacula sint æquè alta summa triangulorum se habet ad duo dicta, vt summa basium ad bases AH + HG (1. l. 6.) Ergo polygonum ad $\triangle ACH + \triangle HCG$. est vt summa laterum ad AH + HG. (1. l. 5.) sed vt summa ad duo latera ita semisumma ad vnum latus AH. (5. l. 5.) Ergo polygonum ad $\triangle ACH + \triangle HCG$. hoc est ad $\triangle ABH$. est vt semisumma laterum ad AH. (1. l. 5.) sed etiam AM.

ad

ad AH. est vt polygonum ad $\triangle ABH$ (17. M. 1)
Ergo AM. est semisumma laterū (2. l. 5.) Quod
erat, &c.

PROPOSITIO CXLIII.

Idem positis si ex termino diametri ad conti-
nuata latera demittantur perpendiculara, om-
nium summa ad perpendicularum maius, est vt se-
misumma laterum ad unum latus.

EXPOSITIO. Fig. 29.

Si ex B. ad latus ED. continuatum cadat per-
pendiculum BN. & ita in FE. &c. quæ om-
nissa sunt. Dico omnium summam ad per-
pendiculum maius BH esse vt semisumma la-
terum AM. ad latus AH.

DEMONSTRATIO.

Perpendiculum maius est BH. quia angulus
AHB. rectus est (3. l. 3.) sed triangula ABH.
HBG &c. cum habeant æquales bases AH. HG.
&c. se habent vt perpendiculara (1. l. 6.) Ergo
componendo summa triangulorum ad $\triangle A$
BH. est vt summa perpendicularorum ad perpē-
diculum BH. (4. l. 5.) sed polygonum, vel sum-
ma triagulorum ad $\triangle ABH$ est vt MA. ad AH.
(142. p) Ergo summa perpēdiculorum ad BH.
est vt AM. ad AH. Quod, &c.

PROPOSITIO CXLIV.

SI ex centro circuli recta bifariam diuidat arcum, & alia semissem, & ita infinite, & ex termino arcus ducantur per sectiones rectæ, & ex alio termino parallela determinantes rationem, istæ secabunt ex qualibet aliarum inscriptorum laterum summam.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Sit ACB. sector quilibet: & BE. diuidat bifariam arcum AC. in E. & BF. arcum AE. in F. & BG. arcum AF. in G. deinde ex A. ducantur AEL AFK. AG. & ex C. ducatur CL. parallela BE. & LK parallela BF. & K. parallela BG. & ita infinite. Dico AL. esse summam laterum inscriptorum AE. EC & AK. esse summam laterum AF. FE. ED. DC. &c. vel AL. esse duplam AE. & AK. quadruplam AF. & AG. octuplam ipsius AG. & ita infinite.

DEMONSTRATIO.

Recta BE. bisecat arcum in E. Ergo etiam chordam AC. in O. (2. l. 3.) sed OE. CL. sunt parallelæ ex hyp. Ergo vt AO. est æqualis OC. ita AE. ipsi EL (2. l. 6) Vnde AL. est dupla ipsius AE. vel æqualis ipsis AE. EC. Quod, &c.

Deinde cum BF. bifariam diuidat arcum AE. etiam chordam AE. in P. (2. l. 3.) erit AE. dupla

pla AP. & AL. quadrupla ipsius AP. sed cum LK. & PF. sint parallelæ ex *hypoth.* proportionales erunt, vt AL. quadrupla AP. ita AK. quadrupla AF. (2.l.6.) Quod, &c.

Tandem quia BG. bifecat arcum AGF. & chordam AXF. erit AK. octupla ipsius AX. & cum sint parallelæ BXG. & KO. erit vt AK. octupla ipsius AX. ita AO. octupla ipsius AG (2.l.6.) Ergo AL. æquatur summæ duorum laterum AE. EC. & AK summæ quatuor laterum AF. FE ED. DC. & ita infinite. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLV.

Si recta extremum sectoris tangat, & angulus ipsius, & chorda bifariam continue diuidatur, & similiter angulus centri, locus intersectionis erit peripheria, & parallela radijs idem efficiant quod in precedenti.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Sit ABC. sector maior, vel minor semicirculo, quem recta Am tangat in A & chorda sit AC. deinde AL. diuidat bifariam angulum CAM. & CR angulum CBA. Insupèr AK. bifecet angulum LAm & BS angulum EBA. & ita infinite. Dico AL. & BR se interfecare in puncto E. arcus AEC. & AK. BS. in puncto F. arcus AFE. &c. Tum si ex C. ducatur CL. parallela

radio BE. & LK. parallela ipsi BS. &c. Dico AL. esse duplam AE. & AK. quadruplam ipsius AF. & ita infinite omnino, ut in præcedenti.

DEMONSTRATIO.

Continuato radio AB. usque ad Z. & ducta ZC. tangens Am. cum secante AC. facit angulum CAM. æqualem Z. (7. l. 3.) sed angulus Z. est dimidium arcus AEC (3. l. 3.) Ergo CAM. est dimidium arcus AEC. sed CAL. est dimidiū CAM. ex hyp. & dimidium arcus CE (3. l. 3.) Ergo CE est dimidium arcus CA. similiter EF. demonstrabitur dimidium arcus AE. & ita infinite. Præterea cum BR. biseget angulum centri ABC. biseCAT arcum AEC. & transit per E. Ergo AL. BR. se intersecant in dimidio arcus AEC similiter AK & BS. in dimidio arcus AFE &c. Ergo cū BE biseget arcū, & ducta sit AEL. & similiter BF. & AFK. & ita infinite, parallelæ CL. LK. KO. &c. idem omnino efficient, quod in præcedenti, cum eadem sit hypothesis: Ergo AL. est dupla AE. & AK. quadrupla AF. &c. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CXLVI.

Idem positis eadem parallela determinant in tangente laterum circumscriptorum summam in eadem continua progressionem duplam.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SI BE. diuidat arcum AEC. bisariam, & AEL. angulum $\angle Am$. & CR. sit perpendicularis radio BC. erit ARC. figura circumscripta. Similiter SET. sit radio BE. perpendicularis, erit ASETC. figura circumscripta. Idemque esset si per puncta F. & D. ducerentur perpendiculares radijs BF. BD. &c. Dico ergo rectam CL. continuatam in m . secare Am . duplam ipsius AR. vel æqualem AR. & RC. & Ln . parallelam radio BFS. secare An . quadruplam ipsius AS. vel æqualem AS. SE. ET. TC. & ita infinite, &c.

DEMONSTRATIO.

CUm recta CLm . sit parallela radio BER. in $\triangle AER$. ALm . sunt latera proportionalia (2. l. 6.) sed AL. est dupla ipsius AE. (145. p.) Ergo Am . est dupla ipsius AR. Similiter quia Ln . est parallela BFS. sunt latera proportionalia (2. l. 6.) sed AK. est quadrupla ipsius AF (145. p.) Ergo An . est quadrupla ipsius AS. & similiter si oc. parallela sit AG. erit Ac. octupla ipsius AG. & ita infinite. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLVII.

F*igura inscripta est medio loco proportionalis inter inscriptam, & circumscriptam dimidio laterum numero.*

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt $\triangle ABC$. quarta pars quadrati inscripti circulo, & $ABCR$. quarta pars circumscripti, & $ABCEA$. quarta pars octagoni inscripti. Dico octagonum inscriptum esse mediū proportionale inter quadratum inscriptum, & circumscriptum. Similiter decagonū inscriptum esse medium proportionale inter pentagonum inscriptum, & circumscriptum, &c.

DEMONSTRATIO.

IN $\triangle$ rectangulo BAR . est AO . perpendicularis basi BR (2. l. 3.) Ergo BA vel BE . radius est medius inter BO . & BR (3. l. 6.) sed triangula BOA . BEA . BRA . æquè alta in A . sunt vt bases BO . BE . BR . (1. l. 6.) Ergo cum BE . sit media inter BO . & BR . erit $\triangle BEA$. medium inter $\triangle BOA$ & $\triangle BRA$. (1. l. 5.) & similiter BEC . inter BOC . & BOR . Ergo componēdo $BAEC$. quarta pars octagoni inscripti media erit inter $BAOC$ & $BARC$ (4 l. 5.) Ergo & totum octagonum inscriptum medium erit inter $\square$ inscriptum, & $\square$ circumscriptum (5. l. 5.) Quod, &c.

Si-

Similiter BFA. ostendetur medium inter BPA. BSA. Ergo figura 16. laterum inscripta AFEDC. media erit inter octagonum inscriptum AEC. &c. & circumscriptum ASTC. &c. & ita infinite. Quod &c.

PROPOSITIO CXLVIII.

Perimeter figura inscripta est medio loco proportionalis inter perimetrum circumscripta eodem numero laterum, & inscripta dimidio laterum numero.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Sit BAEC. quarta pars Octagoni inscripti: & ASTC. circumscripti, & AOC. quadrati inscripti. Dico perimetrum AEC. &c. esse medium inter AOC. & ASTC. & ita de reliquis.

DEMONSTRATIO.

Recta AL. est æqualis AE. EC. (145. p.) & recta An. æqualis AS. SE. ET. TC. (146. p.) Deinde anguli CAL. LAN. æquales sunt, & anguli ACL. ALn. recti æquales: Ergo $\triangle\triangle$ ACL. ALn. æquiangula sunt (3. l. 1) & latera proportionalia (2. l. 6.) vt AC. ad AL. ita AL. ad An. Ergo AL. vel AE. EC. media est inter AC. & An. vel AS. SE. ET. TC. & vt quarta pars ad quartam partem, ita totum ad totum (5. l. 5.) Similiter
AK.

AK. ostendetur media inter AL. & AC. & ita infinite. Quod, &c.

PROPOSITIO CXLIX.

IN Triangulo rectangulo dimidium lateris est medium geometricum inter semidifferentiam reliqui, & hypotenuse, & medium arithmeticum ipsorum.

EXPOSITIO. Fig. 31.

Sit $\triangle ABC$. rectangulum, & DC. dimidium lateris BC. & EC. differentia lateris AB. & hypotenuse AC. diuisa EC. bifariam in F. erit AF. medium arithmeticum inter AB. vel AE. & AC. tum CF. erit semidifferentia eorundem. Dico DC. esse medium geometricum inter AF. & FC.

DEMONSTRATIO.

Quadratum AC. æquatur $\square AE + \square EC + 2\square AEC$ (1. l. 2.) sed $\square AEC$ æquatur $2\square AEF$. quia altitudo EC. est dupla EF (1. l. 6.) & $\square EC. æq. 4\square EF$ (3. l. 2.) Ergo $\square AC. æq. \square AE + 4\square AEF + 4\square EF$. sed $\square AEF + \square EF. æq. \square AFE$. vel AFC (1. l. 2.) Ergo $\square AC. æq. \square AE$. vel AB. $+ 4\square AFC$. sed etiam $\square AC. æq. \square AB + \square BC$. (4. l. 2.) Ergo $\square BC. æq. 4\square AFC$. sed $\square BC. æq. 4\square DC$ (3. l. 2.) Ergo $\square DC. æq. \square AFC$. Ergo sunt continuæ FC. CD. FA. (1. l. 6.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CL.

IN Triangulo rectangulo, recta quæ ex angulo
bifecat unum latus, minor est semper medio
arithmetico inter reliquum latus, & hypotenu-
sam; & etiam geometrico si hac non fuerit tripla
illius.

EXPOSITIO.

Sit $\triangle ABC$. rectangulum, & AD . bifecet la-
tus BC . & AF . sit medium Arithmeticum in-
ter AB . AC . Dico AD . semper esse minorē ipsa
 AF & AD . esse minorē medio geometrico inter
 AB . AC . quotiēs AC . non est tripla AB . si verò
 AC . tripla fuerit AB . erit AD . mediū: vel minor
medio, si AC . fuerit plusquam tripla ipsius AB .

DEMONSTRATIO.

QVoniā angulus B . est rectus $\square AD$. est æqua-
le $\square AB + \square BD$ (4 l. 2) & $\square AF$. est æqua-
le $\square AE + \square EF + 2\square AEF$. hoc est. $\square AF$. æq. $\square$
 AE . vel $AB + \square AFE + \square AEF$ (1. l. 2) sed $\square AFE$.
æq. $\square BD$ (149. p.) Ergo $\square AF$. æq. $\square AB + \square$
 $BD + \square AEF$. Ergo $\square AF$. superat $\square AD$. toto
 $\square AEF$. Ergo medium arithmeticum AF . sem-
per est maius recta AD . &c.

2. Si AC . ad AD . habeat rationem mino-
rem tripla, invento medio Z . inter AC . AD . erit
ratio $\square AC$. ad $\square Z$. minor tripla, nēpē vt AC .

Y

ad

ad tertiam AB (4. l. 6) & similiter $\square Z.$ ad $\square AB.$
 Ergo & differentiae quadratorum erunt etiam
 in eadē ratione AC. ad AB. quia quadrata sunt
 continua, & differentiae in eadem ratione (4.
 l. 5.) sed quia $\square AC.$ superat AB. toto $\square BC$ (4.
 l. 2.) hoc est $4\square BD$ (3. l. 2.) & $\square AD.$ superat $\square$
 AB. vno $\square BD$ (4. l. 2.) $\square AC.$ superabit $\square AD.$
 in $3\square BD.$ Ergo differentiae quadratorum AC.
 AD. AB. sunt in maiori ratione quam differen-
 tia quadratorum AC. Z. AB. Vnde Z. maior
 erit quam AD. Quod, &c.

Hinc si AC. fuerit tripla AB. erit AD. æqua-
 lis Z. vel minor si AC. sit plusquam tripla ip-
 sius AB.

*Hæc duæ propositiones ad approximandā circu-
 li quadraturam inservient in fine cap. 4.*

PROPOSITIO CLI.

Polygona regularia, vel irregularia, quæ ha-
 bent æquales rationum altitudines, se habent
 ut bases, & e converso.

EXPOSITIO. Fig. 32.

Sint Polygona ABCD. KLMN & diagonijs
 parallelæ CF. FG. tum NO. OV. VP. deter-
 minent rationum altitudines GH. PQ (prout
 in 17 M. 1.) Si GH. PQ. sint æquales. Dico $\square$
 ABD. ad $\square KMN.$ esse ut basis AB. ad KL. Si ve-
 rò

rò $\square$ ABD. ad $\square$ KMN. sit vt basis AB. ad KL.
Dico altitudines rationum GH. PQ. esse æqua-
les.

DEMONSTRATIO.

DVctis BG. KP. est $\triangle$ ABG. æquale polygo-
no AB CDE. & $\triangle$ KLP. æquale $\square$ KMN.
(18. M. 1) sed $\triangle$ ABG. ad $\triangle$ KLP. est vt basis AB.
ad KL. cum altitudines GH. PQ. sint æquales
(1. l. 6.) Ergo $\square$. ad $\square$. est vt AB. ad KL (2. l. 5.)
Quod, &c.

Econuersò si $\square$. ad $\square$. sit vt AB. ad KL. etiam
 $\triangle$ ABG. ad $\triangle$ KLP. erit vt AB. ad KL (2. l. 5.) Er-
go altitudines GH. PQ. erunt æquales (1. l. 6.)
Quod, &c.

PROPOSITIO CLII.

Polygona quæ habent æqualem basim se ha-
bent, vt rationum altitudines. & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 32.

Sint polygona $\square$ & $\square$. quorum bases AB. KL.
sint æquales. Dico $\square$. ad $\square$. esse vt altitudo
GH ad PQ. & econtra si $\square$. ad $\square$. sit vt GH. ad
PQ. Dico bases AB. KL. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

ETenim $\triangle$ ABG. ad $\triangle$ KLP. est vt altitudo
GH. ad PQ (1. l. 6.) sed $\triangle$ ABG. est æquale $\square$.
& $\triangle$ KLP. est æquale $\square$ (18. M. 1.) Ergo $\square$. ad

O. est vt GH. ad PQ. Quod erat, &c.

Econuerso. Si O. ad O. sit vt GH. ad PQ. etiam $\triangle ABG.$ ad $\triangle KLP$ erit vt GH. ad PQ (2. l. 5.) sed triangula quæ se habent vt altitudines, habent æquales bases (1. l. 6.) Ergo bases AB. KL. sunt æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIII.

Polygona, quæ habent rationum altitudines, & bases reciprocas sunt equalia, & econuerso.

EXPOSITIO. Fig. 32.

Sit O. & O. quorum bases, & rationum altitudines sint reciproce proportionales; vt AB. ad KL. ita PQ. ad GH. Dico O. esse æquale O. & econuerso si O. sit æquale O. Dico esse reciproce proportionales bases, & altitudines AB. ad KL. vt PQ. ad GH.

DEMONSTRATIO.

Et enim cum bases, & altitudines sint proportionales reciproce, est $\triangle ABG.$ æquale $\triangle KLP$ (1. l. 6.) sed etiam $\triangle ABG.$ est æquale O. & $\triangle KLP.$ est æquale O (18. M. 1.) Ergo etiam O. erit æquale O. Quod erat, &c.

Econuerso. Quia triangula sunt polygonis æqualia; & polygona inter se ex hyp. etiam triangula inter se: sed triangula æqualia habent

bent bases, & altitudines reciprocas (1. l. 6.)
Ergo vt AB ad KL. ita PQ ad GH. &c.

PROPOSITIO CLIV.

Polygona qualibet inter se habent rationem
compositam, ex rationum altitudinibus, &
basibus.

EXPOSITIO. Fig. 32.

Sint idem $\square$ & $\circ$. Dicorationem Pentago-
ni ABCDE ad Hexagonum KLMN, esse cō-
positam ex rationibus AB. ad KL. & GH. ad
PQ.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Triangulum ABG. est æquale Pē-
tagono ABCDE. & Triangulum KLP.
Hexagono KLMN (18. M. 1.) erit Pētagonū
ad Hexagonum, vt Triangulum ABG. ad triā-
gulum KLP (2. l. 5.) sed Triangula habent ra-
tionem compositam ex basibus, & altitudini-
bus (1. l. 6.) Ergo etiam Pentagonum ad He-
xagonum habebit rationem compositam ex
AB. ad KL. & GH. ad PQ. Quod erat, &c.



PROPOSITIO CLV.

SI Polygonum habeat equalem rationis altitudinem, aliorum summam, erit ad Polygonorum summam ut basis ad basium summam, & e converso.

2. Si habeat equalem basim aliorum summam; erit ut altitudo ad altitudinum summam, & e converso.

3. Si habeat basim, ut altitudinem reciprocas aliorum summis, erit illud omnium summam æquale, & e contra.

4. Polygonum ad aliorum summam habet rationem compositam ex basibus, & altitudinibus.

5. Omnia prædicta intelligenda etiam sunt de Polygonorum summa ad summam aliorum.

DEMONSTRATIO.

Sumitur ex Triangulis habentibus eandem Polygonorum basim, & rationis altitudinem; quæ cum sint Polygonis singulatim æqualia, de Polygonis omnia prædicta concludunt, siue ordinata, siue inordinata sint.



CAPVT IV.

DE RESOLUTIONE

PROBLEMATVM.



VI Theoremata omnia in præmissis capitibus iam demonstrata perceperit, leui meditatione problemata, quam plura excogitare poterit, & resolueret, cum maior eorum pars geometricæ praxi accommodari possit. Nos aliqua delibabimus, nè videamur praxim reliquisse intactam: omnium tamen quæ occurrunt non persequemur, illa enim quæ ex primis 13 propositionibus inferuntur, Trigonographica iam prælo parata committimus; alia vero Lectorum ingenio investiganda, proponenda, & resolvenda commissa volumus, quo maiorem possint & voluptatem, & fructum ex meditatione percipere: etenim illa, quæ proprio Marte inveniuntur, singularem pariunt delectationem, & studiosos nouo induunt animo, ut & maiora audiant, & promoueant.

PROPOSITIO CLVI.

Problema 1.

Datum Triangulum ex dato in latere puncto in quasumque rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 33.

Sit datum $\triangle ABC$. & punctum in latere D. petitur vt diuidatur $\triangle$ in rationes similes ijs, in quas diuisa est recta xz . punctis $g.p.q.y$.

Constructio. Ex dato puncto D. in angulum oppositum C. ducatur recta DC. & ex angulo B. recta BE. parallela ipsi DC. occurrens lateri AC. cōtinuato, & erit E. altitudo rationis quadrilateri ADBC (14 M. 1.) Diuidatur ergo AE. in F. G. H. I. sicut xz . in $g.p.q.y$ (2. p. 3) & ductis IK. HL. parallelis EB. Dico DF. DG. DL. DK. diuidere $\triangle$ sicut xz .

DEMONSTRATIO.

Triangulum ADF. ad $\triangle FDG$ est vt AF. ad FG (1. l. 6) hoc est vt xg . ad gp . & $\triangle LDK$. ad $\triangle KDB$. vt LK. ad KB (1. l. 6.) vel vt HI. ad IE. (2. l. 6.) vel vt qy . ad yz . Deindè $\triangle CDH$. est æquale $\triangle CDL$ supra eandem basim CD. & inter parallelas CD. HL. (8 l. 1.) Ergo addito cōmuni GDC. erit trapezium GDL. æquale $\triangle GDH$. sed $\triangle FDG$. ad $\triangle GDH$. est vt basis FG. ad GH. (1. l. 6.) Ergo $\triangle FDG$. ad trapezium GD LC.

LC. est etiam vt FG ad GH. (2. l. 5.) nempe ex constr. vt gp. ad pq. Ergo totum triangulum diuisum est sicut xz. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVII.

Problema 2.

Datum Triangulum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta ad angulum, in quas-
cumque rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 34.

Sit $\triangle ABC$. punctum D. & recta in angulum DA. petitur vt ex D. diuidatur triangulum in quatuor partes, prout recta xz. diuisa est in p. q. y.

Constructio. Ducantur ex D. in angulos rectæ DB. DC. & fiat AE. parallela DC. occurrens lateri CB. continuato in E. & EF. parallela DC. occurrens lateri AC. continuato. Diuidatur postea AF in G. H. I. vt xz. in p. q. y. (2. p. 3.) & ducantur HM. IK. parallelae CD. & quia K. est extra B. in continuatione lateris fiat KL. parallela ipsi BD & ducantur DG. DM. DL. Dico $\triangle ABC$. rectis DA. DG. DM. DL. diuisum esse in ratione rectæ xz.

DEMONSTRATIO.

IN trapezio ADMC. quia MH. est diagonio DC. parallela, erit $\triangle ADG$. ad segmentum

Z

DM

DMCG. vt AG. ad GH. (14. M. 1.) Deinde in Polygono GDABC. quia diagonia sunt DB. DC ipsis parallelæ AE. LK. & EF. KI. MH. determinant segmentorum rationes in recta GF (17. M. 1.) Ergo GDMC. ad MDLB. est vt GH. ad HI. vel vt $pq.$ ad $qy.$ & MBLD. ad LDA. est vt HI. ad IF. vel vt $qy.$ ad $yz.$ (17. M. 1.) Ergo totum $\triangle ABC$. diuisum est in quatuor partes, prout recta $xz.$ in $p. q. y.$ Quoderat, &c.

PROPOSITIO CLVIII.

Problema 3.

Datum Triangulum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta in latus in datas partes, vel rationes diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sit $\triangle ABC$. punctum D. recta DE. petitur vt diuidatur in duas, vel plures partes, prout recta $xz.$ diuisa est in $p.$ &c.

Constructio. Continuentur omnia latera prout in fig. 35. & ex D. in angulos ducantur DB. DC. DA. tum EF. sit parallela DB. & FG. ipsi DC. & GH. ipsi DA. Diuidatur præterea EH. in I. prout $xz.$ in $p.$ nempe EI. ad IH. vt $xp.$ ad $pz.$ & fiat IK. parallela HG. si autem IK. secet lateris continuationem, fiat KL parallela GF (similiter procedendum est quosque vna ex paral-

rallelis secet aliquod latus) Si ergo ducatur DL. Dico segmentum DEACL. ad DEBL. esse in data ratione $xp.$ ad $pz.$ vel triangulum esse diuisum vt $xz.$

DEMONSTRATIO.

IN Polygono DEACL. quoniam LK. KI sunt diagonijs CD. DA. parallelæ est segmentum AED ad DACL. vt EA. ad AI (17. M. 1.) Similiter in Polygono DACBE. quia EE. FG. sunt diagonijs DB. DC. parallelæ, & LK. ipsi DC. est segmentum DACL. ad DEBL. vt AK. ad KG. (17. M. 1.) hoc est vt AI. ad IH (2. l. 6.) Ergo rationes ex æqualibus compositæ erunt æquales (1. l. 5.) nempe segmentum AED + DACL. ad DEBL. erit vt EA + AI. ad IH. sed DEA + DACL. est segmentum DEACL. & EA + AI. est EI. Ergo segmentum DEACL. ad DEBL. est vt EI. ad IK. *velex constr. vt xp. ad pz.* Quod erat, &c.

Eadem erit constructio, & demonstratio si triangulum in tres, quatuor, vel plures partes sit diuidendum data earum ratione, vt ex ipsa constructione liquet.



PROPOSITIO CLIX.

Problema 4.

Datum triangulum ex dato intra ipsum puncto, in quascumque partes, data earum ratione dividere.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sit datum triangulum ABC. & punctum intra ipsum D. quod Δ in quorcumque partes data earum ratione dividendum sit.

Constr. Si ducatur recta DA. vel DB. vel DC. ad quemvis angulorum dividetur triagulum prout in *prop.* 157. & problema tres solutiones admittet. Si verò ducatur in quodlibet latus, quævis DE. poterit triangulum in quorcumque partes diuidi prout in *prop.* 158.

DEMONSTRATIO.

EX ipsis *prop.* 157. vel 158. desumenda est prout ex puncto D. recta liberè ducitur in angulum, vel in latus. Vnde cum ex D. in latera infinitæ rectæ liberè deduci possint, problema infinitas solutiones admittet.



PROPOSITIO CLX.

Problema 5.

Per datum intra angulum punctum rectam ducere bifariam diuisam.

2. Triangulum minimum abscindere.
3. Trianguli minimam partem auferre.
4. Vel illud in maxima ratione diuidere.

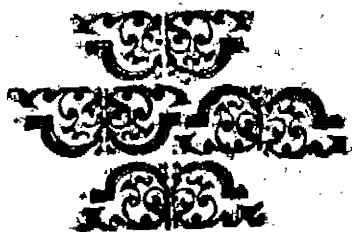
EXPOSITIO. Fig. 3 6.

Sit datus angulus ABC. & punctum D. quaeritur FDG. bifariam diuisa in D. vel $\triangle FBC$. minimum quod abscindi potest ex angulo B. vel triangulo ABC. &c.

Constr. Fiat DE. parallela CB & EF. æqualis BE. Dico FDG. satisfacere quæstioni. Si datum sit $\triangle ABC$. diuidantur omnia latera bifariam, & ducta CH. sit HO. tertia pars ipsius HC. & ducantur OI. OK. & quia punctum D. est in trapezio HOIB. ducatur FDG. bifariam diuisa, quæ diuidet $\triangle ABC$. in maxima ratione.

DEMONSTRATIO.

Constat ex 14. & 15. prop. tñ ex 21. & 27. prop. Quod, &c.



PROPOSITIO CLXI.

Problema 6.

EX dato intra angulum, vel triangulum puncto, triangulum secare dato æquale, & maius minimo.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sit angulus, vel $\triangle HCI$. & punctum intra ipsum F . per quod ducenda sit recta EFB . secans triangulum EBC . æquale dato MON .

Const. Ducatur prius recta AFD . bifariam diuisa in F . secans $\triangle ADC$ minimum (160. p.) & DK . perpendicularis lateri CH . & NL . perpendicularis basi MO . tum fiat ut DK . ad NL . ita OM . ad CQ . (2. p. 7.) & erunt triangula QDC . MON . æqualia cum habeant bases, & altitudines reciprocas (1. l. 6.) Fiat ergo QE . media inter QA . QC . & ducta EFB . erit quæsitæ, nempe $\triangle EBC$. æquale $\triangle MNO$.

DEMONSTRATIO.

Sit SX . ad SZ . ut $\triangle EBC$. ad $\triangle ADC$. & ZR . media inter ZX & ZS . & quia AD . bifariam secta est in F . erit CB . ad CD . ut SZ . ad SR . & CE . ad CA . ut SR . ad SX (18. p.) Ergo & diuidendo erit CE ad EA . ut SR . ad RX (4. l. 5.) sed quia sunt tres continuæ QC . QE . QA . tum etiam ZS . ZR . ZX . differentia sunt in eadem ratione, nempe CE . ad EA .

EA. vt QC. ad QE. & SR. ad RX. vt ZS. ad ZR (4. l. 5.) Ergo cum CE. ad EA. sit vt SR. ad RX. erit QC. ad QE. vt ZS. ad ZR. & QA. ad QE. vt ZX. ad ZR (1. l. 5.) Vnde ZS. diuisa est in X. & R. sicut QC. in A. & E. sed CB. ad CD. est vt SZ. ad SR (18. p.) Ergo CD. ad CB. est vt CQ. ad CE (1. l. 5.) Ergo cum Triangula BEC. ADC. communem angulum C. & latera circa ipsum reciproca CB. ad CD. vt CQ. ad CE. erit $\triangle BEC.$ æquale $\triangle QDC$ (1. l. 6.) sed $\triangle QDC.$ ex constr. est æquale $\triangle MNO.$ Ergo $\triangle EBC.$ est etiam æquale ipsi $\triangle MNO.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXII.

Problema 7.

EX dato angulo per datum extra ipsum punctum, secare triangulum æquale dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sit datus angulus GDB. & extra ipsum punctum F. quaeritur recta FGB vt triangulum GDB. sit æquale dato triangulo MVN.

Constructio. Ducatur DFA. & sit FA. æqualis FD. & fiat AC. parallela lateri GD. & ducto perpendiculo NL. fiat vt DA. ad MV. ita NL. ad AP (2. p. 7.) & AP. perpendicularis DA. & PQ. parallela AD. eritq. $\triangle AQD.$ æquale ipsi MVN. cum habeant bases, & altitudines reciprocas (1.

(1.16) Si ergo inveniatur QE media inter QA . & QC . & ducatur EFB . Dico $\triangle GDB$. esse æquale ipsi QAD . vel MVN .

DEMONSTRATIO.

QUoniam AD . est bisecta in F . & sunt continuæ QA . QE . QC . erit $\triangle EBC$. æquale triângulo QDC (161. p) sed quia triângula EFA . GFD . sunt similia ex parallelis EA . GD . cum DF . FA . sint æquales, erunt etiam æquales EF . FG . tum DG . EA (2.16.) & triângula æqualia (41.1.) Ergo si à triângulo ADC . auferatur $\triangle AEF$. & illius loco substituatur $\triangle FGD$. erit trapezium $EGDC$. æquale $\triangle ADC$. Ergo si ex æqualibus triángulis EBC . QDC . auferantur æqualia $EGDC$ ADC . remanebit $\triangle GDB$. æquale $\triangle QDA$. vel MVN . Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXIII.

Problema 8.

Datum Triangulum per datum punctum in data ratione dividere.

EXPOSITIO. Fig. 38.

Sit datum $\triangle ABC$. diuidendum ex dato puncto in data ratione X . ad Z . Hoc problema varias habet constructiones à dato puncto pēdentes.

Constr. 1. Si punctum sit angulus A . diuida-

datur latus oppositum BC. in ratione X. ad Z.
& $\triangle BEA.$ ad $\triangle EAC$ æquale utrumque erit ut basis
BE. ad EC. vel ut X. ad Z. (1. l. 6.)

Constr. 2. Si punctum sit in latere ut F. di-
uisio fiet ex 156. p. & uterque casus omnes ra-
tiones admittit.

Constr. 3. Si punctum sit G intra $\triangle$ deter-
minetur prius angulus ex quo minimum $\triangle$
abscindi potest (27. p.) & abscindatur mini-
mum quod dabit maximam rationem (60.
p.) Si autem ratio data maior sit quam ratio
inventata per $\triangle$ minimum erit problema im-
possibile: si æqualis triangulum minimum
satisfaciet quæstioni. Si verò minor diuidatur
quodlibet latus BC. in data ratione X. ad Z. &
per G. abscindatur $\triangle$ æquale ipsi AEB (161. p.)

Constr. 4. Si punctum sit D. extra $\triangle$ etiam
omnes rationes admittit. Ducatur ergo recta
in aliquem angulum secans latus illi opposi-
tum, ut DC. Si ratio BE. ad FA. sit ipsa data X.
ad Z. recta DC. satisfacit quæstioni. Si autem
minor, poterit sectio fieri ex angulo B. vel A.
Si verò maior, fiet tantum sectio ex angulo A.
Diuiso igitur latere BC. ut X. ad Z. & ducta BE.
si ex D. fecatur $\triangle$ æquale ipsi AEB (162. p.) vel
ex angulo B. vel ex angulo A. iuxta determi-
nationem dictam, erit problema solutum.

SCHOLIUM.

HOc problema solutum dedit R. P. Andræas Tacquet Soc. IESV, Geometra insignis lib. 2. Geom. Pract. cap. 14. ad quod septem lemmata adducit. An noster labor inutilis censendus sit, studio Lectori indicandum reliquo. Nostra saltem determinatio trianguli minimi prop. 27. tradita facilissima, & clarissima est, ex qua huius problematis resolutio pendet, si datum punctum intra ipsum triangulum fuerit. Quomodo Polygonum ex dato intra, vel extra puncto unica recta in duas partes data earum ratione diuidendum sit, videatur apud P. Tacquet citatum cap. 15.

PROPOSITIO CLXIV.

Problema 9.

Datum Polygonum in datam rationem diuidere ex puncto in latere, vel angulo dato, vel liberè assumpto.

EXPOSITIO. Fig. 39.

Sit datum Pentagonum ABCDE. & punctum F. quæritur recta FO. illud diuidens in ratione X. ad Z.

Constr. Ex F. ducantur ad angulos FC. FD. FE. quibus ex angulo B. proximo fiant parallelæ in latera continuata BG. GH. HI. Fiat deindè AK. ad KI. vt X. ad Z. (2. p. 7) & ducan-
tur

tur parallelæ KL. LO. donec aliqua secet quodlibet latus, ducta FO. diuidet polygonum in ratione X ad Z. Si datum punctum esset ipse angulus B. inciperent parallelæ ab angulo C. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam parallelæ determinant segmentorum rationes, est AFODE. ad FBCO. vt AK. ad KI (17. M. 1.) Ergo vt X. ad Z. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXV.

Problema 10.

Datum Polygonum ex dato intra ipsum puncto, & inde recta in latus, vel angulum data, vel liberè assumpta diuidere in data ratione.

EXPOSITIO. Fig. 40.

Sit datum $\square$ ABKC. & punctum O. & data recta, vel liberè ducta OG. quæritur OK diuidens $\square$ in ratione X ad Z.

Constr. Ex O. in omnes angulos ducantur rectæ: & ex G. vbi recta secat latus ducantur parallelæ angularibus, donec secent latus GA. continuatum in F. Si fiat GH. ad HF. vt X. ad Z. (2. p. 7.) & ex H. ducantur parallelæ donec occurrant alicui lateri in K. erit OK quæsitæ.

Si recta data esset OB. inciperent parallelae
ex B.

DEMONSTRATIO.

EAdem est, quæ in præcedenti (ex 17. M. 1.)

Hoc Problema, & præcedens eandem habent constructionem, & demonstrationem si Polygonum in plures partes data earum ratione diuidendum sit.

PROPOSITIO CLXVI.

Problema II.

D*Atam rectam media, & extrema ratione diuidere.*

2. *Dato maiori extremo addere minus.*

3. *Dato minori extremo addere maius.*

CONSTRUCTIO I. Fig. 41.

DAta recta AC. diuidenda sit in F. media, & extrema ratione. Fiat CB. æqualis AC. & describatur semicirculus ADB. radius CB. diuidatur bifariam in E. & CD. sit perpendicularis ipsi AB. ducatur ED. & ex cetro E. radio ED. fiat arcus DF. Dico AC. diuisam esse in F. media, & extrema ratione.

Demonstr. Quoniam CD. est dupla CE. erit $\square DC.$ æquale $4 \square CE$ (3. l. 2.) sed $\square DE.$ vel $EF.$ æquatur $\square DC + \square CE$ (4. l. 2.) Ergo $\square ED.$ vel $\square EF.$ æq. $5 \square CE.$ Ergo quia FC. assumpsit CE. quæ

quæ est dimidium totius AC. & composita FE. potest quintuplum assumpti CE erit AC. proportionaliter secta in F. (106. p.) Quod, &c.

Constr. 2. Dato maiori extremo BC. quæritur minus CF. vt tota FB. sit proportionaliter secta in C. Fiat CA. æqualis CB. & diuisa bifariam CB. in E. fiat vt antea arcus DF. Dico FC. esse minus segmentum.

Demonstr. Quoniam AC est proportionaliter secta in F. ex *constr.* 1. & maiori segmento FC. addita est tota CB. vel CA. erit composita FB. proportionaliter secta in C. (104. p.) Ergo maiori segmento BC. additum est minus CF. Quod, &c.

Constr. 3. Dato minori segmento BC. quæritur maius GC. vt tota BG. sit proportionaliter secta in C. Fiat CA. æqualis CB. & facto arcu DF. vt antea sumatur CG. æqualis BF. Dico BG. esse proportionaliter sectam in C.

Demonstr. Quoniam FB. est proportionaliter secta in C. ex *constr.* 2. si maiori extremo CB. addatur tota FB. vel ipsi æqualis CG. erit tota BG. proportionaliter secta in C. & BC. minus segmentum (104. p.) Ergo minori segmento BC. additum est maius CG. & tota est proportionaliter secta. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXVII.

Problema 12.

D At circulo Decagonum, & Pentagonum
regulare inscribere.

CONSTRUCTIO I. Fig. 41.

Sit datus circulus ADB. & eius centrum C. du-
cta diametro AB. & perpendiculari CD. &
bifariam diuisa CB. in E. describatur ex E. ar-
cus DF. Dico FC. esse latus Decagoni, & rectā
FD. latus Pentagoni, & ducto ex D. arcu FM.
erit DM. quinta circuli pars.

Demonstr. Quoniam radius AC. est pro-
portionaliter sectus, erit maius segmentum
FC. latus decagoni (125. p.) & quia $\square$ FD. est
æquale $\square$ FC + $\square$ CD. recta FD. æquè potest ac
radius DC. & latus decagoni FC (4. l. 2.) sed la-
tus Pentagoni æquè potest etiam ac radius CD.
& latus decagoni FC (117 p.) Ergo FD. æqua-
lis est lateri Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRUCTIO II. Fig. 41.

D Vcto ex E. arcu DF. vt antea, fiat ex B. arcus
FK. & KI. æqualis AK. Dico AK. esse arcum
Pentagoni, & BI. decagoni.

Demonstr. Quoniam BK. vel BF. compo-
ta est ex radio B C. & latere decagoni CF. erit
BK. secundum diagoniū decagoni subtendens
tres

tres circuli decimas, vel tres semicirculi quintas (139. p.) Ergo AK. subtendet duas semicirculi quintas, vel quintam circuli partem, eritque recta AK. latus Pentagoni. Si ergo ex semicirculo AKB. auferantur AK. KI. quatuor quintæ, remanebit IB. quinta semicirculi pars, vel decima circuli: Ergo recta BI. erit decagoni latus, &c.

CONSTRUCTIO III. Fig. 41.

SI recta FB. diuidatur bifariam in O. & fiat CP. æqualis FO. recta HPL. perpendicularis radio CD. erit latus Pentagoni.

Demonstr. Quoniam FB. composita est ex radio BC. & latere decagoni CF. ex constr. 1. & CP. est æqualis FO. dimidio compositæ, erit CP. perpendiculum à centro in latus Pentagoni (126. p.) Ergo cum CP. sit perpendicularis HL. à centro, erit HL. latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRUCTIO IV. Fig. 41.

Bifariam diuisa FB. in O. fiat DP. æqualis CO. Dico perpendicularem HPL. esse latus Pentagoni.

Demonstr. Quoniam Perpendiculum à centro est æquale lateri decagoni, & continuationi eiusdem perpediculi in peripheriam (127. p.) & etiam rectæ FO (126. p.) ablato latere de-

decagoni EC . erit CO . continuatio perpendiculari: Ergo cum DP . sit æqualis CO . erit PD . continuatio perpendiculari: unde CP . erit perpendicularum a centro in latus: Ergo cum CP . sit perpendicularis a centro in rectam HL . erit HL . latus Pentagoni, &c.

CONSTRUCTIO V. Fig. 41.

Divisa CF . bifariam in Q . fiat ex C arcus QR . & perpendicularis MRN . secabit arcus Pentagoni DM . DN .

Demonstr. Quoniam CF . est maius segmentum radij proportionaliter secti, eius dimidium CR . erit maius segmentum semiradij proportionaliter secti. Sed diagonum basi parallelum secat HC . maius segmentum semiradij (137.p.) Ergo MRN . erit diagonum Pentagoni, & DM . DN . arcus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRUCTIO VI. Fig. 42.

Sit datus circulus $AMBN$. diameter AB . centrum C . diuiso radio CB . bifariam in D . & CD . in E . fiat semicirculus CFB . & DE . perpendicularis CB . & ex E . distantia CF fiat arcus FI . & per I . sit KIL . perpendicularis radio CB . Dico KL . esse latus Pentagoni.

Demonstr. Semiradius DB . est proportionaliter sectus in I . (166.p.) sed latus Pentagoni

ni secat proportionaliter semiradiū sibi perpendicularē (129. p.) Ergo KIL. hoc efficiens erit latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRUCTIO VII.

Diuisa CB. bifariam in D. & CD. in E. sit CG. perpendicularis, & facto semicirculo DGO. in E. fiat arcus GH. & sit MHN. perpendicularis CA. Dico MA. AN. esse arcus Pentagoni.

Demonstr. Quoniā semiradius CO. est proportionaliter sectus in H. & CH. maius segmentum, est MN. diagonium Pentagoni, & illius arcus sunt AM. AN. *ex constr.* 5. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXVIII.

Problema 13.

Dato latere Pentagoni, ipsum describere, & circuli radium inuenire.

CONSTRUCTIO I. Fig. 43.

Sit datum latus AB. quod continuetur in H. & ex A. fiat semicirculus BIH. & ex B. arcus AF. & AI. sit perpendicularis HB. diuisa AB. bifariam in E. sumatur GC. æqualis distantiæ GI. ex B. fiat arcus CDE. & eodem interuallo ex A. fiat arcus EF. secans arcum CDE. in E. & AF. in F. ductis AD. DE. EF. FB. Dico ADEFB. esse Pentagonum regulare.

Demonstr. Quoniam recta BC. est proportionaliter secta in A. (166 p.) & maius segmentum est latus Pentagoni datum erit BC. diagonium (122 p.) Ergo triangula ABF. BAD. AEB. sunt ipsa triangula Pentagoni, unde tota ipsius constructio constat. Quod, &c.

CONSTRUCTIO II.

DEscriptis arcibus BD. AF. inueniatur punctum C. ut antea, & diuisa AC. bifariam in K. sumatur BL. æqualis AK. & fiant KD. LF. perpendiculares secantes arcus in D. F. tum radio AB. fiant ex D. & F. duo arcus se interfecantes in E. Dico ADEFB. esse Pentagonum regulare.

Demonstr. Quoniam CA. est minus segmentum diagonij CB. proportionaliter secti ex *constr.* 1. & AK. illius dimidium est AK. continuatio lateris Pentagoni in perpendiculum, & angulus DAB angulus Pentagoni, similiter ABF (123 p.) Unde tota constructio Pentagoni constat.

CONSTRUCTIO III. Fig. 44.

Sit datum latus BA. inuenta AC. ut in *constr.* 1. ex B. radio BA. describatur arcus FAE & ex C. FKD. secans priorem in F. & in K. & semicirculum in D. ductis DAF. CKE. secantes arcus in E. & F. velex D. fiat arcus secans FAE.
in

in E. Dico DCFBE. esse Pentagonum regulare.

Demonstr. Cum BC. proportionaliter secta sit in A. & CF. BF. æquales sint maiori segmento BA. vel CO. est angulus CFB. Pentagoni (122. p.) & quia FA. est æqualis AC. & angulus BFC. ipsi CAF. vel DAB. (3. p. 3.) & DA. AB. ipsis DC. CF. FB. erit DCF. æqualis CFB. & DB. ipsi BC. & DEB. ipsi CFB (4. l. 1.) Vnde Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit. Quod, &c.

CONSTRUCTIO IV. Fig. 45.

INvento puncto C. vt antea distantia A C. transferatur ex A. in E. & ex E. in F. Arcus AE. bifariam diuidatur in K. & ductis BK. AF. Dico rectam OF. esse radium circuli, in quem si transferatur quinquies latus AB. erit Pentagonum descriptum.

Demonstr. Cū AC. sit latus decagoni (167. p.) erit AE. decima circuli, & AK. vigesima circuli, vel decima semicirculi pars: & AF. quatuordecimæ semicirculi: Ergo cum BA. BF. æquales sint, & etiam anguli A F. (5. l. 1.) quilibet erit 3 decimæ semicirculi: Ergo cū K. etiam sit 3 decimæ est angulus B. æqualis F. & OF. OB. sunt æquales (5. l. 1.) Ergo angulus BOF. erit 4 decimæ semicirculi, vel duæ quin-

ra, hoc est Quinta circuli pars : Ergo FB vel BA. subtrēdens angulum FOB. quintam circuli partem est Pentagoni latus in circulo radij OF. Quod, &c.

CONSTRUCTIO V. Fig. 45.

Ducta AF. vt antea, & BF fiat angulus FBO. æqualis OFB. *Aliter.* fiat angulus FBO. æqualis angulo OAB. Dico OF. esse radium circuli in quo BF. vel BA. est latus Pentagoni.

Demonstr. 1. Cum angulus F. demonstratus sit 3 decimæ: & B. erit 3 decimæ: Ergo O. erit 4 decimæ semicirculi, vel quinta pars circuli.

Demonstr. 2. Cum BO. faciat angulum OBF. opposito FOB. æqualem erit BF. media inter AF. & FO (3. l. 6) Ergo OF. ad FB. vel BA. est vt FB. vel BA. ad AF. sed BA. est radius & AF. latus Pentagoni cū arcus AF. sit quinta circuli pars: Ergo etiam OF. est radius & FB. vel BA. latus Pentagoni in eo circulo descripti. Quod, &c.

CONSTRUCTIO VI. Fig. 45.

Ducta IC. vt in *constr.* 1. fiat ID. æqualis IA. vel AB. & DL parallela ipsi CA. Dico IL. esse radium circuli. *Aliter.* Ducatur AZ. & angulus IAZ. æqualis sit ZCA. Dico IZ. esse circuli radium.

De-

Demonstr. 1. IA est media inter IL . IC . quia
ut IC . ad IA . ita ID . vel IA . ad IL (2. l. 6.) sed IC .
est latus Pentagoni respectu radij IC (167. p.)
Ergo ID . vel IA . vel AB . est latus pentagoni res-
pectu radij IL . Quod, &c.

Demonstr. 2. Quoniam AZ . facit angulum
 IAZ . æqualem opposito ZCA . erit IA . media
inter IC . & IZ (3. l. 6.) Ergo erit IZ . radius res-
pectu lateris Pentagoni IA . vel AB . ut AB . est
radius respectu lateris IC . Quod, &c.

CONSTRUCTIO VII. Fig. 46.

INvento puncto C . fiat CO . perpendicularis,
& æqualis CA . & CL . æqualis AB . & LD . pa-
rallēla OI . & BD . erit diameter circuli, in quo
 AB . erit latus Pentagoni, & CD . decagoni.

Demonstr. CD . ad CL . est ut CO . ad CI . (2.
l. 6.) sed CO . vel CA est latus decagoni, & CL
Pentagoni eiusdem circuli (167. p.) Ergo CD .
est latus decagoni, & CL . vel AB . eiusdē circu-
li: sed quia CB . est proportionaliter secta in A .
(166. p.) & AB . segmentum maius est latus Pē-
tagoni est CB . diagonium (122. p.) Ergo cum
angulus DCB . sit rectus recta BD . æque poteſt
ac DC . CB (4. l. 2.) sed latus decagoni, & diago-
nium Pentagoni æquē possunt ac diameter,
scilicet quadruplum semidiametri (116. p.)
Ergo Recta BD . erit diameter, & eius dimidiū
BK.

BK. radius circuli in quo erit CD. latus decagoni, & AB. latus Pentagoni. Quod, &c.

CONSTRUCTIO VIII.

Ducta perpendiculari CO. infinita, sit HM. æqualis CA. & ducatur BM secans CO. in D. Dico CD. esse latus decagoni, & BD. diametrum circuli in quo AB. est Pentagoni latus.

Demonstr. Cum angulus in semicirculo rectus sit (3. l. 3.) HM. & MB. æquè possunt ac diameter HB (4. l. 2.) sed latus decagoni, & diagonium Pentagoni æquè possunt ac diagoniũ (116. p.) Ergo cum HM. vel CA. sit latus decagoni (167. p.) erit BM. diagonium Pentagoni: sed cum triangula HMB. DCM. habeant angulum B. communem, & HMB. DCB. rectos æquales, sunt æquiangula, & latera proportionalia, vt BM. ad BH. ita BC. ad BD (2. l. 6.) Ergo sicut BH. est diameter circuli, & BM. diagoniũ Pentagoni, erit BD. diameter circuli in quo BC. est diagonium Pentagoni: sed cum BC. proportionaliter secta sit in A (166. p.) est BC. diagonium Pentagoni, cuius latus est AB (122. p.) Ergo BD. est diameter circuli in quo descriptum sit pentagonum lateris AB. Similiter quia est vt diameter BH. ad HM. latus decagoni, ita BD. ad DC. erit DC. latus decagoni in
cir-

circulo cuius diameter est BD. & latus Pentagoni AB. Quoderat, &c.

CONSTRUCTIO IX.

FActa HM. æquali CA. ducatur CM. & BM. tum AK. faciat angulum BAK æqualem CMB. Dico BK. esse radium circuli in quo AB. est Pentagoni latus.

Demonstr. Quoniam anguli BAK. CMB. sunt æquales, & B communis, sunt æquiangularia triangula CMB. KAB & latera proportionalia, ut BM. ad BC. ita BA. ad BK (2. l. 6.) & alternando ut BM. ad BA. ita BC. ad BK. sed BM. est diagonum Pentagoni in circulo radij AB. Ergo BC. etiam est diagonum in circulo radij BK. sed BC. est diagonum Pentagoni AB. ex *demonstr.* 8. Ergo BK. est radius circuli in quo inscribi potest Pentagonum lateris AB. Quod, &c.

CONSTRUCTIO X.

Flat BR. perpendicularis, & æqualis AB. & inuento puncto C. ducatur CR. ex cuius dimidio P. fiat semicirculus CBR. & RX. sit quicquid pars totius RC. & RY. perpendicularis diametro CR. secet circulum in Y. Dico RY. esse radium circuli in quo AB. est latus Pentagoni.

Demonstr. Cum angulus CBR. sit rectus,

□

$\square CR. \text{eq.} \square CB + \square RB$ (4.l.2.) sed $\square CB + \square BR.$ diagonij, & lateris æquantur $\square$ radij circularis (115 p.) Ergo $\square CR. \text{eq.} \square$ radij: sed cum sint continuæ $RC. RY. RX$ (3.l.6.) $\square CR.$ ad $\square RY.$ est vt $RC.$ ad RX (4.l.6.) Ergo cū $RC.$ quintupla sit ipsius $RX.$ ex hypoth. erit $\square RC. \text{eq.} \square RY.$ Ergo cum $\square RC. \text{eq.} \square$ radij, erit $RY.$ radius circuli in quo est $BR.$ vel $BA.$ latus Pentagoni, & $BC.$ diagonium. Quod, &c.

CONSTRUCTIO XI. Fig. 46.

DIuisa $CR.$ bifariam in $P.$ ducatur $PG.$ & ex $A.$ recta $AQ.$ parallela ipsi $PG.$ Dico $PQ.$ esse semiradium, & eius duplam $QZ.$ esse radium.

Demonstr. Quoniam $\square CB + \square BR. \text{eq.} \square CR. \& \square RC. \text{eq.} 4\square CP$ (3 l. 2.) erit $\square CB + \square BR. \text{eq.} 4\square CP.$ sed latus Pentagoni $AB.$ vel $BR.$ & diagonium $BC.$ possunt quadruplum cōpositæ ex latere decagoni, & ex semiradio circuli circumscripti (128. p.) Ergo recta $CP.$ erit composita ex latere decagoni, & ex semiradio circuli circumscribentis Pentagonum, cuius latus sit $AB.$ & diagonium $BC.$ sed etiam recta $CG.$ cōposita est ex semiradio $AG.$ & ex latere decagoni $CA.$ inscripti circulo radij AB (167. p.) Ergo cum sint parallelæ $AQ. GP.$ & proportionales vt $CG.$ ad $AG.$ ita $CP.$ ad $QP.$

(2. l. 6.) erit vt CG. composita ex latere decagoni, & semiradio ad semiradium AG. ita CP. composita ex semiradio, & latere decagoni ad semiradium QP. Ergo QP. est semiradius, & illius dupla QZ. radius circuli in quo AB. vel BR. est latus Pentagoni, & BC. diagonium eiusdem. Quoderat, &c.

(Alias constructiones ommitto, cum exposita Geometriæ fecunditatem satis commendent.

PROPOSITIO CLXIX.

Problema 14.

Dato diagonio Pentagoni ipsum describere, & inuenire circulum.

CONSTRUCTIO. Fig. 46.

Sit datum diagonium CB. quod diuidatur media, & extrema ratione in A (166. p.) & maius segmentum AB. erit latus Pentagoni (122 p.) Inuento iam latere AB. & diagonio dato BC. describatur Pentagonum qualibet ex yndecim constructionibus *prop.* 168. Quod, &c.



PROPOSITIO CLXX.

Problema 15.

Dato perpendiculo à vertice Pentagoni in
basim ipsum describere.

CONSTRUCTIO. Fig. 27.

It datum perpendiculum HR . quod diuida-
tur media, & extrema ratione in S . (166. *p.*)
& ducantur ISM . KRL . perpendiculares ipsi
 HR . tum fiat SC . æqualis SH . & erit SR . propor-
tionaliter secta in C (104. *p.*) cōtinuetur dein-
dè CR . in P . vt CP . sit media inter CH . & quin-
tam ipsius partem (2. *p.* 5.) & erit $\square HC$. ad $\square$
 CP . vt HC . ad quintam sui partem, scilicèt
quintuplum. Dico HP . esse diametrum circu-
li. Si ergo bifariam diuidatur HP . in O . & ra-
dio OH . describatur circulus secās rectas IM .
 KL . in I . K . L . M . erit $HIKLM$. Pentagonum re-
gulare, & illius perpendiculum datum HR .

DEMONSTRATIO.

Quoniam IM . secat proportionalitèr per-
pendiculum HR . & est basi parallelum,
erit IM . diagonium Pentagoni (123. *p.*) & quia
 HS SC . æquales sunt, erit punctum C . in quo
intersecantur diagonia (136. *p.*) sed si in Pen-
tagono regulari diametèr per intersectionem
diagonorum ducatur maius segmentum po-
test

est quintuplum minoris (131. p.) Ergo cum HC. possit quintuplum CP. erit HP. diametèr, & HIKLM. pentagonum regulare. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXI.

Problema 16.

Dato Perpendiculo à centro Pentagoni in latus invenire Pentagonum.

CONSTRUCTIO I. Fig. 47.

Sit datum perpendiculum AB. à centro in latus Pentagoni, continuetur in C. ut AB. BC. sint æquales: sit tota AC. diuidatur media, & extrema ratione in D. (166. p.) Dico DC. esse radium circuli, quo invento describi potest Pentagonus, quauis ex 7. constructionibus *prop.* 167.

Demonstr. Quoniam AB. est dimidium AC. & perpendiculum *centri* est dimidium compositæ ex latere decagoni, & radio (126. p.) erit AC. composita ex latere decagoni, & radio: sed si composita ex radio, & latere decagoni sit proportionaliter secta, maius segmentum est radius circuli, & minus est latus decagoni (125. p.) Ergo maius segmentum DC. est radius circuli, & AD. latus decagoni: Ergo si radio DC. describatur circulus, & inscribatur

Pentagon m(ex 167.p.) erit Problema solutum, &c.

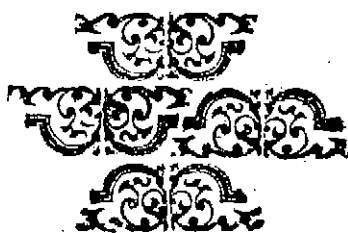
CONSTRUCTIO II. Fig. 47.

Si datum perpendicularum AC. quod diuidatur media, & extrema ratione in D. (166.p.) & fiat CE. æqualis maiori segmento DC. Dico DE. esse radium circuli, cui inscribendum sit Pentagonum ex 167. *prop.* & illius perpendicularum à centro erit data recta AC.

Demonstr. Quoniam si perpendicularum à centro sit proportionaliter sectum, illius segmentum maius est semiradius (128 p.) duplū maioris segmenti, nempe DE. erit circuli radius. Ergo, &c. Quod erat, &c.

SCHOLIUM.

Dato perpendicularo à centro in diagonum inuenietur perpendicularum in latus, 135.p. Et inde Pentagonum. Dato perpendicularo in latus continuatum, inuenietur perpendicularum in diagonum 122.p. data continuatione lateris datum est minus segmentum diagonorum (123.p.) Dato latere continuato datur semidiagonum (124 p) ex omnibus describi potest Pentagonum.



PROPOSITIO CLXXII.

Problema 17.

Dato latere, & diagonio maiori, vel minori
Heptagonum describere.

CONSTRUCTIO. Fig. 28.

Sit datum diagonium minus AC. & latus AB.
supra basim AC. fiat triangulum Ifofceles
ABC (3. p. 2.) cui circunfcribatur circulus AC
EG (5 p. 1.) si verò latus AB. septies fumatur,
perficiet Heptagonum circulo infcriptum.

2. Datum fit diagonium maius AD. & la-
tus DE. supra basim DE. fiat triangulum Ifof-
celes DAE. cui circūfcribatur circulus DGB.
& distantia DE. septies in circūferentia fump-
ta dabit omnia puncta angularia Heptagoni.

Demonstratio ex ipsa constructione perspi-
cua est: neque constructio adducta fuisset, si ad
fequentia problemata non conduceret.

PROPOSITIO CLXXIII.

Problema 18.

Dato latere, & diagonorum differentia in-
venire Heptagonum.

CONSTRUCTIO Fig. 28.

Sit datum latus DE. & differentia diagonorū
DL. faciant quemcumque angulum LDE.

Du-

Ducatur deindè EA. faciens angulum DEA. æqualem ipsi DLE. & continuata DL. quousque fecet EA. in A. Dico DA. esse diagonium maius, quo invento describi poterit Heptagonum vt in 172. *prop.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam triangula LDE. ADE. habent angulum D. communem, & DLE. DEA. æquales ex *constr.* erit angulus DEL. æqualis DAE. (3. l. 1.) Ergo quia in $\triangle DEA$. recta EL. facit angulum DEL. æqualem opposito A. erit DE. media inter DL. DA (3. l. 6.) sed latus DE. medium est inter diagonium maius, & differentiam vtriusque (141. p.) Ergo cum DL. sit diagoniorum differentia erit DA. diagonium maius. Vnde, &c. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXIV.

Problema 19.

Datis diagonijs maiori, & minori Heptagonum describere.

CONSTRUCTIO Fig. 28.

Sit datum diagonium maius AD. & minus AC. sumatur in maiori AD. recta AL. æqualis ipsi AC. & erit DL differentia diagoniorum. Si ergo inveniatur DC. media inter diagoniũ maius AD. & differentiam vtriusque DL. (2. p. 5.)

p. 5.) erit DC. latus Heptagoni, cognito ergo latere, & diagonio maiori, vel minori describetur Heptagonum ex 172. prop.

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus Heptagoni medium est inter diagonium maius AD. & differentiā DL. maioris, & minoris (141. p.) cum sit DC. media inter DA. & DL. erit DC. latus Heptagoni. Vnde constat constructio ipsius. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXV.

Problema 20.

Datam rectam ita diuidere, ut alia data media sit inter segmentum maius, & differentiam utriusque, vel rectam diuidere, ut reſt angulum ex maiori segmento, & differentia utriusque æquale sit ſpatio dato.

CONSTRUCTIO. Fig. 48.

Sit recta diuidenda AB. & alia data ED. hæc diuidatur bifariam in A. & ſit AB. ipſi perpendicularis: & AE. AF. æquales: tum AB. diuidatur bifariam in C. & AC. in G. fiat AH æqualis ipſi EF. & ex G. deſcribatur circulus AICL. & ducta HGL fiat IK. æqualis IH Dico HL eſſe ſegmentum maius, & KL minus, & HK. differentiam, & ED. eſſe mediam inter LH. HK.

vel

vel rectangulum LHK. esse æquale $\square$ ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus EAF. est rectus, & EA. AF. sunt æquales, $\square$ EF. æquatur $2 \square$ EA (4. l. 2.) sed quia ED. est dupla ipsius EA. erit $\square$ ED. æq. $4 \square$ EA (3. l. 2) Ergo $\square$ ED. æq. $2 \square$ EF. vel AH. sed cum tangens HA. sit media inter secantem LH. & exterius segmentum HI. (6. l. 6.) est $\square$ HA. æq. $\square$ LHI (1. l. 6.) Ergo $\square$ ED. æquatur $2 \square$ LHI sed quia HK. est dupla ipsius HI. etiam $\square$ LHK est æquale $2 \square$ LHI (1. l. 6.) Ergo $\square$ ED. æquatur $\square$ LHK. sed quia AC. vel LI. est dimidium AB. erunt 2 IL. æquales ipsi AB. & etiam 2 IL. æquantur LI + IH. & LI - IK. hoc est LH. & LK. Ergo etiam LH + LK. æquantur ipsi AB. Ergo cum HK. sit differentia inter LH. & LK. est $\square$ ED. æquale $\square$ LHK. scilicet maioris segmenti LH. & differentiae HK. Ergo ED. media erit inter maius segmentum LH. & HK. differentiam maioris, & minoris segmenti (1. l. 6.) Unde secta est AB. modo quæsito. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO CLXXVI.

Problema 24.

Dato latere, & duplicis diagonij maioris, & minoris summa Heptagonum regulare describere.

CONSTRUCTIO. Fig. 48.

Sit datum Heptagoni latus ED . & summa utriusque diagonij AB . diuidatur AB . in duo segmenta, ut datum latus ED . medium sit inter segmentum maius LH . & differentiam utriusque HK (175. p.) Dico LH esse diagoniū maius, & LK diagonium minus. Cognito ergo latere ED . & utroque diagonio LH . LK . describatur Heptagonum (172. p.)

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus Heptagoni medium est inter diagonium maius, & differentiam utriusque (141. p.) sed latus ED . medium est inter LH . HK . & $LH + LK$. est diagonij utriusque summa (175. p.) Ergo LH . & LK . erunt diagonia. Vnde Heptagoni descriptio constat ex 172. p. Quod erat, &c.

ABCDEFG Heptagonum regulare. AB diagonus maior. ED latus. LH diagonus maior. LK diagonus minor. HK differentia. ED medium est inter LH & HK. ED medium est inter LH & LH + LK. ED est latus. Ergo LH & LK sunt diagonia. Vnde Heptagonum describitur.

PROPOSITIO CLXXVII.

Problema 22.

Dato latere Heptagoni, ipsum quàm proximum geometricè describere.

CONSTRUCTIO. Fig. 48.

Sit datum latus ED. bifariam diuisum in A. cui sit perpendicularis AB. infinita, & qualium ED. est 20. sumatur AB. 81. scilicet quadrupla sesquivigesima, & erit AB. vtriusque diagonij summa veritati proxima. Cognito iam latere ED. & vtriusque diagonij summa describatur Heptagonum (176. p.)

Si verò exactior operatio requiratur qualiū ED. est 10000. sumatur AB. 40489. & erit vtriusque diagonij summa.

Examen per numeros.

Quoniam latus DE (in fig. 28.) latus heptagoni subtendit septimam circuli partem: diuiso integro circulo per 7. erit quotiens arcus DE. $51. gr. 25. \frac{5}{7}$. Et quia diagonium minus DB. subtēdit arcum duplum, erit arcus DCB. $102. gr. 51. \frac{3}{7}$. & quia diagonium maius DA. subtēdit arcum DBA. triplum ipsius DE. erit DBA. $gr. 154. 17. \frac{2}{7}$. Insuper quia chorda est dupla sinus dimidij arcus ex lib. 1. § 17. *Trigonometria nostræ*: sumpti sunt sinus ex Canone Pitisci.

Di-

Dimidium arcus DE. est

gr. 25.42. $\frac{6}{7}$. Sinus 44388.37389.

Chorda DE. 86776.74778.

Semiarcus DB. 51.25. $\frac{5}{7}$. Sin. 78183.14822.

Chorda DB. 156366.29644.

Semiarcus DBA. 77.8. $\frac{4}{7}$. Sin. 97492.32885.

Chorda BA. 194985.58252.

Summa chor. DB. DA. 351351.87896.

Si ergo fiat vt 20. ad 81. ita chorda DE. latus heptagoni ad aliud, veniet quartus proportionalis 351445.82850.

Qui numerus maior est summa diagonij duplicis DB. DA. sed excessus non pervenit ad vnam millesimam semidiametri partem. Vnde constructio satis proxima est veritati, & tuto in praxi retineri potest.

Iterum si fiat vt 10000. ad 40489. ita DE 86776.74778. ad aliud,

veniet quartus proportionalis 351350.36630.

qui numerus minor est summa vtriusque diagonij DB. DA. vna tantum centesima millesima semidiametri parte: Constructio ergo ista exactissima est, licet præcedens praxi Geometricæ sit accomodatior.



PROPOSITIO CLXXVIII.

Problema 23.

Dato arcui rectam proximè æqualem invenire, & circulum quadrare.

CONSTRUCTIO. Fig. 30.

Sit datus arcus AEC ductis radio BA. & tangente perpendiculari AR. & chorda AC. dividatur angulus RAC bifariam recta AL. & angulus RAL. recta AK. & angulus RAK. recta Ao. tum fiat CL. perpēdicularis ipsi AC. & LK. ipsi AI. & Ko. ipsi AK. & oa. ipsi Ao. tandem dividatur oa. in z. vt $\square oa.$ sit triplum $\square oz.$ vel $oz.$ ad oa. sit vt radius circuli ad latus trianguli regularis inscripti, & ducatur Az. Dico Az. esse rectam arcui AEC. quā proximè æqualē.

Examen per numeros.

Sit datus arcus AEC. sexta circuli pars, nēpe 60. gr. eritque AE. 30. gr. & AF. 15. gr. & AG. 7. 30. Ergo eius dimidium erit 3. 45. & sinus huius ex tabulis Pitisci erit 6540. 31292. 30143. & erit chorda ipsius arcus AG. qualium diameter AZ. est 10000. 00000. 00000. Ergo cū Ao. sit octupla ipsius AG. (145. p) tota Ao. erit 52322. 50338. 41144. Similiter tangens arcus 7. 30. erit 6554. 34628. 15238. & eius octupla 52434 77025. 21904. erit Aa. laterum circumscrip-

criptorum summa qualium diameter AZ. est
ut supra. Quadratum igitur rectæ AA. est

27494. 05131. 39999. 13040. 15997. 85216.

Et Quadratum rectæ Ao erit

27376. 44360. 38066. 28402. 30272. 28736.

Differentia Quadratorum erit

..117. 60771. 01932. 84637. 85725. 56480.

& est quadratum rectæ ao. (4. l. 2.)

Tertia huius pars est *Quad. rectæ oz.*

...39. 20257. 00644. 28212. 61908. 52160.

Summa quadratorum Ao. & oz. est

27415. 64617. 38710. 56614. 92180. 80896.

& est quadratum rectæ AZ. (4. l. 2.)

Huius ergo radix quadrata 52359. 95241. 96413

est recta AZ. Dico hanc esse proximè æqualem

circunferentiæ AEC. quæ supponitur sexta

circuli pars. Si enim sumatur sextupla rectæ

AZ. erit 3. 14159. 71451. 78478. peripheria

circuli, qualium diameter AZ. est

100000. 00000. 00000. sed debuit esse iuxta

accuratiorem rationem Ludolphi à Ceulen

3. 14159. 26535. 89793. Nostra ergo approxi-

matio cum hac Ludolphi in sex prioribus li-

teris conuenit; neque veram superat dimidio

centesimæ millesimæ partis diametri. Cussani

approximatio dat 3. 1423 Vietæa 3. 14164. illa

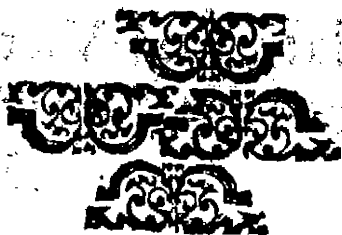
in tribus prioribus notis, hæ in quatuor prio-

ribus cum Ludolphæa convenit; nostra ergo accuratior est. De Vietæa merito Ceulen scriptum reliquit. *Quare ratio Vietæa omnium quotquot hæctenus extant accuratissima est.* pag. 147. An verò post Ludolphum alia prodierit nostra accuratior, me prorsus latet.

CIRCULI QUADRATURA. . Fig. 30.

QUoniam circulus æqualis est triangulo, cuius basis sit recta periphæriæ æqualis, & perpendicularum, vel altitudo radius circularis (7. p. 2. vel 8. p. 4) & triangulum est æquale rectangulo habente idem perpendicularum, & dimidiam basim (8. l. 1.) Quoniam AB. est radius, & AZ. est sexta pars circumferentiæ, erit AZ. ter sumpta dimidium circumferentiæ: Ergo rectangulum ex AB. & 3 AZ. erit æquale circulo. Vnde si inveniatur media proportionalis inter AB. & 3 AZ. Quadratum illius mediæ æquale erit dicto rectangulo, & ipsi circulo (1. l. 6.)

Hæc quadratura licet omninò vera non sit, omnibus tamen Geometricis, quas hucusque videre licuit accuratior est, ac veritati proximior.



PROPOSITIO CLXXIX.

Problema 24.

Datorum Polygonorum rationem inve-
nire.

CONSTRUCTIO. Fig. 32.

Sint data Polygona $\odot KLMN$. & $\odot ABCDE$.
quorum ratio inquiritur.

Primo inveniantur rationum altitudines
 PQ . & GH . prout in 151. p. vel 17. Met. Fiat
deindè vt PQ ad GH . ita AB . ad LT . Dico $\odot$
 $KLMN$. ad $\odot ABCDE$. esse vt LK . ad LT .

DEMONSTRATIO.

Cum sint tres rectæ KL AB . TL . ratio KL ad
 TL . composita est ex ratione KL . ad AB . &
ex ratione AB . ad TL (27. P.) sed etiam $\odot KL$
 MN . ad $\odot ABCDE$. habet rationem compo-
sitam ex ratione basium KL . ad AB . & ex ratione
altitudinum PQ . ad GH . vel ex *constr.* AB . ad
 TL (154 p.) Ergo $\odot KLMN$. ad $\odot ABCDE$. est
etiam vt KL . ad TL (1. l. 5.) Quod erat, &c.



PROPOSITIO CLXXX.

Problema 25.

Polygonum dato simile efficere datam habens
rationem cuilibet alteri dato.

CONSTRUCTIO I. Fig. 49.

Primò quaeritur Polygonum simile ipsi $\odot K$
LI. & æquale dato $\odot ABD$. Inventis ratio-
num altitudinibus GH. PQ. (151. p. vel 17.
M. 1.) fiat QS. æqualis ipsi GH. & ducta SR. pa-
rallela basi KL. sit RT. parallela ipsi PK. Deinde
inter AB. & TL. inveniatur media NL. Dico
 $\odot NL$. simile ipsi $\odot KL$. æquale esse dato $\odot$
ABD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\triangle KLP$. æquale est $\odot KLI$. & $\triangle$
RTL simile ipsi æquale erit $\odot TL$. simile
dato $\odot KLI$ (18. M. 1.) Ergo quoniam altitu-
do rationis R. vel SQ. æqualis est altitudini
GH. erit $\odot TL$. ad $\odot AB$. vt TL. ad AB (151. p.)
sed cum TL. NL. AB. sint continuæ ex constr.
ratio TL. ad AB. est duplicata rationis TL. ad
NL. (21. P.) & $\odot TL$. ad simile $\odot NL$. habet
etiam rationem duplicatam TL. ad NL. (4. l. 6)
Ergo $\odot TL$. ad simile $\odot NL$. erit vt TL. ad AB.
(1. l. 5.) Ergo cum $\odot TL$. simile ipsi $\odot KL$. ad
 $\odot NL$. ipsi simile eandem habeat rationem,
quam

quam ad $\triangle ABD$. nempe TL . ad AB . erit $\triangle NL$. æquale $\triangle ABD$ (2. l. 5.) & ex *hypo.* simile ipsi $\triangle KLI$. Quod erat, &c.

CONSTRUCTIO II.

Secundo quaeritur Polygonum simile ipsi $\triangle KLI$. quod sit ad $\triangle ABD$. in data ratione X . ad Z . Primo inveniatur Y . media inter X . & Z . (2. p. 5.) & inveniatur LN ut $\triangle NL$ æquale sit $\triangle ABD$. ex *præc. constr.* Deinde fiat ut Y . ad X . ita NL . ad LO . Dico $\triangle OL$. simile ipsi $\triangle KLI$. esse ad $\triangle ABD$. ut X . ad Z .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $\triangle OL$. ad simile $\triangle NL$. est in duplicata ratione OL ad NL (4. l. 6.) vel X . ad Y . ex *constr.* sed cum fiat continua X . Y . Z . ratio X . ad Z . est duplicata rationis X . ad Y (21. P.) vel rationis OL ad NL . Ergo ratio $\triangle OL$. ad simile $\triangle NL$. est ut X . ad Z . (1. l. 5.) sed $\triangle NL$. æquale est ipsi $\triangle ABD$. ex *constr.* Ergo $\triangle OL$. ad $\triangle ABD$. est in data ratione X . ad Z . (2. l. 5.) & simile dato $\triangle KLI$. ex *constr.* Quod erat, &c.

Hac ratione Polygonum quodlibet in aliud dato simile potest immediate sine reductione ad triangula, vel rectangula non iniucunda metamorphosi converti, augeri etiam, & minui in quacumque ratione ad liberum querentis, vel ipsius Geometrae arbitrium.

OPE-

OPERIS CONCLUSIO.

Problematibus quamplurimis scienter ommissis ob rationes in principio huius capituli assignatas, hac de Figuris planis dicta sufficiant, quæ Minimorum dignitatem satis commendant. Qui hætenus demonstrata non displicuerint, laxato aliquantisper animo sese ad tertiam partem accingat, quæ pari, ut spero, felicitate, Geometriam Magnam esse in Minimis solidorum expositione convincet.

F I N I S.



APPENDIX

AD ORDINARIA PLANA.

Sequentes propositiones in mentem venire hac secunda parte iam typis excusa, quas tamen addere libuit continuato precedentium ordine, ut quæ fortè ad solida ordinata faciliùs demonstranda, saltem earum aliqua, non erunt inutiles.

PROPOSITIO CLXXXI.

Decagoni latus, & Perpendicularum à centro Pentagoni in eodem circulo, æquè possunt, ac radius, & semisegmentum minus eiusdem proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 50.

Sit $\square BDGMR$. & latus decagoni LM . & erit LK . minus segmentum semi radij (129 p.) vel semi segmentum minus radij. Dico igitur $\square LM + \square AK$. æquari $\square AL + \square LK$.

DEMONSTRATIO.

Quia $\square AL$. vel AM . æquatur $\square AK + \square KM$. (4 l. 2.) Ergo $\square AL + \square LK$ æquantur $\square AK + \square KM + \square LK$. sed $\square KM + \square LK$. æquantur $\square LM$ (4 l. 2.) Ergo $\square AL + \square LK$. æquantur $\square AK + \square LM$. Quod erat, &c.

Ee

PRO.

PROPOSITIO CLXXXII.

IN Pentagono regulari perpendiculum ex vertice potest quintuplum perpediculi à cetro.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN $\triangle B D G M R$. Dico Perpendiculum B K. quintuplum posse ipsius A K.

DEMONSTRATIO.

Diviso bifariam radio A B. in O. erit O K. proportionaliter secta in A. quia ut O A. ad A K. ita A K. ad K O. (137. p.) Ergo quia toti K O. addita est O B. æqualis minori segmento O A. cōposita B K. poterit quintuplum maioris segmenti A K. (107. p.) Ergo, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIII.

IN Pentagono regulari si ducantur diagonia, erit $\triangle$ minus ad maius $\triangle$: ut maius segmentum ad rectam proportionaliter sectam; vel ut minus segmentum ad maius, & trapezium erit proportionaliter sectum.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN $\triangle B D G M R$ sint diagonia B G. B M. Dico $\triangle B D G$. ad $\triangle B G M$. esse ut maius segmentum ad totam proportionaliter sectam: & trapezium B D G M. esse proportionaliter sectum diagonio B G.

DEMONSTRATIO.

Quia $\triangle BDG$ & $\triangle BGM$. sunt inter parallelas DG . BM . se habent vt bases, vt DG . ad BM (1. l. 6.) sed DG . est maius segmentum ipsius BM (122. p.) Ergo $\triangle BDG$. ad $\triangle BGM$. est vt maius segmentum ad totam proportionaliter sectam. Quod, &c.

Deindè quia $DG + BM$. est proportionaliter secta (104. p.) est $\triangle BDG$. ad $\triangle BGM$. vt minus segmentum DG . ad maius BM . Tandem ergo sicut $DG + BM$. est proportionaliter secta ita spatium $DGB + BGM$. vel trapezium $BDGM$. erit proportionaliter sectum (1. l. 5.) Quod erat, &c.

Vnde $\triangle BDG$. ex diagonio, & duplici latere, est maius segmentum trianguli ex latere, & duplici diagonio GBM .

PROPOSITIO CLXXXIV.

Pentagonum ad triangulum ex latere, & duplici diagonio est, vt perpendicularum à vertice ad perpendicularum à centro.

EXPOSITIO.

Dictis diagonijs. Dico pentagonum $BDGMR$. ad $\triangle BGM$. esse vt BK . ad AK .

DEMONSTRATIO.

Duidatur bifariam AB . in O . & erit OK . pro-

portionalitèr secta in A (137. p.) sed etiam trapezium BDGM. est proportionalitèr sectum (183 p.) Ergo si rectæ OK. addatur minus segmentum OA. vel OB. & trapezio BDGM. addatur minus segmentum BDG. vel BMR. erit vt composita BK. ad AK. ita $\square$ BDGMR. ad $\triangle$ BGM (4. l. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXV.

SI $\square$ & $\triangle$ eidem circulo inscribantur, & ex latere $\triangle$ fiat aliud $\square$ alteri circulo inscriptum cum decagono, erit $\square$ lateris Pentagoni minoris ad $\square$ decagoni, vt 5 ad 3. & etiā $\square$ diagonij eiusdem $\square$ ad $\square$ radij maioris circuli erit vt 5 ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN circulo BDG. sit BD. latus $\square$ & BG. diagonium: tum CN. latus $\triangle$ & EF. æqualis CN. sit latus $\square$ in circulo EHF. & EH. latus decagoni. Dico $\square$ BD. ad $\square$ EH. esse vt 5 ad 3. & $\square$ BG. ad $\square$ AE. etiam esse vt 5 ad 3.

DEMONSTRATIO.

CVM BD. sit maius segmentum ipsius BG. (122. p.) & EH. ipsius EA (125 p.) erit $\square$ BD ad $\square$ BG. vt $\square$ EH. ad $\square$ EA. (4. l. 6.) & alternando $\square$ BD. ad $\square$ EH. vt $\square$ BG. ad $\square$ EA. & etiam summa antecedentium ad summā consequentium, nempe $\square$ BD + $\square$ BG. ad $\square$ EH + $\square$ EA. est

est vt $\square$ EH. ad $\square$ EA (4 l. 5.) sed $\square$ BD + $\square$ BG.
est $\frac{1}{2}$ $\square$ AB (115. p.) & $\square$ EH + $\square$ EA. est $\square$ EF.
vel CN (117. p.) & $\square$ CN. est $\frac{3}{4}$ $\square$ AB (112. p.) Ergo
 $\square$ BD. ad $\square$ EH. est vt $\frac{1}{2}$ $\square$ AB. ad $\frac{3}{4}$ $\square$ AB. vel vt
 $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$ (1. l. 5.) & similiter $\square$ BG. ad $\square$ EA. Quod,
&c.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Quinta pars $\square$ ad tertiam $\triangle$ in eodem circulo est vt diagonum $\square$ ad latus $\triangle$: vel $\square$ ad $\triangle$ est vt $\frac{1}{2}$ diagonia $\square$ ad $\frac{3}{4}$ latera $\triangle$. vel vt $\frac{1}{2}$ diagonij ad $\frac{3}{4}$ lateris $\triangle$.

EXPOSITIO. Fig. 50.

In circulo BDM. fit $\square$ BDGMR & $\triangle$ BCN. ductis radijs AG. AM AC AN. erit GAM. $\frac{1}{2}$ $\square$ & CAN erit $\frac{1}{2}$ $\triangle$ Dico AGM. ad CAN. esse vt BG. ad BC. vel CN. &c.

DEMONSTRATIO.

Cvm AI. fit dimidium AB. vel AL (1. p.) est AK. proportionaliter secta in I. (128. p.) Ergo AI. ad AK. est vt GM. ad GM. (122. p.) Ergo $\square$ AI. GB. æquatur $\square$ AK. GM (1. l. 6.) sed $\square$ AI. GB. ad $\square$ AI. CN. est vt GB. ad CN. (1. l. 6.) Ergo $\square$ AK. GM. ad $\square$ AI. CN. est etiam vt GB. ad CN. (2 l. 5.) sed $\triangle$ GAM. est $\frac{1}{2}$ $\square$ AK. GM. & $\triangle$ CAN. est $\frac{1}{2}$ $\square$ AI. CN (8. l. 1.) Ergo $\triangle$ GAM. ad $\triangle$ CAN. est vt BG. ad CN (5. l. 5.) Ergo quia $\frac{1}{2}$ $\square$ ad $\frac{1}{2}$ $\triangle$ est

vt

vt BG. ad CN. erit $\square$ ad $\triangle$ vt $\square$ BG. ad $\square$ CN.
hoc est $\square$ ad $\triangle$ vt $\square$ BG. ad $\square$ CN. vel vt $\square$ BG.
ad $\square$ CN. quia $\square$ mediarum æquatur $\square$ extrema-
rum (1. l. 6.) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXXVII.

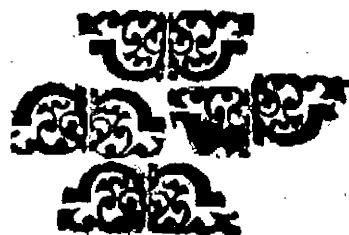
Pentagonum ad Hexagonum eiusdem circu-
lie est vt $\square$ diagonia $\square$ ad 6 latera $\triangle$.

EXPOSITIO. Fig. 50.

In circulo BDG. inscripta sint $\square$ & $\square$. Dico
 $\square$ ad $\square$ esse vt $\square$ BG. ad 6 CN.

DEMONSTRATIO.

Quia $\triangle$ est dimidium $\square$ in eodem circulo
(16. M. 1.) sed $\square$ ad $\triangle$ est vt $\square$ BG. ad $\square$ CN.
(186. p.) Ergo $\square$ ad 2 $\triangle$ erit vt $\square$ BG. ad 6 CN.
sed 2 $\triangle$ æquantur Hexagono eiusdem circuli:
Ergo $\square$ ad Hexagonum est vt $\square$ BG. ad 6 CN.
(2. l. 5.) Quod erat, &c.



PROPOSITIO CLXXXVIII.

Figura regularis ad aliam dimidio laterum numero constantem est ut radius ad minoris perpendicularum ex centro.

Consect. 1. Decagonum ad Pentagonum est ut recta proportionaliter secta ad compositam, ex maiori segmento, & semisse minoris.

2. Octagonum ad $\square$ ut diameter ad latus quadrati.

3. Dodecagonum ad $\circ$ ut diameter ad latus Δ .

EXPOSITIO. Fig. 50.

IN circulo BDL. fit $\square$ BDGMR. & decagonum cuius latus GL. Dico esse decagonum ad $\square$ ut Radius AL. ad perpendicularum AK. & sic de reliquis. Vnde si recta quævis AB. sit proportionaliter secta in O. & minus segmentum AO sit bisectum in x. erit decagonum ad $\square$ ut BA. ad Bx. & AL. ad AK. ut BA. ad Bx. &c.

DEMONSTRATIO.

Quia $\triangle GAK$. est $\frac{1}{2}$. $\square$ & $\triangle GLA$. est $\frac{1}{2}$ decagoni: sed quia $\triangle GAK$. & $\triangle GLA$. habent eandem altitudinem in G. se habent ut bases: ut AK. ad AL (1. l. 6.) Ergo $\frac{1}{2}$. $\square$ ad $\frac{1}{2}$ decagoni est ut AK. ad AL. Ergo $\square$ ad decagonum est ut perpendicularum ad radium, & conuertendo decagonum ad $\square$ ut radius ad perpendicularum $\square$. & sic de reliquis (c. l. 5.)

Con-

Consect. In $\square$. est KL. minus segmentum semi radij proportionaliter secti (118 p.) Ergo erit KL semissis minoris segmenti totius radij AL. proportionaliter secti: Ergo AK. composita erit ex maiori segmento, & semisse minoris: qualis etiam est Bx. respectu BA. ex *hyp.* Ergo AL. ad AK est vt BA. ad Bx. & decagonū ad $\square$ vt tota proportionaliter secta ad compositam ex maiori segmento, & semisse minoris.

Deindè in fig 51. octagonum ad $\square$ est vt radius GL. vel GA. ad perpendiculum GH. sed vt AG. ad GH. ita DF. ad FA. (3. l. 6.) Ergo octagonum ad $\square$ est vt diameter ad latus quadrati.

Tandem cum GE. sit latus $\square$ & BK. perpendiculum est duodecagonū ad $\square$ vt GB. ad BK. Ergo vt AE. ad EC. (5. l. 5.) &c.

PROPOSITIO CLXXXIX.

Triangulum ad decagonum eiusdem circuli est vt triplū lateris Δ ad quintuplum diagonij continuati in latus decagoni etiam cōtinuatū, & Hexagonum ad decagonū vt 6 latera Δ ad 5 diagonia continuata.

EXPOSITIO. Fig. 50.

In circulo BDL. sint inscripta Δ . $\square$. & decagono-

gonum: & continuatis diagonio BM. & latere decagoni GL v(que ad eorum intersectionem Q. Dico $\triangle BCN$. ad decagonum: sic ut 3 CN. ad 5 BQ. & Hexagonum ad decagonum ut 6 CN. ad 5 BQ.

DEMONSTRATIO.

Quia angulus *centri* GAL. duplus est anguli GBL (3. l. 3.) & GBQ. etiam est duplus ipsius GBL. æquales sunt GAK. GBQ. sed anguli in K sunt recti (2. l. 3.) & BGL. in semi circulo est rectus (3. l. 3.) Ergo æquiāgula sunt $\triangle GAK$. & $\triangle QBG$ (3. l. 1.) Ergo ut AK. ad radius AG. ita BG. ad BQ. (2. l. 6.) sed $\square$ ad decagonum ut AK. ad AG. (188. p.) Ergo $\square$ ad decagonum est ut BG ad BQ (1. l. 5.) vel ut 5 BG. ad 5 BQ (5. l. 5) sed $\triangle$ ad decagonum habet rationem compositam ex ratione $\triangle$ ad $\square$ nempe 3 CN. ad 5 BG. (186. p.) & $\square$ ad decagonum: Ergo $\triangle$ ad decagonum habet rationem compositam ex ratione 3 CD. ad 5 BG. & 5 BG. ad 5 BQ. Ergo $\triangle$ ad decagonum est ut 3 CN. ad 5 BQ. Quod, &c. Sed Hexagonum est duplum trianguli (16. M. 1) Ergo Hexagonum ad decagonum eiusdem circuli erit ut 6 CN. ad 5 BQ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXC.

Dagonium Pentagoni ad latus Δ est ut re-
ctā potens totam proportionaliter sectam,
& maius segmentum ad rectam, quā possit totā
& minus segmentum.

EXPOSITIO. Fig. 50.

Sit YX. proportionaliter secta in T. & ST. ipsi
perpendicularis, & æqualis: & SY. poterit
quod tota ST. & minus segmentum YT. tum
SX. poterit quod tota ST. & maius segmētum
TX. Si ergo in eodem circulo sint Δ BCN. &
◊ BDGMR. Dico diagoniū BG. ad latus CN.
esse ut SX ad SY.

DEMONSTRATIO.

Quia $\square BG + \square GL. aq. 4 \square AL. (116. p.)$ &
 $\square CN + \square AL. aq. 4 \square AL. (112. p.)$ deinde
 $\square ST + \square YT. aq. 3 \square TX. (108. p.)$ Ergo $\square$
 $ST + \square YT + \square TX. aq. 4 \square TX$ sed $\square SY. aq. \square$
 $ST + \square YT. \& \square SX. aq. \square ST + \square TX. (4. l. 2.)$
Ergo $\square SY + \square TX. aq. 4 \square TX. \& \square SX + \square$
 $TY. aq. 4 \square TX$ Ergo $\square BG + \square GL. aq. \square CN$
 $+ \square AL.$ sicut $\square SX + \square TY. aq. \square SY + \square TX.$
sed cum GLA. sit proportionaliter secta (124.
p.) est $\square GL$ ad $\square AL.$ ut $\square YT.$ ad $\square TX. (4. l. 6)$
Ergo $\square BG$ ad $\square CN.$ est ut $\square SX$ ad $\square SY. (1. l. 5)$
& BG. ad CN. ut SX ad SY (6. l. 6) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXCI.

IN eodem circulo quarta pars quadrati ad tertiam partem trianguli, est ut diameter ad latus trianguli, vel ut dodecagonum ad Hexagonum: $\square$ ad Δ ut 4 diametri ad 3 latera Δ .

EXPOSITIO. Fig. 51.

IN circulo ABC. est inscriptum Δ ABC. cum $\square$ ADEF. & AGF. est quarta pars quadrati. Et BGC est tertia pars Δ ABC. Dico AGF. ad GBC. esse ut diameter DE. ad latus Δ BC.

DEMONSTRATIO.

Quia G est centrum *ff. ff.* Δ ABC. (109. p.) est AG. dupla ipsius GK. (1. p.) sicut BG. dupla ipsius KC. (2. l. 3.) sed Δ AGF. ad Δ BGC. habet rationem compositam ex basibus GF. ad BC. & altitudinibus GA. ad GK. quæ est ipsa ratio BG. ad KC. (1. l. 6.) Ergo cum ratio GF. ad KC. sit composita ex rationibus GF. ad BC. & BC. ad KC. (21. P.) erit Δ AGF. ad Δ BGC. ut GF. ad KC. (1. l. 5.) sed GF. ad KC. est ut tota DE. ad totam BB. (5. l. 5.) Ergo Δ AGF. ad Δ BGC. est ut DE. ad BC. Ergo ut dodecag. ad $\square$ (188. p.) Ergo quia $\frac{1}{4} \square$ ad $\frac{1}{3} \Delta$ est ut DE. ad BC. erunt $\frac{1}{4} \square$ ad $\frac{2}{3} \Delta$ vel $\square$ ad Δ ut 4 DE. ad 3 BC. Quod erat &c.

PROPOSITIO CXCII.

IN eodem circulo $\square$ ad $\square$ est vt 4 diametri circuli ad 5 diagonia Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

QVia $\square$ ad Δ est vt 4 diametri ad 3 latera Δ (191. p.) sed Δ ad $\square$ est vt 3 latera Δ ad 5 diagonia Pentagoni: Ergo $\square$ ad $\square$ est vt 4 diametri ad 5 diagonia (1. l. 5.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXCIII.

IN eodem circulo Δ ad Octagonum est vt 3 latera Δ ad 8 latera $\square$: & Hexagonum ad Octagonum vt 3 latera Δ ad 4 latera $\square$.

DEMONSTRATIO.

QVia Δ ad $\square$ est vt 3 latera Δ ad 4 diametros circuli (191. p.) sed $\square$ ad octagonum est vt latus $\square$ ad diametrum (188. p.) vel vt radius ad latus (3. l. 6.) vel vt diameter ad 2 latera $\square$ vel 4 diametri ad 8 latera $\square$ (5. l. 1.) Ergo ex æquo Δ ad octagonum est vt 3 latera Δ ad 8 latera $\square$: sed $\square$ est duplum Δ : Ergo $\square$ ad octagonum est vt 6 latera Δ ad 8 latera $\square$: vel vt 3 latera Δ ad 4 latera $\square$. Quod, &c.

PROPOSITIO CXCIV.

Octagonum ad $\square$ est vt 8 latera $\square$ ad 5 diagonia Pentagoni.

DEMONSTRATIO.

Quia Octagonum ad Δ est vt 8 latera $\square$ ad 3 latera Δ (193 p.) sed Δ ad $\square$ est vt 3 latera Δ ad 5 diagonia $\square$ (186. p.) Ergo ex æquo Octagonum ad $\square$ est vt 8 latera $\square$ ad 5 diagonia $\square$ (1. l. 5.)

PROPOSITIO CXCV.

Octagonum ad decagonum est 8 latera $\square$ ad 5 diagonia continuata in latus decagoni continuatur.

DEMONSTRATIO.

Octagonum ad Δ vt 8 lat. $\square$ ad 3 lat. Δ (193. p.) sed Δ ad decagonum est vt 3 lat. Δ ad 5 diag. $\square$ continuata (189. p.) Ergo ex æquo Octagonum ad decagonum est vt 8 lat. $\square$ ad 5 diag. continuata $\square$ (1. l. 5.)

PROPOSITIO CXCVI.

Quadratum ad decagonum est vt 4 diametri circuli ad 5 diagonia $\square$ continuata.

DEMONSTRATIO.

Quia $\square$ ad Δ est vt 4 diametri ad 3 latera Δ :
sed

sed Δ ad decagonum est vt 3 lat. Δ ad 5 diag. continuata (190.p.) Ergo ex æquo $\square$ ad decagonū est vt 4 diametri ad 5 diagonia $\square$ continuata (1.l.5.)

PROPOSITIO CXCVII.

Dodecagonum ad Δ est vt 2 diametri ad lat. Δ .

DEMONSTRATIO.

Quia dodecagonum ad $\square$ est vt 2 diametri ad 2 latera Δ (188.p.) & $\square$ ad Δ vt 2 latera Δ ad latus Δ (198.p.) Ergo ex æquo dodecagonū ad Δ vt 2 diametri ad latus Δ (1.l.5.)

Similiter comparari potest dodecagonum quadrato, pētagono, octagono, & decagono.

PROPOSITIO CXCVIII.

Si recta sit proportionaliter secta, & maius segmentum diameter circuli, $\square$ totius + $\square$ ex dimidio minoris segmenti æquatur 3 $\square$ ex diagonio $\square$ circulo inscripti.

EXPOSITIO. Fig. 52.

Sit AB. proportionaliter secta in C. & AC. bisecta in D. & radio EC. vel EB. fiat circulus cum $\square$. Dico $\square$ BA + $\square$ AD. æq 3 $\square$ diag. $\square$.

DEMONSTRATIO.

VT AC. ad CB. ita DC. ad CE (5.l.5.) Ergo DE. secta est proportionaliter in C. sicut AB. Ergo

go si EC. fiat radius, erit CD. latus decagoni (124. p.) Si ergo G. diagonum $\square$ in eodem circulo, & $\square G + \square CD.$ vel AD. *equabuntur* $\square CB.$ (116. p.) sed $\square BA + \square AC. eq. 3 \square CB.$ (108. p.) Ergo $\square BA + \square AC. eq. 3 \square G + 3 \square AB.$ sed $\square BA + \square AC. eq. 4 \square BA + 4 \square AD$ (3. l. 2.) Ergo $3 \square G + 3 \square AD. eq. \square BA + 4 \square AD.$ Ergo ablatis utrinque $3 \square AD.$ erit $\square BA + \square AD. eq. 3 \square G.$ Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXCIX.

Si recta sit proportionaliter secta, qua diametro circulus describatur cum $\square$: erunt $\square$ totius cum $\square$ ex dimidio minoris segmenti equalia $3 \square$ ex latere $\square$: & latus huius æquale diagono præcedentis $\square$ prop. 198.

EXPOSITIO. Fig. 52.

Sit AB. diameter circuli, & X. latus $\square$ reliqua ut antea. Dico $\square AB + \square AD. eq. 3 \square X.$ & æqualia esse latus X. & diagonum G. (prop. 198.)

DEMONSTRATIO.

Cum ED. sit AB. erit radius circuli, & EC. maius segmentum (198. p.) Ergo $3 \square X. eq. 3 \square ED + 3 \square EC.$ (117. p.) sed $\square ED + \square DC.$ vel AB. $eq. 3 \square EC$ (108. p.) Ergo $3 \square X. eq. 4 \square ED + \square AD.$ hoc est $\square AB + \square AD.$ (3. l. 2.)
Quod,

Quod, &c. Sed $\square G. \text{eq.} \square AB + \square AD$ (198 p.)
Ergo latus $\square X.$ æquale est diagonio $G.$ Quod,
&c.

PROPOSITIO CC.

Si recta sit proportionaliter secta: $\square$ maioris segmenti cum $\square$ compositæ ex maiori, & $\frac{1}{2}$ minoris, æquantur $\square$ totius + $\square$ ex $\frac{1}{2}$ minoris: tum 3 $\square$ lateris, & diagonij prædictis.

EXPOSITIO. Fig. 52.

Sit $AB.$ secta ut antea. Dico $\square BC + \square BD.$
æqualia esse $\square BA + \square AD.$ &c.

DEMONSTRATIO.

Quia $\square BD. \text{eq.} \square BC + \square CD + 2\square BCD.$ vel
 $\square BCA$ (1. l. 2.) sed $\square BCA + \square AC. \text{eq.} \square$
 BAC (1. l. 2.) vel $\square BC.$ (1. l. 6.) Ergo $\square BD + \square$
 $AC. \text{eq.} 2\square BC + \square CD.$ vel $AD.$ Ergo $\square BD +$
 $\square AC + \square BC. \text{eq.} 3\square BC + \square DC.$

Deinde $\square AB + \square AC. \text{eq.} 3\square CB.$ (108 p.)
Ergo $\square AB + \square AC + AD. \text{eq.} 3\square CB + AD.$ Er
go $\square BD + \square AC + \square BC. \text{eq.} \square AB + \square AC +$
 $\square AD.$ & ablato utrinque $\square AC.$ erunt $\square BD$
 $+ \square BC. \text{eq.} \square AB + \square AD.$ Quod erat, &c.

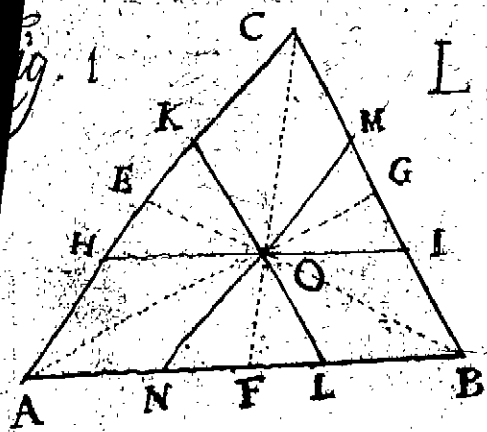
Sed $\square AB + \square AD. \text{eq.} 3\square G.$ (198 p.) & etiã
 $3\square X$ (199 p.) Ergo $\square BD + \square BC. \text{eq.} 3\square X.$ &
 $3\square G.$ &c.



FINIS.



Fig. 1.



LAM.^a I.

P.^{is} II

Fig. 2.

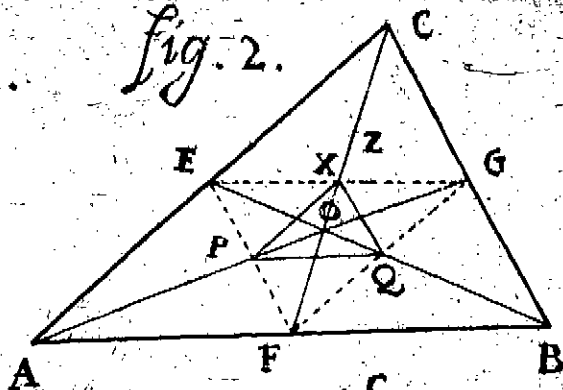


Fig. 3.

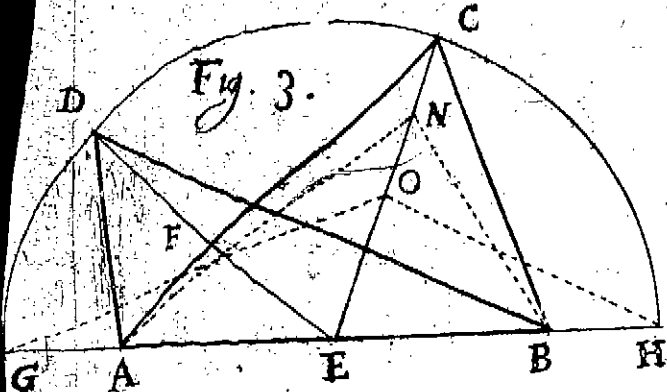


Fig. 4.

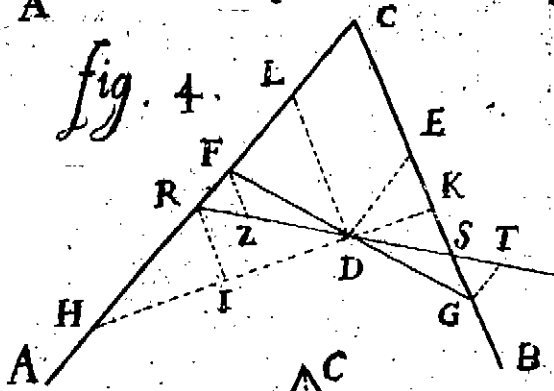


Fig. 6.

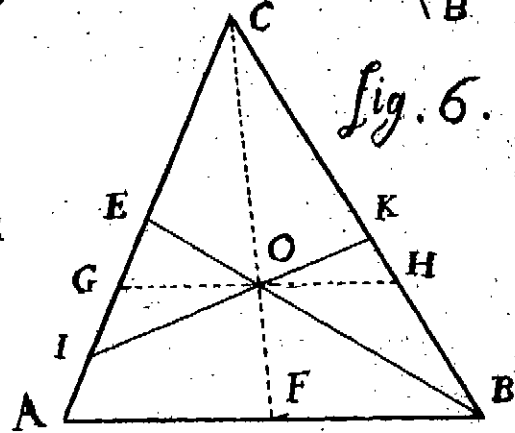


Fig. 5.

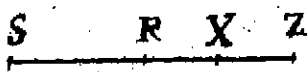
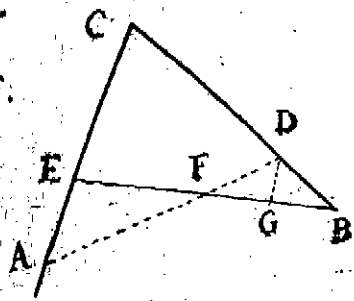


Fig. 7.

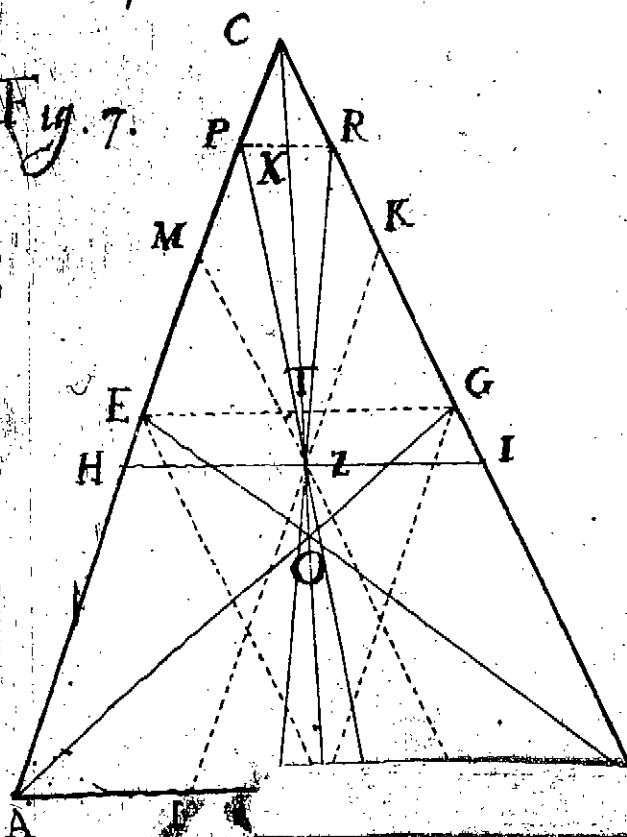


Fig. 8.

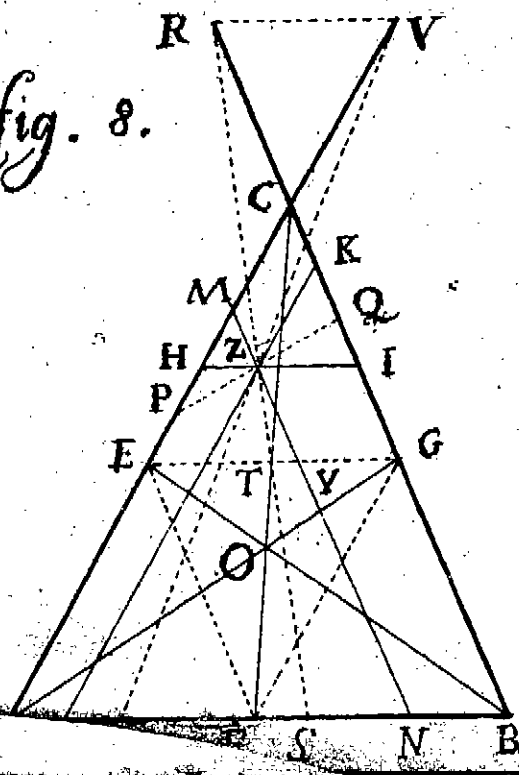


Fig. 9. L^a II. P^{is} II

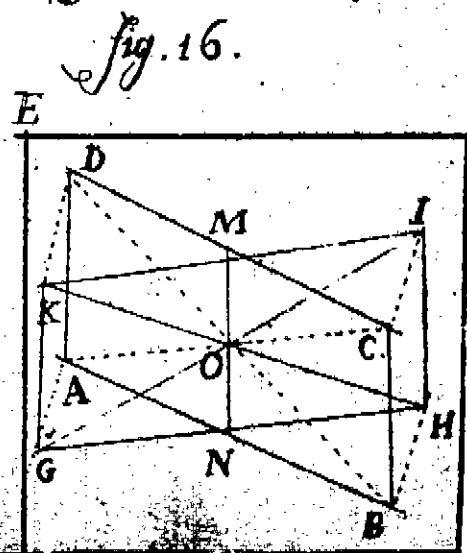
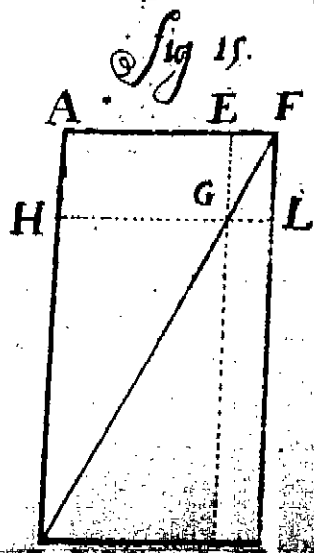
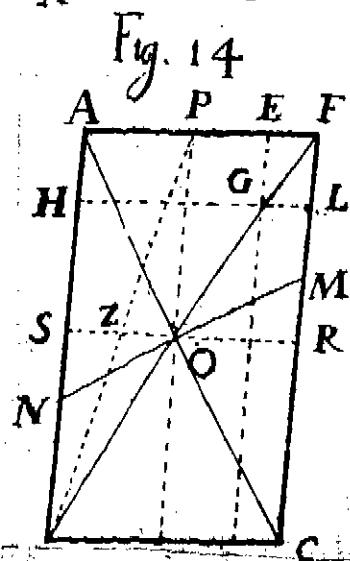
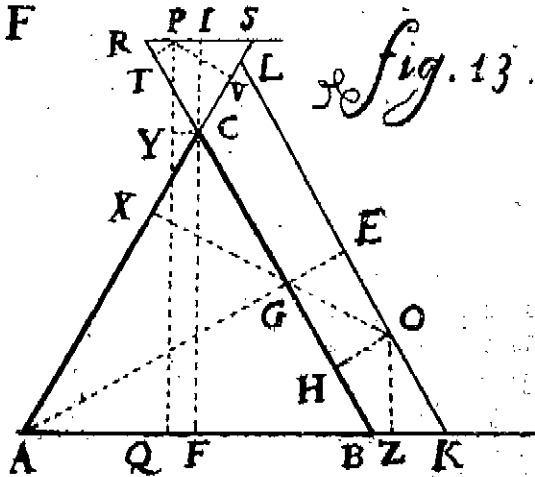
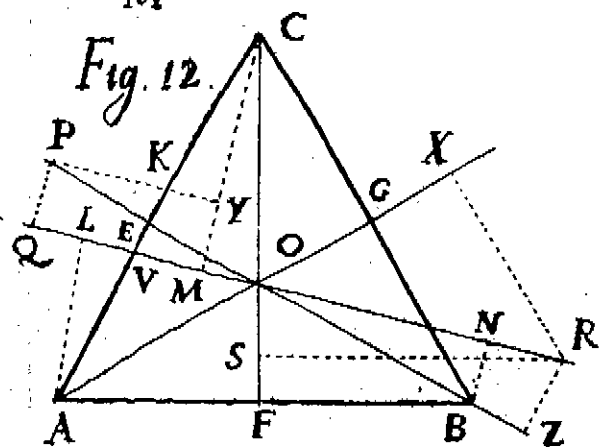
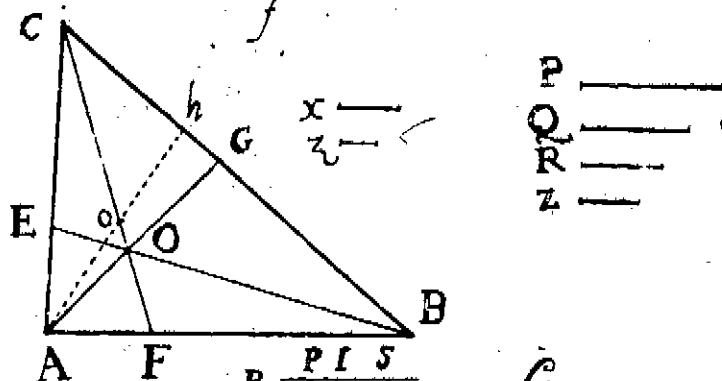
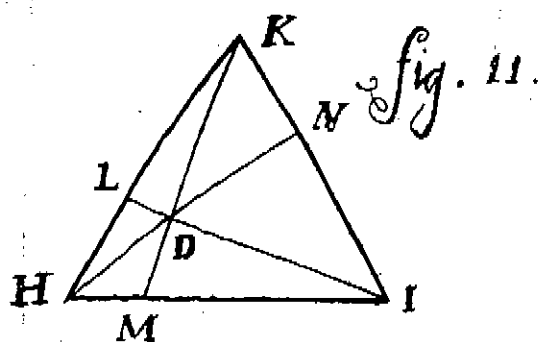
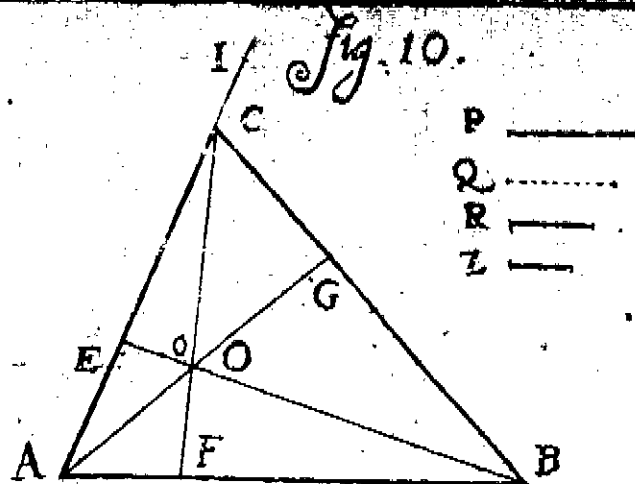
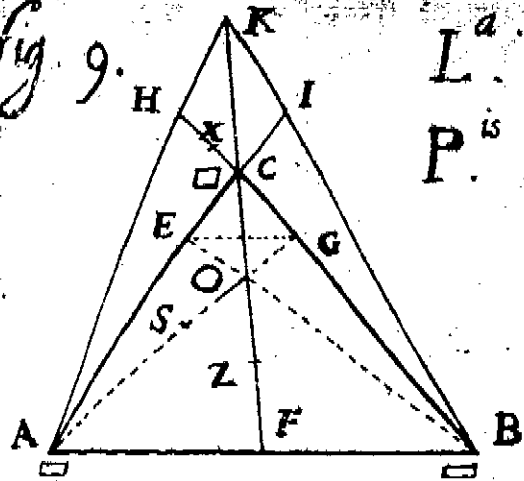
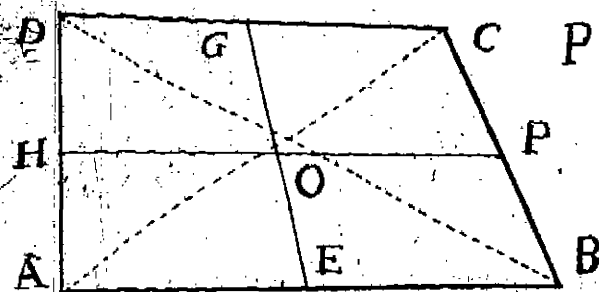


Fig. 17



L^a III

Fig. 18

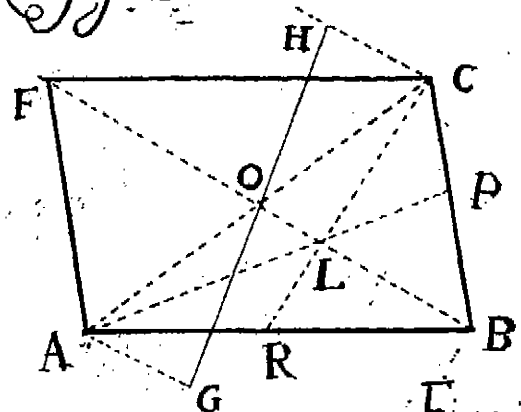


Fig. 19

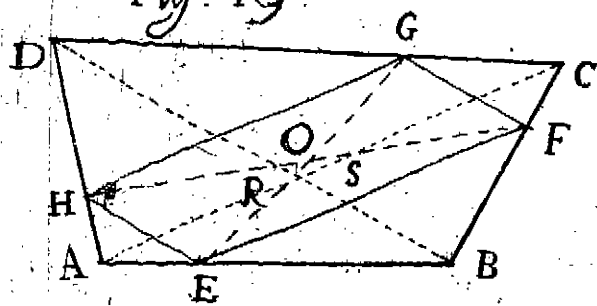


Fig. 20

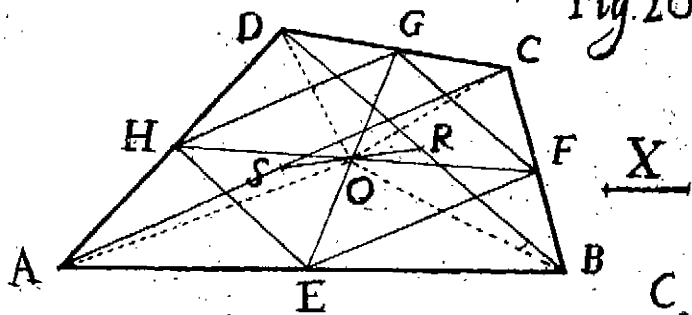


Fig. 21

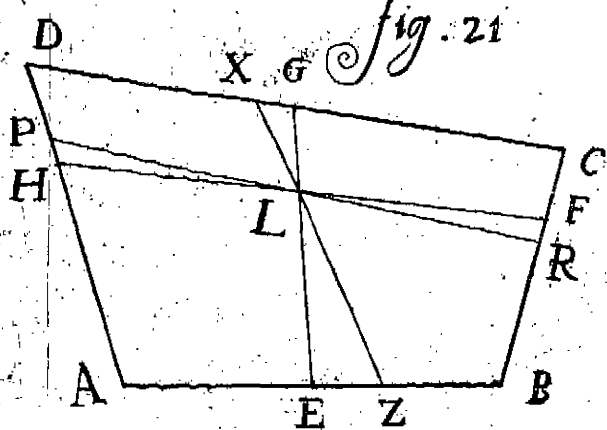


Fig. 22

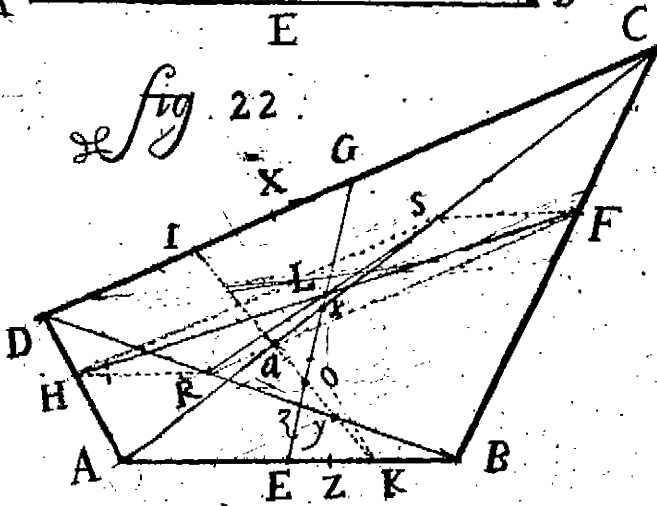


Fig. 23

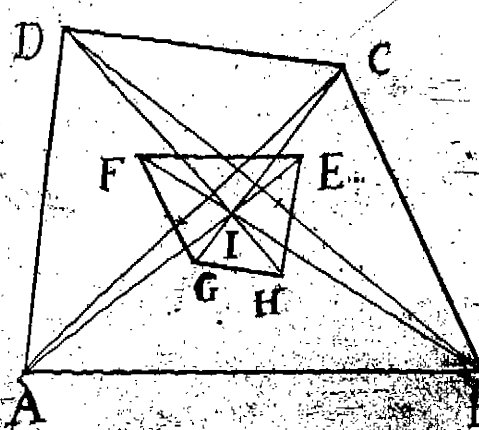


Fig. 24

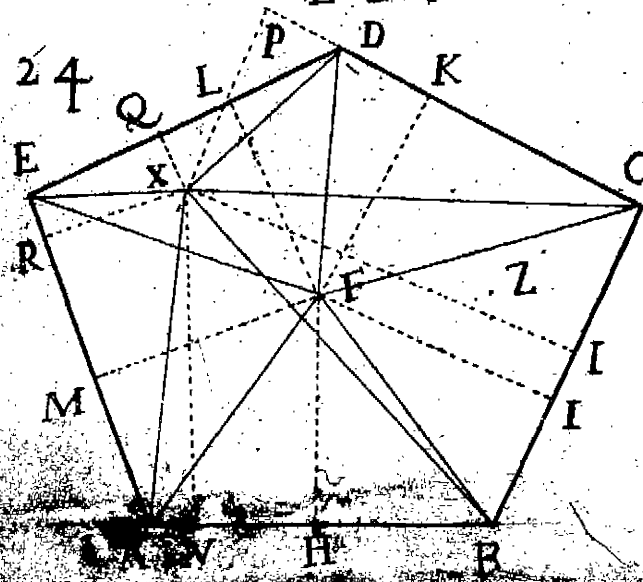


fig. 25.

L^a. IV

P. II

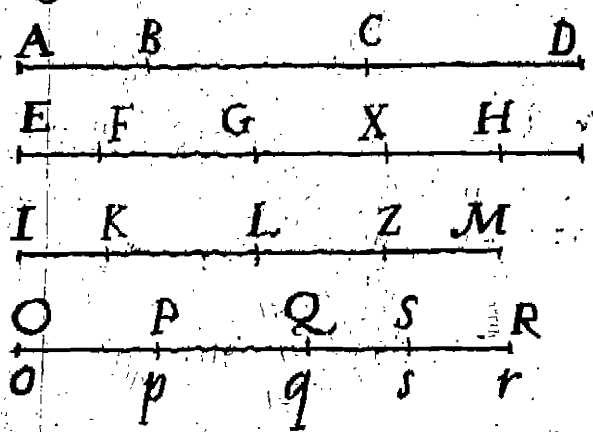


fig. 26.

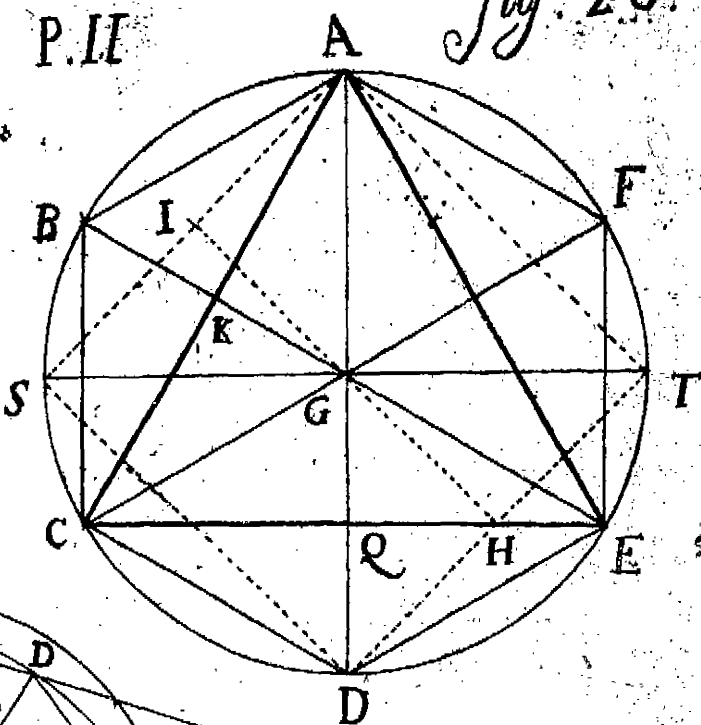


fig. 27.

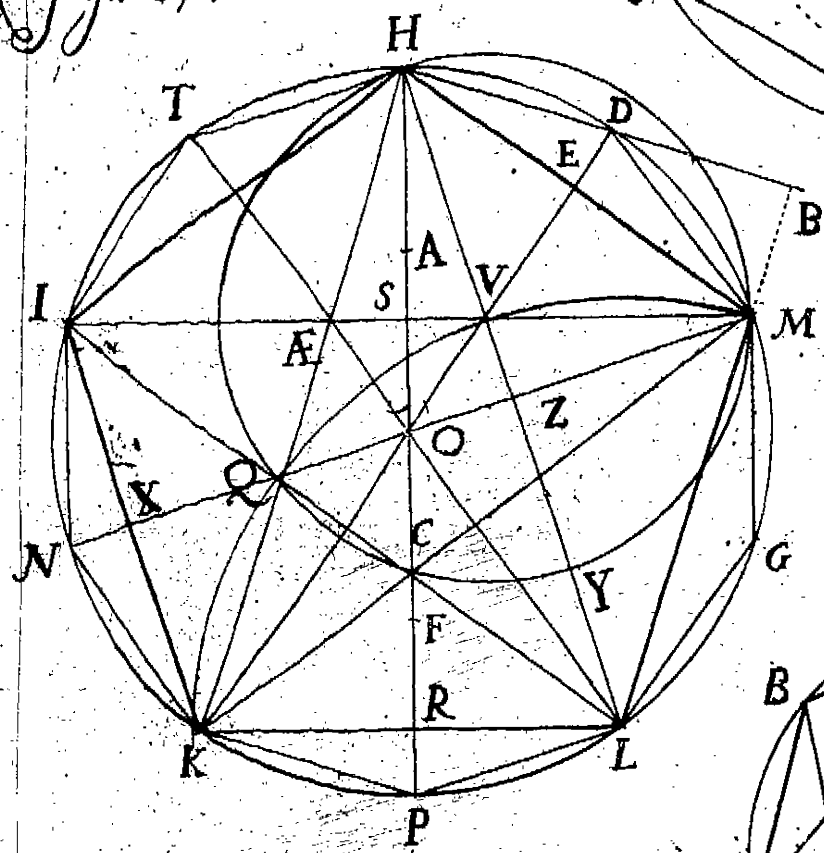
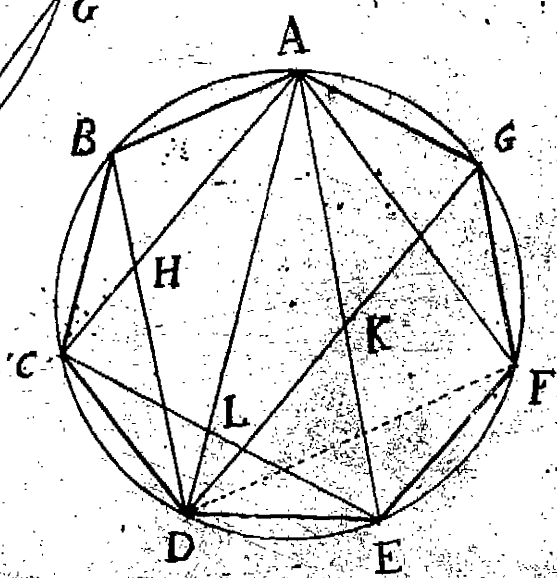


fig. 28.



$L^a, V,$
 $P, II,$

Fig. 29.

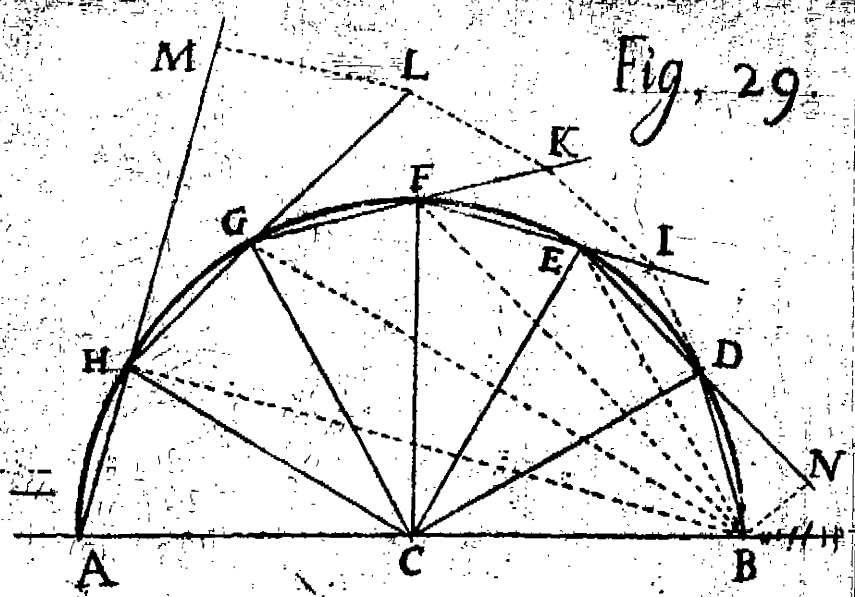


Fig. 30.

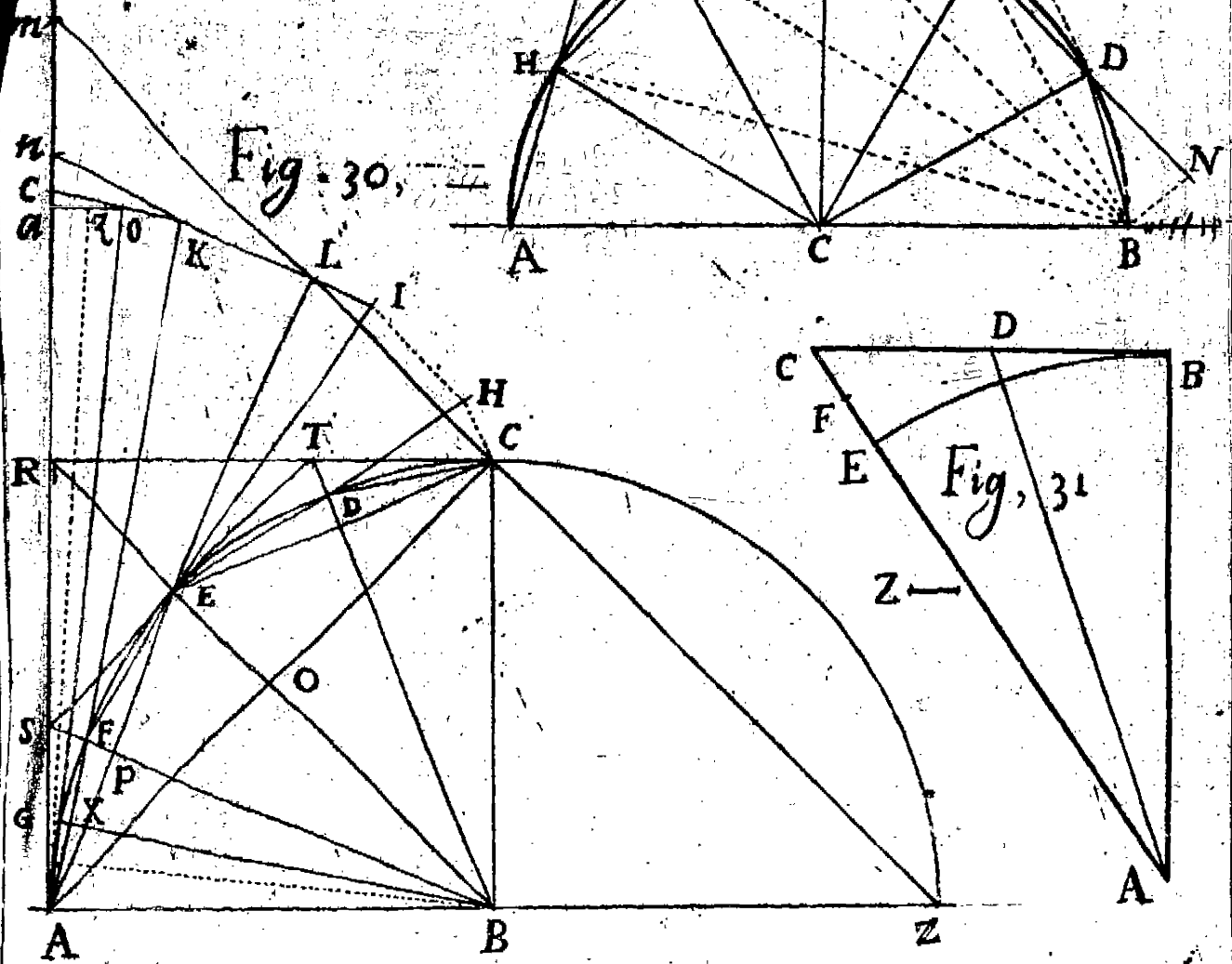


Fig. 31.

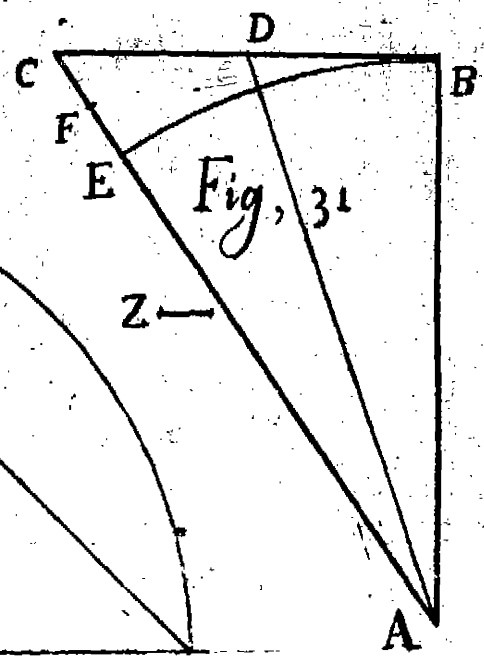


Fig. 32.

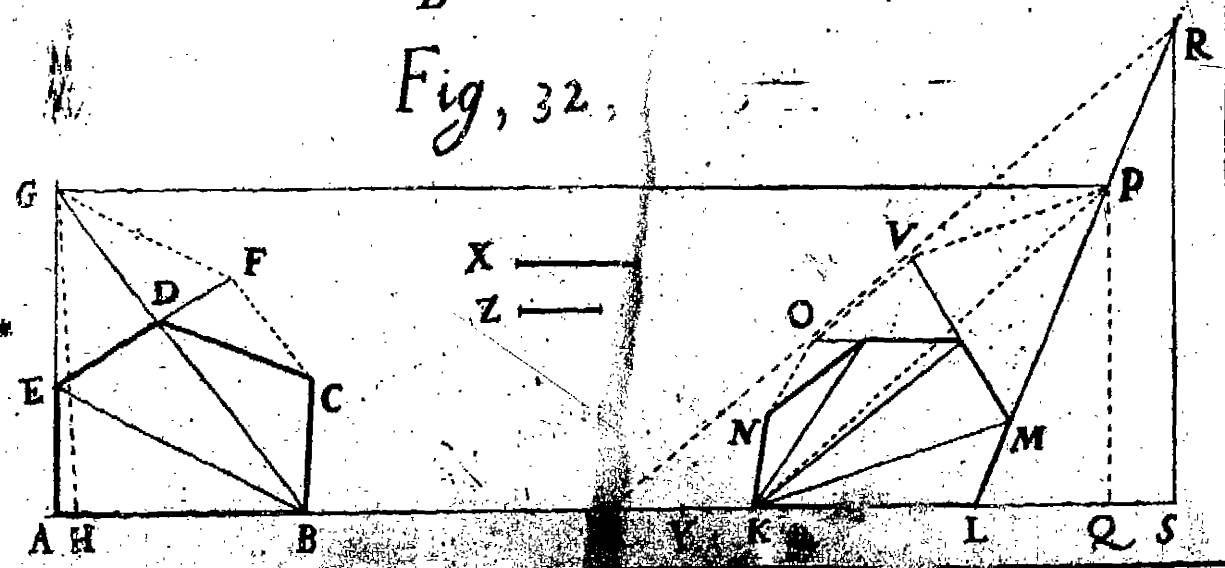
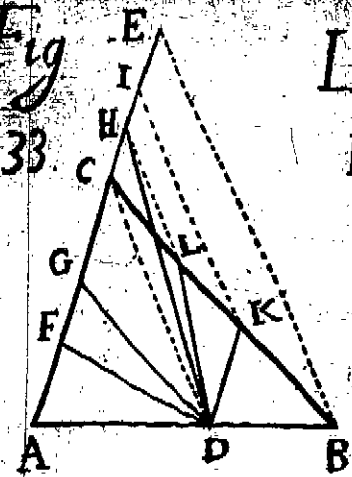
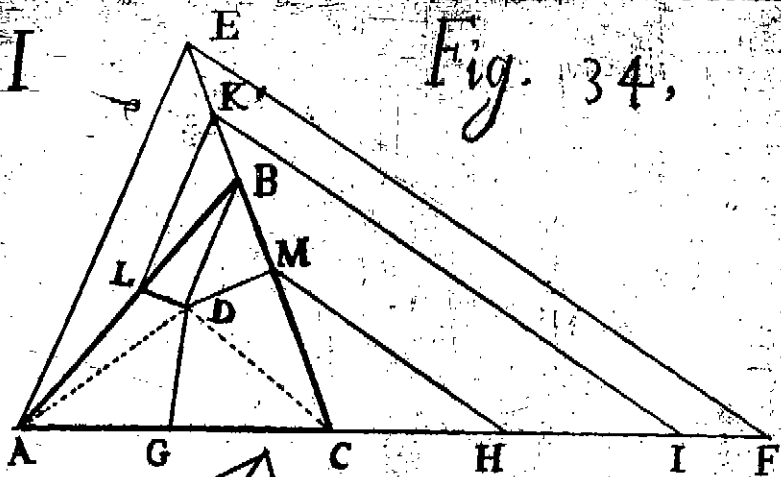


Fig. 33.



L. VI
P. II,

Fig. 34.



$x \quad y \quad p \quad q \quad y \quad z$

Fig. 35.

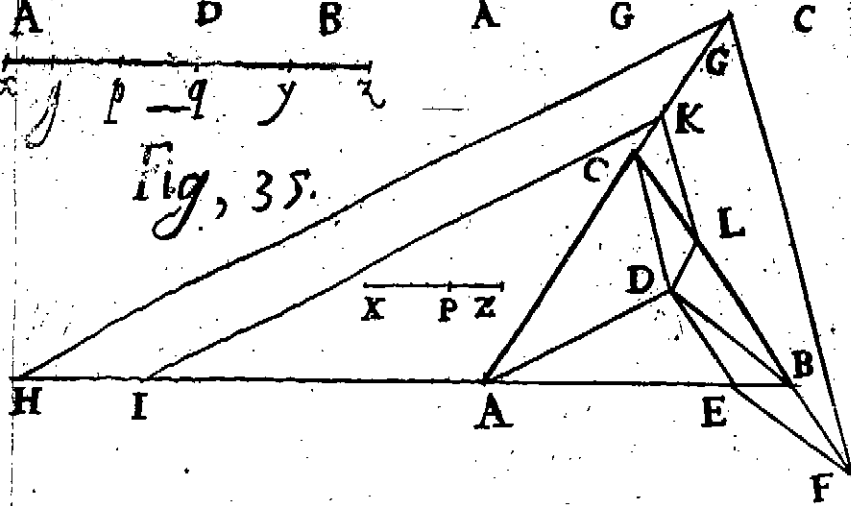


Fig. 36.

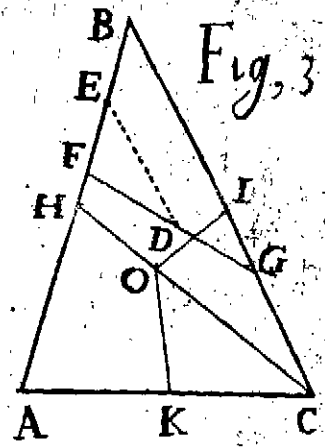
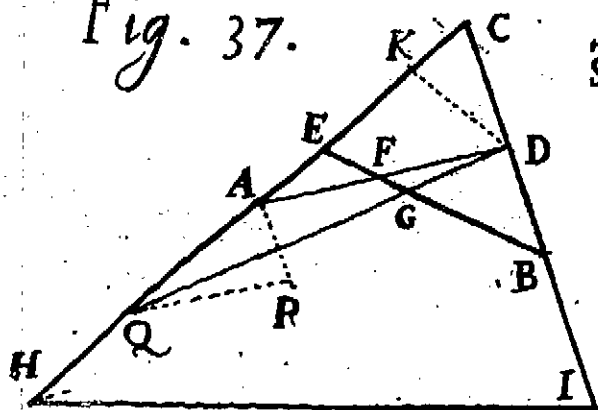


Fig. 37.



$s \quad r \quad x \quad z$

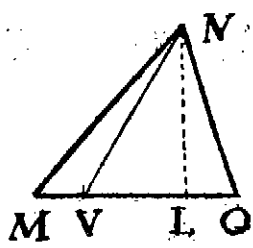


Fig. 38.

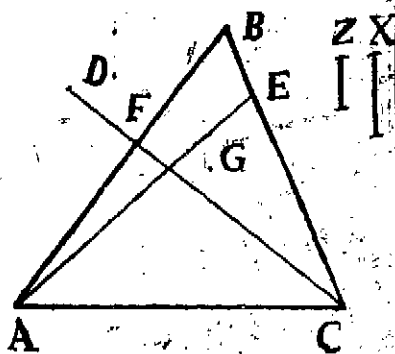


Fig. 39.

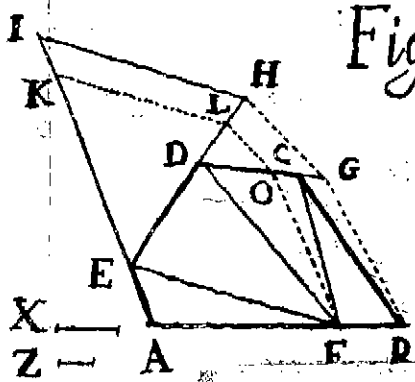
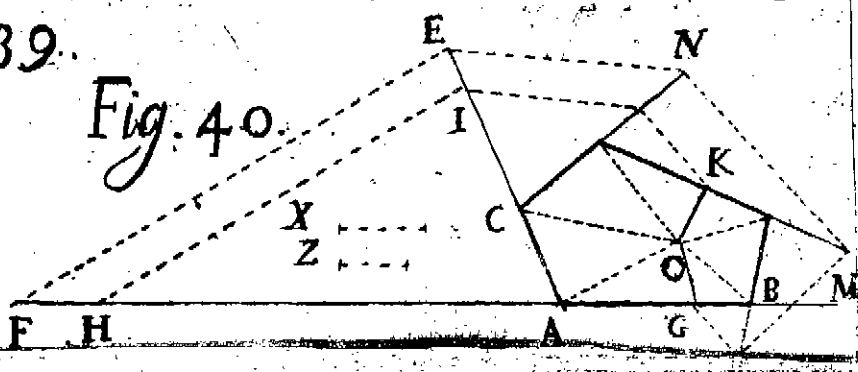


Fig. 40.



L. VII

P. II.

D. Fig. 41.

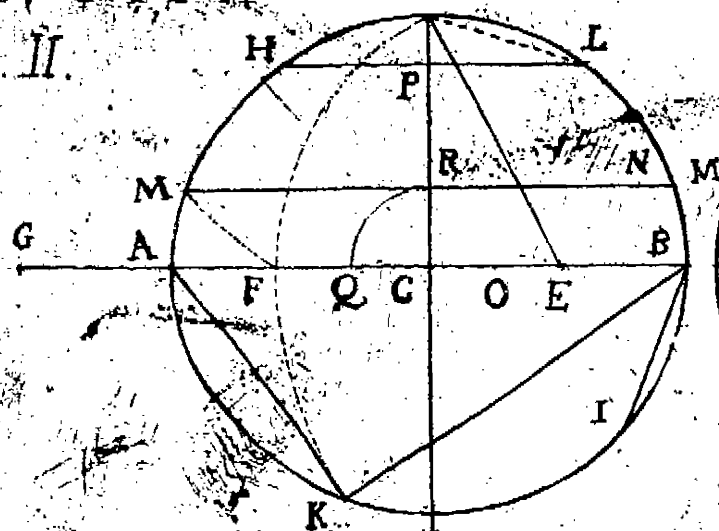


Fig. 45

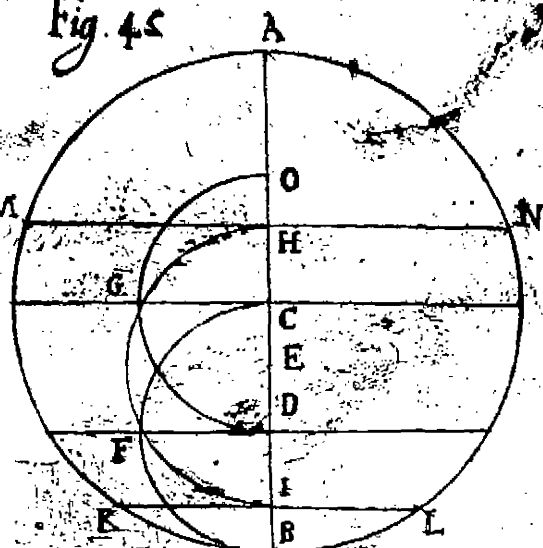


Fig. 43.

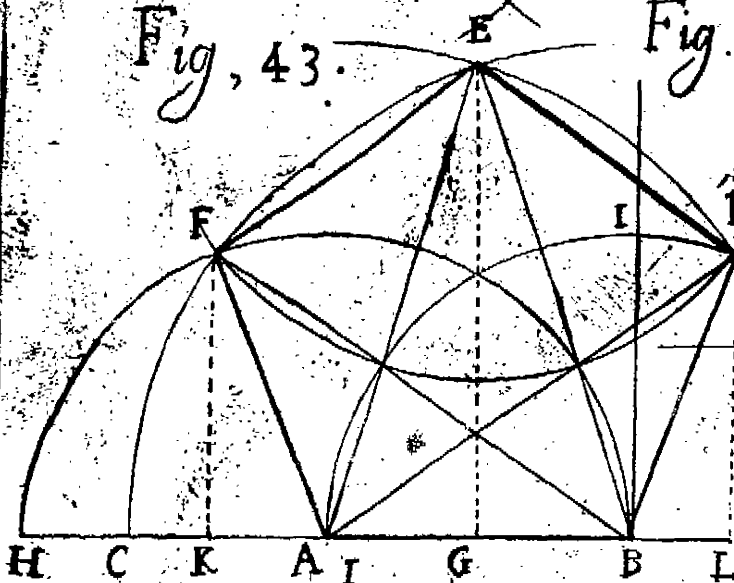
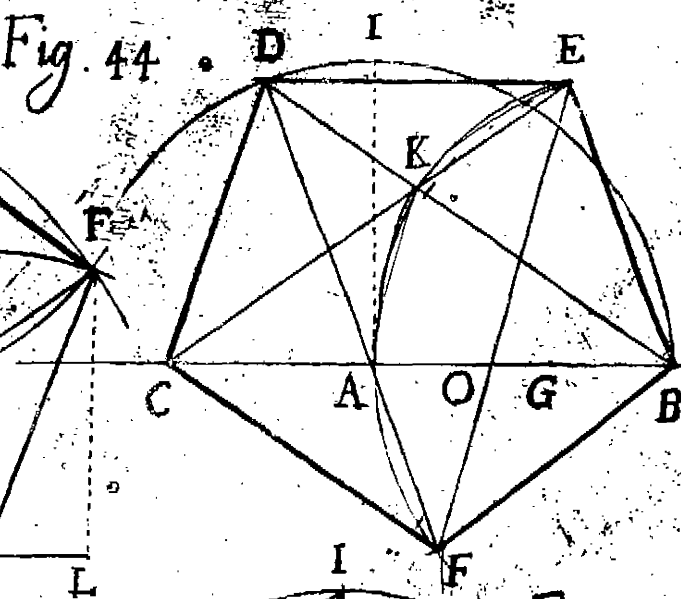


Fig. 44



Fi. 45

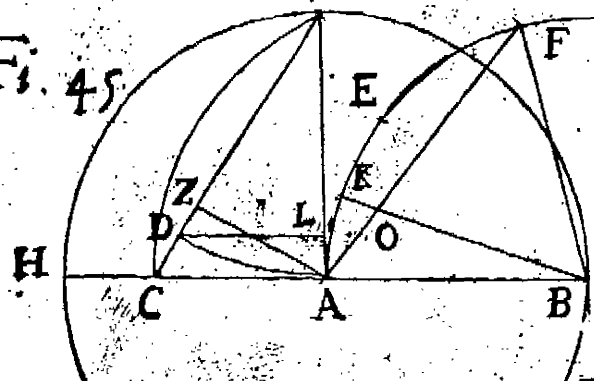


Fig. 46

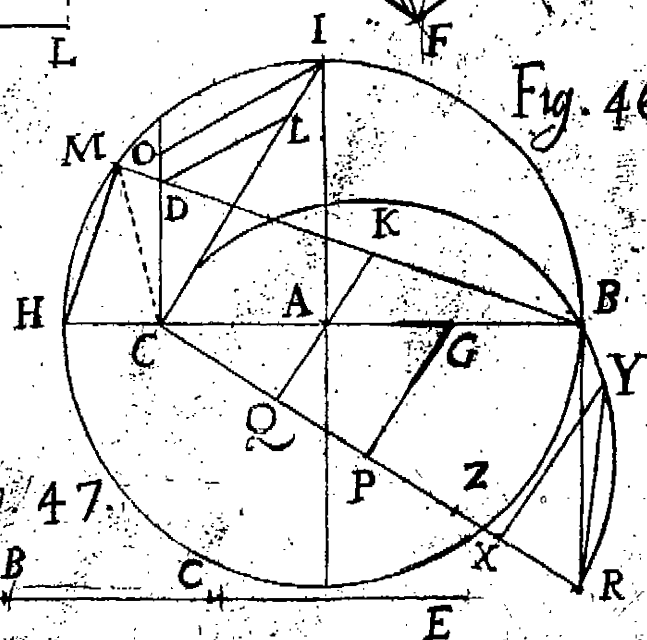
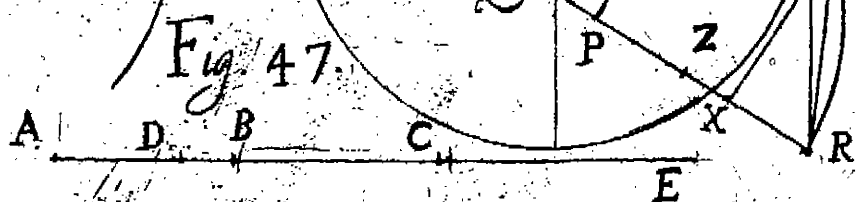


Fig. 47



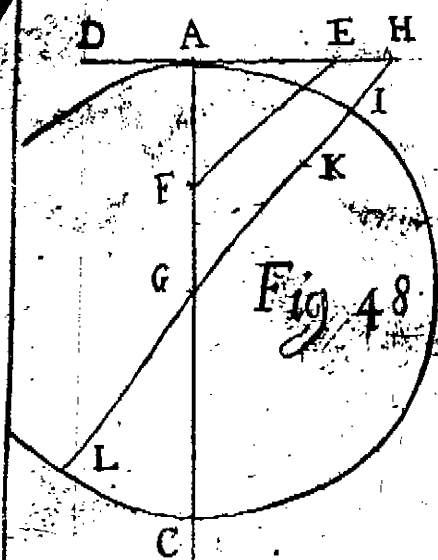


Fig. 49.

L^a. VIII.

P. II.

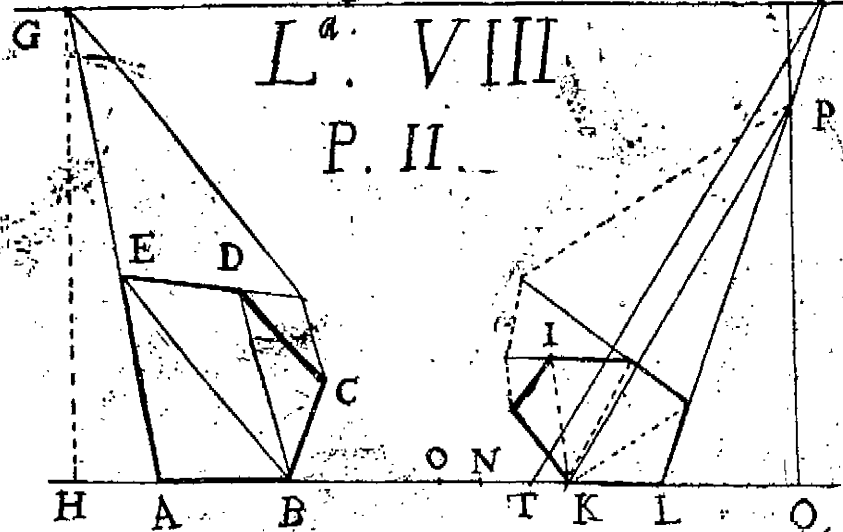
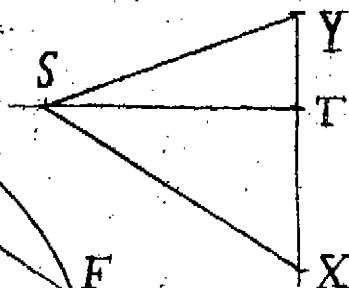
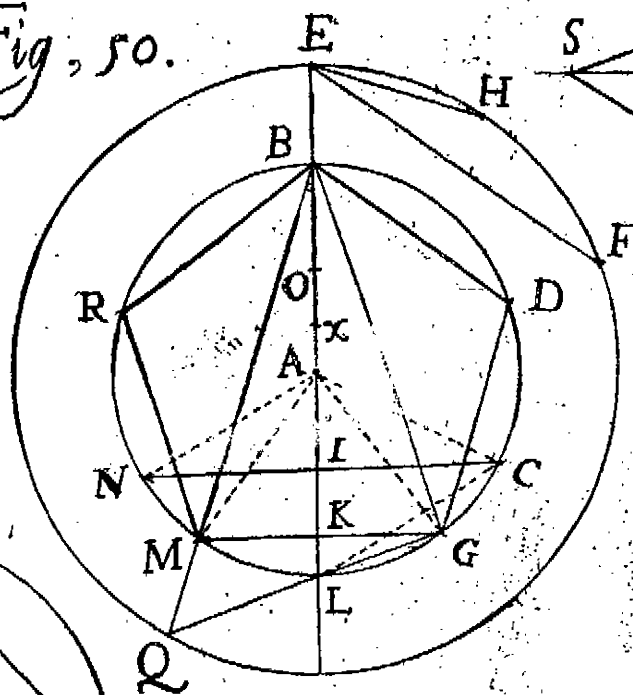


Fig. 50.



Z

Fig. 51.

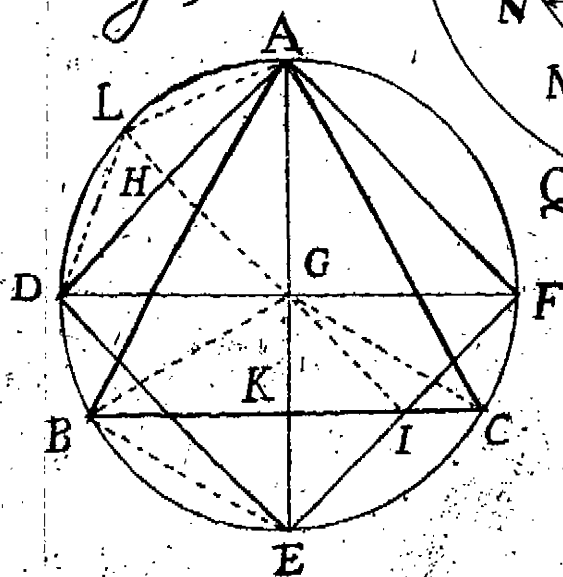


Fig. 52.

