ZARAGOZA, José (S.I.)

Geometriae magnae in minimis : pars tertia, de solidis / authore... Iosepho Zaragoza... Societatis Iesu... -- Prima editio. -- Toleti : Apud Franciscum Calvo..., 1674

[8], 291 p., [12] h. de lám., @4, A-Z4, 2A-2M4, 2N6 ; 4º

1. Geometría 2. Geometria I. Título

GEOMETRIÆ MAGNAE IN MINIMIS.
PARS TERTIA, DE SOLIDIS.

AVTHORE

R. A. P. IOSEPHO ZARAGOZA, Valentino Societatis Iesv, in Suprema Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censore: olim Theologiæ Scholasticæ in Collegijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino, nunc in Matritensi Academia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

AD EXCELLENTISSIMVM DOMINVM D. MELCHIOREM DE NAVARRA, ROCAFVLL, Palatæ Ducem, Massæ Principem, Aragonum Coronæ Vicecancellarium, &c.

PRIMA EDITIO.

TOLETI: Apud Franciscum Calvo, Typog. Reg. Anno Domini 1674.
Cum Superiorum licentia.

FACVLTAS SVPERIORVM.

Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zevallos, Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS.

Provinciæ Toletanæ Societatis Iesv.

Didacus de Valdès.

EXCELLENTISSIMO DOMINO

D. MELCHIORI DE NAVARRA

ET ROCAFVLL, ALCANTARENSI EQVITI,

Palatæ Duci, Maſſæ Principi, Turricellæ Domino, Catholicæ Maieſtatis à Conſilijs, eiuſdem in Regnis Aragonum Coronæ Vicecancellario, & in Magno Synedrio, vel ſexviratu ſummo, univerſæ Hiſpaniarum Monarchiæ Gubernationi præfecto ſexviro, &c.

QVO Amore (Excellentiſsimè Princeps) opuſcula mea, & literarum ſtudii proſequutus, & amplexus fueris, & quãtum ſingulari tuæ humanitati debeam, mihi ſæpius conſideranti, aliquod meæ gratitudinis exemplar inquirẽdum fuit; quod licet accuratius præſtiterim, nullum debito ſuppar diu quæſitum invenire licuit. Ingratitudinis igitur reus non audiam, cum pro acceptis beneficijs grates condignas habere nequeam, ſed audirem nõ habens, cum poſſem, quod mihi ſolamini erit, quandiu beneficiorum amplitudo gratitudinis metam excedet: interim dum nobilius ſpecimem devincti animi non ſuppetit, ingenij partus iſte, labore conceptus, ac ſudore enutritus magno tuo nomini conſecratus orbi litterario ſiſtitur, qui me totum tibi adſtrictum, & quaſi trabali clavo tuis beneficijs defixum teſtabitur cunctis, dum hæc literarum monumenta ſuperſint, & perennatura ſpero ſub auſpicijs tuis, cum immortale nomen tuum nulla poſsit oblivione deleri. Tertiam igitur partem Geometriæ Magnæ in Minimis, quæ de solidis agit, nomini tuo sacratam exhibeo, vt in ipsius operis fronte nobilitatis, sapientiæ, ac virtutis tuæ soliditas, & magnitudo appareant insculptæ.

Quantus sit tui sanguinis splendor, quanta generis claritudo, testantur alta illa cognomina, quæ ex vtroque Parente iure successionis hausisti: NAVARRA, scilicet ROCAFVLL, YXAR, VIQVE, MONCADA, ET MANRIQVE: Horum dignitas Catholico orbi conspicua veneranda hic potiùs, quam exponenda venit, cum nec claritas Rethoricæ pigmentis egeat: nec amplitudo immensa epistolæ patiatur angustias. Familia de NAVARRA, Regium sanguinem hausit ex Carolo Secundo Navarræorum Rege; huius soboles, & progenies amplissima fuere illius Regni Mariscales, Marchiones de CORTES, & CABREGA: & horum consanguinei alti Progenitores tui eandem Regiam promeruère originē, qui ex Vasconum finibus avulsi, apud Aragonas Edetanos fixère sedem.

Matrem præterea habuisti non imparem illustrissimam Dominam D. Magdalenam de ROCAFVLL, quæ propagines æquè nobiles YXAR, VIQVE, MONCADA, ET MANRIQVE, in se vnum congessit: ipsius Pater D. D. Ludovicus de ROCAFVLL, & de YXAR, Dominus de *Alfarraci*, nepos Comitum de Albatera, quibus Varonía de ROCAFVLL modo subiacet, originem traxit ex Principibus, & Dominis Montis Pessulani. Quorum D. D. Raymundus de ROCAFVLL, Iacobi Primi Aragonum Regis avunculus, & Reginæ ma-

tris

tris Mariæ consobrinus familiam hanc ex Voldis Arecomicis in Hispaniam, & Valentiæ Regnum traduxit; Insuper Iacobus Rex primus vnũ ex filijs oppidi de YVAR hæredem instituit, vnde clarissimæ illius sobolis cognomen exortum, quæ Regium tibi sanguinem indicit. Valentiæ vivit, & vivet immortalis memoria Illustrissimi Domini D. Hieronymi VIQVE, pro Ferdinando Catholico, & Carolo Quinto, ad Pontificem Summum totos viginti annos legati, huius filius D. D. Ludovicus VIQVE, consortem promeruit D. Menciam MANRIQVE DE LARA, Comitum de Paredes filiam: Ex quibus progenitus D. Hieronymus VIQVE MANRIQVE, sortitus fuit coniugem D. D. Raphaelam de MONCADA, Marchionum Aytonæ propaginẽ; hoc consortium orbi dedit D. Menciam VIQVE MANRIQVE ET MONCADA, matris tuæ matrem clarissimam.

Accessit his altis nominibus Excellentissima coniux D. D. Francisca de TORALTO ET ARAGON, hæres vnigenita Excellentissimi D. D. Francisci de TORALTO ET ARAGON, Ducis Palatæ, Massæ Principis, Magni Philippi à Consilijs in Supremo belli Senatu. Hic Mavors alter, annis plus triginta armorum pondus sustinuit, & bello iugiter in Germania, Mediolanensi statu, & Cathaloniæ Principatu infatigabilis insudavit: Neapoli tandem à seditiosis, cum oblatum imperium sprevisset, Coronam exosus tyrannide vna firmatã, ex altero pede suspensus, evisceratus est semivivus, extremum clamans halitum suo Regi solvendum, quo &

Re-

Regis causam, & animam simul egit: cor vero tanti viri, quod nec quidem exanime sisti neret insidos, inter argenteas patinas coniugi D. D. Albinæ FREZAE DE VRSINO, Castrensi Duci delatum est; pretiosius forte donum, quam seditiosa immanitas cogitarat, cum nulla pretiosior hæreditas Toraltæ familiæ potuisset contingere, quam hoc servatæ fidei testimonium, exemplum posteris, ac æternum fidelissimæ fortitudinis monimentum.

Hæc omnia, quæ singulari beneficio nactus es, inter bona castrensia minime veniunt numeranda, sed ea quæ proprio Marte acquisita, & sudore irrigata ad perfectam venere maturitatem, sapientia nempe, & virtus, quæ verè tuæ sunt, quibus Progenitorum gloriam, nisi invenisses clarissimam, efficere potuisses. Modestia tua præpeditus laudibus supersedeo tuis; & quidem ijs non indiges, cum adeo perspicue magna vivas, quæ neminem fugiant. Opus encomiaste non est cum Mariana Austriaca Hispaniarum Regina, & pro Carolo Secundo gubernatrix prudentiæ virtute clarissima tuum meritum orbi exposuerit, te scilicet Aragoniæ Vicecancellarium creans, vt Magni Synedri in summo vniversæ gubernationis Senatu, quem sexviratum, vel coniunctionem magnam dixerim, munus expleres, & in regni centro collocatus, quaquaversum splendidissimos tuæ prudentiæ radios solis instar summo regni bono diffunderes. Occurrētium negotiorum magnitudo, *acribiam* exposcebat tuam, quo nomine diligentia, sedulitas, solertia, exacta discussio, accuratio, syncera expressio, ratio, & integritas summa intelligēdæ veniunt. Omitto apparatum bellicum in Cathalonia, navium cō-

stru-

structionem in Pytiusis, Triremium Barcinone, Pyraticam Balearium manum Maioricæ, & alia quæ promoves, animumque tuum immensum, vtpote vbique præsentem insinuant. In tanta rerum occurrentium varietate ea es animi amplitudine, vt nihil aliud te animo versare, nihil acturum esse videaris, licet graviora semper gravioribus supervenìant, nisi quæ agis: aditum præbes omnibus non statis diebus, sed horis singulis, quo Regiam dignitatem, & subditorum simul promoveas commoda. Tibi igitur minime vivis, dum Regi, Regno, & omnibus vivis, salutem prodigis tuam, quam alijs tribuas, fractus sæpe viribus, & quassata valetudine accurando muneri incumbis, ac si vixeris satis; & quidem satis te vixisse æternitati iudicant omnes, quibus immortalitatis meritum vita est: sed ijdem te non satis victurum regni bono autumant; licet in ævum superes. Deum igitur Op. Max. oratum velim, vt plura sæcula peragas integer viribus, firmus iudicio, prudentia vegetus in literatorum patrocinium, bonorum solamen, omnium commodum, & Catholici huiur Imperij decus, & columen immortale.

Excellentissime Domine,

Excellentiæ vestræ,
Obsequentissimus servus

Iosephus Zaragozà.

ERRO-

ERRORES ANTE OMNIA CORRIGENDI.

Pag.	Lin.	Error.	Correct.	Pag.	Lin.	Error.	Correct.
23.	1.	RD.	RL.	191.	15.	OL.	OM.
25.	13.	*sunt.*	*sunt proportionales.*	194.	12.14.	DF.	EF.
43.	12.	pari.	pariter.	194.	13.	FCD.	FCE.
49.	15.	RY.	RS.	197.	17.	BFC.	BFCL.
50.	9.	&.	est.	215.	15.	*xy.*	*Ty.*
56.	4.	FF.	EF.	217.	18.	est.	ex.
73.	4.	*aliqua.*	*reliqua.*	218.	26.	*n*✠.	*Dn*✠.
89.	6.	ap.	ad.	225.	24.	PQI.	PQL.
96.	24.	*f*✠K.	*f*✠*m.*	227.	23.	HS.	XS.
97.	7.	&*g.*	vt *g.*	228.	4.12.	(M.2.)	(198.M2.)
118.	23.	2 XO.	2 XE.	232.	18.	EA✠	EX✠
127.	10.	secante.	secare.	244.	8.	in H.	in X.
152.	10.	ad KL.	ad KQ.	238.	21.	*n.æq.*	*Z.n.æq.*
160.	14.	lorum.	larem.	244.	7.10.	post.	potest.
162.	11.	CK.	BK.	259.	10.	EC.EC.	EC.ED.
167.	12.	ABC.	DBC.	262.	18.	OM.	□M.
183.	5.	Fig.21.	Fig.26.	266.	21.	lela.	lelæ.
183.	11.13.	AD.	AC.	267.	3.	*edrum.*	*edram.*
184.	6.	Fig.21.	Fig.26.	269.	21.	cantur.	catur.
185.	5.	BL.	RL.	270.	22.	*ca.*	*ca D.*
188.	23.	FB.est.	FD.est.	271.	7.	*edrum.*	*edram.*
				287.	4.	test 16.	test 36.

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS.

PARS TERTIA

DE SOLIDIS.

Tandem peruenimus ad ſolidorum expoſitionem, quæ ingenio acriori, & profundiori egebant meditatione prout in cõfuſo rectarum labyrintho denſioribus umbris, tanquàm Cymmerijs tenebris involuuntur: quibus elucidandis in hac tertia parte, non minus quàm in prima, & ſecunda Minimorum dignitas eluceſcet. In quatuor capita opuſculum hoc placuit diuidere. Primum, de Pyramidibus agit; ſecundũ Hexaedra, & Priſmata meditatur, ſolida regularia ſinu ſuo tertium complectitur; quartum verò Problemata ſolvit, quæ omnia cedant vtinam in Lectoris Geometræ commodum, & Dei gloriam.

CAPVT I.

DE PYRAMIDIBVS.

OMnibus ex ſolidis poliedris, ſimpliciores ſunt Pyramides, præcipuè Tetraedra quatuor planis ſimplicioribus, nempè trigonis concluſa; quare ab ipſis exordium ſumimus. Polygonarum baſium Pyramides, vtpotè infinitæ opuſculi huiuſcæ terminis non potuere omninò comprehendi. Geometras omnes quibus abtruſiora datum eſt inquirere, & invenire, rogatos velimus, vt ea quæ nos de ſectione anguli ſolidi tribus, vel quatuor planis contenti demonſtramus, felicius promoueant, & ad omnes ſolidos angulos magno Geometriæ bono, & incremento ſubtilius extendant.

PRO-

PROPOSITIO I.

IN qualibet Pyramide basis trigonæ centrum ff. ſſ. est in quarta parte rectæ à centro ff. ſſ. basis ad verticem.

Conſect. *Recta à vertice per centrum ff. ſſ. Pyramidis tranſit per centrum ff. ſſ. baſis, & èconuerso.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis A B C D. & G. *centrum ff. ſſ.* baſis trigonæ ABC. ducta ex G. recta GD. in verticẽ D. ſi GO. ſumatur quarta pars rectæ GD. Dico O. eſſe *centr. ff. ſſ.* ad Pyramidis angulos A. B. C. D.

DEMONSTRATIO.

QVoniam G. eſt *centr. ff. ſſ.* ad A. B. C. ex *hyp.* & additum eſt aliud punctum D. in recta GD. reperitur *cẽtr. ff. ſſ.* ad A. B. C. D (61. M. 1) Ergo cum GO. ſit quarta pars totius GD. erit figura DO. minima 3 *ff. ſſ.* OG. (36. M. 1.) Ergo punctum O. erit *centr. ff. ſſ.* ad A. B. C. D. (62 M. 1) Quod erat, &c.

Conſect. patet, quia ſi recta GD. tranſit per O. recta DO. tranſit per G. & GO. per D.

PROPOSITIO II.

IN quauis Pyramide Tetraedra si rectæ à vertice bisecantes basis latera trifariam diuidantur, & ad diuisiones ducantur rectæ ab angulis basis, omnes se in Pyramidis centro quadrifariã diuident, & ècontrà.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta DI. bisecet latus CB. & sit IH. tertia pars rectæ ID. & ducatur AH. & similitèr CF. BE Dico omnes in *centro ff. ſſ.* O. se mutuo quadrifariam secare, & *èconuersò*.

DEMONSTRATIO.

QVoniam CB. est bifariam secta, & ID. trifariam in H. erit H *centr. ff. ſſ.* trianguli BCD (1. M. 2.) Ergo ducta HA. transibit per *centr ff. ſſ.* O. & erit quadrifariam secta in O. (1. *p.*) Ergo cũ idem de rectis CF. BE. demonstretur, omnes se quadrifariam secant in O. Quod, &c.

Conuersa liquet, cùm enim AH. transeat per O. recta AO. transibit per H. cum sit eadem: Ergo, &c.

PROPOSITIO III.

CVius libet Pyramidis Tetraedra centrum ff. ff. est in dimidio recta bisecantis latera opposita. Vnde omnes bisecantes se in centro bifariã diuidunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & eius latera opposita, quæ scilicet nullum habent punctum commune, sunt AB. CD. tum AC. BD. &c. sit ergo AB. diuisum bifariam in X. & CD. in Z. si ducatur recta XZ (quæ hic ommissa est) Dico *centrum ff. ff.* O. esse in dimidio ipsius XZ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam AB. est bifariam secta in X. est X. *centrum ff. ff.* ad A. B. & similitèr Z. est *centr. ff. ff.* ad C. D. (35. M. 1.) Ergo *centrum ff. ff.* ad A. B. C D. erit in recta XZ. (63. M. 1.) Ergo XZ. transit per *centr. ff. ff.* Pyramidis O. Ergo duæ *ff. ff.* OX. minimæ erũt 2 *ff. ff.* OZ (64. M. 1) Ergo erit XZ. bifariam diuisa in O. (37. M. 1.) Ergo cum idem ostendatur de alijs, omnes se in *centro ff. ff.* O. bifariam secant. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI Pyramis Tetraedra basim habeat æquilateram, & latera eleuat à inter se æqualia; recta ex vertice per centr. ff. ss. est basi perpendicularis, & èconuersò.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & basis ABC. sit △ æquilaterum: & latera AD. BD. CD. sint inter se æqualia, & O. sit *centr. ff. ss.* Pyramidis. Dico ductam rectam DOG. esse perpendicularem plano basis ABC. vel si DG. sit basi perpendicularis. Dico DG. transire per *centr. ff. ss.* O.

DEMONSTRATIO.

QVoniam recta DG. transit per *centrum ff. ss.* Pyramidis, est G. *centrum ff. ss.* basis siue △ ABC. æquilateri (1. *p.*) Ergo ductæ AG. BG. CG. bisecabunt opposita latera in F. H. E. (1. M. 2.) & erunt perpendiculares lateribus BC. CA. AB. (5. *l.* 1.) & cùm sint æqualia latera AB. BC. CA. & eorum dimidia AE. BF. CH. cum □ AB. sit æquale □ AF + □ BF. & □ BC. sit *æq.* □ BH + □ CH. & □ CA. *æq.* □ CE + □ AE (4 *l.* 2.) ablatis æqualibus remanebunt *æq.* AF. BH. CE. Ergo cum *centr. ff. ss.* △ ABC. sit in tertia parte rectarum AF. BH. CE. (1. M. 2.)

æqua-

æquales erunt rectæ AG.BG.CG. vnde triangula AGD. BGD. CGD. cum habeant latus AD. cõmune, & latera AD.BD.CD. sint æqualia ex *hyp.* & etiam AG.BG.CG. omninò erunt æqualia (4.*l.* 1.) Ergo cum anguli DGA.DGB. DGC. sint æquales, erunt recti, & DG. perpendicularis plano ABC. (1.*l.* 11.) Quod erat, &c.

Conuersa liquet, cùm enim recta DO. perpendicularis demonstrata sit plauo ABC. cum perpendicularis ex puncto D. sit vnica (1.*l.* 11) si DG. sit plano ABC. perpendicularis transibit per O. Quod erat, &c.

PROPOSITIO V.

IN qualibet Pyramide Tetraedra, recta coniungens centra ff. ſſ. duplicis plani parallela eſt lateri, quod in neutro plano eſt; & tertia ipſius pars.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. ſint G. & H *centra ff. ſſ.* planorum ABC. BCD. & recta HG. vtrumque coniungat. Dico HG. eſſe parallelam, & tertiam partem lateris DA. quod neque eſt in plano ABC. neque in plano BCD.

DEMONSTRATIO.

SI enim ducantur DHI. & AGI. biſecabunt latus BC (1. M. 2.) Ergo concurrent in eodẽ puncto I. & erit IG. tertia pars ipſius IA. & IH. tertia pars ipſius ID (1. M. 2.) Ergo in △ AID. cum GH. ſecet proportionaliter latera DI. AI. erit GH. parallela baſi AD (2 *l*. 6.) & vt IH. eſt tertia pars ipſius ID. ita HG. erit tertia pars ipſius AD. (2. *l*. 6.) Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

IN eadem Pyramide rectæ coniungentes omnium planorum centra ff. ss. efficiunt Pyramidem similem inversam.

2. *Si hoc infinitè continuetur, desinent in cētrum ff. ss. omnibus commune.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis tetraedra ABCD. & planorum *centra ff ss.* E. F. G. H. quæ iungantur rectis GE. GF. GH. &c. Dico Pyramidem EFHG. similem esse ipsi ABCD. cum eodem *centro ff. ss.* & ita in infinitum.

DEMONSTRATIO.

LAtera enim basis EFH. sunt tertia pars laterum basis ABC (5 *p.*) Ergo tria latera trianguli EFH. proportionalia sunt tribus lateribus trianguli ABC (5 *l.* 5.) & triangula similia (2. *l.* 6.) Similitèr △FGH. simile est △CDA. & △EFG. ipsi △CBD. & △EAG. ipsi △ABD. Ergo Pyramis EFHG. cum habeat omnia plana similia planis Pyramidis ABCD. & similitèr disposita, habebit etiam omnes angulos solidos æquales angulis eiusdem (23 *P.*) Ergo cū omnes anguli solidi sint æquales, & latera proportionalia, & plana similia similitèr disposita erunt Pyramides similes (23. *P.*)

2\. Si Pyramis EFHG. similitèr diuidatur eadem instaurabitur demõstratio. Deindè EF HO. paritèr demonstrabitur similis Pyramidi ABCO. & esse similes partes solidorum similium: Ergo vt ABCO. ad totam ABCD. ita EF HO. ad totam EFHG (5. *l*. 5.) Ergo sicut O. est *centrum ff. ss.* ad A. B. C. D. ita O. erit *cẽtrum ff. ss.* ad E. F. H. G.

Si Pyramidum inscriptio continuetur, cõtinuata demonstratione ostendetur O. esse *centrum ff. ss.* Ergo si in infinitum continuetur inscriptio similis desinet tandem in communi *centro ff. ss.* O. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI Pyramis vt antea inscripta sit.

1. *Plana inscriptæ sunt parallela planis anguli oppositi similibus.*

2. *Et secant latera anguli oppositi in ratione dupla.*

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. inscripta sit vt in præcedenti Pyramis EFHG. Dico planum EFH. parallelum esse plano simili ABC. & secare in ratione dupla omnia latera AD. BD. CD.

DEMONSTRATIO.

ETenim in △△ EFH. ABC. latus EH est parallelum lateri AB. tum HF. ipsi AC & EF. ipsi CB (5.*p.*) Ergo cùm anguli paralleli sint, & æquales (6.*p.*) erunt plana parallela (3.*l.* 11.) Quod similitèr de alijs demonstrabitur.

2 Continuatum planum EFH. ipsi ABC. parallelum faciet sectionem KLM. parallelam ipsi ABC. & secabit proportionalitèr latera (3.*l.* 11.) sed DH est dupla ipsis HI (1. M. 2.) Ergo DM. erit dupla ipsius MB. &c. Quod, &c.

PROPOSITIO VIII.

Plana, quæ per angulos basis, verticem, & centrum ss. ss. secant Pyramidem Tetraedram, diuidunt latera basis bifariam, & totam Pyramidem in sex pyramides æquales.

EXPOSITIO. Fig. 2.

Sit Pyramis ABCD. & O. *centrum* ss. ss. & tria plana AFD. BHD. CED transeant per verticem D. & *centrum* O. Dico latera basis bifariam diuidi, & Pyramidem in sex æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam dicta plana transeunt per D. & O. erit communis eorũ sectio, recta DOG. (1. *l.* 11.) Ergo cum DOG. transeat per *centrum* Pyramidis O. erit G. *centrum* basis (1. *p.*) Ergo sectiones basis AGF. BGH. CGE. diuidunt bifariam latera AB. BC. CA. (1. M. 2.) & totam basim in 6. triangula æqualia (4. M. 2.) Ergo cum Pyramides AEGD. EBGD. &c. habeant æquales bases, & altitudines in D. erunt æquales (5. *l.* 11.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI per omnes angulos Pyramidis Tetraedræ fiat præcedens diuisio Pyramides vnius plani æquantur Pyramidibus alterius plani, & tota Pyramis in 24. æquales pyramides diuiditur.

EXPOSITIO. Fig. 21

SI per D. transeant plana secantia basim ABC. & similiter per B. secantia basim ACD. &c. Dico omnia 24. segmenta esse æqualia.

DEMONSTRATIO.

CVm omnes illæ sex Pyramides AEGD. EBGD. sint æquales (8. *p.*) quælibet illarum erit sexta pars totius ABCD. Idem etiam demõstrabitur, si sumatur vt basis planum ACD. vel CBD. vel ABD. Ergo cum vna sexta pars eiusdem totius sit alteri æqualis, omnes Pyramides erunt inter se æquales: sed plana Pyramidis tetraedræ sunt quatuor, & quodlibet in sex bases diuiditur: Ergo tota Pyramis diuiditur in 24. pyramides æquales. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO X.

ISdem positisque in præcedenti tota Pyramis secatur in 24. pyramides æquales, quarum vertex communis est centrum ff. ss. totius Pyramidis.

EXPOSITIO. Fig. 2.

TRanseat per B. D. O. planum, & sic de reliquis. Dico Pyramidem ABCD. secari in 24. pyramides habentes verticem in O. omnes æquales, nempè AEGO. EBGO. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm omnia triangula AEG. EBG. &c. sint æqualia (4 M. 2.) & Pyramis AEGO. ad pyramidem AEGD. sit vt altitudo GO. ad GD. (5. *l.* 11.) quoniam GO. est quarta pars GD. (1. *p.*) erit AEGO. quarta pars AEGD. sed AEGD. est sexta pars totius ABCD. (9. *p.*) Ergo AEGO. erit vigesima quarta pars totius ABCD. quod de singulis etiam demonstrabitur. Ergo cum pars simili parti æqualis sit; tota Pyramis diuiditur in 24. Pyramides æquales, Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra summa ff. ss. ex omnibus lateribus est quadrupla minimæ summæ ff. ss. nempè vt 36. ad 9.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt Pyramis ABCD & *centrum ff. ss.* O. Dico summã *ff. ss.* ex omnibus lateribus quadruplam esse minimæ summæ *ff. ss.* OA. OB. OC. OD.

DEMONSTRATIO.

ETenim quia punctum D. est extra *centrum* O. figuræ *ff.* DA. DB. DC. æquantur minimæ summæ + 4DO. (60. M. 1.) Similiter *ff. ss.* AB. AC. AD. *æq.* minimis + 4AO. tum *ff. ss.* BA. BC. BD. *æq.* minimis + 4BO. & *ff. ss.* CA. CB. CD. *æq.* minimis + 4CO. Ergo quia singula latera bis sumpta sunt; & minima summa quater; & 4 *ff. ss.* DO + 4AO + 4BO + 4CO. quadrupla sunt minimæ summæ, erit duplum *ff. ss.* ex lateribus *æq.* octuplo minimæ summæ: Ergo *ff. ss.* ex lateribus quadruplæ sunt minimarũ, vel vt 36. ad 9. Quod, &c.

PROPOSITIO XII.

IN eadem Pyramide summa ff.ss. rectarum ab angulis per centrum ad plana opposita est ad minimam summam vt 16. ad 9. & summam ex omnibus lateribus vt 16. ad 36.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide A B C D. cuius *centrum* ff.ss. O. Dico summam ff.ss. DG BE. AH. CF. ad minimam summam OA. OB. OC. OD. vt 16. ad 9. & ad summam ex omnibus lateribus vt 16. ad 36.

DEMONSTRATIO.

REcta DO. ad DG. est vt 3. ad 4. vel vt 9. ad 12. (1. *p*.) sed sunt continui 9. 12. 16. & figura DO ad similem DG. est in duplicata ratione DO. ad DG. vel 9. ad 12 (4. *l*. 6.) Ergo est vt 9. ad 16. sed etiam reliquæ ff.ss. sunt in eadem ratione BO. ad BE. tum AO. ad AH. tum CO. ad CF. Ergo componendo, minima summa AO. BO. CO. DO. ad summã AH. BE. CF. DG. erit, vt 9. ad 16 (4. *l*. 5.) Ergo AH. BE. CF. DG. ad summam ff.ss. ex lateribus erit vt 16. ad 36. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN eadem Pyramide si alia inscripta sit prout in prop. 6. minima summa circunscriptæ ad minimam inscriptæ erit vt 9. ad 1. & ad summam ex lateribus inscriptæ vt 9. ad 4.

EXPOSITIO. Fig. 1.

IN Pyramide ABCD. inscripta sit EFHG. prout in *prop.6.* & *centrum* vtriusque sit O. Dico minimam summã ipsius ABCD. ad minimam EFHG. esse vt 9. ad 1. &c.

DEMONSTRATIO.

QValium recta OA. est 3. erit OH. 1. (1. *p.*) sed figura OA. est in duplicata ratione ad similem OH (4. *l.6.*) Ergo cum sint continuæ 9. 3. 1. erit figura OA. ad similem OH. vt 9. ad 1. Eidem est ratio *ff. ss.* DO. ad OG. tum BO. ad OE. tum GO. ad OF. Ergo & componendo minima summa circunscriptæ, scilicet figuræ OA+OB+OC+OD. ad minimam summã inscriptæ OH+OF+OE+OG. erit vt 9. ad 1. (4. *l.5.*) Præterea minima summa inscriptæ ad summam ex omnibus lateribus eiusdem, est vt 1. ad 4 (11 *p.*) Ergo Minima summa circunscriptæ ad summam *ff. ss.* ex omnibus lateribus inscriptæ erit vt 9. ad 4. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIV.

SI ex omnibus angulis Pyramidis Tetraedræ rectæ ducantur bisecantes latera opposita, summa ff.ss. sesquialtera erit summæ ff.ss. ex omnibus lateribus vt 3. ad 2.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN Pyramide ABCD. ex angulo D. bisecent latera opposita rectæ DH. DE. DF. & sic in alijs AF. BH. &c Dico summam ff.ss. ex bisecãtibus sesquialteram esse summæ ff.ss. ex omnibus lateribus, vt 3. ad 2.

DEMONSTRATIO.

IN quolibet △ ABC. summa ff.ss. ex lateribus est sesquitertia summæ ff.ss. ex bisecantibus AF. BH. CE. nempè vt 4. ad 3. (6. M. 2.) Ergo quia latus quodlibet bis sumitur, cum duobus triangulis sit commune, erit componẽdo dupla summa ff.ss. ex omnibus lateribus ad summam ff.ss. ex bisecantibus, vt 4 ad 3 (4. *l.* 5.) Ergo summa ff.ss. ex lateribus ad summam ff.ss. ex bisecantibus est vt 2. ad 3. Quod erat, &c.

TABVLA POTENTIARVM Pyramidis Tetraedræ.

Summa ff. ſſ. ex lateribus.	36.
Summa ff. ſſ. ex rectis per centrum.	16.
Summa ff. ſſ. ex biſecantibus.	54.
Minima ſumma ff. ſſ.	9.
Summa ff. ſſ. ex lateribus inſcrip.	4.
Minima ſumma ff. ſſ. inſcrip.	1.

Continuæ igitur ſunt.	1. 4. 16.
Proportionales ſunt.	1. 4. 9. 36.
Proportionales etiam.	4. 9. 16. 36.

PROPOSITIO XV.

SI duæ Pyramides habeant idem basium centrum, & eandem summam ff. ss. ex lateribus eleuatis, & minima summa vnius basis excedat alterius minimam tot figuris ex recta à vertice in dictum centrum, quot lateribus basis ab alia exceditur, Pyramides habebunt vertices in eadem superficie sphærica ex communi centro descripta, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SIt Pyramis FGHK basis trigonæ, & Pyramis ABCDE. basis quadrilateræ, basis illius exceditur ab ista vno latere: Si ergo commune basium *centrum* sit O. & summa *ff. ss.* ex lateribus eleuatis eadem, & minima summa *ff. ss.* OF. OG. OH. excedat minimã summam *ff. ss.* OA. OB. OC. OD. vna simili figura OK Dico vertices K. & E esse in eadem superficie sphærica ex O. descripta radio OK. vel OE. & OK. æquales esse, & *è contra*.

DEMONSTRATIO.

SVmma enim *ff. ss.* EA. EB. EC. ED *æq* summæ KF. KG. KH. ex *hyp.* sed summa EA. EB EC. ED. *æq.* minimæ OA. OB. OC. OD + 4 OE. & summa KF. KG. KH. *æq.* minimæ OF. OG. OH. + 3 OK (60. M. 1.) Ergo OA. OB. OC. OD + 4

OE.

OE. *æq*. OF. OG. OH + 3 OK sed *ff. ſſ*. OA. OB. OC. OD + OK. *æq*. OF. OG. OH. ex *hyp*. Ergo ablatis æqualibus remanebũt *ff. ſſ*. 4 OE — OK. æquales 3 *ff*. OK Si ergo vtrique parti addatur OK. erunt 4 *ff*. OE. æquales 4 *ff*. OK. Ergo rectæ OE. & OK. æquales erunt: & quia vertices E. & K. æqualitèr distant à *centro* O. erunt in eadem superficie sphærica ex O. descripta. Quod, &c.

Conuersa patet, quoniam si summa *ff. ſſ*. EA. EB. EC. ED. summæ KF. KG. KH. sit æqualis: & recta OK. ipsi EO. figuræ OF. OG. OH. superabunt *ff. ſſ*. OA. OB. OC. OD. tota figura OK. & si ita eas excedant, erunt summæ EA. EB. EC. ED. tum KF. KG. KH. æquales. Quod, &c.

Vnde si bases habeant idem *centrum*, æqualem minimam summam, & æqualem summã *ff. ſſ*. ex lateribus eleuatis, vertices erunt in eadem sphærica superficie, & *è conuerso*.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI Bases Pyramidum æqualem habeant laterum numerum, & minimas summas ff. ſſ. æquales, differentia ff ſſ. ex rectis à vertice in centrum basis est ad differentiam summarum ex lateribus eleuatis, vt 1. ad numerum laterum basis: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt duæ Pyramides basis trilateræ, vel quadrilateræ, &c. ABCDE. LMNPS. & basium *centra* RO. & minimæ summæ OA. OB. OC. OD, tum RL. RM. RP. RN æquales, ductis EO. SR. Dico differentiam inter *ff. ſſ.* EO. SR. esse ad differentiam inter *ff. ſſ.* EA. EB. EC. ED. & SL. SM. SN. SP. vt 1. ad 4. & *èconuersò* data hac ratione erunt minimæ summæ basinm æquales.

DEMONSTRATIO.

DIfferentia inter *ff. ſſ.* EO. SR. sit □ X Quoniam EO. superat SR. toto □ X. erunt 4EO. æquales 4 *ff ſſ.* SR + 4 □ X. sed *ff. ſſ.* EA. EB. EC. ED. *æq.* minimæ summæ OA. OB. OC. OD + 4 EO (60. M. 1.) Ergo *ff. ſſ.* EA. EB. EC. ED. *æq.* OA. OB. OC. OD + 4SR + 4 □ X. sed *ff. ſſ.* SL. SM. SP. SN. æquātur minimæ sũmæ *ff. ſſ.* RL. RM. RP. RN + 4SR. (60. M. 1.) sed ex *hyp. ff. ſſ.*

OA.

OA.OB.OC.OD.*æq.*RM.RD.RP.RN. Ergo EA.EB.EC.ED.*æq.*RL.RP.RN+4SR+4□X. Ergo *ffff.*EA.EB.EC.ED.superant *ff ff.*SL.SM. SP.SN in 4 □ X sed figura EO.superat similem SR. in 1 □ X. Ergo differentia inter figuram EO.& similem SR.est ad differentiam *ff ff.* EA. EB.EC.ED.& *ff.ff.*SL.SM.SP.SN vt 1.ad 4. vel vt 1.ad 5. si bases sint Pentagonæ, & ita infinite. Quod,&c.

Conuersa liquet. Si enim EA.EB.&c. superet SL.SM.&c.in 4 □ X.& EO.ipsam SR.in 1 □ X.erunt EA.EB.EC.ED *æq.*SL.SM.SP.SN+4 □ X.vel ipsis RL.RM RP.RN+4RS+4 □ X. sed etiam *æq.*ipsis OA.OB.OC.OD+4RS+4 □ X.(60.M.1.) Ergo ablatis communibus remanebit minima summa OA.OB.OC.OD.*æq.* RL.RM.RP.RN.Quod,&c.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI Pyramides habeant eandem summam ff.ss. ex lateribus eleuatis, & bases eiusdem speciei trilateras, quadrilateras, &c. differentia ff.ss. ex rectis à vertice in centrum basis ad differentiam minimarum ff.ss. est vt 1. ad numerum laterum basis, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SInt Pyramides basis quadrilateræ A B C D E. LMPNS. & summa *ff.ss.* EA. EB. EC. ED. *æq.* summæ *ff.ss.* SN. SL. SM. SP. Dico differentiam *ff.ss.* EO. & SR. ad differentiam minimarum OA. OB. OC. OD. & RL. RM. RP. RN. esse vt 1. ad 4. si basis sit quadrilatera, vel vt 1. ad 5. si Pentagona: & *èconuersò* si ratio talis fuerit. Dico summam EA. EB. &c. *æq.* esse SL. SM. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam summa *ff.ss.* EA. EB. EC ED. *æq.* SL. SM. SP. SN. ex *hyp.* & EA. EB. &c. *æq.* OA. OB. OC. OD + 4EO. tum SL. SM. &c. *æq.* RL. RM. RP. RN + 4SR (*60. M. 1.*) erunt OA. OB. OC. OD + 4OE. *æq.* RL. RM. RP. RN + 4 SR. Ergo 4 OE tantum superat 4 SR. quantum minima summa OA. &c. superatur à minima RL. &c. Ergo 1 OE. superabit 1 SR. in quarta parte differentiæ minimarum: vel differentia

in-

inter ff ff.OE. & SR. erit ad differentiam inter minimas summas RL.RM.RP.RN.&OA.OB. OC.OD.vt 1.ad 4.Quod, &c.

Conuersa clarissima est si enim minimarũ differentia ad differentiam inter ff.ff.OE.&RS. sit vt 4.ad 1.differentia inter 4OE.&4RS. erit *æq.* differentiæ minimarum: Ergo minima summa OA.OB.OC.OD+4OE.*æq.* RL.RM. RP.RN+4RS. Ergo EA.EB.EC.ED.*æq.* SL. SM.SP.SN Quod erat, &c.

PROPOSITIO XVIII.

IN omnibus Pyramidibus Tetraedris summæ ff. ff. ex lateribus omnibus sunt minimis summis, & etiam summis ff. ex rectis ab angulis per centrum Pyramidis; idemque est de summis Fig. ex rectis, quæ ab angulis bisecant opposita latera: & de Pyramidibus inscriptis.

DEMONSTRATIO. Fig. 1. 2.

SInt duæ Pyramides Tetraedræ ABCDE. & summa ff ff.ex lateribus primæ ad suam minimã summã est vt 36.ad 9.sed etiã summa ff ff. ex lateribus secundæ ad suam minimam summam est vt 36.ad 9. Ergo vt summa primæ ad summam secundæ ita minima primæ ad minimam secundæ. Idemque est de reliquis, vt

D con-

constat ex tabella rationum apposita in fine *prop.* 14. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIX.

PLanum bifariam diuisum per datam intra angulum solidum triangulare rectam secãtem latus, & planum oppositum, secat Pyramidem minimam per talem rectam.

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus solidus tribus planis comprehensus DABC. & sit intra ipsum recta CE. secãs latus DC. in C. & planum ABD. in E. transeat deindè per rectam CE. planum ABC. bifariam à recta diuisum, vt segmenta AEC. EBC. æqualia sint. Dico Planum ABC. secare pyramidem ABCD. omnium minimam earum, quæ per rectam CE. abscindi possunt ab angulo solido DABC.

DEMONSTRATIO.

INtelligatur enim quodlibet aliud planum FGC. trãsiens per rectam CE. & FG. AB. quia se intersecant in E. erunt in eodem communi plano (1. *l.* 11.) Ergo in illo erunt triangula AEF. EGB. & ducta BH. parallela ipsi AF. erunt triangula similia AEF. BEH. (2. *l.* 6.) sed quia triangula AEC. ECB. supponuntur æqualia, & sunt æquè alta, æquales sunt AE. & EB (1. *l.* 6.)

Er-

Ergo in triangulis ſimilibus A E F. BEH. reliqua omnia erunt in eadem ratione æqualitatis (2. *l*. 6.) Ducta igitur CH. Pyramides AE. FC. EHBC æquè alta in C. ſupra æquales baſes AEF. EHB. erunt æquales (5. *l*. 11.) ſed Pyramis EGBC. maior eſt pyramide EHBC totum ſcilicèt parte: Ergo Pyramis EGBC. maior erit ipſa FAEC. Ergo addito vtrique parti ſolido communi FECBD. erit Pyramis FGCD. maior pyramide ABCD. & cum hoc de quolibet plano FGC. demonſtretur ſemper erit Pyramis ABCD. minor qualibet alia, & omnium minima earũ, quæ per CE. poſſunt abſcindi. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

SI recta secet latus anguli solidi, & planum lateri oppositum, planum per illam, quod ex opposito secat triangulum minimum, secat etiam ex angulo solido Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 4.

IN angulo solido DABC. recta CE. secat latus DC. in C. & planum ABD. in E per CE. transeat planum ABC. secans △ ABD. ex plano, & angulo ADB. omni um minimum per E. Dico Planum ABC. secare Pyramidem ABCD. omnium minimam.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ABD. est minimũ eorum, quæ per E. fieri possunt, erit AEB. bifariam diuisa in E. (15. M. 2.) Ergo △△ EAC. EBC. æquè alta erunt æqualia, & planum ABC. erit bifariam diuisum rectaCE (1. *l.* 6.) sed planum bifariam diuisum secat pyramidem minimã (19. *p.*) Ergo Pyramis ABCD. est minima. Quod, &c.

PROPOSITIO XXI.

SI per centrum ff. ss. Pyramidis Tetraedræ ducantur plana basibus parallela, cētrum Pyramidis erit centrum planorum.

EXPOSITIO. Fig. 5.

IN Pyramide Tetraedra A B CD. sit *centrum ff. ss.* O. per quod transeat planum EFI. basi ABC. parallelum. Dico O. esse *centrum ff. ss.* plani EFI.

DEMONSTRATIO.

DVcta recta DOG. transibit per G. *centrum* basis (1 *p.*) & quia planū EFI. est basi ABC. parallelum, erunt sectiones ABC. EFI. similes (4. *l.* 11.) & etiam vt AC. ad AG. ita EI. ad EO. & vt CB. ad CG. ita IF. ad IO. & vt AB. ad BG. ita EF. ad FO (2. *l.* 6.) Ergo vt G. est *centrum ff. ss.* basis ABC. erit O. *centrum ff. ss.* plani EFI. Idem ostendetur de plano per O. ducto parallelo ipsi BCD. & sic de reliquis: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

SI tria plana se mutuo secent, & duæ sectiones sint parallelæ, & tertia ipsis parallela erit.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SInt tria plana CFP. AEB. CFD. & duæ sectiones CF. GH. sint inter se parallelæ. Dico sectionem tertiam AE. etiam ipsis CF. GH. parallelam esse.

DEMONSTRATIO.

DVcatur planum GKL. plano HFE. parallelum, & erunt sectiones HE. GK. parallælæ: tum EF. KL & FH. LG. (3. *l.* 11.) Ergo anguli G. H. æquales erunt: tum L. F. & K. E (3. *l.* 11.) & cum LH. in plano CBF. parallelogrammum sit, sunt LG. FH. æquales (7 *l.* 1.) Ergo cum △△ KLG. EFH. habeãt angulos supra æquales bases LG. FH. æquales, erunt omninò æqualia (4. *l.* 1.) GK HE & KL. EF. Ergo cum KG. EH. sint parallelæ *æq.* est KH. parallelogrammum, & KE. GH. sunt *parall.* tũ KE. LF. (7. *l.* 1.) Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI recta intra angulum solidum parallela sit alteri in quouis dicti anguli plano, omnia plana per illam facient sectionem alteri parallelam.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus PABE. & intra ipsum recta GH. parallela cuilibet rectæ CF. plani CPF. Dico quodlibet planum BGH. transiens per GH. facere in plano APE. sectionem AE. parallelam eidem GH.

DEMONSTRATIO.

CVm enim recta CF. parallela sit datæ GH. erunt in eodem plano (2. *l.* 11.) ducto igitur plano CFHGD. erit CF. communis sectio planorum CFD. CFP. Ergo ducto quolibet alio plano BHGAE. cum tria illa plana BAE. DCF. CFP. se intersecent, & sectiones GH. CF. sint parallelæ ex *hypoth.* erit etiam AE. ipsis parallela (22. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

SI aliquod planum transiens per datam rectam intra angulum solidum non faciat sectionem datæ rectæ in aliquo plano eiusdem anguli parallelam, nullum planum per illam rectã efficiet sectionem parallelam.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus PABE. & intra ipsum recta GH. per quam transeat planum BGH. faciens in plano APE. sectionem AE. non parallelam ipsi datæ GH. Dico nullum planum per GH. posse efficere in plano BGH. sectionẽ parallelam.

DEMONSTRATIO.

SI enim aliquod planum posset efficere sectionem parallelam, omnia plana illam efficerent (23 *p.*) Ergo cum aliquod illam non efficiat ex *hypoth.* nullum planũ talem sectionem parallelam efficiat. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

EX omnibus planis per rectam intra angulum solidum trigonum efficientibus sectionem ipsi parallelam, illud secat Pyramidem minimam, quod habet in ea centrum ff. ss. ad laterũ sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt angulus solidus trilaterus PCFD. & data recta GH. per quam transeat planum DCF. faciens sectionem CF. parallelam ipsi GH. in qua sit O. *centr. ff. ss.* ad sectiones C.D.F. Dico Pyramidem CDFP. esse omnium per GH. minimam.

DEMONSTRATIO.

TRanseat per GH. quodvis planum BAE. ducantur DI. GS. parallelæ FE. & iungatur SGI. sit insuper planum GLK. parallelum EFH. & ducantur GE. GF. Cum O. sit *centr. ff. ss.* ad C.D.F. & sint GH. CF. parallelæ, erit FH. dimidium HD. (1. M. 2) & cum Pyramides EFHG. HDIG. sint æquè altæ in G. erunt in ratione basium EFH. HID. (5. *l.* 11.) sed cum DI. EF. sint parallelæ, & △△ similia EFH. HID (2. *l.* 6.) sunt in duplicata ratione DH. ad HF. (4. *l.* 6.) Ergo cum HD. sit dupla HF. erit HDI. quadruplum HFE. & Pyramis HDIG. quadrupla ipsius

sius HFEG. (5 *l*.11.) sed HFEG est tertia pars prismatis HEFGLK (5 *l*.11.) vel dimidium Pyramidis EFLKG (4.*l* 11.) Ergo HDIG. est dupla EFLKG. sed GL. est dimidium LF. vt CG. ipsius GD. ex *parall.* (2.*l*.6.) Ergo parallelogrammum CK. est dimidium KF (1.*l*.6.) & Pyramis CSKLG. dimidium EFKLG (5.*l*.11.) nẽpè æqualis EFGH. Ergo totum solidum EFHGCS. est quadruplũ Pyramidis EFHG. & æquale ipsi HDIG. sed HDBG. maior est HDIG. Ergo HDBG maior est solido EFHGCS. Ergo multo maior erit solido EFHGCA. & addito communi solido AGDHEP. erit Pyramis ABEP. maior quàm CDFP. Quod erat, &c.

Si autem punctum B. sumatur supra D. eadem ratione demonstrabitur Pyramis HDBG. minor solido EFHGCA. & DCFP. minor BEAP. Quod, &c.

PROPOSITIO XXVI.

IN qualibet Pyramide Tetraedræ si per centrum ff. ſſ. transeat recta cuilibet lateri parallela, ex omnibus planis per illam secat Pyramidem minimam, quod est alicui plano Pyramidis parallelum.

EXPOSITIO. Fig. 5.

IN Pyramide ABCD. sit O. *centrum ff. ſſ.* & per O. recta K. lateri AC. Dico ex omnibus planis per KL. quod erit parallelũ ABC. vel ACD. secare pyramidem minimam ex opposito angulo solido D. vel B.

DEMONSTRATIO.

CVm plana EFI. ABC. sint parallela, *centrum ff. ſſ.* O. Pyramidis erit etiam *centrum* plani EFI. (21. *p.*) & sectiones EI. AC. erunt parallelæ (3. *l.* 11.) & quia AC. est ipsi KL. parallela erunt EI. KL. parallelæ: Ergo cum planum EFI. faciat sectionem IE. parallelam ipsi KL. & habeat in KL. *centrum ff. ſſ.* O. secabit Pyramidem minimam ex angulo D. (25. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

EX omnibus planis per datam intra angulum solidum trilaterum rectam, quod habet in illa centrum ff. ss. ad sectiones laterum secat Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 7.

SIt DABC. angulus solidus tribus planis, & lateribus comprehensus, & intra ipsum data sit recta HK. per quam transeat planum BAC. quod habeat in HK. *centrum ff. ss.* ad puncta sectionum A. B. C. Dico planum ABC. secare Pyramidem minimam ABCD. omnium, quæ per rectam HK. abscindi possunt ex angulo D.

DEMONSTRATIO.

TRanseat enim per HK. quodlibet aliud planum EFG. & diuisa AC. bifariam in X. ducatur BX. secans datam HK. in O. & quia *centrum ff. ss.* est in recta BX (1. M. 2.) & etiam in recta HK. ex *hypoth.* intersectio O. erit *centr. ff. ss.* ad A. B. C. Ducta ergo per O. recta IL. parallela ipsi AC. erit IL. bifariam secta in O. vt AC. in X. à communi recta BOX (2. *l.* 6.) Ducatur ergo per IL. planum EPR. & erit sectio PR. parallela rectæ IL. (23. *p.*) Ergo ducta EOQ. vt IL. secatur bifariam in O. ita PR. in Q. (2. *l.* 6.) & planum EPR. erit bifariam diuisum recta EQ.

Præ-

Præterea cum plana EPR. EFG. transeant per E. & O. erit communis eorum sectio EOQ. & erit sectio rectarum PR FG. Ergo cum EQ. secet latus DE. & planum EPR. sit bifariam diuisum à recta EQ. erit Pyramis EPRD. minor Pyramide EFGD. (19.*p.*) sed cum sectiones PR. AC. IL. sint parallelæ, & planum BAC. habeat *centrum ff. ff.* in IL. est Pyramis BACD. adhuc minor pyramide EPRD. (25.*p.*) Ergo Pyramis ABCD. multo minor erit pyramide EFGD. & cum hoc de quolibet alio plano EFG. demonstretur, erit Pyramis ABCD. omnium minima, quæ per HK. abscindi potest. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

EX omnibus planis per datum intra angulũ solidum trilaterum punctum, quod habet in illo centrum ff.ſſ. ſecat Pyramidem minimam, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 8.

SIt angulus ſolidus DABC. tribus planis cõprehenſus, & intra ipſum datum ſit punctũ O. per quod tranſeat planum EFI. ita vt O. ſit *centrum ff.ſſ.* ad puncta E. F. I. Dico planum EFI. ſecare pyramidem minimam EFID. omnium, quæ per O. ſecari poſſunt ex angulo ſolido D. & *ècontra* ſi EFI. ſecat pyramidem minimam, erit O. *centrum ff.ſſ.*

DEMONSTRATIO.

TRanſeat enim per O. quodlibet aliud planum PRS. ſecans planum EFI. & communis eorum ſectio ſit recta HK (1. *l.* 11.) Quoniam vtrumque planum tranſit per punctum O. ex *hypoth.* erit O. in ſectione communi HK. ſed O. eſt *centrum ff. ſſ.* ad puncta E. F. I. ex *hypoth.* Ergo planum EFI. habet *centrum ff.ſſ.* in recta HK. Ergo Pyramis EFID. minor eſt pyramide PRSD. (27. *p.*) & cum idem perpetuo demonſtretur de quolibet plano PRS. erit Py-

ra-

ramis EFID. omnium minima. Quod erat, &c.

Conuersa facillimè demonſtratur. Quoniam ſi Pyramis PSRD. poſſet eſſe minima, & planum PRS. non haberet *centrum ſſ.ſſ.* in dato puncto O. concipiatur per O. planum EIF. quod habeat in O *centrum ſſ.ſſ.* Ergo ex modo demonſtratis planum EIF. ſecabit pyramidem omnium minimam: Ergo Pyramis EIFD. minor eſſet quàm pyramis PRSD. vnde hæc non eſſet minima contra hypotheſim: Ergo nulla pyramis non habens *centrum ſſ.ſſ.* in O. poteſt eſſe minima: Ergo quæ per O. eſt minima, habet in O. *centrum ſſ.ſſ.* Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

IN Pyramide tetraedra si in recta ab angulo ad centrum ff.ss. plani oppositi sumatur quodlibet punctum, planum opposito parallelum transiens per assumptum punctum secat ab opposito angulo pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 5.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & G. *centrum ff.ss.* plani ABC. & ducta recta DG. sumatur in ea quodlibet punctum O. per quod transeat planum EFI. plano ABC. parallelum. Dico Pyramidem EFID. esse minimam per O.

DEMONSTRATIO.

CVm enim planum EFI. sit ipsi ABC. parallelum omnes eius sectiones similes sunt sectionibus plani ABC. (4 *l.* 11.) Ergo sicut G. est *centrum* plani ABC. ex *hyp.* ita O. erit *centrum ff.ss.* plani EFI: Ergo Pyramis EFID. erit omniũ minima per punctum O (28 *p.*) Quod, &c.

Consect. Ex planis per *centr. ff.ss.* Pyramidis, quod est opposito parallelum secat pyramidem minimam.

PROPOSITIO XXX.

SI per centrum Pyramidis Tetraedræ transeant quatuor plana, quatuor planis Pyramidis parallela, secantur quatuor Pyramides minimæ ex quatuor angulis similes, & æquales.

EXPOSITIO. Fig. 5.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & ipsius *centrū* ff. ff. O. per quod transeat planum EFI. parallelum basi ABC. & similiter transeant per O. alia plana parallela planis ABD. ACD. CBD. Dico omnia illa secare ex oppositis angulis Pyramides minimas omnium, quæ ex singulis angulis secari possunt per O. & illas omnes esse inter se æquales, & similes. Plana reliqua omissa sunt ne linearum multitudo confusionem pareret.

DEMONSTRATIO.

QVoniam recta DO. transit per *centrum* plani ABC. & planum EFI. est ipsi ABC. parallelum secat EIF. pyramidem minimam anguli D. (29. *p.*) Quod similiter demonstrabitur de alijs angulis.

Præterea cum plana EFI. ABC. sint parallela, sectiones omnes sūt similes △EFI. ipsi ABC. & △EID. ipsi ACD. & △IFD. ipsi CBD. & △EFD. ipsi ABD. & latera proportionalia (4. *l.* 11.

& 2.*l*.6.) Ergo Pyramides EIFD. ABCD. similes sunt, quia similibus planis similiter dispositis, & lateribus proportionalibus constant. Ergo EFID. ad ABCD. est in triplicata ratione DE. ad DA. vel DO. ad DG (6.*l*. 11.) sed DO. ad DG. est vt 3. ad 4. vel vt 27. ad 36 (1.*p*.) Ergo cũ sint continui 27. 36. 48. 64. est EFID. ad ABCD. vt 27. ad 64.

Similiter si per O. ducatur planũ ipsi CBD. parallelum secabit pyramidem minimam ex angulo A. similem toti BCDA. & erit ad ipsam vt 27. ad 64. & sic de alijs: Ergo cum omnes sint eidem toti ABCD. similes, erunt inter se similes, & quia eidem ABCD. eandem habent rationem vt 27. ad 64. erunt inter se æquales (2. *l*. 5.) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXI.

SI datum in angulo solido trilatero punctum sit centrum ff.ss. plani per illud, & aliud planum per sectionem vnius lateris, & dati puncti transeat, data pyramidum ratione, datur ratio reliquorum laterum, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 4.

SIt angulus D. & punctum O. *centr. ff. ss.* plani ABC. tum per O. & C. vel A. vel B. transeat planum GFC. vt communis sectio sit COE. & data sit ratio pyramidis GFCD. ad ABCD. vt SZ. ad SX. Dico datam esse pari rationem DB. ad DG. & DF. ad DA. & *èconuersò*.

DEMONSTRATIO.

PYramides FGDC. ABDC. æquè altæ in C. se habent vt bases (5. *l.* 11.) Ergo data est ratio △ FGD. ad △ ADB. quæ bases sunt: sed recta COE. per *centr. ff. ss.* O. bisecat latus AB. (1. M. 2.) Ergo in triangulis DAB. DFG. data est ratio laterum DB. ad DG. & DF. ad DA. & *èconuersò* data laterum ratione, datur ratio triangulorum (18. M. 2.) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXII.

SI per datum intra angulum solidum trilaterum punctum ducantur plana planis anguli parallela, & planum per idem punctum sectionibus laterum parallelum ducatur; ipsius latera erunt trifariam diuisa, & ipsum intercipiet segmenta laterum anguli in ratione dupla.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt datus angulus solidus trilaterus DABC. & intra ipsum quodlibet pũctum O. per quod transeat planum KLG. parallelum ipsi ADB. secans latus DC. in G. & planum PRE. parallelum ipsi BDC. secans latus DA. in E. & planum HIF. parallelum ipsi ADC. secans latus BD. in F. deindè per O. transeat planum ABC. parallelum sectionibus E.F.G. Dico latera AB. BC. CA. plani ABC. esse trifariam diuisa, & segmẽta AE. ED. tum BF. FD. tum CG. GD. esse in ratione dupla.

DEMONSTRATIO.

QVoniam plana ABC. EFG. sunt parallela, erunt triangula similia (4. *l.* 11.) & quia ABC. secat plana parallela, sectiones AB. KL. erunt parallelæ: tum AC. HI. tum BC. RP. (3. *l.* 11.) Insuper quia HF. KG. sunt eidem AE. parallelæ, erunt inter se parallelæ: tum quia plana na ſunt parallela ABC. EFG. ſunt ſectiones EG. AK. parallelæ, tum EF. AH. tum FG HK. (3. *l.* 11.) idemque eſt de reliquis.

Præterea in parallelogrammis EK. EG. ſunt AK. PC. æquales EG. (7. *l.* 1.) Ergo & inter ſe: tum in EH. EB. ſunt AH. RB. æquales EF. & inter ſe: & in parallelogrammis HAKO. HKPO. ſunt AK. KP. æquales ipſi HO. (7. *l.* 1.) Ergo & inter ſe: Ergo AK. KP. PC. æquales ſunt, & ſimiliter AH. HR. RB. tum BL. LMC. Ergo ex parallelifmo vt AR. eſt dupla ipſius RB. ita AE. erit dupla ipſius ED (2. *l.* 6.) & ſimiliter demõſtrabitur BF. eſſe duplam FD. & CG. ipſius GD. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, planum ductum sectionibus parallelum habet centrum ff. ss. in puncto assumpto, & secat per illud Pyramidem minimam, & èconuersò.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SI planum ABC. transeat per O. sectionibus E.F.G. parallelum. Dico habere *centr. ff. ss.* in O. & secare per O. pyramidem A B C D. minimam.

DEMONSTRATIO.

CVm HI. secet trifariam latera AB. BC. & sit parallela ipsi AC. in eius dimidio erit *centrum ff. ss.* trianguli ABC (1. M. 2) similitèr erit in dimidio RP. & in dimidio KL. Ergo *centrum ff. ss.* ad A. B. C. erit in communi sectione O. in qua rectæ se bifariam secant: Ergo cum planum ABC. habeat *centrum ff. ss.* in O. secabit Pyramidem ABCD. omnium minimã. *Contra.* Si ABC. secat pyramidem minimam parallelum erit sectioni EFG. &c. Quod, &c.

PROPOSITIO XXXIV.

SI Pyramis Tetraedra sit, & in ea punctum assumptum cadat intra Pyramidem planorum centris inscriptam, Pyramides minimæ ex quatuor angulis solidis resecabiles cadunt omnes intra Pyramidem datam.

EXPOSITIO. Fig. 10.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. in qua planorum *centra* efficiunt similem inscriptam EF HG. prout in *prop.* 6. intra quam sumptum sit quodlibet punctum P. per quod planum SVT. secet ab angulo D. pyramidem minimam SV TD. Dico totam Pyramidem SVTD. vel totum planum SVT. cadere intra Pyramidem ABCD. idemque de minimis angulorum A. B. C.

DEMONSTRATIO.

PLanum enim EFG. inscriptæ continuatum secabit latus AD. in M. & erit AM. dupla ipsius MD (7. *p.*) Ergo cum punctum P. sit inter plana parallela EFG. CBD. (7. *p.*) planum träsiens per P. vtrique parallelum secabit latus DA. inter M. & D. nempè in K. Similiter planum EGH. continuatum secabit CD. in N. & planum per P. planis EHG. ADB. parallelum secabit latus CD. in L. inter N. & D. Atque eadem

dem ratione planum FHG. continuatum secabit BD. in R. & planum per P. vtrique FHG. ADC. parallelum secabit BD. in L. inter R. & D.

Tandem quia Planum SVT. per pūctum P. secat pyramidem minimam anguli D. ex *hyp.* erit sectioni KIL. parallelum (33.*p.*) Ergo segmenta SK. VI. TL. dupla sunt segmentorum KD. ID. LD (32.*p.*) sed KD. ID. LD. demonstrata iam sunt minora quā MD. ND. RD. Ergo cū DS. DV. DT. sint triplæ DK. DI. DL. (32.*p.*) Et DA. DC. DB. sint triplæ DM. DN. DR. (7.*p.*) erunt DS. DV. DT. minora quàm DA. DC. DB. Ergo puncta S. V. T. cadunt supra A. C. B. & Pyramis minima SVTD. tota intra datā ABCD. idemque erit de minimis reliquorum angulorum. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

SI per datum in Pyramide Tetraedra punctũ ducantur plana ipsius planis parallela, ratio segmentorum communis lateris est ratio Pyramidum minimarum, quæ ab angulis habentibus illud latus commune secantur.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & in ea datum punctũ O per quod ducantur plana MPN. EYX. parallela ipsis ABC DCB. & per O planũ HLK. secet pyramidem minimam anguli D. & RSQ. anguli A. latus commune angulis D. & A. est DA. segmenta inter angulos, & ducta plana parallela sunt DE AM. Dico pyramidẽ minimam HLKD. ad minimam RYQA. esse vt DE. ad AM.

DEMONSTRATIO.

DVctis per O. planis parallelis prout in *prop.* 32. Quoniam planum HLK. secat pyramidem minimam anguli D. erit parallelum sectionibus EGF. (33. *p.*) Ergo Pyramides HLKD. EFGD. sunt similes (4. *l.* 11.) & in triplicata ratione laterum HD. ED. (6. *l.* 11.) tum pyramides RSQA. MTVA. similes erunt, & in triplicata ratione RA. ad MA. ob eandem rationem: sed ratio HD. ad ED. est vt RA. ad MA.

ſcilicèt tripla(32.*p.*) Ergo Pyramis HLKD.ad pyramidem EFGD.eſt vt RSQA.ad MTVA(1. *l.*5.) & alternando HLKD.ad RSQA. vt EFGD.ad MTVA(4.*l.*5.) ſed Pyramis DEFG.ad MAVT.eſt vt baſis DEF.ad MAV. quia ſunt æquè altæ, inter plana parallela DAB.GTZ(5. *l.*11.) & △DEF.ad △MAV.eſt vt DE.ad MA. quia ſunt inter parallelas DA.FV(1.*l.*6.) Ergo Pyramis EDFG.ad MAVT.& vt DE.ad MA.(1.*l.*5.) Ergo etiam HLKD.minima anguli D.ad RSQA.minimam anguli A.eſt vt DE.ad MA.

Similitèr pyramis minima anguli B.ad minimam anguli D.erit vt BN.ad DF.& minima anguli C.ad minimam anguli A.vt CY.ad AT.& ſic de reliquis ſi binæ comparentur: Ergo conſtat veritas propoſitionis, Quod erat,&c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

IN quauis Pyramide Tetraedra si sumatur punctum in recta ab angulo solido in centrum ff. ſſ. plani oppositi, tres pyramides minimæ à tribus eiusdẽ plani angulis secta, sunt inter se æquales.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt Pyramis ABCD. & H. *centrum ff. ſſ.* plani ABC. si in recta DH. ducta ex angulo opposito sumatur quodlibet punctum O. per quod ex tribus angulis A. B. C. secentur tres pyramides minimæ, Dico illas esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim per O. quatuor plana planis ipsius Pyramidis parallela, scilicet ILK. ERS. GPQ. FMN. Planum ergo ILK. quoniam est parallelum ipsi ABC. habet *centrum ff. ſſ.* in recta DH. & secat pyramidem minimam anguli D. (29. *p.*) sed idem planum IKL. etiam est parallelum sectioni EFG. factæ à planis ERS. GPQ. FMN. (33. *p.*) Ergo sectiones EG. IL. AC. sunt inter se parallelæ: tum GF. LK. CB. tum EF. IK. AB (4. *l.* 11.) Ergo proportionales sunt ex parallelismo vt DE. ad IA. ita DG. ad LC. & ita DF. ad KB. (2. *l.* 6.) sed Pyramis minima anguli D. ad Pyramidem minimam anguli A.

 est

est vt DE. ad IA. & eadem pyramis minima an-
guli D. ad minimam anguli B. est vt DF. ad BK.
& eadem minima anguli D. ad minimam an-
guli C. est vt DG. ad CL (35 *p.*) Ergo cũ eædem
sint rationes DE. ad AI. & DF. ad BK. & DG. ad
CL. ex iam demonstratis, eadem Pyramis mi-
nima anguli eandem habet rationem ad tres
pyramides minimas angulorum A. B. C. sed si
eadem ad diuersas habeat eandem rationem,
sunt illæ æquales (2. *l.* 5.) Ergo Pyramides mi-
nimæ angulorum A. B. C. sunt inter se æqua-
les. Quod erat, &c.

Plana secantia pyramides minimas ommis-
sa sunt, quia ad demonstrationem non condu-
cunt.

PROPOSITIO XXXVII.

SI in recta ab angulo in centrum plani oppositi punctum assumptum fuerit centrum ff. ss. ipsius Pyramidis, quatuor Pyramides minimæ sunt inter se æquales, & absolute minimæ. Si vero punctum sit infra centrū tres minimæ sunt æquales, & absolutè minimæ. Si autem supra centrum, minima anguli ex quo recta ducitur est absolutè omnium minima.

DEMONSTRATIO. Fig. 12.

PRima pars demonstrata fuit *prop.* 30. libet tamen hic aliter eam demonstrare. Sit pyramidis *centrū* O. & plana ILK. &c. cum plana ABC. ILK. sint parallela, erit DI. ad IA. vt DO. ad OH (4 *l.* 11.) sed DO. est tripla OH (1. *p*) Ergo & DI. est tripla IA. sed etiam DI. est tripla DE (32. *p.*) Ergo DA & AI. sunt inter se æquales: sed Pyramis minima anguli D. ad minimā anguli A. est vt DE. ad IA (35. *p*) Ergo Pyramis minima anguli D. æqualis est minimæ anguli A (1. *l.* 5.) sed minimæ angulorum A. B. C. sunt inter se æquales (36 *p.*) Ergo omnes quatuor sunt inter se æquales, & sic absolutè minimæ.

Secundò sit punctum assumptum T. infra O. planum per T. parallelum ABC. & IKL. secabit Pyramidem minimam anguli D. infra I.

(29.

(*29. p.*) nempè in *y*. Ergo D*y*. erit maior quàm DI. Ergo si sumatur DY. tertia pars ipsius D*y*. erit DY. maior quàm DE. quæ est tertia pars ipsius DI. (*32. p.*) Ergo cum DE. AI. sint æquales, erit DY. maior AI. Ergo Pyramis anguli D. maior erit Pyramide anguli A. (*35. p.*) Ergo cum Pyramides minimæ angulorum A. B. C. sint æquales (*36. p.*) erunt absolutè minimæ.

Tertiò punctum V. sit supra O. planum parallelum ABC. & IKL. secabit DA. in X. supra I. Ergo DZ. tertia pars ipsius DX. minor erit DE. tertia parte DI. Ergo DZ. minor erit quàm AI. & AX. & pyramis anguli D. minor quàm anguli A. (*35. p.*) & cum Pyramides angulorum A. B. C. sint æquales (*36. p.*) erit Pyramis anguli D. absolutè minima. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in Pyramide Tetraedra planum transeat per duos angulos, & centrum ff. ff. Pyramidis, & in eo sumatur quodlibet punctum, Pyramides minimæ per illud ex reliquis angulis sectæ æquales sunt inter se.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & illius *cētrum ff. ff.* O. transeat ergo per O. & per angulos D. & C. planum DGH. & in eo sumatur quodlibet punctum Z. Dico Pyramides minimas sectas ab angulis A. & B. esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

PLanum KLM. secet Pyramidem minimam anguli D & erit Z. *centrum ff. ff.* plani KLM. (28.*p.*) Ergo recta LZX. bifariam diuidit KM. (1. M. 2.) sed cum puncta Z. & L. sint in vtroque plano KLM. & DCH. est recta LZX. communis planorum sectio (1. *l.* 11.) Ergo punctum X. est in recta DH. sed etiam DO. continuata cadit in G. *centrum* plani ABC. (1. *p.*) & CGH. bifariam diuidit latus AB (1. M. 2.) Ergo cum in plano ABD. recta DH. proportionaliter secet AB. & KM. sunt istæ parallelæ (2. *l.* 6.) sed ductis planis EVR. FPS. parallelis DCB. DCA. est EF. parallela KM (32. *p.*) Ergo &

EF.

EF. AB. sunt parallelæ: sed etiam DB. ER. tum DA. FP. sunt parallelæ: Ergo in parallelogrãmo EP. sunt æquales EF. AP. & in parallelogrammo ER. æquales sunt FF. RB (7. *l.* 1.) Ergo AP. RB. æquales sunt inter se: sed Pyramis minima anguli A. secta per punctum Z. ad minimam anguli B. est vt AP. ad BR. (35. *p.*) Ergo Pyramides angulorum A. & B. sunt æquales. Quod erat, &c.

Consect. 1. Cum recta DOG. communis sit tribus planis per D. & reliquos A. B. C. demonstratur iterum *prop.* 36.

Consect. 2. Cum *centrum* O. sit commune planis omnibus per quosvis binos angulos demõstratur etiam iterum propositio 30. & prima pars *prop.* 37.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI per datum intra Pyramidem Tetraedram punctum secentur à duobus angulis duæ pyramides æquales, illud erit in plano per centrum, & reliquos angulos. Si verò secentur tres æquales, erit in recta per centrum, & angulum reliquũ. Si autem quatuor, illud erit ipsum centrum ff. ss. Pyramidis.

EXPOSITIO. Fig. 13.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. sit datũ punctum Z. per quod minimæ Pyramides angulorum A. & B. sint æquales. Dico punctum Z. esse in plano DCH. transeunte per *centrum* O. & per reliquos angulos D. & C. Si verò tres Pyramides angulorum A. B. C. æquales sint. Dico Z. esse in recta DOG. & si quatuor A. B. C. D. æquales sint, punctum Z. erit ipsum *centrum ff. ss.* O.

DEMONSTRATIO.

DVctis EVR. FPS. parallelis DBC. ADC. erũt AP. RB in ratione minimarum (35. *p.*) nẽpè æquales ex *hypoth.* sed AD. PF. sunt parallelæ, tum DB. ER: Ergo vt BA. ad AP. ita BD. ad DF. & vt BA. ad BR. ita DA. ad DE. (2. *l.* 6) Ergo BD. ad DF. est vt AD. ad DE (1 *l.* 5.) & AB. EF. sunt parallelæ (2. *l.* 6.) Ducto igitur plano

H KLM.

KLM. parallelo EIF. per Z. erit Z. *centr. ff. ſſ.* plani (33. *p.*) & parallelæ erunt EF. AB. tum KM (4. *l.* 11.) Ergo cum planum DGH. bifariam diuidat AB. (1. M. 2.) etiam recta DH. biſecabit KM. in X (2. *l.* 6.) Ergo LX. communis ſectio planorum KLM. DGH. tranſit per Z. *centrum ff. ſſ.* △KLM (1. M. 2.) Ergo cum punctum Z ſit in cõmuni ſectione planorum, erit in plano DGH. Quod erat, &c.

Eadem ratione ſi tres pyramides angulorũ A. B. C. ſint æquales, quia Pyramides A. & B. ſunt æquales, erit Z. in plano per O. & C. & D. & quia A. & C. ſunt æquales, erit Z. in plano per O. B. & D. Ergo in communi ſectione DOG. ſi verò quatuor ſint æquales, erit in O. puncto omnibus planis communi. Quod, &c.

Eſt *conuerſa prop.* 38. 37. 36. & 30.

PRO-

PROPOSITIO XL.

SI punctum datum in Pyramide Tetraedra sit extra plana per centrum Pyramidis, & aliquos duos angulos, omnes Pyramides minimæ sunt inter se inæquales.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Punctum Y. extra plana per *centrum* O. & aliquod latus, vel quoslibet duos angulos, quod idem est. Dico quatuor Pyramides minimas sectas à quatuor angulis solidis A. B. C. D. esse inæquales.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si duæ pyramides minimæ essent æquales, esset punctum Z. in plano per *cẽtrum* O. & reliquos duos angulos, quod est cõtra hypothesim: Vnde si nullæ duæ minimæ possunt esse æquales, multo minus tres, vel quatuor. Ergo omnes Pyramides minimæ sectæ per Y. ex angulis A. B. C. D. erunt inæquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLI.

IN Pyramide Tetraedra planum per centrũ, & latus, vel duos angulos determinat Pyramidem minimam ex reliquis angulis secandam.

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & in ea punctum Y. & planum DCH transeat per *centrũ* O. & latus DC. vel angulos D.C. Quoniam punctum Y. cadit inter planum DCH. & angulum A. Dico ex pyramidibus minimis per Y. sectis ab angulis A. & B. minorem esse minimam anguli A. & ita planum DCH. determinare minimam angulorum A. & B.

DEMONSTRATIO.

DVcatur enim per Y. planum EVR. parallelum ipsi DCB. quod secabit planum DCH. infra Y. cum punctum Y. sit inter plana DCH. ADC. sit ergo communis sectio QT (1. *l.* 11.) Iam quia plana EVR DCB. sunt parallela, & secantur plano DCH. sectiones DC. QT. erunt parallelæ (3. *l.* 11.) Ducatur ergo per QT. planum FSP. parallelum ipsi plano DCA. & erit Y. inter plana DAC. & FPS. Sumatur deindè in QT. quodlibet pũctum Z. quod erit in tribus planis EVR. DCH. FPS. Ergo quia est in plano DCH. pyramides minimæ sectæ per Z. ex angugulis A. & B. erunt æquales (38. *p*) Ergo rectæ AP. RB. erunt æquales (35 *p*) Cum igitur Pũctum Y. sit inter plana DAC FPS. si per Y. ducatur planum vtrique parallelum, hoc secabit latus AB. inter A. & P. secet igitur illud in N. & erit AN. minor quàm AP. hoc est minor quàm RB. quæ æqualis est ipsi AP. sed Pyramis minima anguli A. per Y. secta ad minimam anguli B per idem punctum Y. sectam est vt AN. ad BR (35. *p*.) Ergo cum AN. sit minor, quàm BR. etiam Pyramis anguli A. minor erit pyramide minima anguli B. (3. *l*. 5.) Ergo planum DCH. determinat pyramidem minimam angulorum A. & B. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

IN qualibet Pyramide Tetraedra, si datum sit punctum intra hexaedrum planis anguli, & planis per opposita latera, & centrum Pyramidis ductis, Pyramis illius anguli erit minima omnium, quæ ex quatuor angulis secari possunt.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. per *centrum* ff. ff. O. & latera DB. DC. BC. opposita angulo A. ducantur plana DBH. DCE. BCM. quæ secant ex angulo A. Hexaedrū EGOPHAMR. comprehensum trapezijs EGHA. HPMA. ERMA. GERO. GHPO. PMRO. intra quod hexaedrum datum sit quodlibet punctum Z. Dico Pyramidum minimarum ex quatuor angulis secabilium, per punctum Z. omnium minimam esse quæ secari potest ex angulo A.

DEMONSTRATIO.

CVm latus DB. opponatur angulis A. & C. & punctum Z. sit extra planum DBH. Pyramis minima anguli A. minor erit pyramide minima anguli C. (41. *p.*) Similitèr quoniā latus DC. opponitur angulis A. & B. & quia punctum Z. est extra planum DCE. per *centrū* O. ductum, & latus DC. pyramis minima anguli A. minor erit pyramide minima anguli B.

(41.

(41.*p.*) Tandem quoniam latus BC. opponitur angulis A.&D.& quia datum punctum Z. est extra planum CBM.per *centrum* O. ductũ, & latus BC.pyramis minima anguli A. quæ cadit inter angulum A.& planum CB M. minor erit pyramide minima anguli D(41.*p.*)Ergo Pyramis anguli A. est omnium minima. Quod erat demonstrandum.

Similitèr si punctum assumptum, vel datũ sit X. intra Hexaedrum DLQIRMPO. demõstrabitur Pyramidem minimam anguli D. versus quem cadit punctum X. esse omnium minimam,& sic de reliquis.

PROPOSITIO XLIII.

IN quolibet Pyramide Tetraedra si ex centris planorum, ad centrum Pyramidis, & dimidia latera ducantur rectæ, fiunt quatuor Hexaedra, quæ determinant angulum ex quo secari debet Pyramis omnium minima.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. sit O *centrum* ss. ss. Pyramidis, & G. R. P. Q. planorum *centra*. Ducãtur RO. PO. GO. QO. & RM. PM. RE. GE. GH. PH. &c. Dico Hexaedrum EGHPORMA. determinare Pyramidem minimam anguli A. & similitèr in reliquis angulis.

DEMONSTRATIO.

QVoniam planum DCE transiens per O. diuidit bifariam latus AB (8. *p*.) sectio DE. transit per plani *centrum* R (1. M. 2.) Ergo Planum ROGE. est ipsum planum DCE. idemque est de alijs: sed Hexaedrum comprehensum planis DCE. DBH. &c. determinat pyramidẽ minimam anguli A (42 *p*.) Ergo Hexaedrum comprehensum rectis à *centris* planorum ad *centrum* Pyramidis, & ad dimidia latera, determinat Pyramidem omnium angulorum minimam, vel absolutè minimam. Quod erat, &c.

Con-

CONSECTARIA.

P*Rimo*. Si punctum assumptum sit O. *centrum* Pyramidis, quoniam est quatuor Hexaedris commune, erunt quatuor Pyramides absolutè minimæ, vnde, & æquales: Est *prop*. 30.

Secundo. Si punctum assumptum sit in recta OG. à *centro* Pyramidis in *centrum* alicuius plani, quia recta OG est tribus hexaedris communis, erunt tres Pyramides angulorum illius plani absolutæ minimæ: vnde & æquales, & est ipsa *prop*. 37.

Tertio. Si punctum assumptum sit in plano EGOR. erunt duæ Pyramides angulorum A. & B. absolutè minimæ, & æquales: Est *prop*. 38.

Quarto. Si punctum sit extra omnia plana, vnica est pyramis omnium absolutè minima iuxta *prop*. 40.

PROPOSITIO XLIV.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si ex duobus angulis solidis ducantur duæ rectæ per quodlibet punctum plani transeuntis per centrum, & reliquos duos angulos, aliæ rectæ quæ ex iisdem angulis planorum sectiones iungunt, concurrunt in eodem lateris puncto.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. sit *centrum ff. ss.* O & planum BDH. transeat per O. & angulos B. & D. diuidens latus AC. bifariam in H. assumatur ergo in plano BDH. quodlibet punctum O. & ex reliquis angulis A. & C. ducantur rectæ AOQ. COR. secantes plana opposita in Q. & R. tandem ex iisdem angulis A. & C. ducantur rectæ ARI. CQI. Dico illas concurrere in eodem puncto I. lateris BD. vtrique angulo oppositi.

DEMONSTRATIO.

QVoniam rectæ AOQ. COR. se intersecāt in O. sunt in eodem plano (1. *l.* 11.) Similiter rectæ CQ. AR. cum ipsas in duobus punctis secet, in eodem cum ipsis plano sunt (1. *l.* 11.) Ergo recta CQI. est communis sectio planorum ARQC. & BCD. & recta ARI. est communis sectio planorum ARQC. & ABD.

Er-

Ergo cum recta BID. sit communis sectio planorum ABD. CBD. & planum ARQC. secet vtrumque planum, & rectam BD. secabit illa in cōmuni puncto I. Ergo rectæ AR CQ. continuatæ concurrent in puncto I. lateris BD. oppositi, quod scilicèt nullum ex angulis A. C. constituit. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLV.

IN Pyramide Tetraedra si planum per centrum, & duos angulos transeat, rectæ à reliquis angulis per quodlibet plani punctum secantur in eadem ratione: & etiam, quæ ab iisdem angulis per planorum sectiones ducuntur; & quæ iungit planorum sectiones est communi angulorum lateri parallela.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN eadem Pyramide ABCD. transeat planum BDH. per *centrum* O. & angulos B. & D. & in plano BDH. assumptum sit quodlibet punctū O. per quod à reliquis angulis ducātur AOQ. COR. tum ARI. CQI. & iungatur recta RQ. Dico rectas AQ. CR. in eadem ratione esse diuisas in O & Rectas AI. CI. tiam esse proportionalitèr sectas in R. & Q. tādem rectam RQ. esse communi angulorum lateri AC. parallelam.

DEMONSTRATIO.

QVoniam punctum assumptum O. est in rectis AOQ. COR. etiam erit in plano AIC. sed etiam est in plano BDH. ex *hyp.* Ergo est in communi sectione vtriusque IH. sed quia recta AC. est bifariam diuisa in H (8.*p.*) recta IOH. transibit per *centrum* △ ACI (1.M.2.) Ergo cum punctum O. sit in recta IH. bisecante basim △ AIC rectæ AOQ. COR. secabunt latera, & se ipsas in eadem ratione (31. M.2.) Ergo cum AR. ad RI. sit vt CQ. ad QI. & AO. ad OQ. vt CO. ad OR. erit RQ. parallela ipsi AC. (2.*l.*6.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVI.

IN Pyramide Tetraedra, si planum transeat per centrum, & duos angulos; recta illius plani communi lateri parallela locus est in quo recta à reliquis angulis semper in eadem ratione secantur.

2. *Et loca vbi terminãtur rectæ prædictæ in oppositis planis rectæ etiam sunt eidem lateri parallelæ.*

EXPOSITIO. Fig. 15.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & planũ BHD. transeat per angulos B. & D. & per *centrum* pyramidis diuidens latus AC. bifariam in H. (8 *p.*) si in plano BHD. ducatur Quæuis PG. parallela lateri DB. quod angulis B. & D. commune est. Dico rectam PG. locum esse in quo quæuis rectæ AOQ. COR. intersecantur in eadem semper ratione AG. ad GF. & parallelas FL. EM. loca esse vbi quæuis AOQ. COR. terminantur secantes plana BCD. ABD.

DEMONSTRATIO.

SVmatur enim in recta PG. quodlibet punctum O. & ducantur AOQ. & COR. tum ducatur AGF. & CGE. & per puncta F. E. ducatur plana FLT. ESM. parallela ipsi BHD. quæ cum planis BCD. ABD. faciunt communes sectiones

nes LF. EM. (1. *l.* 11.) Ductæ igitur A L. AF. erunt in eodem plano cum LF (1 *l.* 11.) ſed planum AFL. ſecans plana parallela BHD. F T L. facit ſectiones parallelas F L. GP (3. *l.* 11.) & ſimilitèr planum BDC. facit ſectiones parallelas BD. FL. Ergo parallelæ ſunt inter ſe G P. BD. FL. vnde quæ per G. ducitur parallela ipſi BD. eſt ipſa GP. cum ergo parallelæ ſint G P. FL. in eodē plano AFL. ducta quælibet AOQ. ſecans PG. in O. ſecabit F L. in Q. Ergo cum OG. ſit baſi QF. parallela erit AO. ad OQ. vt AG. ad GF. (2. *l.* 6.) ſed etiam CO. ad OR. eſt vt AO. ad OQ (45. *p.*) Ergo CO. ad OR. eſt vt AG. ad GF. (1. *l.* 5.) Ergo cum hoc demonſtretur de quolibet puncto O ſumpto in recta GP. Conſtat veritas propoſitionis. Idem demonſtrabitur de recta ME. quod de FL. Vnde etiā CQI. ARI. in eadem ratione ſecantur, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN Pyramide Tetraedra si recta per angulũ, & centrum ducatur, locus erit in quo tres rectæ à reliquis angulis semper in eadem ratione inter se diuiduntur: & planum per sectiones planorum ductum parallelum est illi quod priori angulo opponitur.

EXPOSITIO. Fig. 14.

IN Pyramide ABCD. recta DG transeat per *cẽtrum ff ss.* Pyramidis in qua sumatur quodlibet punctum O. & ducantur à reliquis angulis rectæ AOQ. COR. BOP. secantes plana opposita in Q. R. P. Dico AO. ad OQ. esse vt CO. ad OR. & vt BO. ad OP. & planum ductum per sectiones planorũ P. Q. R. parallelum esse plano ABC. cui angulus D. opponitur.

DEMONSTRATIO.

PLanum BDH. transeat per rectam DG. & per angulos D. B. similitèr planum CDE. transeat per rectam DG. & per angulos D. C. & vtrumque transibit per *centrum* Pyramidis, quod est in recta DG. ex *hyp.* & hæc erit in vtroque plano, vt communis eorum sectio. Si ergo in ea sumatur quodlibet punctum O. erit in vtroque plano DBH. DCE. Ergo cum punctum O. sit in plano DBH. per *centrum*, rectæ

AOQ.

AOQ. COR. ſe in eadem ratione ſecant (45. *p*) & quia O. eſt in plano ECD, per *centrum* rectæ AOQ. BOP. etiam in eadem ratione ſecantur (45. *p.*) Ergo etiam CO R. BOP. ſecantur in eadem ratione (1. *l.* 5.)

Prætereà cum ABCO. Pyramis ſit, & plana ad verticem continuata ſint in eaſdem rationes ſecta, planum PQR. ſecans latera AOQ. BOP. COR. in eadẽ ratione erit baſi ABC. parallelum (4. *l.* 11.) tum quia RQ. eſt parallella AC. & RP. ipſi BC. & PQ ipſi AB (45. *p.*) Ergo planum RPQ. eſt parallelum ipſi ABC. Quod, &c.

Conſect. 1 Idemque eſt de quolibet puncto rectæ continuatæ extra pyramidem.

2. Quatuor rectæ à 4. angulis in ſolo *centro* ſecantur in eadem ratione.

PROPOSITIO XLVIII.

IN Pyramide Tetraedra si recta bifariam diuidat latera opposita, & aliæ quatuor rectæ aliqua latera diuidant in eadem ratione; ista quatuor rectæ parallelogrammum constituent, quod habebit centrum ff. ss. in priori recta.

EXPOSITIO. Fig. 16.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta HN. bifariam diuidat latera opposita AC. BD. quæ scilicèt nullum angulum habent communem. Prætereà latera AD. CD. AB. CB. sint in eadem ratione diuisa in M. L. E. F. Dicò EF LM. esse parallelogrammum, & ipsius *centrum ff. ss.* esse in aliquo puncto prioris rectæ HN.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim EF. FL. LM. ME. Quoniam in Triangulo ACD. recta ML. secat proportionaliter latera, sunt AC. ML. parallelæ (2. *l*. 6.) & in triangulo ABC. similiter sunt parallelæ AC. EF. Ergo EF. & ML parallelæ sunt inter se. Vnde & sunt in eodem plano simul cum ME. & LF. quæ illas secant (2. *l* 11.) Similiter ME. LF. parallelæ sunt ipsi BD. & inter se (2. *l*. 6.) Ergo EFLM parallelogrammum est.

Præterea ducantur BH, HD. & planũ DBH. secabit planum EFLM. & communis sectio erit R P. & quoniam in Triangulo ABC. rectæ AC. EF. sunt parallelæ, vt AH. est æqualis ipsi AC ex *hyp.* erit EP. æqualis ipsi PF. & similitèr in Triangulo BDH. cum sint parallelæ R P. BD. vt BN. est æqualis ipsi N D. ex *hypot.* erit RO æqualis OP (2. l. 6.) & similitèr in Triangulo ACD vt AH. æqualis est ipsi HC. ita MR. ipsi R L. (2. l. 6.) Ergo quia recta R P. bifariam diuidit latera opposita parallelogrammi EF LM. in ipsius dimidio erit *centrum ff. ff.* parallelogrammi (68. M. 2.) Ergo cum demonstratum sit rectam HN. secare bifariam rectā R P. *centrum ff. ff.* parallelogrammi erit in O. nempè in aliquo puncto rectæ HN. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLIX.

IN Pyramide Tetraedra si duæ rectæ subcontrariè similitèr diuidant opposita latera, erunt in plano parallelogrammi dicti, & illius diametri; & centri, vel intersectionis locus erit recta similiter diuisa, quæ reliqua latera bisecat.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN Pyramide ABCD. recta MF subcontrariè diuidit latera AD. BC. in eadem ratione DM. ad MA. vt BF. ad FC. & similitèr LE. Dico ipsas intersecari in recta HN. quæ bisecat latera AC. BD. & HO. ad ON. esse vt AM. ad MD. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam latera sunt similiter diuisa, erit EF LM. parallelogrammum, & EL MF. ipsius diametri, & *centrum* illius in O. rectæ HN. (48. *p.*) sed *centrum* est in sectione diametrorũ (55. M. 2.) Ergo earum intersectio est in HN. sed vt HR ad RD. ita AM. ad MD. & HO. ad ON (2. *l.* 6.) Ergo HN. similitèr diuisa est locus *centri*, vel intersectionis. Quod, &c.

PROPOSITIO L.

IN Pyramide Tetraedra si recta bifariam secet duo latera opposita quodlibet illius punctũ est centrum ff.ss. parallelogrammi secantis in eadem ratione reliqua latera; & etiam est centr. ff. dd. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia illi quod fit partibus rectæ bisecantis.

EXPOSITIO. Fig. 16.

IN Pyramide ABCD. recta HN. bisecat opposita latera, quæ nullum angulum habent cõmunem AC. DB. in H. & N. Si ergo in HN. sumatur quodlibet punctum O. Dico esse *centrũ ff ss.* alicuius parallelogrammi EFLM. quod secat reliqua latera in ratione rectæ HN. & idem punctum O. esse *centrum ff. dd.* ad angulos solidos A. B. C D. quarum duæ sint quadrata, & duæ sint rectangula similia rectangulo HON. ex partibus rectæ HN.

DEMONSTRATIO.

PRima pars constat, quia parallelogrammũ quodlibet secans in eadem ratione quatuor latera *centrum ff. ss.* habet in recta HN. similiter diuisa (49. *p.*) Ergo quodlibet ipsius rectæ punctũ erit *cẽtr. ff. ss.* alicuius parallelogrammi secantis latera in ratione partium ipsius rectæ.

Se-

Secũda pars demonſtratur. Quia recta DB. ſit bifariam ſecta in N. eſt N. *centr.* □ □ ad D. & B. & quia recta AC. eſt bifariam diuiſa in H. & duo rectangula ſupra AH. & HC. ſimilia ipſi HON. ſunt inter ſe ſimilia, erit H. *centr.* ▭▭ ſimilium (35. M. 1.) ſed recta HN. ita eſt diuiſa in O. vt duo rectangula HON. minima ſint duobus quadratis HO. cum habeant æqualem altitudinem HO (10. M. 1.) Ergo cum recta HN. coniungens duo *centra* H. N. ita ſit diuiſa vt duo rectãgula HON. minima ſint duobus quadratis ON. erit O. *centrum ff. dd.* ad A. C. D. B. quarum duæ ad B. D. ſint quadrata, & duæ ad A. C. ſint rectãgula ſimilia ipſi HON (64 M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LI.

IN qualibet Pyramide Tetraedra si ex vertice ducatur recta per centrum ff.ss. Pyramidis, vel per centrũ basis, quodlibet ipsius punctum est centrum ff.dd. quarum tres similes inter se sunt, & quarta dissimilis.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & recta DG. transeat per *centrum ff.ss.* Pyramidis, vel per G. *centrum* basis quod idem est (1. *p.*) & sumatur in recta DG. quodlibet punctum O. Dico punctum O. esse *centrum ff.dd.* nempè rectangulorum similium inter se ad puncta A. B. C. & quadrati ad punctum D.

DEMONSTRATIO.

TRanseant per verticem D. & per rectã DG. & angulos solidos A. B. C. plana AFD. BHD. CED. quæ diuident bifariam latera basis AB. BC CA. in punctis E. F. H. (8. *p.*) Deinde per punctum assumptum O. ducantur ex angulis A. B. C. rectæ AOQ. BOP. COR. secantes opposita plana in P. Q. R. per quæ puncta ducantur APZ. & BQZ. quæ concurrent ad idem pũctum Z. (44 *p.*) & in plano ACD. cum P. sit in recta DH bisecante latus AC. erit P. *centrum ff.dd.* nempè rectangulorum ad A. C. similium

re-

rectangulo CZD. (31. M. 2.) Ergo si ducatur PB. in ea erit *centrum* ad quartum punctum B. figuræ etiam similis rectãgulo CZD (61. M. 1.) Similitèr punctum Q. demonstrabitur *centrũ ff. dd.* ad B. C. D. similium ipsi CZD. & quadrati ad D (31. M. 2.) & in recta QA. erit *centrum* ad B. C. D. A. ita vt in A. ponenda sit figura similis ▭ CZD. (61. M. 1.) Ergo cum *centrum* ad A. B. C. D. nempè trium rectangulorum ad A. B. C. similium ipsi ▭ CZD. & □ ad D. demonstratũ sit in vtraque recta QA. PB. erit in communi earum sectione O. cum nullum aliud punctũ sit vtrique rectæ commune: Ergo cum hoc de quolibet puncto O. rectæ DG. demonstretur, quodlibet erit *centrum ff. dd.* quarum tres similes sint, & quarta dissimilis. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LII.

IN Pyramide Tetraedra si recta à vertice transeat per centrum ff.ss. & in ea sumatur quodlibet punctum, per quod ex angulo basis ducatur alia secans planum oppositum, & ex alio angulo per plani sectionem alia ducatur secans latus: segmenta prioris sunt vt inferius segmentum lateris ad triplum superioris.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis ABCD. & recta DG. per *centrum* basis G. erit etiam per *centrum ff.ss.* Pyramis (1.*p.*) si igitur in recta DG sumatur quodlibet punctum O. per quod ex angulo A. ducatur AOQ. secans planum oppositum in Q. & ex angulo B. recta BQZ. secans latus CD. in Z. Dico GO. ad OD. esse vt CZ. ad 3ZD.

DEMONSTRATIO. Fig. 17.

DVcantur per DG. plana DBH. DAF. DCE. & quia basis sectiones transeunt per *centrũ* basis G. bifariã secabunt ipsius latera in H. E.F. (1.M. 2.) & quia recta DG est per *centrum* Pyramidis, erunt etiam plana DAF. DBH. DCE. per *centrum*, & quia punctũ O. est in recta DG. erit etiam in omnibus planis: Ergo si ex angulis A.B.C. ducãtut rectæ AOQ BOP. COR. secantes plana in Q.P.R. erunt puncta P.Q R.

in

in eodem plano IKL. parallelo basi ABC (47. *p*) Ergo omnes rectæ ex angulo D. in eadem ratione secantur (2. *l*. 6) nempè FQ. ad QD. vt ER. ad RD. sed in triangulo BDC. quia recta DF. bifariam secat basim BC. est FQ. ad QD. vt CZ. ad 2ZD (33. M. 2.) Ergo etiam ER. ad RD. est vt CZ ad 2ZD. (1. l. 5.) sed in triãgulo CED. quia latus CD. diuisum est vt CZ. ad ZD. & latus ED. diuisum est vt CZ ad 2ZD. cùm vtraque ratio sectionis laterum habeat idem antecedens, erit recta GD. diuisa vt antecedens ad summam consequentium (39. M. 2.) scilicèt GO. ad OD. vt CZ. ad ZD + 2ZD. vel vt CZ. ad 3ZD. Quod erat, &c.

ALITER.

CVm O sit *centrum ff. dd.* quarum tres ad A. B. C. similes sint ▭ CZD (51. *p*.) & G. sit *centrum ff. ss.* ad A. B. C. (1. *p*.) erit GD. diuisa in O. vt 3 ▭ GO. similia ipsi CZD. minima sint quadrato OD (61. M. 1.) sed tria ▭ CZD. minima sunt quadrato triplæ ZD. cùm hoc sit illis tribus æquè altum (21. M. 1.) Ergo GO. est ad OD. vt CZ. ad 3ZC. (30. M. 1.) Quod, &c.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti omnium segmentorum rationes cognitæ sunt.

EXPOSITIO. Fig. 17.

DVcta vt antea DG. & assumpto quolibet puncto O. ductisquè BOP. APZ. EOZ. Dico omnium segmentorum rationes innotescere.

1. GO. ad OD. est vt CZ. ad 3 ZD.
2. EO. ad OZ. est vt AP. ad 2 PZ.
3. BO. ad OP. est vt AZ. ad ZP.
4. AP. ad PZ. est vt CD. ad DZ. &c.

DEMONSTRATIO.

PRimum constat ex præcedenti (52. p.)

2. Quia in △AZB recta ZE. bifariam diuidit basim AB erit EO. ad OZ. vt AP. ad 2 PZ. (33. M. 2.)

3. In eodem △AZB. quia ZE. bifariam diuidit basim AB. & quia BOP. secat ZE. in O. erit BO. ad OP. vt AZ. ad ZP. (32. M. 2.)

4. In △ACD. cum DH. bisecet basim AC. erit AP. ad PZ. vt CD. ad DZ (32. M. 2.)

Similiter alia segmenta examinari possunt, & eorum rationes facilè cognoscentur, quas libens ommitto, nec lectorum ingenio diffidere videar.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

IN Pyramide Tetraedra si planum transeat per duos angulos, & centrum ff ss. quodlibet ipsius punctum extra rectam per centrum, & bisecantem latera est centrum ff. dd. quarum duæ reliquorum angulorum sunt similes. Si punctum sit in bisecante duæ ff. erunt similes, & duæ dissimiles.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt Pyramis Tetraedra ABCD. & planum DCE. transeat per *centrum ff ss.* & per angulũ C.D. si in dicto plano DCE. extra rectam per *centrum*; & bisecantem latera AB. CD. sumatur quodlibet punctum O. Dico illud esse *centrum ff. dd.* quarum duæ ad A. & B. similes sint, &c.

DEMONSTRATIO.

DVctis AOQ. DOG. erit Q. *centrum ff. dd.* ad ▭B & ▭D. & □C. similia ipsis *a. b. c* (35. M. 2.) Ergo si in A. ponenda sit figura similis ▭ *a*, erit *centr ff. dd.* in recta QA (61. M. 1.) Deinde quia planum DCE. per *centrum* bisecat latus AB. est G. *centr. ff. dd.* quarum duæ similes sint ▭ *a.* & tertia □ *c.* (31. M. 2.) Ergo si in angulo D. alia ponẽda sit similis ipsi □ *b.* erit *centr. ff. dd.* in recta GD. (61. M. 1.) Ergo quia *centrum* earundem *ff*.demonstratum est in vtraque recta QA.GD.erit in earum sectione O. Quod, &c.

2. Si recta EZ. bisecet latus AB. & oppositum DC. erit E.*centr.ff.ſſ*.ad A.B.&Z.*centr.ff.ſſ*. ad D.C.(35.M.1.) Ergo si sumatur quodlibet punctum O quia duo rectangula ZOE. æquè alta, & minima sunt duobus quadratis OE. (21.M.1.) erit O *centr.ff*.nempè 2 □ □ ad A.B. & 2 □ □ *ſſ*.ad C.D.Quod erat,&c.

Si autem punctum assumptum sit in recta per *centr ff.ſſ*.erunt 3 *ff*. ad angulos basis similes ex 51.*p*.

PROPOSITIO LV.

Quodlibet punctum Pyramidis Tetraedræ extra plana per centrum ff.ſſ.& duos angulos, est cētrum ff.dd.ad omnes angulos.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN Pyramide ABCD. datum sit quodlibet punctum O.quod non sit in plano per *centrū ff.ſſ*.& aliquod latus.Dico O. esse *cētrum ff. dd.* ad angulos A.B.C.D.

DEMONSTRATIO.

DVcantur enim DOG. AOQ. BGH. AGF. CGE. CQL.BQZ.DQF. Tùm fiat □ *a*.simile □ AEB.& □ *c*.simile ipsi CFB.& □ *b*.& □ *d*.simile ipsi DLB. Punctum ergo G.erit *centrum ff.dd.*

*ff.dd.*ad A.C.B.quæ similes sint ▭ *a.*& ▯ *c.*& ▭ *b.* (35.M.2.) Ergo si in D.ponenda sit figura similis ▯ *d.centrum* ad A.C.B.D.erit in GD. (61.M. 1.) similitèr Q.est *centrum ff.dd.*ad D.C.B.quæ similes sint ▯ *d.* ▯ *c.*& ▭ *b.*(35.M.2.) Ergo si in A.ponenda sit figura similis ▭ *a.*erit *centrum ff.* ad D.C.B.A.in recta QA(61.M.1.) Ergo cùm in vtroque casu figuræ similes sint datis *a.b.c.d.* erit *centrum ff. dd.*in communi rectarum sectione O.Quod,&c.

PROPOSITIO LVI.

SI intra Pyramidem Tetraedram sumatur quodlibet punctum, per quod ex duobus angulis ducantur rectæ in plana opposita, & ex reliquis angulis aliæ per planorum sectiones in latera, quæ laterum sectiones iungit, transit per assumptum punctum.

EXPOSITIO. Fig. 18.

INtra Pyramidem ABCD.assumptum sit punctum O.ducantur insuper DOG.AOQ.tum BQZ.CGE.& iungatur recta EZ. Dico rectam EZ.transire per dictum punctum O.

DEMONSTRATIO.

FIant figuræ *a.b.c.d* vt in præcedenti (55.*p.*) & erit O.*centrum ff.dd* quæ similes sint factis *a.b.c.d*(55.*p.*)& punctũ E.erit *centrũ ff dd.*

ad

ad A B. quæ similes sint ▭ *a*. & ◻ *b*. (35. M. 1.) & etiam Z. erit *centrum ff dd*. ad C. D. quæ similes sint rectangulis *d c*. (36. M. 2.) Ergo ducta ZE. erit in illa *centrum ff. dd*. quæ similes sint factis *a. b. c. d* (63. M. 1.) sed punctum O. demonstratum est *centrum ff. dd*. ad A. B. C. D. quæ similes sint *a b. c d*. (55. *p*.) Ergo punctum O. est in recta ZE Quod erat, &c.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, si laterum segmenta datam habeant rationem, cognita erit ratio segmentorum rectæ coniungentis laterum sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Assumpto (vt in præcedenti) puncto O. ductisque DOG. AOQ. CGE. BQZ. & ZOE. Dico rationem ZO. ad OE. cognitam esse. Si enim assumatur quælibet *f*. & fiat vt DL. ad LB. ita *f* ad *g* & vt CF. ad FB. ita *f*. ad *K*. & iterum vt AE. ad EB. ita *f*. ad *m*. & tandem vt *m*+*f*. ad *f*. ita *g*+*K*. ad *l*. erit ZO. ad OE. vt *f*. ad *l*.

DEMONSTRATIO.

Rectangulum *fg* est simile ▯ DLB. vel ▯ *d*. ex *constr*. & ▯ *f K*. est simile ▯ CFB. vel ▯ *c*. ex *const*. Ergo *g*+ *K*. est summa altitudinum rectanctangulorum supra basim *f.* similium ipsis *d.* & *c.* similitèr ▭ *fm.* simile est ▭ AEB. vel ▭ *a.* & □ *f.* simile □ EB. vel □ *b.* Ergo *m*+*f.* est summa altitudinum rectāgulorum supra *f.* similium ipsis *a. b.* sed ex *constr.* est *m*+*f* ad *f.* vt *g*+*K.* ad *l.* Ergo invertendo vt basis *f.* ad summam altitudinum *m*+*f.* ita *l.* ad *g*+*K.* (4. *l.* 5.) Ergo *g*+*K.* est summa altitudinum figurarum similium *a.* & *b.* supra basim *l.* sed etiam *g*+*K.* est summa altitudinum figurarum similium ipsis *c.* & *d.* supra basim *f.* ex *constr.* Ergo cùm figuræ supra *l.* similes *a.* & *b.* habeant æqualem, vel eandem altitudinum summam cum figuris supra *f.* similibus *c.* & *d.* illarum summa erit minima istarum summæ (21. *M.* 1.) sed etiam cum Z. sit *centrum* ad C. D. figurarum similium *c.* & *d.* & paritèr E sit *centrum* ad A. & B. figurarum similium *a.* & *b.* & O. *centrum ff* ad A. B. C. D. similium ipsis *a b. c. d.* (55. *p.*) erit ZE. diuisa in O. vt duo rectangula supra ZO. similia ipsis *c.* & *d.* minima sint duobus rectangulis supra OE. similibus *a.* & *b.* (64. M. 1.) Ergo ZE. diuisa erit in O. in ratione basium figurarum minimarum *f* & *l.* & erit ZO. ad OE. vt *f.* ad *l.* (30. M. 1.) Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

SImilitèr si ducatur HL. transibit per O (56 *p*)

&

& si fiat vt summa $K+m$. ad f. ita $g+f$. ad p. demonstrabitur LO. ad OH. vt f. ad p. &c.

PROPOSITIO LVIII.

IN Pyramide Tetraedra si quodlibet punctum sumatur, per quod ducantur rectæ ab omnibus angulis in plana opposita, & per planorum sectiones in latera omnia, rationes omnium segmentorum cognitæ sunt, si tres fuerint datæ.

EXPOSITIO. Fig. 18.

INtra Pyramidem ABCD. assumptũ sit quodlibet punctum O. & ductæ sint rectæ A O Q. BQZ, &c. prout in figura, & datæ sint rationes DL. ad LB. vt f. ad g: & CF. ad FB. vt f. ad K: & AE ad EB. vt f. ad m. Dico omnes alias datas esse.

DEMONSTRATIO.

1. IN △CBD. quia DL. ad LB. est vt f. ad g. & CF. ad FB. vt f. ad K. erit DZ. ad ZC. vt consequentes, nempè vt K. ad g (39. M. 2.) & ZQ ad QB. vt antecedens ad summam consequentium, nempè vt f. ad $g+K$. (39. M. 2.) & similitèr rationes FQ ad QD. & LQ. ad QC. invenientur (tum ex 45. M. 2) &c.

2. In △ABC. quia CF. ad FB. est vt f. ad K. & AE. ad EB. vt f. ad m: erit AH. ad HC. vt K. ad m. nempè vt consequentes (39. M. 2.) & HG. ad GB. vt f. ad $K+m$: vt antecedens ad summã

con-

consequentium (39. M. 2.) & reliquæ rationes EG. ad GC. & FG. ad GA. invenientur (39. vel 45. M. 2.)

3. In △ ABD. quia AE. ad EB. est vt *f.* ad *m.* & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* erit AS. ad SD. vt *g.* ad *m.* & SR. ad RB. vt *f.* ap *m*+*g.* (36. M. 2.) & data erit ratio ER. ad RD. & LR. ad RA. (39. vel 45. M. 2.)

4. In △ ACD. quia DZ. ad ZC. est vt *K.* ad *g.* ex *num.* 1. & AH. ad HC. vt *K.* ad *m.* erit iterũ AS. ad SD. vt *g.* ad *m.* & SX. ad XC. vt *K.* ad *g*+*m.* (39. M. 2.) & data erit ratio HX. ad XD. & ZX. ad XA (39. vel 45. M. 2.)

5. In △ ECD. quia cognitæ iam sunt rationes ER. ad RD. & CZ. ad ZD. cognoscentur etiam rationes GO. ad OD. & RO. ad OC. & ZO. ad OE (39. M. 2.) & similitèr in △ AFD. & in △ HBD. erũtque 22 rationes cognitæ ex tribus datis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SI fuerint quatuor continuè proportionales, & latera anguli solidi Pyramidis Tetraedræ diuidātur vt prima ad secundam: vt prima ad tertiam, & vt prima ad quartam, omnium rectarū ab angulis planis, & solidis ratio in ipsis quatuor continuis data erit.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt quatuor continuæ *f.g.K.m.* & in Pyramide Tetraedra ABCD. latera anguli solidi B. diuidantur DL. ad LB. vt *f* ad *g*. & CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE ad EB. vt *f.* ad *m.* Ductis DF. CL. CE. AF. AQ. DG. &c. prout in figura; Dico omnium segmentorum rationes in ipsis quatuor continuis *f.g.K.m.* datas, vel determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

1. *AH. ad HC. est vt K. ad m.* Quia in △ ABC. est CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *hyp.* Ergo AH. ad HC. erit vt consequētes, vt *K.* ad *m.* (39. M. 2.)

2. *HG. ad GB. est vt f. ad K+m.* Quia in △ ABC. est CF. ad FB. vt *f.* ad *K.* & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *hyp.* Ergo HG. ad GB. est vt antecedens ad summam consequentium vt *f.* ad *K+m.* (39. M. 2.)

3. *EG.*

3. *EG. ad GC. est vt* K. *ad m+f.* Quia in △ ABC. est AH. ad HC. vt K. ad *m.* (ex num. 1.) & BF. ad FC. vt K. ad *f.* ex *hyp.* Ergo EG. ad GC. vt K. ad *m+f.* vt antecedens ad summam consequentium (39. M. 2.)

4. *FG. ad GA. est vt m. ad* K+*f.* Quia in △ ABC. est BE. ad EA. vt *m.* ad *f.* ex *hyp.* & CH. ad HA. vt *m.* ad K. ex *num.* 1. Ergo FG. ad GA. vt antecedens ad summam consequentium: vt *m.* ad K+*f.* (39. M. 2.)

5. *CZ. ad ZD. est vt f. ad g.* Quia in △ CBD. est DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & CF. ad FB. vt *f.* ad K: ex *hyp.* Ergo CZ. ad ZD. est vt consequentes: vt *g.* ad K. vel vt *f.* ad *g.* (39. M. 2.)

6. *FQ. ad QD. est vt g. ad* K+*f.* Quia in △ CBD. est CZ. ad ZD. vt *f.* ad *g* vel vt *g.* ad K. ex *num.* 5. & BL. ad LD. vt *g.* ad *f.* Ergo FQ. ad QD. est vt antecedens ad summam consequentiũ: vt *g.* ad K+*f.* (39. M. 2.)

7. *ZQ. ad QB. est vt f. ad g*+K. Quia in △ DCB. est CF. ad FB. vt *f.* ad K. & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* ex *hyp.* Ergo ZQ. ad QB. vt antecedens ad summã consequentiũ vt *f.* ad *g*+K. (39. M. 2.)

8. *LQ. ad QC. est vt* K. *ad g+f.* Quia in △ DCB. est DZ. ad ZC. vt *g.* ad *f.* vel vt K. ad *g.* ex *num.* 5. & BF. ad FC. vt K. ad *f.* ex *hyp.* Ergo LQ. ad QC. vt K. ad *g+f.* 39. M. 2.)

 9. *AS.*

9. *AS. ad SD. est vt f. ad* K. Quia in △ ABD. est AE. ad EB. vt *f*. ad *m*. & DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. ex *hy*. Ergo AS. ad SD. est vt consequentes vt *g*. ad *m*. vel vt *f*. ad K. (39. M. 2.)

10. *ER. ad RD. est vt g. ad m + f.* Quia in △ ABD. est AS. ad SD. vt *f*. ad K. vel vt *g*. ad *m*. ex *num*. 9. & BL. ad LD. vt *g*. ad *f*. ex *hyp*. Ergo ER. ad RD. est vt antecedens ad summam consequentium, vt *g*. ad *m* + *f*. (39. M. 2.)

11. *SR. ad RB. est vt f. ad g + m.* Quia in △ ABD. AE. ad EB. est vt *f*. ad *m*. & DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. Ergo SR. ad RB. vt *f*. ad *g* + *m*. (39. M. 2)

12. *LR. ad RA. est vt m. ad g + f.* Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *m*. ad *f*. ex *hyp*. & DS. ad SA. vt K. ad *f*. vel vt *m*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo LR. ad RA. erit vt *m*. ad *g* + *f*. (39. M. 2.)

13. *HX. ad XD. est vt f. ad* K + *g*. Quia in △ ACD. est AS. ad SD. vt *f*. ad K. ex *num*. 9. & CZ. ad ZD. vt *f*. ad *g*. ex *num*. 5. Ergo HX. ad XD. est vt antecedens ad summam consequentium, vt *f*. ad K + *g*. (39. M. 2.)

14. *SX. ad XC. est vt g. ad* K + *f*. Quia in △ ACD. est AH. ad HC. vt K. ad *m*. vel vt *g*. ad K. ex *num*. 1. & DZ. ad ZC. vt *g*. ad *f*. ex *num*. 5. Ergo SX. ad XC. erit vt *g*. ad K + *f*. vel vt K. ad *m* + *g*. (39. M. 2.)

15. *ZX.*

15. *ZX. ad XA. est vt m. ad* K+*g*. Quia in △ ACD. est CH. ad HA. vt *m*. ad K. ex *num*. 1. & DS. ad SA. vt K. ad *f*. vel vt *m*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo ZX. ad XA. erit vt *m*. ad K+*g*. (39. M. 2)

16. *GO. ad OD. est vt g. ad f+m*+K. Quia in △EDC. est CZ. ad ZD. vt *f*. ad *g*. vel vt *g*. ad K. ex *num*. 5. & ER. ad RD. vt *g*. ad *m*+*f*. ex *num*. 10. Ergo GO. ad OD. est vt *g*. ad *f*+*m*+ K. vt antecedens ad ſummam conſequentiũ. (39. M. 2.)

17. *XO. ad OB. est vt f. ad g*+K+*m*. Quia in △DBH. est DL. ad LB vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. & HG. ad GB. vt *f*. ad K+*m*. ex *num*. 2. Ergo XO. ad OB. vt *f*. ad *g*+K+*m*.

18. *QO. ad OA. est vt f ad g+K+f.* Quia in △DFA. est FG. ad GA. vt *m*. ad *K*+*f*. ex *num*. 4. & DS. ad SA. est vt *m*. ad *g*. ex *num*. 9. Ergo QO ad OA. vt *m*. ad *K*+*f*+*g*.

19. *RO. ad OC. est vt K. ad g+m+f.* Quia in △ECD. est DZ. ad ZC. vt K. ad *g* ex *num*. 5. & EG. ad GC. vt K. ad *m*+*f*. ex *num*. 3. Ergo RO. ad OC. est vt K. ad *g*+*m*+*f*.

20. *EO. ad OZ. est vt g*+K. *ad f+m*. Quia in △AZB. est AX. ad XZ. vt K+*g*. ad *m*. ex *num*. 15. & BQ. ad QZ. vt K+*g* ad *f* ex *num*. 7. Ergo EO. ad OZ. est vt antecedens ad ſummam conſequentium, vel vt K+*g* ad *m*+*f*. (39. M. 2.)

21. *LO. ad OH. est vt* K+*m. ad f+g. vel*

vt

vt K *ad f.* Quia in △DBH est BG. ad GH. vt K + *m.* ad *f* ex *num.* 2. & DX. ad XH. vt K + *g.* ad *f.* vel vt *m.* + K. ad *g.* ex *num.* 13. Ergo LO. ad OH. est vt antecedens ad summam cōsequentium, vt K + *m.* ad *f* + *g.* hoc est vt K. ad *f.* (39. M. 2.)

22. *SO. ad OF. est vt f + K. ad g + m. vel vt f. ad g.* Quia in △ DAF. est AG. ad GF. vt K + *f.* ad *m* ex *num.* 4. & DQ. ad QF. vt K + *f.* ad *g.* ex *num.* 6. Ergo SO. ad OF. erit vt K + *f.* ad *m* + *g* vel vt *f.* ad *g.* Ergo rationes omnes determinatæ sunt, &c.

PROPOSITIO LX.

SI fuerint quatuor continuè proportionales, & latera circa angulum solidum Pyramidis Tetraedræ diuidantur vt prima ad secūdam, vt prima ad tertiam, & æqualitèr, ductis rectis vt in prop. 59. sequentes rationes determinatæ erunt in ipsis quatuor continuis.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt quatuor continuæ *f. g. K. m.* & in Pyramide ABCD. fiat AH. ad HC. vt *f.* ad *g* & CF. ad FB. vt *f.* ad K & CZ. æqualis ZD. Ducantur præterea rectæ prout in figura. Dico sequentes rationes determinatas esse.

DEMONSTRATIO.

1. *AE. ad EB. est vt f. ad m.* Quia in △ABC. est

est AH. ad HG. vt *f* ad *g* vel vt K. ad *m*. & BF. ad FC. vt K. ad *f* ex *hyp.* erit AE. ad EB. vt consequentes vt *f* ad *m*. (39. M. 2.)

2. *EG. ad GC. est vt* K. *ad m+f.* Quia in △ABC. est AH. ad HC. vt K. ad *m*. & BF. ad FC. vt K. ad *f.* ex *hyp.* Ergo EG. ad GC. erit vt K. ad *m+f.* vt ant. ad sum nam conseq.

3. *HG. ad GB. est vt f. ad* K+*m*. Quia in △ABC. est CF. ad FB. vt *f.* ad K. ex *hyp.* & AE ad EB. vt *f.* ad *m*. ex *num.* 1. Ergo HG. ad GB. erit vt *f.* ad K+*m*.

4. *FG. ad GA. est vt m. ad* K+*f* Quia in △ABC. est BE. ad EA. vt *m*. ad *f.* ex *num.* 1. & CH. ad HA. vt *g*. ad *f* vel vt *m*. ad K. ex *hyp* Ergo FG. ad GA. erit vt antecedens ad summam consequentium, hoc est vt *m*. ad *f*+K. (39. M. 2.)

5. *AS. ad SD. est vt f. ad g.* Quia in △ACD. est AH. ad HG vt *f.* ad *g*. & DZ. ad ZC. vt *f.* ad *f.* ex *hyp.* Ergo AS. ad SD. erit vt consequentes: vt *f.* ad *g*.

6. *HX. ad XD. est vt f ad f+g.* Quia in △ACD. est CZ ad ZD. vt *f* ad *f* ex *hyp.* & AS. ad SD. vt *f.* ad *g*. ex *num.* 5. Ergo HX. ad XD erit vt antecedens ad consequentium summam, vel vt *f* ad *f+g*. (39. M. 2.)

7. *ZA. ad XA. est vt g. ad 2f.* Quia in △ACD. est CH. ad HA. vt *g*. ad *f.* ex *hyp.* & DS. ad SA. vt *g*. ad

ad f ex *num.* 5. Ergo ZX. ad XA. erit vt g. ad $f+f$. vel ad $2f$. vt ant. ad conseq. summam (39. M. 2.)

8. *SX. ad XC. est vt f. ad g+f.* Quia in △ ACD. est DZ. ad ZC. vt f. ad f. ex *hyp.* & AH. ad HC. vt f. ad g. ex *hyp.* Ergo SX ad XC. erit vt antecedens ad consequentium summam vt f. ad $g+f$.

9. *BL. ad LD. est vt* K. *ad f.* Quia in △BCD. est BF. ad FC. vt K. ad f. & DZ. ad ZC. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo BL. ad LD. erit vt K. ad f. vt consequentes.

10. *LQ. ad QC. est vt K. ad f+K.* Quia in △BCD. est BF. ad FC. vt *K.* ad f. & DZ. ad Z C. vt *K.* ad *K.* ex *hyp.* Ergo LQ. ad QC. erit vt ant. ad summam conseq. vt *K.* ad $f+K$.

11. *ZQ. ad QB. est vt f. ad* K+K. Quia in △ BCD. est CF. ad FB. vt f. ad K. ex *hyp.* & D L. ad LB. vt f. ad K. ex *num.* 9. Ergo ZQ. ad QB. erit vt f. ad K+K.

12. *FQ. ad QD. est vt* K. *ad f+K.* Quia in △BDC. est BL. ad LD. vt K. ad f. ex *num.* 9. & CZ. ad ZD. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo FQ. ad QD. vt K. ad $f+K$.

ad $f+m$:

13. *ER. ad RD. est vt* K. *ad f+* m: Quia in △ ABD. est BL. ad LD. vt K. ad f. ex *num.* 9. & AS. ad SD. vt f. ad g. vel vt K. ad *m.* ex *num.* 5. Ergo ER. ad RD. vt K. ad $f+m$.

14. *SR.*

14. *SR. ad RB. est vt f. ad m+K.* Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f.* ad K. ex *num.* 9. & AE. ad EB. vt *f.* ad *m.* ex *num.* 1. Ergo SR. ad RB. erit vt *f.* ad *m*+K.

15. *LR. ad RA. est vt m. ad* K+*f.* Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *m.* ad *f.* ex *num.* 1. & DS. ad SA. & *g.* ad *f* vel vt *m.* ad K. ex *num.* 5. Ergo LR. ad RA. erit vt *m.* ad *f*+K.

16. *GO. ad OD. est vt* K. *ad f*+K+*m.* Quia in △ ECD. est ER. ad RD. vt K. ad *f*+*m.* ex *num.* 13 & CZ. ad ZD. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo GO. ad OD. est vt K. ad *f*+K+*m.*

17. *RO. ad OC. est vt* K. *ad f*+K+*m.* Quia in △ ECD. est EG. ad GC. vt K. ad *f*+*m.* ex *num.* 2. & DZ. ad ZC. vt K. ad K. ex *hyp.* Ergo RO. ad OC. erit vt K. ad *f*+K+*m.*

18. *ZO. ad OE. est vt m+f. ad* K+K. Quia in △ ECD. est CG. ad GE. vt *m*+*f* ad K. ex *num.* 2. & DR. ad RE. vt *m*+*f.* ad K. ex *num.* 13. Ergo ZO. ad OE. vt *m*+*f.* ad K+*K.*

19. *QO. ad OA. est vt m. ad* 2 K+*f.* Quia in △ CAL. est CH. ad HA. vt *g.* ad *f.* vel vt *m* ad K. ex *hyp.* & LR. ad RA. vt *m.* ad K+*f.* ex *num.* 15. Ergo QO. ad OA. erit vt *m.* ad 2 K+*f.*

20. *HO. ad OL. est vt f*+K. *ad m*+K Quia in △ CAL. est AR. ad RL. vt K+*f.* ad *m.* ex *num.* 15. & CQ. ad QL. vt K+*f.* ad K. ex *num.* 10. Er-

go HO. ad OL. erit vt K+*f*. ad *m*+K.

21. *XO. ad OB. est vt f ad* 2K+*m*. Quia in △SBC. est SR ad RB. vt *f* ad K+*m* ex *num*. 14. & CF. ad FB. vt *f*. ad K. ex *hyp*. Ergo erit XO. ad OB. vt *f*. ad 2K+*m*.

22. *FO. ad OS. est vt m*+K. *ad f*+K. Quia in △SBC. est BR ad RS. vt *m*+*K*. ad *f* ex *num*. 14. & CX. ad XS. vt *g*+*f*. ad *f* vel vt *m*+*K*. ad *K*. ex *num*. 8. Ergo FO. ad OS. erit vt *m*+*K*. ad *f*+*K*. Omnes ergo rationes determinatæ sunt. Quod, &c.

SCHOLIVM.

De duabus Medijs proportionalibus.

SI tentatis varijs combinationibus sub alia, & alia hypothesi inciderit Geometra in aliquam rationem intra cognitos terminos, scilicèt inter primam, & quartam; vel earũ summam, duplum, triplum, &c. contentam, duæ mediæ facilè invenirentur, quod ingeniosus Lector leui saltèm meditatione clarè percipiet. Sed tamen vix crediderim duas medias inveniendas, nisi aliquæ nouæ proprietates quatuor continuarum, prius inveniãtur: Etenim extremæ sufficientem materiam ad Mediarum determinationem meo quidem iudicio non subministrant. Quamobrem Geomemetrarum labor in his continuarum proprietatibus inquirendis minimè pœnitēdus, imò debito cum honore ab omnibus excipiendus foret. Hic maximè notatum velim, aliud esse, dari duas medias, aliud illarum determinationem datis extremis esse posibilem: etenim in data qualibet ratione quatuor continuæ facillimè inveniuntur, sed tamen si ex inventis cōtinuis dētur solùm extremæ, inventio mediarum imposibilis erit dùm sufficiens materia ad earum inventionem non suppetat: an verò duæ extremæ sufficientes, vel insufficientes sint, nemo hactenus demonstrauit. Non me latet non neminem gloriabūdum dictitare, se duas medias immediatè, etiam sine lemmate summa cum facilitate invenisse: hominis tamen à geometræ cogniti trasonica verba non curo, de parallogismo certisimus. Moneo tādem has nostras propositiones quamplurimis quæstionibus resolvendis vtiles esse, vt ex problematum solutione manifestum fiet *cap.* 4.

PROPOSITIO LXI.

SI fuerint ſex continuæ, & latera circa angulum ſolidum diuidantur vt prima ad ſecundam, vt prima ad quintam, & vt prima ad ſextam, ſequentes ſegmentorum rationes in ipſis ſex continuis determinatæ erunt.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SEx continuæ ſint *f. g. K. m. l. p.* & latera circa angulum ſolidum B. pyramidis Tetraedræ ABCD. diuidantur DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* & AE. ad EB. vt *f* ad *p.* Ductis prætereà rectis CE. AF. DG. &c. prout in figura 18. Dico ſequẽtes ſegmentorũ rationes determinatas eſſe in ipſis continuis.

DEMONSTRATIO.

1. *AH. ad HC. eſt vt l. ad p. vel vt f. ad g.* Quia in △ ABC eſt AE. ad EB. vt *f* ad *p.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* ex *hyp.* Ergo AH. ad HC. vt *l.* ad *p.* vt conſequentes.

2. *HG ad GB. eſt vt f. ad l+p.* Quia in △ ABC. eſt AE. ad EB. vt *f.* ad *p.* & CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* Ergo HG. ad GB. vt *f.* ad *l+p.* vt ant. ad ſummam, &c.

3. *EG. ad GC. eſt vt l. ad p+f.* Quia in △ ABC. eſt BF. ad FC. vt *l.* ad *f.* ex *hyp.* & AH. ad HC.

HC. vt *l*. ad *p*. ex *num*. 1. Ergo EG. ad GC. erit vt *l*. ad *p*+*f*.

4. *FG. ad GA. est vt p. ad l*+*f*. Quia in △ ABC. est CH. ad HA. vt *p*. ad *l*. ex *num*. 1. & BE. ad EA. vt *p*. ad *f*. ex *hyp*. Ergo FG. ad GA. est vt *p*. ad *l*+*f*.

5. *AS. ad SD. est vt g. ad p. vel f. ad l*. Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. ex *hyp*. & AE. ad EB. vt *f*. ad *p*. Ergo AS. ad SD. erit vt *g*. ad *p*. vel vt *f*. ad *l*.

6. *SR. ad RB est vt f. ad g*+*p*. Quia in △ ABD. est DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. & AE. ad EB. vt *f*. ad *p*. ex *hypoth*. Ergo SR. ad RB. erit vt *f*. ad *g* +*p*.

7. *ER. ad RD. est vt g. ad p*+*f*. Quia in △ ABD. est BL. ad LD. vt *g*. ad *f*. & AS. ad SD. vt *g*. ad *p*. ex *num*. 5. Ergo ER. ad RD. erit vt *g*. ad *p*. +*f*.

8. *LR. ad RA. est vt p. ad g*+*f*. Quia in △ ABD. est BE. ad EA. vt *p*. ad *f*. & DS. ad SA. vt *p*. ad *g*. ex *num*. 5. Ergo LR. ad RA. erit vt *p*. ad *g* +*f*.

9. *CZ. ad ZD. est vt g. ad l*. Quia in △ CBD. est DL. ad LB. vt *f*. ad *g*. & CF. ad FB. vt *f*. ad *l*. ex *hypoth*. Ergo CZ. ad ZD. erit vt *g* ad *l*.

10. *FQ. ad QD. est vt g. ad l*+*f*. Quia in △ CBD. est CZ. ad ZD. vt *g*. ad *l*. ex *num*. 9. & BL. ad

ad LD. vt g. ad f. ex *hyp*. Ergo FQ. ad QD. erit vt g ad $l+f$.

11. *ZQ. ad QB. est vt f. ad l+g.* Quia in △ DBC. est DL ad LB. vt f. ad g. ex *hyp*. & CF. ad FB. vt f. ad l. ex *hyp*. Ergo erit ZQ. ad QB. vt f. ad $g+l$.

12. *LQ. ad QC. est vt l. ad g+f.* Quia in △ DCB. est BF. ad FC. vt l ad f. ex *hyp*. & DZ. ad ZC. vt l. ad g ex *num.* 9. Ergo LQ. ad QC. erit vt l. ad $g+f$.

13. *HX. ad XD. est vt g. ad p+l.* Quia in △ ACD. est AS. ad SD vt g. ad p. ex *num.* 5. & CZ. ad ZD. vt g. ad l. ex *num.* 9. Ergo HX. ad XD. erit vt g. ad $p+l$.

14. *ZX. ad XA. est vt p. ad g+l.* Quia in △ DAC. est CH. ad HA. vt p. ad l. ex *num.* 1. & DS. ad SA. vt p ad g. ex *num.* 5. Ergo ZX. ad XA. erit vt p. ad $g+l$.

15. *SX. ad XC. est vt l. ad p+g.* Quia in △ ACD. est AH. ad HC. vt l. ad p. ex *num.* 1. & DZ. ad ZC. vt l. ad g. ex *num.* 9. Ergo SX ad XC. erit vt l. ad $p+g$.

16. *GO. ad OD. est vt g. ad p+l+f.* Quia in △ EDC. est CZ ad ZD. vt g. ad l. ex *num.* 9. & ER. ad RD. vt g ad $p+f$. ex *num.* 7. Ergo GO ad OD. erit vt g. ad $l+p+f$.

17. *QO ad OA. est vt p. ad g+l+f.* Quia

in

in $\triangle$ CAL. est CH. ad HA. vt p. ad l. ex *num*. 1. & LR. ad RA. vt p. ad $g+f$. ex *num*. 8. Ergo QO. ad OA. est vt p. ad $g+l+f$.

18. *RO. ad OC. est vt* l. *ad* $g+p+f$. Quia in $\triangle$ ECD. est DZ. ad ZC. vt l. ad g. ex *num*. 9. & EG. ad GC. vt l. ad $p+f$. ex *num*. 3. Ergo RO. ad OC. erit vt l. ad $g+p+f$.

19. *XO. ad OB. est vt* f. *ad* $g+p+l$. Quia in $\triangle$ SBC. est CF. ad FB. vt f. ad l. ex *hyp*. & SR. ad RB. vt f. ad $p+g$. ex *num*. 6 Ergo XO. ad OB. erit vt f. ad $g+p+l$.

20. *EO. ad OZ. est vt* $g+l$. *ad* $p+f$. Quia in $\triangle$ AZB. est AX. ad XZ. vt $g+l$. ad p. ex *num*. 14. & BQ. ad QZ. vt $g+l$. ad f. ex 11. Ergo EO. ad OZ. est vt $g+l$. ad $p+f$.

21. *SO. ad OF. est vt* $l+f$. *ad* $p+g$. Quia in $\triangle$ AFD. est AG. ad GF. vt $l+f$. ad p. ex *num*. 4. & DQ. ad QE. vt $l+f$. ad g. ex *num*. 10: Ergo SO. ad OF. vt $l+f$. ad $p+g$.

22. *LO. ad OH. est vt* $p+l$. *ad* $g+f$. Quia in $\triangle$ DHB. est DX. ad XH. vt $p+l$. ad g. ex *num*. 13. & BG. ad GH. vt $l+p$. ad f. ex *num*. 2. Ergo LO. ad OH. vt $p+l$. ad $g+f$.

SCHOLIVM.

Variata hypothesi plures alias rationes inuenire licebit, quod etiam præstare poterit Geometra in quinque, septem, vel pluribus con-

continuis: & in qualibet hypothesi, & continuarum numero quouis, datis tribus rationibus, quæ ad idem triangulum non pertineant, examinandæ venient 22 rationes in quacumque Pyramide Tetraedra, ex quibus posteà nō pauca, neque vulgaria problemata resolvi poterunt, quorum aliquod specimen inveniet Geometra, & alia quamplurima scientèr ommissa proprio Marte resolvet.

PROPOSITIO LXII.

SI in Pyramide Tetraedra quodlibet punctū sumatur, simile punctum in quavis eius plana repræsentatione datur, in quo rectæ ab angulis in easdem rationes secantur.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN Pyramide Tetraedra ABCD. sumatur quodlibet punctum O. & eadem Pyramis repræsentetur in plano vtcumque. Dico in plana repræsentatione dari, & inveniri posse simile punctum O. in quo rectæ ex angulis Pyramidis repræsentatæ, vel in plano descriptæ se intersecant in easdem rationes, in quas secantur rectæ ex angulis Pyramidis veræ, & solidæ.

DEMONSTRATIO.

IN Pyramide vera quodlibet punctum O. est *centrum ff. dd.* ad angulos solidos A.B.C.D.

(55.*p*) Ergo si ducatur ex D. per O. recta DOG. secans planum basis in G. erit G. *centrum ff. dd.* ad angulos A.B.C. quia recta per vnum punctum, & *centrum* commune transit per aliorũ *centrum* (61.M.1.) sed in triangulo ABC. planæ repræsentationis simile punctum G inveniri potest (40.M.2.) Ergo si invento puncto G. ducatur recta DG & diuidatur in O. prout recta DOG. in Pyramide rectæ ex angulis plani secabuntur in easdem rationes, ac in solido, quia singula triangula erunt similitèr secta, vt constat ex 39. & 40. M. 2. & etiam ex præcedentibus, &c. Quod erat, &c.

SCHOLIUM.

Hæc propositio non leuem præ se fert vtilitatem, cũ ex ipsa solo rectarum ductu possint in plana superficie inveniri rationes omnes, quæ in solido Tetraedro hactenus demonstratæ sunt, quarum inventio in ipsa Pyramide impenetrabili omninò practicè impossibilis esset.

PROPOSITIO LXIII.

SI Pyramis basim habeat quadrilateram diametro bifariam diuisam; & quodlibet planũ per basis diametrum transeat secans opposita latera, recta, quæ laterum sectiones iungit, transit per diametrorum intersectionem.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Pyramis ABCDE. & basis ABCD. bifariam diuisa sit diametro AC. deindè per diagoniũ AC. transeat quodlibet planum AFCG secans latera opposita ED. EB. in punctis F. & G. Dico rectam FG. transire per pũctum H. in quo diagonia, vel diametri mutuo se intersecant.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diameter BD. & erunt DB. & FG. in eodem plano DBE. (1. l. 11.) Ergo cum recta FG. vnicum punctum habeat in recta DB. quæ est communis sectio planorum ABCD. DBE. vnicum etiam punctum habebit in plano ABCD. sed eadem recta FG. habet vnicum punctum in recta AC. quæ est communis sectio planorum ABCD. AGCF. Ergo FG secat DB. & AC. in eodem puncto plani ABCD. sed solum punctum H. quod est communis sectio diametrorum, est pũctum commune vtrique diametro: Ergo FG. secat AC. & DB. in commu-

mu-

muni diametrorum sectione H. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIV.

SI recta secet duo latera opposita anguli solidi quatuor planis comprehensi, ex omnibus planis per ipsam, quod est bifariam diuisum, si habeat duo latera opposita æqualia, est parallelogrammũ, & habet in ea centrum ff. ss. & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt angulus solidus quatuor planis comprehensus EABCD. & recta AC. secet duo latera opposita AE. EC. per quam transeat planum ABCD. bifariam diuisum, vt △ ABC. sit æquale △ ADC. & AB. DC. sint æquales. Dico planum ABCD. esse parallelogrammum, & habere *centrum ff. ss.* in recta AC. & *èconuerso*.

DEMONSTRATIO.

DVcatur recta BD. & sint DL BO. perpendiculares ipsi AC. Cum △ ADC. & △ ABC. æqualia sint ex hypothesi, & habeat communem basim AC. habebunt altitudines æquales DL. BO. (8. *l.* 1.) Ergo △ DHL. & △ BHO cùm habeant angulos rectos æquales in L. & O. & verticales DHL BHO. æquales (1. *l.* 1.) & latera DL. BO. æqualia, reliqua omnia erũt æqualia (4. *l.* 1.) nempè DH. & HB. æquales erunt:

Ergo △ DHC. AHB. cùm habeant latera DH. HB. æqualia: tum DC. & AB. ex *hyp.* & angulos DHC. AHB. æquales quia verticales (1. *l.* 1) & HAB. DCH. eiuſdem ſpeciei, nempè acutos (3. *l.* 1.) reliqua omnia erunt æqualia (4. *l.* 1.) nempè AH. & HC. Ergo cùm latera DH. HA. æqualia ſint ipſis BH. HC. & comprehendant æquales angulos verticales DHA. BHC. erunt latera DA. BC. æqualia (4. *l.* 1.) Ergo quadrilaterum ABCD. cum habeat bina oppoſita latera æqualia DA. BC. tum DC. AB. erit parallelogrammum (7. *l.* 1.) & *centrum ff. ſſ.* erit in H. dimidio diametri AC (55. M. 2.) &c.

Econuersò. Si ABCD. parallelogrammum ſit, erit AC. diameter, & ipſum bifariam diuidet (7. *l.* 1.) Quod, &c.

Si autem ſolum detur *centrum ff. ſſ.* in AC. erit DB. bifariam diuiſa (70. M. 2.) & infertur Quadrilaterum eſſe bifariam diuiſum (7. *l.* 1.) ſed non eſſe parallelogrammum; niſi etiam detur latera DC. AB. æqualia.

PRO-

PROPOSITIO LXV.

SI recta secat secat opposita latera anguli solidi quatuor planis comprehensi, ex omnibus planis per ipsam, quod est ab illa bifariã diuisum, vel habet in illa centrum ff. ff. secat Pyramidem omnium minimam.

EXPOSITIO. Fig. 19.

INtra angulum solidum EABCD. recta A C. secat opposita latera EA. EC. & planum AB CD. bifariam diuiditur recta A C. ita vt △ A BC. sit æquale △ADC. Dico Pyramidem AB CDE. omnium esse minimam, quæ planis per rectam AC. ductis secari possunt.

DEMONSTRATIO.

TRanseat per A C. quodlibet aliud planum AGCF. & ducatur recta FG. & BI. parallela ipsi DF. & iungantur AI. IC. Quoniam D H. & HB. æquales sunt (71. M. 2) & DF. BI. parallelæ, æquales etiam sunt FH HI. tum DF. BI (2. *l.* 6.) Ergo Pyramides ACDF. ACBI. cum habeãt æquales bases ACD. ACB. ex *hyp.* & æquales altitudines in F. & I. erunt æquales (5. *l.* 11.) sed Pyramis ACBG. maior est pyramide AC. BI. toto solido AIBCG. Ergo Pyramis ACBG. maior est pyramide ACDF. Ergo addito communi solido ABCFE. erit Pyramis A G C F E. ma-

maior Pyramide ABCDE. & hæc omnium minima. Quod erat, &c.

2. Si planum ABCD. habeat *centrum ſſ ſſ.* in recta AC. hæc diuidet quadrilaterum bifariam (70. M. 2.) Vndè cùm planum ABCD. ſit bifariam diuiſum recta AC. ſecabit illud Pyramidem omnium minimam, vt antea. Quod, &c.

PROPOSITIO LXVI.

SI Pyramis habeat baſim quadrilateram, & planum per verticem, & diametrum baſis ſecat Pyramidem bifariam, per quodlibet punctum illius plani intra, vel extra Pyramidem rectæ à reliquis angulis ductæ ſe in eadem ratione ſecant. Quod Pyramidi baſis parallellogrammæ neceſſariò conuenit.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Pyramis ABCDE. & planum ACE. bifariã ſecet baſim, vel Pyramidem, & in plano ACE. ſumatur quodlibet punctum Z. & ducantur ab angulis ſolidis B. D. rectæ per Z. donec planis oppoſitis occurrant. Dico rectas ab angulis ductas ſe in eadem ratione ſecare.

DEMONSTRATIO.

CVm recta AC. bifariam diuidat baſim ABCD. ex *hyp.* erit recta BD. bifariam diuiſa

(70.

(70. M. 2.) Ergo in Pyramide ABDE. cùm planum AHE. diuidat bifariã latus BD. per quodlibet punctum Z. in eo plano ſumptum rectæ ex angulis B. & D. ſecantur in eadem ratione (45 *p.*)

Eadem eſt demonſtratio ſi punctum Z. ſit in plano CHE. biſecante Pyramidem BCDE: Ergo cũ plana AHE. HCE. ſint idem planũ ACE. per quodlibet illius punctum Z. rectæ ex angulis B. & D. ſecãtur in eadem ratione. Quod, &c.

CONSECTARIVM.

IDem eſt in Pyramide baſis parallelogrammæ, quia bifariam diuiditur plano per verticem, & diametrum baſis (4. *l.* 11.)

PRO-

PROPOSITIO LXVII.

PYramidis cuiuslibet centrum ff. ſſ. eſt in recta à vertice ad centrum baſis in parte denominata à numero angulorum ipſius Pyramidis.

2. *Si baſis fuerit regularis, & latera æqualia recta per centrum eſt baſi perpendicularis, & èconuerſò.*

EXPOSITIO. Fig. 19.

SIt Pyramis ABCDE. & baſis *centrum ff. ſſ.* H. ſi ex vertice E. ducatur recta EH. Dico *centrum ff. ſſ.* Pyramidis eſſe in recta HE. ſcilicèt in quinta eius parte, quia Pyramis habet quinque angulos ſolidos, & ſic de reliquis, &c. Si autem baſis ABCD. regularis ſit, & latera EA. EB. EC. ED. æqualia, erit EH. baſi perpendicularis, & *èconuerſò*.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum H. ſupponatur *centrum ff. ſſ.* ad angulos baſis A. B. C. D. & ducta ſit ex *centro* H. recta HE. ad nouum punctum E. *centrum ff. ſſ.* ad omnia puncta A. B. C. D. E. erit in recta HE. (61. M. 1.) & ſi HE. diuidatur in quinque partes æquales, erit figura ſupra ER. minima quatuor figuris ſimilibus ſupra HR. (36. M. 1.) Ergo punctum R. quod eſt in quinta parte totius rectæ HE. erit *centrum ff. ſſ.* ad quin-

quinque angulos solidos A.B.C.D.E.(62.M.1.) &c.

2. Si verò basis sit regularis erit H. *centrum* circuli (109.M.2.) & HA.HB.HC.HD. æquales radij: & latera EA.EB.EC.ED. æqualia ex *hyp.* & EH. latus commune: Ergo sunt anguli AHE. BHE. CHE. &c. æquales (4.*l*.1.). Ergo EH. est perpendicularis (1.*l*.11.) & *è conuerso* prout in (4.*p*.)

PROPOSITIO LXVIII.

IN qualibet Pyramide si à centro cuiusuis triãguli ducatur recta in centrum reliquorum angulorum, omnes se in Pyramidis centro secabunt: in ratione 3 ad 2 si basis sit quadrilatera: ut 3 ad 3. si pentagona: ut 3 ad 4. si Hexagona, & ita infinite.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Pyramis ABCDE. & *centrũ* ss. Pyramidis sit O. Trianguli verò BCE. *centrum* sit H. & punctum K. *centrum* sit reliquorum angulorũ A. & D. Dico rectam HK. transire per *centrum* Pyramidis O. & esse KO. ad OH. vt 3 ad 2. Similitèr etiam si punctum R. *centrum* sit trianguli ADB. & L. *centrum* reliquorum angulorum C. & E. ducta RL. trãsibit per O. & LO. ad OR. erit vt 3 ad 2 & sic de reliquis. Antecedens ergo rationis semper est 3. & consequens reliquus angulorum numerus, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum H. *centrum* sit angulorum B. C. E. & punctum K. sit *centrum* ad reliquos angulos A. & D si ducatur recta HK. in illa erit *centrum* ad omnes angulos A. B. C. D. E. (63. M. 1.) Ergo cùm O. sit *centrum* ad omnes angulos ex hypothesi, transibit HK. per O. Ergo go 3 figuræ ex HO. minimæ erunt totidem figuris ex OK. quot ſunt reliqua puncta, quæ in hoc caſu ſunt 2. nempè A. & D. (64 M. 1.) Ergo HO. ad OK. erit vt 3 ad 2. vel ad reliquum numerum angulorum (37. M. 1.) Similitèr demonſtrabitur rectam LR. tranſire per *centrum* Pyramidis O. & eſſe LO. ad OR. vt 3 ad 2. &c. Ergo omnes prædictæ rectæ ſe in *centro* in eadem ratione ſecant.

Eadem paritèr eſt demonſtratio in omnibus alijs Pyramidibus quodcumque angulorum, &c. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIX.

IN qualibet Pyramide si sumatur quodlibet punctum recta per verticem, & centrum basis, erit centrum ff. dd. quarum totidem quot sunt anguli basis quadrata sint, & alia rectangulum ex superiori rectæ segmento, & triplo, quadruplo, vel quintuplo inferioris iuxta numerum angulorum basis.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt Pyramis basis quadrilateræ A B C D E. & pũctum G. *centrum* sit basis ad quod ex vertice E. ducatur recta E G. & in hac sumatur quodlibet punctum O. Dico punctum O. *centrum* esse quadratorum ad angulos A. B. C. D. & rectanguli EO. & 4 OG. quia sunt quatuor anguli basis. Vndè si basis trigona sit, pro altitudine rectanguli sumetur triplum segmenti OG. si verò quadrilatera, quadruplum; si pentagona quintuplum, & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

CVm enim punctum G. sit *centrum ff. ss.* ad angulos basis A.B.C.D. ex *hypoth.* & ducta sit GE. ad nouum punctum E. erit in recta GE. *centrum ff.* ad omnia puncta A.B.C.D.E. (61. M. 1.) Ergo cùm G. sit *centrum* quadratorum ad A.B.C.D. & quatuor quadrata supra O G. æquè

æquè alta, & minima sint rectāgulo supra EO. cuius altitudo sit 4OG. (21.M.1.) erit O. *centrum ff.* quarum quatuor similes sint, nempè Quadrata ad A.B.C.D. & vltima rectangulum ex EO & 4OG. (62.M.1.) Quod erat demonstrandum.

Eadem est demonstratio si anguli basis fuerint quinque, vel plures, & sumatur altitudo noui rectanguli quintuplum, vel sextuplum, &c. segmenti inferioris OG. Vndè si punctum assumptum O. fuerit ipsum *centrum* Pyramidis, erit nouum rectangulum etiam quadratū EO. cùm GO. sit pars OE. denominata à numero angulorum basis (67.*p.*) Ergo, &c.

PROPOSITIO LXX.

SI in Pyramide basis quadrilateræ recta à vertice per basis centrum ducatur, & sumatur in ea quodlibet punctum, rectæ omnes à dimidio laterum basis ductæ per illud se in eadem ratione secant; & quæ sectiones conterminas iungunt, parallelogrammum constituunt, cuius planum est basi parallelum, & secat latera proportionaliter.

EXPOSITIO. Fig. 20.

IN Pyramide ABCDE. recta EG. cadit in *centrum* basis G. si ergo latera basis sint bifariam diuisa in F.N.P.K. & per quodlibet punctum O. rectæ EG. ducantur KOH. NOI. &c. Dico esse KO. ad OH. vt NO. ad OI. &c. & puncta I. X. H. Z. efficere parallelogrammum basi parallelum, &c..

DEMONSTRATIO.

PVncta enim F. N. P. K. parallelogrammum constituunt, & KN. PF. se intersecant in *centro* basis G (73. & 82. M. 2.) Ergo in △KEN. cum EG. bisecet basim, secantur proportionalitèr KH. & NI. tum FX. & PZ. in △ PFE. (31. M. 2.) & KI. ad 2 IE. est vt GO. ad OE. tum PX. ad 2 XO. est vt GO. ad OE. & NH. ad 2 HE vt GO. ad OE. (33. M. 2.) Ergo omnes in eadem ratione secãtur.

Dein-

Deindè quia in $\triangle$FNE. eſt demonſtrata FZ. ad ZE. vt NH. ad HE. erit ZH parallela ipſi FN. (2. *l.* 6) & ſimilitèr XH. PN. tum IX. KP. tum IZ. KF. Ergo IZHX. parallelogrammum eſt ipſi KFNP. vel baſi ABCD. parallelum: Ergo ſi planum parallelogrammi IZHX. continuetur, cū ſit baſi parallelum ſecabit proportionalitèr latera (4. *l.* 11.) Quod, &c.

SCHOLIVM.

Hæc de Pyramidibus demonſtranda occurrère, nec me latet plurima ſuper eſſe, quibus elucidandis Geometræ nobiliores inſudarè poſsint. Illud præcipuè determinandum reſtat, quodnam planum, per datum punctum, vel rectam intra quemvis angulum ſolidum ſecet Pyramidem minimam, vt inde ſternivia poſsit ad ſectionem cuiuſvis Pyramidis in data ratione per datam rectam, vel punctum, intra, vel extra ipſam. Sed hactenùs omnia demonſtrare nemini datum eſt.

CAP.

CAPVT II.

DE HEXAEDRO ET PRISMATE.

SEcundùm hoc caput de Hexaedris Parallelepipedis, & non parallelepipedis, & de Prismatibus agit, vel potiùs aliqua delibat, cùm plures grauissimæ difficultates adhuc exatlandæ restent. Non omnia Meditatus sum, neq; omnia, quæ occurrère ad Geometricam legem potui reducere. Nodi enim Gordio fortè implicatiores non tā scindendi, quàm soluendi sunt; Felix sanè, cui Præstantissimum illud diuinæ sapientiæ lumen, particulam hanc suæ mentis concesserit, quam nemo prudens sperare possit. Labore improbo scietiæ ditescunt, & excoluntur, dum singuli diui ias suas ex hoc magno latifundio in lucem edunt, licèt maiores posteris exhauriendas relinquant.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.

IN quolibet Parallelepipedo centrum ff. ſſ. eſt in dimidio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppoſiti, in quo omnes illæ rectæ ſe mutuo bifariam ſecant.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum A G. & planorum *centra* I. K. Z. X. &c. Dico *centrum ff. ſſ.* Parallelepipedi eſſe in dimidio rectæ ZX. vel IK. &c. & omnes in *centro* O. eſſe bifariam diuiſas.

DEMONSTRATIO.

ESt enim K. *centrum* ad angulos D. C. G. H. & I. *centrum* ad A. B. F. E. ex *hyp.* Ergo in recta IK. erit *centrum ff. ſſ.* ad omnes angulos A. B. C. D. E. F. G. H. (63. M. 1.) Ergo ſi KI. bifariam diuidatur, erunt quatuor figuræ ſimiles ſupra O I. minimæ 4 *ff. ſſ.* OK (37. M. 1.) Ergo erit O. *centrum ff. ſſ.* ad omnia puncta (64. M. 1.) ſed hoc etiam demonſtratur de recta ZX. & de recta coniungente *centra* planorum ED. FC. Ergo omnes in *centro ff. ſſ.* O. bifariam ſe interſecant. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXII.

IN quolibet Parallelepipedo centrum ff. ſſ. eſt in medio communis ſectionis planorum tranſeuntium per oppoſitos angulos.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN eodem Parallelepipedo AG. plana ADGF. EBCH tranſeat per oppoſitos angulos, quorum ſectio communis ſit recta IK. & eius dimidium O. Dico punctum O. eſſe *centrum ff. ſſ.*

DEMONSTRATIO.

COmmunis ſectio planorum EBCH. HDCG. eſt recta HC. & communis ſectio planorum ADGF. DCGH. eſt recta DG. Ergo cũ rectæ HC. DG. ſint diametri parallelogrammi DCGH. erit K. *centrum* illius, & ſimiliter I. erit *centrum* parallelogrammi ABFE (55. M. 2.) Ergo recta IK. quæ eſt communis ſectio planorũ ADGF. EBCH. coniungit *centra* duplicis plani oppoſiti: Ergo in dimidio rectæ IK. erit *centrum ff. ſſ.* Parallelepipedi (71. *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

IN quouis Parallelepipedo centrum ff.ſſ. eſt in dimidio cuiuslibet diametri, & hæ omnes cum rectis coniungentibus centra duplicis plani oppoſiti ſe mutuo bifariam ſecant in centro ff.ſſ.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & diameter HB. diuiſa bifariam in O. Dico punctum O. eſſe *centr. ff.ſſ.* & omnes diametros cum dictis rectis ſe in eo bifariam mutuo ſecare.

DEMONSTRATIO.

DVcantur EB. HC. & erit EBCH. parallelogrammum. Si ergo EB. HC. bifariam diuidantur in K. & I. erunt I, & K. *centra* parallelogrammorum EABF. DCGH. (55. M. 2.) Ergo cum recta IK. bifariā ſecet oppoſita latera parallelogrammi EBCH in eius dimidio O. eſt *centrum* illius, & in dimidio diametri HB (55. M. 2.) ſed cum IK. coniungat *centra* oppoſita in eius dimidio eſt *centrum* Parallelepipedi (71. *p.*) Ergo etiam in dimidio HB. &c.

PROPOSITIO LXXIV.

QVælibet recta vtcumque transiens per cētrum parallelepipedi est in eo bifariam diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & ipsius *centrum ffff.* O. per quod transeat quæuis recta ZX. quacumque inclinatione, & secans vbicumque quælibet duo plana opposita. Dico ZX. esse in O. bifariam diuisam.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diameter HB. quæ cum transeat per O. (73.*p.*) secabit ZX. in O. & erūt ZX. HB. in eodem plano (1.*l.*11.) Ergo cum planū HZOXB. secet plana parallela EFGH. ABCD. sectiones ZH. & BX. erunt inter se parallelæ (3.*l.*11.) Ergo cum triangula ZOH. XOB. sint in eodem plano, & habeant bases parallelas, & communia latera, erunt hæc proportionalia (2.*l.*6.) Ergo vt HO. est æqualis OB (73.*p.*) ita ZO. est æqualis OX. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXV.

IN Parallelepipedo si recta transiens per centrum ff.ſſ. secat vnum latus, & oppositum etiā subcontrariè secat in easdem æquales partes: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 22.

IN Parallelepipedo AG. est *centr. ff.ſſ.* O. & recta IO. secat latus EH. Dico etiam secare latus BC. & esse MC. æqualem EI. & *contra* si EI. CM. æquales sint, transire IM. per *centrum*.

DEMONSTRATIO.

DVcatur enim diameter H B. quæ transibit per *centrum* O. (73. *p.*) & ibi secabit rectam IOM Ergo erunt in eodem plano (1. *l.* 11.) Ergo quia planum IHOBM. secat plana parallela EG. AC. erunt sectiones HI. BM. parallelæ (3 *l.* 11.) parallelæ etiam sunt HI. BC. Ergo pūctum M. est in BC. Ergo vt HO. est æqualis OB. (73. *p.*) ita HI. *æq.* BM. (2. *l.* 6.)

Econuersò. Si recta IO. transit per M. recta IM. transibit per O. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

QVodlibet planum transiens per centrum Parallelepipedi, secat latera opposita, & plana subcontrariè in partes æquales, & econuersò.

EXPOSITIO. Fig. 22.

IN Parallelepipedo A G. sit *centrum* O. per quod transeat planum IKLMNP. Dico omnia segmenta opposita laterum, & planorum subcontrariè esse æqualia; si verò duo segmenta sint æqualia, & reliqua erunt æqualia, & planum transibit per *centrum*.

DEMONSTRATIO.

DVcatur recta KON. & quia planum transit per *centrum*, erit recta KON. in illo plano: & NB. *æq*. HK (75. *p*) Similitèr HI. *æq*. BM. Ergo & totũ △ IHK. *æq*. △ MBN. (4. *l*. 1.) similitèr IEP. MCL. &c.

Econtrà. Si HK & BN. sint æqualia segmẽta, erit recta KN. per *centrum* (75. *p*.) Ergo planum per KN transibit per *centrum*, & reliqua omnia segmenta subcontrariè æqualia erunt. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

QVodlibet planum per centrum parallelepipedi, habet commune centrum cum illo, & quæuis recta plani per centrum, planum ipsum bifariam diuidit.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Parallelepipedum A G. cuius *centrum* O. per quod transeat planum IKLMNP. Dico punctũ O. esse plani *centrũ ff. ff.* & si quæuis recta Plani RS. transeat per O. bisecante planum.

DEMONSTRATIO.

REcta IM. KN. PL. transeunt per O (76. & 75. *p.*) & sunt in O. bisectæ (74. *p*) Ergo O. est *centrum* ad I.M tũ ad K.N. tũ ad L.P. (35. *M.* 1) Ergo & ad omnia simul I. K. L. M N. P. Deindè æquales sunt IK. NM. tum IN. KM. (76. *p.*) Ergo IKMN. est parallelogrammum (7. *l.* 1.) Ergo recta ROS. ipsum bifariam secat (7. *l.* 1.) Ergo cum △IPN. æquale sit △MLK (76. *p.*) erit segmentum SNPIR. æquale ipsi R K L M S. & planum bifariam sectum recta SR. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

Omnia plana per centrum ff. ſſ parallelepipedi ſeipſa, & Parallelepipedum biſariam diuidunt.

EXPOSITIO. Fig. 22.

Sit Parallelepipedum A G. cuius *centrum* O. per quod tranſeat planũ IKLMNP. & quodlibet aliud. Dico Plana ſe mutuo biſariam diuidere: & quodlibet biſecare ipſum parallelepipedum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vtrumque planum tranſit per *cẽtrum* O. ex *hyp.* quæuis cõmunis ſectio RS. tranſibit per *centrum*: ſed quæuis recta plani per *centrum*, biſecat planum (77. *p.*) Ergo, &c.

Deindè cũ omnia plana Pyramidis IHKO. æqualia, & ſimilia ſint planis Pyramidis MB NO (76. *p.*) ſunt Pyramides æquales in oppoſitis plani partibus. Similitèr Pyramides KG LO. NAPO. & ſic de reliquis. Ergo ſumma Pyramidum ex vna parte plani æqualis erit ſũmæ ex altera parte: & totum parallelepipedũ biſectum. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXIX.

SI planum diuidat Parallelepipedum bifariam, etiam per centrum ipsum secabit.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Parallelepipedum AG. bifariam sectum plano transeunte per IK. & NM. Dico transire hoc planum per *centrum* ff ss O.

DEMONSTRATIO.

TRanseat enim per IK. & *centrum* ff. ss. O. planum aliquod, & bifariam diuidet parallepipedum (78. *p.*) si hoc planum transiens per *centrum* faciat sectionem NM. erit ipsum planum IKNM. Ergo iam hoc planum transibit per *centrum.* Si verò planum per *centrum* non faciat sectionem NM. faciat *qp.* parallelam IK. & NM. (3. *l.* 11.) Ergo cum solidum IKNMB. sit dimidium totius, ex *hyp.* æquale erit dimidio IK*qp*B. quod dimidium est ex 78. *p.* Ergo pars toti erit æqualis, quod est impossibile. Ergo, &c.

PROPOSITIO LXXX.

IN quouis Parallelepipedo rectangulo omnes diametri sunt æquales, & omnes anguli solidi sunt in eadem superficie sphærica.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt AG. Parallelepipedum rectangulum, & eius basis AC. Dico omnes diametros BH. CE. DF. AG. esse æquales, & omnes angulos solidos A. B C. D. E. F. G. H. esse in eadem superficie sphærica ex *centro* ff. ff. descripta.

DEMONSTRATIO.

QVoniam diameter basis BD. æquè potest ac BC. CD (4. *l.* 2.) & diameter AC. æquè potest ac AB. BC. vel BC. & CD (7. *l.* 1.) Ergo AC. & BD. sunt æquales. Deinde diameter BH. æquè potest ac BD. DH. & AG. æquè ac AC. CG. (4. *l.* 2.) Ergo cum AC. CG. sint æquales BD. DH. erunt BH. AG. æquales: & quia se in O. bifariam secant (73. *p.*) omnes anguli A. B. G. H. &c. æqualiter distabunt à *centro* O. & & erunt in eadem superficie sphærica. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI.

IN Parallelepipedo rectangulo minima figurarum ff. summa est dupla figuræ similis ex diametro.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt AG. Parallelepipedum rectanglum, eiusque *centrum ff. ff.* O. & diameter BH. Dico minimam summam ff. ff. ex O. ad angulos A. B. C. D. E. F. G. H. esse duplam similis figuræ ex B. H.

DEMONSTRATIO.

CVm omnes diametri æquales sint (80. *p*) & omnes diuidantur bifariam in *cētro ff. ff.* O. (73. *p.*) omnes semidiametri OA. OB. &c. æquales erunt: Ergo cum anguli solidi sint octo, erit minima summa ff. ff. æqualis 8 ff. ff. ex OB. sed cum quadratum BH. sit æquale quatuor quadratis OB. (3. *l.* 2.) & omnes figuræ similes sint vt quadrata, nempè in duplicata ratione laterum (4. *l.* 6.) etiam figura similis ex BH. æqualis erit 4 ff. ff. OB. Ergo minima summa ff. ff. ex *centro* O. dupla est similis figuræ ex diametro BH. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXXII.

IN Parallelepipedo rectangulo summa ff ſſ. ex quolibet angulo solido ad reliquos, æqualis est summæ ff ſſ. ex cunctis lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo rectangulo A G. si ex angulo H. ducantur rectæ in reliquos. Dico summam ff ſſ. æqualem esse summæ ff ſſ. cunctorum laterum.

DEMONSTRATIO.

DVcantur HF. HA. HB. HC. & summa quadratorũ ex H. erit □ H E + □ HF + □ HG + □ HC + □ HB + □ HA + □ HD. sed □ HF. æquatur □ HE + □ EF. & □ HA. æquatur □ HE + □ EA. tum □ H C. æquatur □ HG + □ GC & □ HB. æquatur □ HD + □ D B. vel □ HD + □ DC + □ CB. omnia propter angulũ rectum oppositum (4. *l.* 2.) Ergo quadrata ex angulo H. æquantur 4 □ HE + 4 □ HG + 4 □ HD. hoc est quadratis omnium laterum: sed omnes figuræ similes sunt vt quadrata, nempè in duplicata ratione laterum (4. *l.* 6.) Ergo ff ſſ. ex H. *æq.* ff ſſ. omnium laterum. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIII.

IN quolibet Parallelepipedo, etiam non rectãgulo, minima figurarum summa ex cẽtro ff.ff. est dimidium summæ ff.ff. ex cunctis lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt quodlibet Parallelepipedum obliquãgulum, vel rectangulum AG. & ipsius *centrum* ff.ff. sit O. Dico minimam summam ff.ff. ex *cẽtro* O, ad omnes angulos esse dimidium summæ ff.ff. ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

SInt puncta I. & K. *centra* duplicis plani oppositi, quæ coniungantur recta IK. & erit IK. bifariã diuisa in parallelepipedi *centro* ff.ff. O(71. *p.*) Deinde quoniam punctum I. est *centrum* ff.ff. ad angulos A. B. F. E. minima summa ff.ff. ex I. ad dictos angulos parallelogrammi est æqualis ff.ff. AE. & EF. laterum parallelagrammi (58. M. 2.) & similitèr minima summa ex K. ad angulos C. D. H. G. est æqualis ff.ff. DH. HG. (58. M. 2.) sed summa fff. ex O ad angulos A. B. F. E. æquatur minimæ ex *centro* I+4ff.ff. OI (60. M. 1.) vel + figura IK (31. 2.) Ergo ff.ff. ex O. æquãtur ff.ff. AE+EF+IK. Similiter ff.ff. ex O. ad angulos C. D. H. G. æquantur ff.ff. DH +HG+IK (60. M. 1.) Ergo minima summa

ff.ff.

ff. ff. ex *cētro* O. ad omnes angulos solidos A. B. C. D. E. F. G. H. æquatur *ff. ff.* AE+EF+DH+HG+2 *ff. ff.* IK. sed in parallelogrammo EC. æquales sunt BI. CK (55. *p.*) Ergo etiam IK. & BC. vel AD (7. *l.* 1.) Ergo minima summa *ff. ff.* ex O æquatur *ff. ff.* AE+EF+DH+HG+AD+BC. sed figuræ similes ex reliquis parallelepipedi lateribus, nempè AB+BF+DC+CG+FG+EH prædictis æquales sunt, quia latera opposita sunt in parallelogrammis æqualia (7. *l.* 1.) Ergo summa *ff. ff.* ex omnibus parallelepipedi lateribus collecta dupla est minimæ sūmæ *ff. ff.* ex *centro* O. parallelepipedi ad omnes angulos solidos collectæ. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIV.

IN omni Parallelepipedo summa ff.ss. ex quatuor diagonijs collecta æqualis est summæ ff.ss. ex omnibus lateribus, & dupla minimæ summæ ex centro.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. eiusque diagonia HB. EC. FD. GA. Dico summam *ff.ss.* ex ipsis collectam duplam esse minimæ summæ *ff.ss.* ex O. & æqualem summæ *ff.ss.* ex omnibus lateribus collectæ.

DEMONSTRATIO.

QVoniam omnia diagonia se bifariam intersecant in *centro* O (73. *p.*) est □ HB. quadruplum □ HO (3. *l.* 2.) vel duplum □ HO + □ OB. idemque de singulis diametris ostenditur. Ergo summa quadratorum ex diagonijs HB + EC + FD + AG. dupla est minimæ summæ quadratorum ex omnibus semidiagonijs OA. OB. &c. idemque est de omnibus *ff.ss.* (4. *l.* 6.) sed summa ex lateribus etiam est dupla minimæ (83. *p.*) Ergo summæ *ff.ss.* ex lateribus, & diagonijs æquales sunt. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXV.

IN quolibet Parallelepipedo minima summa ff.ss. est dupla summæ ff.ss ex lateribus eundem angulum solidum comprehendentibus collectæ.

EXPOSITIO. Fig.21.

SIt Parallelepipedum AG. & illius *centrum ff.ss*.O. Dico minimam summam ex O. ad omnes angulos solidos A.B.C.D.E.F.G.H.duplam esse summæ *ff.ss*. ex lateribus BA.BF. BC. angulum B.comprehendentibus.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Parallelepipedo quælibet bina plana opposita parallelogramma æqualia,& similia sunt (3.*l.* 11.) quaterna latera parallela æqualia erunt: nempè BC.AD.EH. FG. tum BF.AE.CG.DH.tum BA.CD.FE.GH Ergo figuræ ex omnibus lateribus quadruplæ erunt *ff.ss*.ex BA. BF.BC. sed eadẽ summa *ff.ss*. ex omnibus lateribus est dupla minimæ (83. *p.*) Ergo minima summa dupla est summæ *ff.ss*. ex BA.BF.BC. Quod,&c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.

IN quolibet Parallelepipedo summa ff. ſſ. ex omnibus planorum diagonijs dupla eſt summæ ff. ſſ. ex omnibus lateribus, & quadrupla minimæ, & octupla ſummæ ff. ſſ. ex tribus lateribus eiuſdem anguli ſolidi.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo AG. ſint planorum diametri EB. AF. &c. Dico ſummam ff ſſ. ex ipſis duplam eſſe ſummæ ff ſſ. ex omnibus lateribus, &c.

DEMONSTRATIO.

IN Parallelogrammo EB. diametrorum ff. ſſ. EB. AF. æquantur ff ſſ. laterũ AB. BF. FE. EA. (57 M. 2.) Idemque eſt de omnibus planis: Ergo quia latus quodlibet commune eſt duobus planis, & bis ſumitur, erit ſumma ff ſſ. ex planorum diametris dupla ſummæ ff. ſſ. ex omnibus lateribus, ſed hæc eſt dupla minimæ (83. *p.*) Ergo illa eſt quadrupla minimæ: ſed etiam minima ſumma eſt dupla ſummæ ff. ſſ. ex lateribus eiuſdem anguli (85. *p.*) Ergo illa eſt huius octupla. Quod, &c.

S PRO-

PROPOSITIO LXXXVII.

IN quouis Parallelepipedo summa ff.ſſ. ex cẽtro cuiusliber plani in solidos angulos superat minimam 2 ff.ſſ. ex latere opposito, quod planum, & oppositum secat.

EXPOSITIO. Fig. 21.

IN Parallelepipedo AG. sit K. *centrum* plani HC. & O. *centr. ff.ſſ.* parallelepipedi. Dico ff.ſſ. ex K. ad angulos A.B.C.D.E F.G.H. superare minimam ex O. in 2 ff.ſſ. lateris FG. plano oppositi.

DEMONSTRATIO.

DVcta KO. trãsit per I. *centrum* plani EB (71. *p.*) Ergo minima summa ex O. æquatur summæ IA. IE. IF. IB. KC. KD. KG. KH + 4 OI + 4 OK (60. M. 1.) hoc est + 2 KI (3. *l.* 2.) sed figuræ ex K. ad angulos solidos D. C. G. H. æquãtur ff.ſſ. KC. KD. KG. KH. & figuræ ex K. ad angulos solidos A. B. F. E. æquatur ff.ſſ. IA. IE. IF. IB + 4 ff.ſſ. KI (60. M. 1.) Ergo ablatis æqualibus, vel communibus remanet excessus 2 ff.ſſ. KI. hoc est 2 ff.ſſ. FG (7. *l.* 1.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.

CVius libet Parallelapipedi minima summa ff.ss. æqualis est minimæ summæ ff.ss. cuiuslibet alterius Parallelepipedi æqualibus lateribus cuiuslibet in æqualibus angulis comprehensi.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt parallelepipedum rectangulum AG. lateribus BA. BF. BC. comprehensum, & quodlibet aliud æqualibus lateribus comprehendatur quibuslibet alijs angulis. Dico vtrumque Parallelepipedũ habere eandẽ, vel æqualem minimam summam *ff.ss.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam si tria latera circa vnum angulum in vtroque sunt æqualia summa omniũ laterum erit in vtroque æqualis: sed minima summa est dimidium summæ *ff.ss.* ex omnibus lateribus (83. *p.*) Ergo in vtroque erit eadem. Tum quia in vtroque minima summa est dupla *ff.ss.* ex lateribus eiusdem anguli (85. *p.*) Ergo eadem in vtroque. Quod, &c.

PROPOSITIO LXXXIX.

SI infinita Parallelepipeda habeant idem basium centrum, & idem latus eleuatum quacumque diuersa altitudine, & inclinatione, omnium Parallelepipedorum centra ff. ss. erunt in eadem sphærica superficie, cuius centrum erit cētrum basium, & radius dimidium lateris.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt Parallelepipedum AG. & *centrum* basis X. & alia infinita habeant idem *centrum* basiū X. & latera eleuata æqualia BF. vel XZ. Dico omnium *centra* esse in sphærica superficie, cuius *centrum* X. & radius XO.

DEMONSTRATIO.

QVoniam si in omnibus ducantur ex X. rectæ in Z. *centrum* plani oppositi in earū dimidio O. erit *centrum* cuiusvis parallelepipedi (71. *p.*) Ergo cū in omnibus XZ. sit æqualis BF (7. *l.* 1.) in omnibus punctum O. æqualitèr distabit ab X. & sic erit in sphærica superficie radio XO. descripta, & *centro* X. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XC.

QVodlibet Hexaedrum planis quadrilateris comprehensum, quantumvis irregulare, habet centrum ff.ss. in medio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum planis quadrilateris comprehensum ABCDEFGH. & *centrum* plani superioris sit Z. & plani inferioris X. quæ iungãtur recta ZX & hæc sit bifariam diuisa in O: Dico punctum O. esse *centrum ff.ss.* ad omnes angulos solidos prædicti Hexaedri.

DEMONSTRATIO.

CVm enim recta XZ. coniungat duo *centra ff.ss.* in ea erit *centrum ff.ss.* ad omnia puncta (63. M. 1.) Ergo cum X. sit *centrum* ad quatuor puncta, & Z *centrum* ad alia quatur, si ZX. bifariam diuidatur in O. quatur *ff.ss.* OZ. minimæ erunt quatuor *ff.ss* OX (19. M. 1.) Ergo cum totidem sint figuræ similes in vtraque parte quot sua puncta, erit O. *centrum ff.ss.* ad omnia simul (64. M. 1.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCI.

IN eodem Hexaedro rectæ coniungentes opposita planorum centra omnes se in centro ff. ss. Hexaedri bifariam intersecant: & quatuor centra planorum ad commune planum terminatorum in vno sunt plano parallelogrammo.

EXPOSITIO. Fig. 23.

IN Hexaedro AG. sint Z. Y. X. V. *b. g. centra* planorum, & solidi *centrum* O. Dico ZX. YV. *bg.* se bifariam intersecare in O. & YgV*b*. esse planum parallelogrammum, tum Z*b*X*g*. ZYXV.

DEMONSTRATIO.

C*Entrum* Hexaedri est in dimidio rectæ ZX. (90. *p.*) & in dimidio YV. & in dimidio *bg*. (90. *p.*) Ergo cum *centrum ff.* sit vnicum (60. M. 1.) omnes rectæ se in *centro* O. bifariam secant. Deinde cum rectæ *bg*. & YV. se bifariam diuidant in O. est *b*O. ad OY. vt *g*O. ad OV. (2. *l.* 5.) Ergo Y*b*. & V*g*. sunt parallelæ (2. *l.* 6) & similitèr Y*g*. & *b*V. Ergo Y*g*V*b*. planum parallelogrammum est. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XCII.

IN Hexaedro planis quadrilateris comprehēso, si planum in eadem ratione diuidat latera supra idem planum eleuata, in eadem ratione secat bisecantes reliqua latera, sectiones verò sunt bifariam diuisæ, & planum habet centrum ff.ss. in recta coniungente centra reliquorum planorum similitèr diuisa.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum irregulare AG. & planum QRST. secet in eadem ratione latera AQ. ad QE. vt BR. ad RF. & CS. ad SG. & DT. ad TH. & *q*I. PK. *d*L. NM. bisecent reliqua latera. Dico IY. ad Y*q*. esse vt AQ. ad QE. & similitèr K*g*. ad *g*P. & LV. ad V*d*. & M*b*. ad *b*N. Tum sectiones QR. RS. ST. TQ. esse bifariam diuisas in Y. *g*. V. *b*. & *centrum* plani QRST. esse in recta XZ. quæ coniungit *centra* planorum EG. AC. & XO. ad OZ. esse vt AQ. ad QE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in Trapezio EB. recta *q*I. bisecat opposita latera, & QR. secat reliqua in eadem ratione, ex *hyp.* se ipsas in easdem rationes oppositè secant (90. M. 2.) Ergo est IY. ad Y*q*. vt AQ ad QE. & QY. YR. æquales sunt. Similitèr demonstrabitur K*g*. ad *g*P. esse vt BR.

ad

ad RF. vel vt AQ. ad QE. & RS esse bifariam diuisam: & sic de reliquis (90. M. 2.)

Deindè si fiat ▭ *x*. simile IY*q*. vel LV*d*. & □ *y* erit Y. *centr ff. dd.* quarum A. & B. similes sint ▭ *x*. & E. F. ipsi □ *y*. & similitèr V. *centr. ff. dd.* ad C. D H. G (89. M. 2.) Ergo cum in vtraque parte puncta sint paria, & figuræ similes binæ, & binæ: *cent ff. dd.* ad A. B. C. D. & EF. GH. erit in dimidio rectæ YV (64. M. 1.) Similitèr idem *centrum* demonstrabitur in dimidio rectæ *bg*. Ergo Y V. & *bg* se mutuo bifariam diuidunt, & in earum sectione O. est *centr ff dd.* similium ▭ *x*. & □ *y*. sed quia X. est *cētr ff. ff.* ad A. B. C. D. ex *hyp.* erit *centrum* ▭ ▭ similiū ipsi ▭ *x*. & quia X. est *centr. ff. ff.* ad E. F. G. H. ex *hyp* erit □ □ similium □ *y*. Ergo in recta XZ. erit *centrum ff.* ad A. B. C. D. E. F. G. similium ▭ *x*. & □ *y*. (63. M. 1.) sed idem *centrum* demonstratum est in puncto O. nempè in concursu rectarum Y V. *bg*. Ergo tres illæ rectæ in eodem puncto O se intersecat: Ergo quatuor rectangula supra XO. similia ▭ *x*. vel ▭ IY*q*. minima erunt quatuor quadratis supra OZ. similia □ *y*. vel □ Y*q*. (64. M. 1) Ergo ▭ XO. simile ▭ *x* habebit æqualem altitudinem cum □ OZ. simile □ *y*. (10. M. 1.) Ergo rectangulum XO. simile ▭ *x*. erit ipsum ▭ XOZ. Ergo ▭ XOZ. simile est ▭ *x*. vel IY*q*.

IY*q*. Ergo XO ad OZ est vt IY. ad Y*q*. vel quia XZ. & I*q*. in similes figuras minimas diuisæ sunt punctis O. & Y. erit XO. ad OZ. vt IY. ad Y*q*. (30. M. 1.) vel vt AQ ad QE. (1. *l*. 5.) Constant ergo omnia in thesi proposita. Quod, &c.

PROPOSITIO XCIII.

IN prædicto Hexaedro quodlibet punctum rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi est cētrum ff. dd. quarum quatuor sint quadrata, & quatuor rectangula similia ei quod fit ex partibus rectæ.

2. *Si Planum aliquod tria latera, & rectā coniungentem centra duplicis plani oppositi in eadem ratione diuidat, & reliqua omnia diuidet prout in præcedenti, & plani centrum in ea recta erit.*

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & recta XZ. coniungat *centra* X. & Z. duplicis plani oppositi. Dico quodlibet punctum O. esse *centr. ff. dd.* ad omnes angulos solidos A. B. C. D. E. F. G. H. quarū sint □ E. F. G. H. & ▭ A. B. C. D. similia ▭ XOZ.

2. Si quodlibet planum RSTQ. in eadem ratione diuidat latera BF. CG. DH. & XZ. Dico reliqua omnia esse prout in præcedēti *Prop.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam Z. est *centr. ff ss.* ad □ □ E. F. G. H. & similitèr X. ad ▭ ▭ A. B. C. D. in recta XZ. erit *centrū ff. dd.* ad dicta □ □. & ▭ ▭ (63. M. 1) sed quodlibet punctum O. ita diuidit rectam XZ. vt rectangulum X O Z. æquè altum sit □ OZ. & 4 ▭ XOZ. æquè alta 4 □ OZ. Ergo erunt 4 ▭. minima 4 □ (10. M. 1.) Ergo punctum O. erit *centrum* ad ▭ ▭ A. B. C. D. similia ▭ XOZ. & ad □ □. E. F. G. H. similia □ OZ (64. M. 1.) &c.

Deindè si planū RST. diuidit latera BF. CG. DH. & rectam XZ. in eadem ratione. Quoniam in Trapezio recta PK. bisecat latera opposita, & RS. secat reliqua in eadem ratione, erunt ipsæ similitèr oppositè diuisæ (90. M. 2) nempè RS. bifariam, & K*g* ad *g*P. vt BR. ad RF. idemque demonstrabitur de ST. & L*d*. Cum ergo pūctum *g*. sit *centrum* ad □ F. G. & ▭ ▭ B. C. similia ipsi KGP. vel BRF. vel XOZ. (89. M. 2.) recta *g*O*b*. quæ est in plano RST. in quo sunt puncta *b*. O. ex *hyp.* transibit per *centrum* plani ADHE (63. M. 1.) & similitèr VOY. transibit per *centrum* plani ABFE. Ergo cum *centrum* plani ADHE. sit in recta bisecante NM (89. M. 2.) erit punctum *b*. in recta NM. & similitèr Y. in recta *q*I. Ergo quia *b*. est *centrum* ad □ E.

□ H.

□H. & ▭A. ▭D. similia ▭XOZ. cum N sit *centrum* quadratorum E. H. & M. sit *centrum* rectangulorum similiũ A. D (35. M. 1.) erit MN. diuisa in figuras minimas puncto *b*. sicut XZ. puncto O (64. M. 1.) Ergo M*b*. ad *b*N. est vt XO. ad OZ. (30. M. 1.) vel vt DT. ad TH. ex *hyp*. sed quia in trapezio AEDH. recta NM. bisecat latera, & TQ. secat in eadem ratione DH. & MN. secat etiam in eadem ratione AE (90. M. 2.) Ergo etiam AQ. ad QE. est vt DT. ad TH. vel vt BR. ad RF. Ergo etiam IY. ad Y*q*. vt BR. ad RF. Ergo omnia in eadem ratione secantur. Quod erat, &c.

An verò si quatuor latera in eadem ratione secentur, sint puncta Q. R. S. T. in eodem plano demonstrandum restat.

PROPOSITIO XCIV.

IN quolibet Hexaedro planis quadrilateris comprehenso minima summa ff ſſ. æqualis eſt minimæ ſummæ duplicis plani oppoſiti cum duabus ff ſſ ex recta coniungente vtriuſque plani cẽtra.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & planorum EG. AC. *centra* ſint Z. & X. Dico minimam ſummam ff ſſ. ex *cẽtro* O. ad omnes angulos ſolidos æqualem eſſe ſummis ff ſſ. ex *centris* ZX + 2 ff. ZX.

DEMONSTRATIO.

CVm Z. ſit *centrum* ff. ſſ. ad E. F. G. H. ex *hyp.* & X. ad A. B. C. D. figuræ ex O. ad E. F. G. H. *æq.* minimæ ſummæ ex Z + 4 ff. ſſ OZ (60. M. 1.) & ff. ſſ. ex O. ad A. B. C. D. *æq.* minimæ ex X + 4 ff. ſſ. OX. ſed quia *centrum* O. eſt in dimidio rectæ XZ (90. *p.*) 4 ff. OZ. *æq.* figuræ ZX. & 4 OX. *æq.* ZX (4. *l.* 6. & 3. *l.* 2.) Ergo ſumma ex O. *æq.* minimis ex Z. & X + 2 ZX. Quod; &c.

PRO-

PROPOSITIO XCV.

IN quolibet Hexaedro planis quadrilateris cõprehenso si quatuor latera opposita bifariam secentur rectis, & hæ similitèr; summa ff. ss. ex lateribus, & prioribus rectis cum 2 ff. ex singulis posterioribus dupla est minimæ summæ ex cētro ad angulos.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt Hexaedrum AG. & rectæ *qd. d*L. LI. I*q*. bisecēt opposita latera EF. HG. DC. AB. & XZ. bisecent *qd*. & IL. tum YV. bisecet *q*I. & *d*L. Dico summā *ff. ss*. EF. HG. DC. AB. 2 ZX. 2 YV. duplam esse minimæ ex *centro* O. ad omnes solidos Hexaedri angulos.

DEMONSTRATIO.

IN quadrilatero EG. dimidium *ff*. EF. HG. cū simili *qd*. æquatur minimæ summæ ad angulos E. F. G. H. (83. M. 2.) & similitèr dimidiū *ff*. AB. DC. cum simili IL. *æq*. minimæ summæ ad angulos A. B. C. D. Ergo additis 2 *ff. ss*. ZX. erit minima summa ex *centro* solidi O. æqualis dimidio *ff. ss*. EF. HG. DC. AB. *qd*. IL + 2 ZX. (94 *p*.) Similitèr ostendetur eandem solidi minimam summam ex *centro* O. æqualem esse dimidio *ff. ss*. HG. DC. BA. EF. *d*L. *q*I. + 2 YV. Ergo duplum minimæ summæ *ff. ss*. solidi ex *cen-*

tro

tro O. æqualis erit ſummæ ff. ſſ. EF. HG. DC. AB. *qd.d* L. LI. I*q*+2ZX+2YV. Ergo hæc ſumma dupla eſt minimæ ſummæ ff. ſſ. ex *centro* O. Quod, &c.

Pari ratione demonſtrari poterit minimã ſolidi ſummam eſſe dimidium ff. ſſ. EH. FG. BC. AD. NP. PK. KM. MN. 2ZX. 2*bg*. Et iterùm dimidium ſummæ ff. ſſ. FB. GC. HD. EA. RS. ST. TQ. QR. 2YV. 2*bg*. Vnde tres illæ ſummæ æquales ſunt inter ſe, quia ſunt eiuſdem minimæ duplum.

CONSECTARIVM.

HInc conſtat ſummam ff. ſſ. ex omnibus lateribus, & omnibus biſecantibus latera, cũ 4 ff. ſſ. ex ſingulis rectis, quæ oppoſita planorũ *centra* coniungunt, ſextuplam eſſe minimæ ſummæ. Alias ſpeculationes libens ommitto, quæ ex iam demonſtratis facilè poſſunt deduci.

PROPOSITIO XCVI.

IN quolibet Prismate, vel quasi Prismate centrum ff. ss. est in medio rectæ coniungentis duplicis plani oppositi centra: & in Prismate triangulari est in tertia parte rectæ à centro quadrilateri ad dimidium oppositi lateris, quæ omnes in cētro se in eâ ratione intersecant.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma, vel quasi Prisma ABCDEF. & plana opposita ABC. DEF. *centra* habeant in G. & H. Dico *centrum* solidi esse in medio rectæ GH. siuè Prisma sit triangulare, siuè non. Si autem Prisma, vel quasi Prisma triãgulare sit, & Punctum K. sit *centrum* quadrilateri CBEF. & ducatur KQ. in dimidium oppositi lateris. Dico in tertia parte rectæ KQ. esse solidi *centrum*; & si ducantur similitèr IP. LR. omnes se intersecare in *centro* O. in eadē ratione 1 ad 3.

DEMONSTRATIO.

QVoniam H. est *centrum* *ff. ss.* plani DEF. & G. est *centrum* plani ABC. si GH. sit bifariam diuisa, cùm numerus figurarum vnius, & alterius plani sit æqualis, erunt tot figuræ OH. quot figuræ OG. minimæ inter se (37. M. 1.) Ergo erit O. *centrum* *ff. ss.* ad vtriusque plani ni angulos, vel ad omnes angulos solidi (64. M. 1.)

In Prismate verò triangulari sîK sit *centrum* quadrilateri BCFE. cum DA. sit bifariam diuisa in Q. erit Q. *centrum* ad A. D. (35. M. 1.) Si ergo KQ. diuisa sit in sex partes æquales, & sumantur duæ KO. erunt 4 ff. ff. KO. minimæ 2 ff. ff. OQ. (37. M. 1.) Ergo erit O. *centrum* ff. ff. ad sex puncta A. B. C. D. E. F. (64. M. 1.) Ergo quia KO. ad KL. est vt 2. ad 6. erit KO. tertia pars ipsius KQ. vel vt 1. ad 3. Similitèr ostendetur *centrum* O. esse in tertia parte rectarum LR. & IP. Ergo cum *centrum* solidi vnicum sit (60. M. 1.) tres illæ rectæ KQ. LR. IP. se in eodem puncto O. in eadem ratione secant vt 1. ad 3. Quod, &c.

Quasi Prismata dicuntur, si opposita plana non sint parallela, vel eleuata non sint parallelogramma.

PRO-

PROPOSITIO XCVII.

IN omni Prismate, vel quasi Prismate centrũ ff.ss. est centrũ plani bisecantis latera quadrangulorum.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma, vel quasi Prisma ABCDEF. & planum PQR. bisecet omnia eius latera eleuata supra plana opposita. Dico *centrum ff.ss.* plani PQR. esse ipsum solidi *centrum ff.ss.* ad angulos solidos.

DEMONSTRATIO.

DIuidantur omnia latera plani bisecãtis bifariam in I. K. L. & quia DA. est bifariam diuisa in Q. erit hoc *centrum* ad A D. (35. M. 1.) & R. ad E. B. & P. ad FC. &c. Ergo in dimidio rectæ QR. nempè in I. erit *cẽtrum* ad A. D. B. E. (64 M. 1.) & similiter L. erit *centrum* ad A. D. C F & K ad B E. F. C. Ergo *centrum* ad A. D. B. E. F. C erit in IP. (63. M. 1.) & similitèr in L R. & in KQ. Ergo erit in earum intersectione O. sed quia RQ. est in I. bifariam diuisa est I. *centrum ff.ss* ad RQ (35. M. 1.) & similitèr K. est *cẽtrum* ad P. R & L. ad Q. P. (35. M. 1.) Ergo in recta IP. erit *centrum* punctorum Q. R. P. & similiter in recta LR. & in recta KQ. (61. M 1.) Ergo erit *centrum* plani PQR in concursu rectarum O. Ergo cum solidi *centrum* demonstratum sit in eodem concursu idem erit *centrum ff. ss.* solidi, & plani bisecantis, &c.

Quod si Prisma, vel quasi prisma Polygonũ fuerit eadem continuabitur demonstratio, & semper solidi, & plani *centrum* in eodem rectarum concursu demonstrabitur.

SCHOLIVM.

BReuius demõstrari poterit ex hoc vniuersali theoremate. *Si plura fuerint centra ff. ad varia puncta, omnium centrorum centrum ff. est centrum omnium punctorum:* quod demonstrabitur (ex 64. M. 1.) sed ibi ommissũ fuit Theorema, quia tunc non occurrerat.

PROPOSITIO XCVIII.

IN Prismate, vel quasi Prismate triangulari minima summa ff ff. ex centro est tertia pars summæ ff ff. ex lateribus triangulorum + 6. ff. ff. ex semirecta coniungente ipsorum centra.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma ABCDEF. cuius *centrum ff ff.* O. Dico minimam summam ex O. esse tertiam partem ff. ff. AB. BC. CA. DE. EF. FD + 6 ff. ff. ex dimidio rectæ HG. quæ iungit triangulorum *centra.*

DEMONSTRATIO.

CVm H. & G. sint Triangulorum *centra* ex *hyp.* figuræ ex O. *æq.* minimis summis ex H. & G + 3OH + 3OG (60. M. 1.) Ergo quia *centrum* O. bisecat HG (96. *p.*) 3 ff. OH. & 3OG. sunt 6OH. vel 6OG. sed minima summa ex H. est tertia pars ff. DE. EF. FD. & minima ex G. est tertia pars ff. AB. BC. CA (8. M. 2.) Ergo minima summa æqualis est tertiæ parti DE. EF. FD. AB. BC. CA + 6OH. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XCIX.

IN Prismate Triangulari minima summa ff. ff est tertia pars ff. ff. ex lateribus triangulorũ, cum dimidio ff. ex lateribus parallelogrammorum.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma triangulare ABC. &c. & *centrum* O. Dico minimam summam ff. ff. esse tertiã partem ff. ff. AB. BC. CA. DE. EF. FD. cum dimidio ff. ff DA. FC. EB.

DEMONSTRATIO.

SInt H. & G. triangulorum *centra*, quæ iungantur recta HG. & ducantur FHN. CGM. & NM. cum NM. diuidat bifariam latera DE. AB. (1. M. 2) est NM. parallela lateri DA. ipsique æqualis (7. *l*. 1.) Ergo etiam est Parallela, & æqualis CF. & BE. & MF. erit parallelogrammum (7. *l*. 1.) Ergo cum HG. diuidat in eadem ratione latera FN & CM (1. M. 2.) erit HG parallela, & æqualis lateribus CF. BE. AD. Ergo tres figuræ AD. CF. BE æquales sunt tribus figuris HG. Ergo etiam vna, & dimidia figura HG. erit dimidium figurarum AD. CF. BE sed minima summa ex O. est tertia pars ff. ff. AB. BC. CA. DE. EF. FD + 6 ff. ff. OH vel + vna cum dimidia HG. (98. *p*.) Ergo minima summa ex

O.

O. ad omnes angulos solidos est tertia pars ff. ff. AB. BC. CA. DE. EF. FD. cum dimidio fff. AD. CF. BE. Quod erat, &c.

PROPOSITIO C.

IN quolibet Prismate si planum vtcumque secet latera parallelogrammorum, habebit cētrum fff. in recta coniungente cētra duplicis plani oppositi paralleli.

EXPOSITIO. Fig. 24.

SIt Prisma Triāgulare ABCDEF. & plana opposita parallela, nempè superius, & inferius DEF. ABC. quorum *centra* H. & G. & quodlibet planum PQR. secat vtcumque latera parallelogrammorum A D. CF. BE. Dico *centrum* plani PQR. esse in recta H G. quæ plani superioris, & inferioris *centra* coniungit.

DEMONSTRATIO.

DVcantur FHN. CGM. & NM. eruntque NM. HG. FC. DA. BE. parallelæ vt in 99. *p.* & QR. erit bifariam diuisa in I. (61. M. 2) & recta PI. erit communis sectio planorū PQR. & NC. Ergo cum sint parallelæ NM. HG. FC. erit IO. ad IP. vt NH ad NF. (2. *l* 6) sed H. est *centrum* △DEF. & NH. tertia pars ipsius NF. (1. M. 2.) Ergo etiam IO. erit tertia pars ipsius IP.

IP. (1. *l.* 5.) Ergo cũ PI. bisecet basim △ PQR. erit O. *centrum* ipsius (1. M. 2) quod est in recta HG. Quod erat, &c.

Similitèr ex Parallelismo continuabitur demonstratio si prisma Poligonum fuerit, quod vel leui meditatione Lectori Geomettæ perspicuum erit.

CAPVT III.

DE SOLIDIS ORDINATIS.

IN decimo tertio Elementorum libro Euclides egit de ſolidis regularibus, quibus addidere plura ſcitu digniſsima Hypſicles, Cādalla, & Campanus, quæ apud noſtrum P. Clauium videri poſſunt in 14. 15. & 16. Elementorum libris. Eorum nos hic aliqua delibabimus, quæ ad Minimorum doctrinam ſpectant; & alia non pauca ab Euclide, & prædictis Authoribus intacta, facili, clara, & ſingulari methodo demonſtrabimus. Non dubito quin plura nos lateant, quæ ex minimis elici potuere, vtinam Lector Geometra eorum meditationi acriorem mentem adijciat, & Colophonē addat; vt quod nos latuere, diſcamus ab eo, cui Minimorum diuturna meditatione feſsi haud ſterile Geometriæ fundum excollendum relinquimus.

PRO-

PROPOSITIO CI.

SI ex angulo Tetraedri regularis ducatur perpendicularis in planum oppositum, cadet in trianguli centrum, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 25.

TEtraedrum regulare, siuè ordinatum est Pyramis quatuor triangulis æquilateris comprehensa. Sit ergo Tetraedrum regulare ABCD. & ex quolibet angulo D. perpendicularis ducatur DG. in planum ABC. Dico punctum G. in quo recta planum trianguli secat, esse *centrum* ff ss. trianguli ABC. & *econuerso* si DG. cadat in *centrum* trianguli. Dico esse ipsius plano perpendiculorum.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum G. ducantur AGF. BGH. CGE. & quia DG. est plano perpendicularis erunt omnes anguli DGH. DGE. &c. recti: Ergo quadratum rectæ DA. oppositæ angulo recto DGA. erit æquale quadratis DG. GA. (4. *l.* 2.) Similitèr quadratum DB. erit æquale quadratis DG. GB tum quadratum DC. æquale quadratis DG. GC (4 *l.* 2.) Ergo cum latera Tetraedri DA. DB. DC. sint æqualia, erunt etiam æqualia quadrata DG. GA. ipsis DG. GC & ipsis DG. GB. Ergo ablato communi DG. æqua-

lia

lia erunt quadrata GA. GB. GC vnde & æquales erunt rectæ GA. GB. GC. Ergo si ex G. radio GA. circulus describatur, erunt puncta A. B. C. in peripheria circuli circunscripti: sed cētrum circuli circunscripti est *centrum ff ss*. trianguli regularis, vel æquilateri (109. M. 2.) Ergo punctum G. est *centrum ff ss*. Trianguli A B C. Quod erat, &c.

E conuersò. Si recta DG. cadat in *centrum ff. ss*. trianguli ABC. erit G. *centrum* circuli circunscripti (109. M. 2.) Ergo radij GA. GB. GC. erūt æquales: sed etiā latera Tetraedri DA DB. DC. sunt æqualia: & latus DG. commune: Ergo triangula DGA. DGB. DGC. sunt omninò æqualia (4. *l*. 1.) & omnes anguli in G. recti: & DG perpendicularis. Quod, &c.

PROPOSITIO CII.

SI ex angulis Tetraedri regularis ducātur perpendiculares in plana opposita, omnes sunt æquales, & se quadrifariam intersecant in centro ff. ss. Tetraedri, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro regulari ABCD. ducantur pērdiculares DG. BK &c. Dico illas esse æquales, & transire per *centrum ff. ss.* Tetraedri O. & omnes in eo quadrifariam se intersecare, in ratione 1. ad 4. Et *èconuerso* si rectæ DG. GK. &c. transeant per *centrum ff. ss.* O. Dico esse perpēdiculares, & consequentèr incidere in planorum *centra*: vel si omnes se in eadem ratione secent transire per *centrum*, & esse perpendiculares, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm triangula æquilatera A B C. A CD. æqualia sint circulorum radij G A. KD. æquales erunt: & quia perpendiculorum anguli sunt æquales recti DKB. DGB. erit quadratum DB. æquale quadratis DK. KB. (4. *l.* 2.) & paritèr quadratum DB. erit æquale quadratis DG GB (4. *l.* 2.) Ergo quadrata D K. KB. æqualia sunt quadratis DG. GB. Ergo ablatis vtrinque quadratis æqualibus DK. GB. remanenebunt æqualia quadrata DG. BK. Ergo etiam rectæ perpendiculares DG. BK. æquales sunt.

Deinde cum G. sit *centrum* plani ABC (101. *p.*) erit *centrum* ff. ff. Tetraedri in quarta parte rectæ GD. & similiter in quarta parte KB (1. *p*) Ergo quia *centrum* ff. ff. est vnicum (60. M. 1.) perpendicula BK. DG. &c. se in *centro* ff. ff. O. quadrifariam secant, vel vt 1. ad 4. Quod erat, &c.

E conuersò. Si DG. trãseat per *centrum* ff. ff. O. erit G. *centrum* basis (1. *p*) Ergo erit DG perpendicularis plano ABC (101. *p.*) idemque est de reliquis. Si verò tres rectæ ex A. B. C. se in eadem ratione secent in recta DG. erit hæc per ccentrum ff. ff. (47. *p.*) similitèr erit BK. per *centrum*, &c. Vnde & perpendiculares æquales erunt. Quod, &c.

PROPOSITIO CIII.

CEntrum ff. ss. Tetraedri regularis est ipsum centrum vtriusque sphæræ inscriptæ, & circumscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. cui intelligatur inscripta, & circumscripta sphæra. Dico *centrum ff. ss.* Tetraedri esse *centrum* vtriusque sphæræ.

DEMONSTRATIO.

QVia omnia perpendicula sunt æqualia, & se intersecant in O. vt 1. ad 4. æquales erunt OG. OK. &c. (102. *p.*) Ergo si radio OG. describatur sphæra, cum radius OG. sit plano ABC. perpendicularis (102. *p.*) sphæra tanget planum ABC. & similiter alia plana: Ergo erit sphæra inscripta.

Rursus quia DO. BO. &c. æquales sunt (102. *p.*) si radio OB. sphæra describatur ex *centro* O. transibit hæc per omnes Tetraedri angulos solidos, & erit circumscripta: Ergo *centrum ff. ss.* O. est vtriusque sphæræ *centrum*. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CIV.

SI in Tetraedro regulari sumatur quodlibet punctum, ex quo ducantur perpendiculares ad quatuor plana, omnium summa æqualis est perpendiculo ab angulo in planum oppositum.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & punctum assumptum O. perpendiculares sint OG. OK. &c. Dico omnium summam æqualem esse perpendiculo DG.

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex O. rectæ OA. OB. &c. & Tetraedrum diuisum erit in quatuor Pyramides ABCO. ADCO. DCBO. ADBO. quæ omnes habent æqualem basim cum Tetraedro: & se habent vt altitudines (5 *l*. 11.) Ergo etiã summa Pyramidum ad Tetraedrum erit vt summa perpendiculorũ ad Tetraedri perpendiculum (4. *l*. 5.) Ergo cum summa Pyramidum sit Tetraedro æqualis, quia hoc ex illis componitur, summa perpendicularium æqualis erit perpendiculo Tetraedri (2. *l*. 5.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CV.

IN Tetraedro regulari si inter plana eundem angulum comprehendentia, & infra basim cõtinuata sumatur punctum, perpendicularis in planum angulo oppositum, est differentia inter reliquarum summam, & perpendiculum Tetraedri.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & extra ipsum sumatur punctum P. quod sit inter plana continuata, quæ comprehendunt solidum angulũ A. & ex P. ducantur perpendicula in omnia plana Tetraedri. Dico perpendiculum ex P. in planum BCD. oppositum ipsi angulo A. esse excessum, quo summa trium perpendiculorum in plana ABC. ACD. ABD. superant perpendiculum ipsius Tetraedri ex A. in planum oppositum.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum P. intelligatur ductum planum NML. parallelum plano BCD. eritque solidum ANML. Tetraedrum regulare simile Tetraedro ABCD. (5. *l.* 11.) Ergo cum perpendiculum ex P. in planum NML. nullum sit, quia punctum P. est in ipso plano, reliqua tria perpendicula æqualia erunt perpendiculo ex

An-

Angulo A. in planum oppositum NML (104. *p.*) sed perpendiculum ex A. in planum NML. superat perpendiculum ex A. in planum BCD. toto perpẽdiculo communi inter vtrumque planum parallelum BCD. NML. Ergo quia perpendiculum ex P. in planum BCD. est cõmune perpendiculum inter vtrumque planũ parallelum BCD. NML (3. *l.* 11.) erit perpendiculum ex P. differencia, siuè excessus, quo summa perpẽdiculorum in plana ADC. ADB. ABC. superat perpendiculum Tetraedri ex angulo A. in planum oppositum ABC. Idemque est de quolibet alio perpendiculo ex quouis angulo in planum sibi oppositũ, cum omnia sint æqualia ex *prop.* 102. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVI.

IN Tetraedro regulari si extra, & inter plana supra verticem alicuius anguli continuata sumatum punctum; perpendiculares ex ipso in plana angulum comprehendentia sunt differentia, vel excessus quo perpendiculum ex eodem puncto in planum angulo oppositum superat perpendiculum ipsius Tetraedri.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro ABCD. assumpeum sit quodlibet punctũ S. inter plana BAC. BCD. BAD Vltra verticem anguli B continuata, & ex puncto S. ducta intelligantur quatuor perpendicula in plana Tetraedri cõtinuata BQR. BRN. BQN ACD. Dico tria perpendicula in plana BQR. BRN. BQN. esse differentiam, siuè excessum quo perpendiculum ex S. in planum ADC. superat perpendiculum Tetraedri BK. vel DG.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum S. intelligatur ductum planum QRN. parallelum plano ADC. quod angulo B. oppositum est, eritque solidum QRNB. Tetraedrum regulare simile ipsi Tetraedro AB CD. (5. *l.* 11.) Ergo quoniam perpendiculum ex S. in planum QRN. nullum est, eo quod pun-

punctum S. reperitur in eodem plano, reliqua perpendicula ex S. in tria plana BQR. BRN. BQN. æqualia erunt perpendiculo ex angulo B. in planum QRN. quod est perpendiculum Tetraedri QRNB (104. *p.*) sed perpendiculũ ex B. in planum QRN. est etiam perpendiculũ ex B. in planum parallelum ACD. quia plana parallela habent commune perpendiculum (3. *l.* 11.) Ergo perpendiculum ex B. in planum QRN. est differentia inter perpendiculum vtriusque plani, & perpendiculum ex B. in planum ADC. Ergo quia perpendicula ex S. in plana BQR. BRN. BNQ. æqualia sunt ipsi perpendiculo ex B. in planum QRN. sunt differẽtia, vel excessus, quo perpendiculum ex S. in ADC. superat perpendiculum BK. Tetraedri. Quod, &c.

PROPOSITIO CVII.

SI in Tetraedro regulari inſcribatur, & circunſcribatur ſphæra, diameter circunſcriptæ poteſt noncuplum diametri ſphæræ inſcriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum ABCD. & eius *centrum* ſſ ſſ. O. quod erit vtriuſque ſphæræ *cẽtrum* (103. *p.*) Dico potentiam diametri ſphæræ ex O. circunſcriptæ noncuplam eſſe potentiæ diametri ſphæræ ex O. inſcriptæ.

DEMONSTRATIO.

DVcto perpendiculo BK. tranſibit per *centrum* O (102. *p.*) & erit OK. radius ſphæræ inſcriptæ, & OB. circunſcriptæ, & KO. tertia pars ipſius OB. (103. *p.*) ſed diametri ſunt vt ſemidiametri (5 *l* 5.) Ergo cũm potentiæ, vel quadrata ſint in duplicata ratione laterum (4. *l* 6) ſi ſumantur continuæ 1. 3. 9. erit quadratũ diametri ſphæræ inſcriptæ ad quadratum circunſcriptæ vt 1. ad 9. Ergo huius potentia eſt noncupla illius. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CVIII.

Potentia diametri sphæræ Tetraedro regulari circunscriptæ est sesquialtera potentiæ lateris Tetraedri vt 3. ad 2.

EXPOSITIO. Fig. 25.

In eodem Tetraedro. Dico quadratum diametri sphæræ circunscriptæ sesquialterum esse quadrati lateris AD.

DEMONSTRATIO.

Cum omnes anguli solidi A. B. C. D. sint in superficie sphæræ circunscriptæ, erit summa *ff. ss.* ex lateribus AB. AC. AD. æqualis minimæ summæ OA. OB OC. OD + 4 *ff. ss.* OA. (60. M. 1.) Ergo Quadrata AB. AC. AD. æquatur 8. quadratis OA. Ergo qualium quadratũ radij OA. est 9. summa quadratorum AB. AC. AD erit 72. & quia quadrata AB. AC. AD. sunt æqualia ex æqualibus lateribus, quodlibet erit 24. sed qualium quadratũ radij OA. est 9. quadratum dupli radij, hoc est diametri est 36 (3. *l.* 2.) Ergo quadratum diametri ad quadratum lateris AB est vt 36. ad 24. vel vt 3. ad 2. nempè sesquialterum. Quod, &c.

PROPOSITIO CIX.

POtentia diametri circuli ambientis basim Tetraedri est sesquitertia potentiæ lateris ipsius Tetraedri, vt 4. ad 3.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt ABC. basis Tetraedri, & illius *centrum* G. ex quo intelligatur circulus descriptus radio GA. Dico quadratum diametri, nempè duplæ AG. esse ad quadratum lateris AB. vt 4. ad 3.

DEMONSTRATIO.

CVm ABC. sit triãgulum æquilaterũ circulo inscriptum, erit quadratum lateris AB. triplum quadrati radij GA (12. M. 2.) sed quadratum diametri, vel dupli radij est quadruplũ quadrati radij (3. l 2.) Ergo qualium quadratum radij AG. est 1. quadratum lateris AB. erit 3. & quadratum diametri erit 4. Ergo invertendo quadratum diametri circularis ad quadratum lateris Tetraedri est vt 4. ad 3. vel vt 32. ad 24. Est igitur potentia diametri circularis sesquitertia potentiæ lateris Tetraedri. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CX.

IN Tetraedro regulari Potētia diametri circuli ambientis basim octupla est potentia diametri sphæræ inscriptæ; & potentia lateris sextupla eiusdem.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro. Dico potentiam dupli radij AG. octuplam esse potentiæ dupli radij OG. sphæræ inscriptæ, & potētiam lateris A B. esse sextuplam potentiæ eiusdem duplæ OG.

DEMONSTRATIO.

QValium potentia GO. est 1. potentia diametri, vel dupli radij est 4 (*3.l.2.*) sed potentia diametri circunscriptæ, vel dupli radij OA. est noncupla nempè 36 (*97.p.*) & potentia lateris AB. est 24 (*98.p.*) & potentia diametri circularis, vel dupli radij GA. est 32 (*99.p.*) Ergo potētia diametri circularis octupla est potentiæ diametri inscriptæ vt 32. ad 4. & Potentia lateris Tetraedri est sextupla eiusdem vt 24. ad 4. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXI.

IN Tetraedro regulari potentia radij sphæræ circumscriptæ ad Potentiam radij circularis est vt 9. ad 8. vel sesquioctaua, idemque est de diametris.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN eodem Tetraedro ABCD. radius sphæræ circumscriptæ est OB. (103.*p.*) radius verò circuli ambientis basim est GB. Dico quadratum OB. esse sesquioctauum quadrati GB. vel □ OB. ad □ GB. esse vt 9. ad 8.

DEMONSTRATIO.

QVoniam Triangulum BGO. est rectangulum (102.*p.*) erit quadratum OB. æquale quadratis OG. GB. (4 *l.* 2.) sed qualium quadratum OG. est 1. quadratum OB. est 9. (97.*p.*) Ergo cum quadratum GB. sit differentia quadratorum OB. & OG. qualium quadratum OB. est 9. erit quadratum GB. 8. &c. Ergo illud est sesquioctauum huius. Quod erat, &c.

Constat etiam ex demonstratione *prop.* 110. □ OB. esse 36. & □ GB. 32. scilicèt vt 9. ad 8. &c.

PRO-

PROPOSITIO CXII.

IN Tetraedro regulari Potentia perpendiculi à vertice ad basim dupla est potentia radij circuli ambientis basim.

Consect. *Perpendiculum à vertice in basim est ad radium circuli ambientis basim Tetraedri, vt diameter quadrati ad suum latus.*

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt Tetraedrum regulare ABCD & recta DG. ex angulo D. sit perpēdicularis plano opposito ABC. & ducatur recta GA. vel GB vel GC. Dico Potentiam rectæ DG. esse duplam potētiæ rectæ GA, &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus DGB. est rectus ex *hyp.* est quadratum lateris DB. æquale quadratis BG. GD (4. *l.* 2.) sed qualium DB. est potentia 24. quadratum duplæ GB. est 32 (109. *p.*) Ergo quadratum GB. erit 8 (3 *l.* 2.) Ergo quadratum DG differentia quadratorum DB. & BG. erit 16. dupla scilicèt potentiæ GB. Vnde GD. ad GB. est vt diameter quadrati ad latus. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXIII.

IN Tetraedro regulari Potentia perpendiculi à centro basis in latus dupla est potentiæ perpendiculi à centro ipsius Tetraedri in basim: vnde rectæ sunt vt diameter ad latus quadrati: & perpendiculum à centro basis ad perpendiculum à centro Tetraedri est vt perpendiculum à vertice ad radium circularem.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt in Tetraedro ABCD. recta DOG. perpendiculum à vertice: & OG. à *centro* Tetraedri: & GH. à *centro* basis: & GB. radius circularis. Dico potentiam GH. esse duplam potentiæ OG. &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam G. est *centrum* basis (101. *p.*) BGH. bisecat latus AC. & HG. est dimidiũ GB. (1. M. 2.) & GH. perpendicularis (5. *l.* 1.) Ergo □ HG. est quarta pars □ GB. (3. *l.* 2.) sed qualiũ □ GO. est 1. quadratum BG. est 8 (111. *p.*) Ergo □ GH. erit 2. duplum scilicèt □ GO. vnde GH. ad GO. est vt diametèr quadrati ad suum latus; & erunt vt GH. ad GO ita DG ad GB (112. *p.*) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

IN Tetraedro regulari Potentia rectæ à centro in dimidium latus tripla est potentiæ perpendiculi à centro in basim, unde recta ad perpẽdiculum est ut latus Tetraedri ad radium circuli ambientis basim: vel ut latus △ ad radium.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro regulari ex *centro ff. ss.* O. ducatur perpendicularis GO. & recta OE. in dimidium lateris. Dico quadratum OE triplum esse quadrati OG. & rectam OE. ad OG. esse vt latus Tetraedri DB. ad radium GB. circuli ambientis basim.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus OGE. rectus est ex *hyp.* quadratum OE. æquale est quadratis OG. GE (4 *l*. 2.) sed qualium quadratum OG. est 1. quadratum GE. est 2. (113. *p*.) Ergo quadratum OE. summa quadratorum OG. GE. erit 3. scilicèt triplum quadrati OG. sed etiam quadratum lateris AB. triplum est quadrati radij GB (112. M. 2.) Ergo cum quadrata sint in eadem ratione, est recta OE. ad OG. vt AB. ad BG. (4 *l*. 6.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXV.

IN Tetraedro regulari recta à centro ſſ.ſſ. in dimidium latus eſt medio loco proportionalis inter ſegmenta perpendiculi, vel inter radios vtriuſque ſphæræ: & facit cum perpendiculo Triãgulum illi ſimile, quod fit ex perpendiculo, & latere.

EXPOSITIO. Fig. 25.

EX *centro ſſ ſſ.* O. ducta ſit OE. & perpēdiculum DOG. Dico OE. eſſe mediã inter DO. OG. & Triangulum EOG. eſſe ſimile Triangulo DGC.

DEMONSTRATIO.

QValium □ OG. eſt 1. quadratum OE. eſt 3. (114 *p.*) & □ DO. eſt 9. (107. *p.*) Ergo cum quadrata 1.3.9. ſint continua, etiam rectæ continuè proportionales erunt (4. *l.* 6.) OG. ad OE. vt OE. ad OD. Ergo OE. media eſt inter radios vtriuſque ſphæræ.

Inſuper quia □ GE. eſt 2. & □ OG. 1 (113. *p.*) & □ DG. 16. & □ GB. 8. (112. *p.*) eſt GE. ad OG. vt DG. ad GB. (4. *l.* 6.) Ergo cum anguli DGB. OGE. ſint æquales recti, erunt triãgula EGO. DGB. vel DGC. ſimilia (2. *l.* 6.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.

SEmilatus Tetraedri regularis medium est inter radium sphæræ circunscriptæ, & diametrum inscriptæ: & etiam inter perpendiculum ab angulo in latus, & minus segmentum ipsius: & etiam inter perpendiculum à centro Tetraedri, & diametrum sphæræ circunscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. Dico AE. dimidium lateris esse medium inter OB. & 2OK. & inter BH. HG. & inter OG. & 2OB.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □ AB. lateris est 24. qualiũ □ OG. est 1. (108. & 107 *p.*) Ergo □ AE. erit quarta pars, scilicèt 6. (3. *l.* 2.) sed □ OB. est 9. & □ OG. 1 (107 *p.*) vel □ 2OG. est 4 (3. *l.* 2.) Ergo sũt cõtinua quadrata □ OB. 9. □ AE. 6 □ 2OG 4. Ergo etiam rectæ (4. *l.* 6.) Insuper □ HG. est 2. (113. *p.*) & □ AE. 6. & □ BH. 18. nempè differentia □ AB. & AE. vel AH. Ergo continua sunt □ HG. 2. □ AE. 6. □ BH. 18. Tandem □ OG. est 1. □ AE. 6. □ 2OB. 36. Ergo etiam sunt continua. Quod, &c.

PROPOSITIO CXVII.

LAtus Tetraedri medium eſt inter perpendiculum à vertice, & diametrum ſphæræ circumſcriptæ. Similiter inter perpendiculum ab angulo in latus, & diametrum circuli ambientis baſim.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. Dico latus AB eſſe medium inter DG. & 2OB. & ſimilitèr inter AF. & 2AG.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □ DA. eſt 24 & □ AG. 8 (112. *p.*) erit □ DG. 16 (4 *l.* 2.) & □ GO. 1. & □ diametri, vel 2OB. eſt 36 (97. *p.*) Ergo ſunt continua quadrata □ 2OB 36. □ AB. 24. □ DG. 16. in ratione ſeſquialtera: Ergo & rectæ proportionales erunt (4 *l.* 6.)

Similitèr quia □ BA. eſt 24 (112. *p.*) & □ AH 6 (3. *l.* 2) & □ AF. differẽtia □ BA. & □ AH. eſt □ AF. 18 (4. *l.* 2.) & □ 2BG 32 (112 *p.*) Ergo continua ſunt □ 2BG 32. □ BA. 24. □ AF 18. in ratione ſeſquitertia: vnde & rectæ proportionales erunt. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.

SI ex vertice Tetraedri regularis ducatur recta per centrum ſſ.ſſ. in baſim, & ab angulo baſis recta per ſectionem in latus erunt ſex continuæ in ratione lateris quadrati ad diametrum, ſcilicet Perpendiculum à centro Tetraedri, perpendiculum à centro baſis, diameter ſphæræ inſcriptæ, radius circularis, perpendiculum à vertice, diameter circuli.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. ducatur DG. per *centrũ ſſ.ſſ.* O. & BGH. Dico eſſe ſex continuas OG. GH. 2OG. GB. GD. 2AG.

DEMONSTRATIO.

QValium □OG. eſt 1. eſt □GH. 2. & □ 2OG. 4 & □GB. 8. & □ GD. 16. & □2AG. 32. quæ omnia conſtant ex præcedentibus: Ergo cùm quadrata ſint vt quadratum lateris ad □ diametri eiuſdem; erunt rectæ vt latus ad diametrum (4. *l.* 6.) Quod erat, &c.

Plures aliæ rationes continuæ, vel non cõtinuæ ex ſequenti tabella elici poſſunt, in qua omnia demonſtrata facilè conſpiciuntur.

TA-

TABVLA TETRAEDRI continens rectarum potentias, qualium radius ſphæræ inſcriptæ eſt 1.

Radius ſphæræ inſcriptæ GO.	1.
Radius circuli inſcripti GH.	2.
Radius ſphæræ tangentis latera OE.	3.
Diameter ſphæræ inſcriptæ 2OG.	4.
Summa □ □ ad planorum centra.	4.
Semilatus Tetraedri AE.	6.
Radius circuli circunſcripti GB.	8.
Radius ſphæræ circunſcriptæ OB.	9.
Perpendiculum ab angulo in baſim DG.	16.
Perpendiculum ab ang. in latus BH.	18.
Summa ad dimidia latera ex O.	18.
Latus Tetraedri AB.	24.
Diameter circuli circa baſim 2AG.	32.
Diameter ſphæræ circunſcriptæ.	36.
Minima ſumma ex centro O.	36.
Summa ex ſemilateribus cunctis.	36.
Summa ex plani centro ad ang.	40.
Summa ex angulo in reliquos.	72.
Summa ex cunctis lateribus.	144.

Hinc etiam Geometra quænam rectæ inter ſe rationales, vel irrationales ſint leui meditatione percipiet.

PRO-

PROPOSITIO CXIX.

SI solidum quadratis sex comprehendatur Hexaedrum regulare erit, & parallelepipedum rectangulum, qui cubus dicitur.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt solidum AE. sex quadratis cōprehensum. Dico esse regulare, & parallelepipedum rectangulum, nempè cubum.

DEMONSTRATIO.

CVm angulus quadrati BAG. rectus sit, & etiam CAG. est GA. plano AD. perpēdicularis (1. *l.* 11.) & similitèr plano GE. Ergo plana AD. GE. cum habeant commune perpendiculum AG parallela sunt (3. *l.* 11.) Idem ostendetur de planis AF. BE. tum CE. AH. Ergo solidum parallelepipedum est: deindè omnia latera sunt æqualia, & omnes anguli plani recti similiter dispositi: Ergo omnes anguli solidi recti æquales sunt: Ergo cum solidum habeat sex hædras, vel superficies, & omnes angulos solidos æquales, & etiam latera, erit Hexaedrū parallelepipedum rectāgulum regulare. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXX

PLana, quæ secant per angulos cubum, rectã-gula sunt invicem perpendicularia.

2. *Ipsa, & eorum sectio duobus cubi planis sunt perpendicularia.*

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt Cubus AE. sectus planis A CEG. BDFH. Dico illa esse rectangula, & invicem perpẽdicularia: & ipsa, atque sectionem LR. esse perpendicularia planis GE. AC.

DEMONSTRATIO.

CVm BH. sit perpendicularis planis GE. AC. (119. *p.*) erit etiam perpendicularis rectis HF, BD. Ergo cum anguli FHB. HBD. sint recti parallelæ sunt HF. BD. (2. *l.* 1.) Ergo HD. rectangulum est: & etiam HL. Ergo cum in quadrato GE anguli in R. sint recti ex triangulis æqualibus (4. *l.* 1.) est HR. perpendicularis GE. & RL. Ergo & plano GC (1. *l.* 11.) Ergo & planum HD. transiens per ipsam est plano GC, perpendiculare (3. *l.* 11.) Deinde cum plana GC. HD. transeant per GA. FD quæ sunt planis GE. AC. perpendiculares etiam plana GC. HD. perpendicularia erunt planis GE. AC. & & etiam eorum sectio RL (3. *l.* 11.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXI.

IN Cubo centrum ff. ss. est ipsum centrum sphæræ circunscriptæ, inscriptæ, & tangentis latera.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt Cubus AE. eius diameter BF. & B L. coniungat *centra* duplicis plani oppositi: quia Cubus est parallelepipedum, erit sectio O. *centrum ff. ss.* Cubi (73 *p.*) Dico *centrum ff. ss.* O. esse *centrum* sphæræ inscriptæ, & circunscriptæ.

DEMONSTRATIO.

QVia Cubus est Parallelepipedum rectangulum (119. *p.*) omnes diametri æquales erunt (80 *p.*) Ergo cum O. sit in medio omniũ diametrorum (73. *p.*) æqualitèr distabit O. ab omnibus angulis: Ergo erit *centrum* sphæræ circunscriptæ. Similitèr recta LR. æqualis est lateri HB. (7. *l.* 1.) idemque est de qualibet recta coniungente opposita *centra*: Ergo cum *centrum* O. sit in earum dimidio (71. *p.*) & ipsæ sint planis perpendiculares (120. *p.*) punctum O. æqualitèr distabit ab illis: Ergo erit *cẽtrum* sphæræ inscriptæ. Similitèr O. est in medio MN. perpendicularis lateribus (7. *l.* 1.) Ergo est etiam *centrum* sphæræ lateribus inscriptæ. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXII.

MInima summa ff ſſ. ex centro Cubi æqualis eſt minimæ ad contactus laterum, & vtraque 6 ff. ſſ. ex latere ipſius Cubi, vel dimidium ſummæ ff. ſſ. ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SIt Cubus AE. illius *centrum* O. Dico minimam ſummam *ff ſſ.* ex O. in omnes angulos ſolidos A B. C. D. E. F G. H. æqualem eſſe OM. ON. &c. & ſex figuris ſimilibus ex latere BC. vel dimidiũ ſummæ *ff ſſ.* ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

SInt L. & R. *centra* planorum: erit *centrum* cubi O. in dimidio rectæ LR. (71. *p.*) Minima ſumma *ff ſſ.* ex R. æquatur *ff. ſſ.* GH HE. (58. M. 2.) Ergo ſumma ex O. æquatur minimæ ex R. +4 *ff ſſ.* OR (60 M. 1.) hoc eſt æquatur GH. HB +RL (3. *l.* 2.) Similitèr ſumma ex O in puncta A. B. C. D. æquabitur ſummæ AB+ BC+ LR. vel BH. Ergo ſumma ex O. æqualis eſt ſex figuris GH. HB RL. AB. BC. RL. Deindè cùm OM. ON. &c. æquales ſint BL (7. *l.* 1.) & □ BC. æquale 2 □ BL (4. *l.* 2) erunt 12 *ff.* OM. in 12. latera æquales 6 *ff.* BC. Ergo vtraque minima ſumma eſt æqualis, & dimidium *ff. ſſ.* ex omnibus lateribus cùm latera ſint 12. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXIII.

SVmma ff.ſſ. ex omnibus diametris Cubi dupla eſt minimæ ſummæ: & æqualis ſummæ ff.ſſ. ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo A E. ductæ intelligantur quatuor diametri ex angulis E. F. G. H. in oppoſitos. Dico ſummam *ff.ſſ.* ex omnibus eſſe duplam minimæ, & eſſe æqualem ſummæ *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus.

DEMONSTRATIO.

QVia *centrum ff.ſſ.* O. eſt *centrum* ſphæræ circumſcriptæ (121. *p.*) erunt omnes rectæ ex O ad angulos æquales ipſi OF. Ergo minima ſumma ad 8. angulos æquatur 8. figuris OF. ſed figura FB. æquatur 4. figuris O F. quia recta BF. eſt dupla ipſius OF (3. *l.* 2.) Ergo figuræ ex quatuor diametris æquantur 16 figuris OF. Ergo ſumma *ff.ſſ.* ex quatuor diametris dupla eſt minimæ ſummæ *ff.ſſ.* ſed etiam ſumma *ff.ſſ.* ex omnibus lateribus eſt dupla minimæ ſummæ (122. *p.*) Ergo ſumma *ff.* ex omnibus diametris æqualis eſt ſummæ *ff.* ex omnibus lateribus. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIV.

DIameter Cubi, vel ſphæræ circunſcriptæ tripla eſt potentia lateris Cubi, vel diametri ſphæræ inſcriptæ. 2. Et dupla minimæ ſummæ ad contactus planorum. 3. Et ſeſquialtera diametri circuli circa □.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. ducta ſit diameter BF. Dico eius potentiam eſſe triplam potentiæ lateris BC. vel diametrum ſphæræ circunſcriptæ BF. triplam eſſe potentia diametri ſphæ ræ inſcriptæ LR. & ſeſquialteram diametri AC.

DEMONSTRATIO.

1. SVmma Quadratorum ex quatuor diametris æqualis eſt ſummæ quadratorũ ex duodecim lateribus (123. *p.*) Ergo quadratum cuiuslibet diametri Cubi, vel ſphæræ circunſcriptæ cùm ones ſint æquales, erit æquale tribus quadratis ex tribus lateribus: vel triplũ erit quadrati ex latere BH. vel diametri ſpheræ inſcriptæ LR.

2. Deindè cùm OL. ſit dimidium R L. vel FB. eſt □ FD. æquale 4 □ OL. ſed □ BF. æquatur 3 □ FD. Ergo & 12 □ OL. Ergo □ BF. duplum eſt 6 □ OL. vel minimæ ſummæ ex *centro* O. in 6. planorum *centra*.

3. Tan-

3. Tandèm, quia potentia AC. est dupla A.D. (4. *l*. 2.) qualium □ AD. est 2. est □ AC 4. & □ BF 6: Ergo □ BF. ad □ AC. vt 6 ad 4. vel sesquialterum. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXV.

SVmma ff. ss. ex quolibet puncto superficiei sphæræ circunscriptæ, vel ex quolibet angulo Cubi dupla est minimæ summæ: & æqualis summæ ff. ss. ex omnibus diametris: & etiam ex omnibus lateribus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. ex *centro* O. radio OF. intelligatur sphæra circunscripta. Dico summã *ff. ss.* ex quolibet puncto superficiei, vel ex quolibet angulo F. duplã esse minimæ summæ, & æqualem summæ ex diametris, vel lateribus.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex quolibet pũcto superficiei sphæricæ æqualis est minimæ + 8 *ff. ss.* ex radio OF. (60. M. 1.) sed minima summa æqualis est 8 *ff.* OF. Ergo illa æqualis est 16. *ff.* OF. Ergo est dupla minimæ: sed etiam summa *ff ss.* ex omnibus diametris, vel ex omnibus lateribus est dupla minimæ (123. *p.*) Ergo summa ex quolibet superficiei puncto æqualis est summæ ex omnibus diametris, vel ex omnibus lateribus.

Idem-

Idemque est de angulo, qui est in superficie. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXVI.

Summa ff. ſſ. ex quolibet pũcto ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ, vel ex quolibet planorum centro æqualis eſt 8. ff. ſſ. ex latere Cubi: & ſeſquitertia minimæ ſummæ.

EXPOSITIO. Fig. 26.

Sit Cubus A E. *centrum* O. radius ſphæræ inſcriptæ OR. Dico ſummã *ff. ſſ.* ex quolibet pũcto ſuperficiei ſpheræ inſcriptæ, vel ex quolibet *centro* planorum R, æqualem eſſe 8. *ff. ſſ.* ex latere BC. & ſeſquitertiam minimæ ſummæ ex O.

DEMONSTRATIO.

Ex quolibet puncto ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ eſt ſumma *ff ſſ.* æqualis minimæ + 8 *ff ſſ.* OR (60. M. 1.) hoc eſt + 2 *ff. ſſ.* RL. vel BC. (3. *l* 2.) ſed minima ſumma ex O. æqualis eſt 6 *ff. ſſ.* BC (122. *p.*) Ergo ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ eſt æqualis 8 *ff. ſſ.* BC. Idemque eſt de *centris* planorum, cùm ſint in ſuperficie ſphæræ inſcriptæ: Ergo cum dicta ſumma ſit 8 *ff ſſ.* & minima ſit 6 *ff ſſ.* (122. *p.*) erit illa ad iſtam ſeſquitertia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXVII.

SVmma ff.ſſ. ex quolibet pũcto ſuperficiei ſphæræ tangentis latera cubi, vel ex dimidio cuiuſlibet lateris, æqualis eſt 10. ff ſſ. ex latere cubi; & ſubſeſquiquinta ſũmæ ff. ſſ. ex lateribus omnibus.

EXPOSITIO. Fig. 26.

IN Cubo AE. intelligatur per O. planum baſi parallelum biſecans latera, eritq; MO. æqualis BL. ſi radio MO. deſcribatur ſphæra tãgens omnia latera: Dico ſummam ff ſſ. ex quouis ſuperficiei pũcto æqualẽ eſſe 10. ff. ſſ. ex latere BC.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff.* *ſſ.* ex quouis ſuperficiei puncto æqualis eſt minimæ ex O + 8*ff.ſſ.* ex radio OL. (60. M. 1.) vel + 2*ff ſſ.* ex MN. vel BD. (3. *l.* 2.) vel 4*ff.ſſ.* BC. cùm quadratum BD. ſit æquale 2 quadratis BC. CD. vel 2 BC (4. *l.* 2.) Ergo cũ minima ſumma ſit 6*ff.ſſ.* BC (122. *p.*) erit ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei æqualis 10 *ff ſſ.* ex latere BC. Idemque eſt de puncto medio cuiuslibet lateris cũ illud ſit in ſuperficie ſphæræ tangentis latera: Ergo cùm latera Cubi ſint 12. ſumma *ff. ſſ.* ex quouis puncto dictæ ſuperficiei ad ſummam *ff ſſ.* ex omnibus lateribus erit vt 10. ad 12. vel vt 5. ad 6. hoc eſt ſubſeſquiquinta. Quod erat, &c.

Scho-

SCHOLIVM.

EX iam demonstratis colligitur sequens tabula continens rectarum Cubi potentias.

TABVLA POTENTIARVM CVBI.

Qualium Diameter Cubi potest.	36.
Radius circuli inscripti □.	3.
Radius sphæræ inscriptæ OR. potest.	3.
Perpendiculum à centro in basim.	3.
Perpendiculum à centro □ in latus.	3.
Radius sphæræ tangentis latera MO.	6.
Radius circuli quadrato circunscripti.	6.
Radius sphæræ circunscriptæ OF.	9.
Diiameter sphæræ planis inscriptæ.	12.
Latus Cubi.	12.
Distantia planorum oppositorum.	12.
Recta ab angulo in centrum basis EL.	18.
Diameter circuli circunscripti □.	24.
Diameter sphæræ tangentis latera MN.	24.
Diameter sphæræ circunscriptæ BF.	36.
Diameter Cubi BF.	36.
Minima summa ad contactus planorum.	18.
Minima summa ff. ss. ex centro O.	72.
Minima summa ad contactus laterum.	72.
Summa ex superficie inscriptæ sphæræ.	96.
Summa ex superficie tangentis latera.	120.
Summa ex superficie sphæræ circunscriptæ.	144.
Sūma ex omnibus diagonijs, vel lateribus.	144.

PRO-

PROPOSITIO CXXVIII.

SI tria quadrata æqualia se per angulos invicem secent, eorum latera constituent octaedrũ regulare octo triangulis æquilateris comprehensũ 24 angulis planis, & 6 solidis.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SInt ABCD. AFCE. BEDF. quadrata æqualia per angulos invicem secta. Dico solidum ABCDEF. esse octaedrum regulare octo planis regularibus, nempè triangulis æquilateris comprehensum.

DEMONSTRATIO.

CVm latera AB. BF. FA. sint æqualia, est ABF. triangulum æquilaterum: similitèr FBC. CBE. EBA. ADF. FDC. CDE. EDA. Ergo totũ solidum octo planis ordinatis triangularibus, & æqualibus cõprehenditur. Deindè quilibet angulus solidus B. cõprehenditur quatuor angulis planis æqualibus similitèr dispositis ABF FBC. CBE. EBA. idemque est de alijs: Ergo omnes anguli solidi æquales sunt: Ergo cùm totũ solidum æquilaterum, & æquiagulum sit octo planis regularibus comprehensum erit octaedrum regulare. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

SI tria quadrata æqualia se per angulos secent, habent commune centrum, & sunt invicem perpendicularia.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SInt tria quadrata per angulos secta AC. BD. EF. Dico illa habere commune *centrum*, & esse invicem perpendicularia.

DEMONSTRATIO.

REcta AC. est communis sectio planorũ AFCE. ABCD. & est in plano AFCE. & Recta DF. etiam est in plano AFCE. quia est communis sectio planorum AFCD. BEDF. Ergo cum sint diametri AC. DF. quadrati AFCE. in eorũ dimidio I. erit illius *centrum* (55. M. 2.) similitèr BD. bifariam secta erit in I. Ergo punctum I. est etiam *centrum* quadratorum ABCD. BEDF. Quod, &c.

2. Cùm BI. bifariam diuidat bases AC. EF. in triangulis Isocelibus ABC. EBF. erit perpẽdicularis AC. & EF (5. *l.* 1.) Ergo & plano AFC. (1. *l.* 11.) Ergo plana ABCD. EBFD. sunt perpendicularia plano AFCE (3. *l.* 11.) Idemque est de planis AFCE. ABCD. respectu plani EBFD. Ergo sunt invicem perpendicularia.

PRO-

PROPOSITIO CXXX.

Diametri omnes Octaedri transeunt per centrum prædictis tribus quadratis commune, in quo se omnes bifariam secant, & sunt æquales.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. diametri sunt AC. BD. EF. Dico omnes transire per *cētrum* ss. tribus quadratis cōmune: & in eo se bifariam secare.

DEMONSTRATIO.

CVm diameter BD. sit diameter etiam quadrati ABCD. transit per ipsius *centrum* (55. M 2) Ergo etiam transit per omnium *centrum* quod est commune (102 *p.*) Idem demonstratur de diametro AC. & EF. Ergo cùm diametri omnes Octaedri sint quadratorum diametri, & AC. BD. se bifariam secent in *centro* I. Quadrati ABCD. Idemque sit de diametris AC. EF. quæ sunt etiam quadrati AFCE. diametri omnes Octaedri se bifariam secabunt in communi quadratorum *centro*: Ergo omnes erunt æquales, quia sunt æqualium quadratorum diametri. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXI.

Centrum ff.ss. Octaedri est ipsum cẽtrum tribus quadratis commune, & est in dimidio rectæ coniungentis centra duplicis plani oppositi: quæ omnes cum diametris bifariam in centro secantur.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCD. sit I. *centrum* tribus quadratis commune. Dico esse etiam *centrum* ff.ss. Octaedri: & si G.O. sint *centra* planorum, *centrum* I. esse in dimidio rectæ GO. & omnes rectas, quæ *centra* opposita iungũt se cum diametris bifariam secare in *centro* ff.ss. I.

DEMONSTRATIO.

Centrum ff.ss. ad A.B.C.D. est in cõcursu diametrorum quadrati AC. BD. (55. M. 2.) & *centrum* ad duo puncta E. F. est in medio diametri EF. (35. M. 1.) in eodem puncto I. Ergo *centrum* ad 6. angulos Octaedri est in eodem puncto I. (62. M. 1.) Deindè cùm O. sit *centrum* ad B F. C & G. ad A. E. D. *centrum* ad A. B. C. D. E. F. erit in dimidio rectæ GO (64. M. 1.) Ergo cùm I. sit *centrum* ad A. B. C. D E. F. recta GO. transit per I. & in eo bifariam diuiditur. Quod de quibuslibet planis oppositis demonstratur:

Er-

Ergo omnes se bifariam cum diametris secant in *centro* I. Quod, &c.

PROPOSITIO CXXXII.

IN Octaedro recta coniungens centra duplicis plani oppositi est utrique perpendicularis, & plana illa sunt parallela.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. sint G. & O. *centra* duplicis plani oppositi ADE. FCB. Dico GO. esse utrique plano perpendicularem, & plana ADE. FCB. esse parallela.

DEMONSTRATIO.

CVm enim *centrum ff. ss.* I. sit in diametrorũ concursu, in quo omnes se bifariam secãt (131. *p.*) erunt rectæ IB. IC. IF. æquales: & cùm BF. FC CB. sint etiam æquales rectæ, Pyramis BFC. habebit basim æquilateram, & latera supra illam æqualia: Ergo recta IO. transiens per *centrum* basis BFC. erit ipsi perpendicularis (3. *p.*) similitèr ostendetur IG perpẽdicularis plano ADE Ergo cùm recta GIO. eadem sit (131. *p.*) est ipsa utrique plano perpendicularis: Ergo cùm plana opposita habeant cõmune perpendiculum, erunt inter se parallela (3. *l.* 11.) Quod erat demonstrandum, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIII.

O*Mnes rectæ coniungentes opposita centra æquales sunt inter se.*

2. *Centrum Octaedri est commune tā sphæræ inscriptæ, quàm circunscriptæ.*

DEMONSTRATIO. Fig. 27.

CVm IO. sit plano BFC. perpendicularis recti sunt anguli in O. Ergo Quadratum IO. est differentia quadratorum semidiametri IB. & rectæ BO. ab angulo in *centrum* plani (4. *l.* 2) Ergo cū omnes diametri Octaedri sint æquales (130. *p.*) & omnes rectæ ab angulis in planorum *centra* sint etiam æquales in triangulis æquilateris (1. *M.* 2.) æquales erunt quadratorum differentiæ: Ergo omnes rectæ à *centro* I. in planorum *centra* erunt æquales: Ergo cùm rectæ quæ *centra* coniungunt sint eorum duplæ, etiam æquales erunt.

2. Cum rectæ IG. IO, &c. sint perpendicula æqualia sphæra radio IO. descripta tanget omnia plana: Ergo erit inscripta. Similitèr cū semidiametri IB. IC. &c. æquales sint sphæra radio IB. descripta transibit per omnes angulos, & erit circunscripta. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXIV.

IN Octaedro minima summa ex centro ff. ss. æqualis est sex figuris ex radio sphæræ circunscriptæ: & sesquialtera similis figuræ ex diametro: & tripla similis figuræ ex latere, & noncupla radij circuli circa △.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro ABCDEF. sit *centrum ff. ss.* I. Dico minimam summam ex *centro* I. æqualem esse 6 *ff. ss.* ex Radio IB. sphæræ circunscriptæ: & sesquialterã figuræ ex diametro BD. & triplam figuræ AB, &c.

DEMONSTRATIO.

CVm *cẽtrum ff. ss.* Octaedri I. est *cẽtrum* sphæræ sex angulis A. B. C. D. E F. erit minima summa æqualis sex figuris IA. IB. IC. ID. IE. IF. hoc est sex figuris ex radio IB. & cum figura BD. sit æqualis 4 *ff. ss.* IB. (3. *l.* 2.) erit minima summa ad figuram similem BD. vt 6. ad 4. vel sesquialtera: & cùm figuræ ex B. sint æquales minimæ summæ + 6 *ff. ss.* radij IB (60. M. 1.) ablatis quatuor, nempè BD. erũt BA. BE. BF. BC. æquales 8 BI. & quælibet erit 2 BI. Ergo cum minima summa sit 6 BI. erit tripla figuræ lateris BA. sed hæc est tripla radij GA (112. M. 2.)

Er-

Ergo minima summa est noncupla similis figuræ ex radio circuli. Quod,&c.

PROPOSITIO CXXXV.

Radius sphæræ Octaedro circunscriptæ ad radium inscriptæ est potentia triplus, nempè vt latus trianguli ad radium circuli, & ad latus est potentia subduplus, & minima summa ex centro ad contactus planorum æqualis est figuræ simili ex diametro circuli.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt Octaedri, & sphærarum commune *centrum* I. Dico radium IB. sphæræ circunscriptæ esse potentia triplũ radij IG. sphæræ inscriptæ, vel vt latus DA ad radium GD. circuli triagulo circunscripti,&c.

DEMONSTRATIO.

QValium minima summa est 6 figuræ ID. figura DA. est 2 DI. (134 *p*) Ergo figura DA est dupla DI. vel qualium figura DI. est 9. erit DA. 18. Ergo cum figura DA. sit tripla DG. (8. M. 2.) erit figura DG. 6. sed cum angulus IGD. sit rectus, est figura DI. æqualis DG. GI. (4. *l*. 6.) Ergo qualium DI. est 9. & DG. 6. erit GI. 3. Ergo figura radij sphæræ circũscriptæ DI. est tripla figuræ radij sphæræ inscriptæ GI. Ergo DI. ad IG. est vt DA. ad DG.

Tan-

Tandem quia sunt 8 contactus planorum, minima summa ad illos erit 8 *ff*. GI. hoc est 24: sed quia GD. potest 6: tota diameter circuli poterit 24. (3. *l*. 2.) Ergo, &c.

PROPOSITIO CXXXVI.

Summa ff. ss. ex omnibus lateribus Octaedri quadrupla est minimæ summæ: dupla summæ ex quolibet angulo solido: vel puncto superficiei sphæræ circunscriptæ, & sextupla similis figuræ ex diametro.

EXPOSITIO. Fig. 27.

In Octaedro ABCDEF. sit *centrum ff. ss.* I. & diameter BD. Dico summam *ff. ss.* ex omnibus 12 lateribus esse quadruplã minimæ summæ ex *centro* I. & duplam summæ ex quolibet angulo B. & sextuplam similis figuræ factæ ex diametro BD.

DEMONSTRATIO.

Qualium minima summa ex 6 BI. figura vnius lateris BA. est 2 BI (134 *p*) Ergo summa *ff. ss.* ex 12 lateribus erit 24: scilicet quadrupla minimæ: & cum summa ex B. æqualis sit BA. BE. BF. BC + BD. hoc est 8. BI + 4 BI. scilicet 12 BI erit summa ex lateribus quæ est 24 BI. dupla summæ ex B. Tandem cum figura BD. sit æqualis 4 *ff ss* BI. (3 *l*. 2.) erit summa *ff. ss.* ex omninibus lateribus sextupla similis figuræ ex diametro. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXVII.

SVmma ff. ff. ex quolibet planorum centro, vel puncto superficiei sphæræ inscriptæ dupla est similis figuræ diametri: quadrupla lateris: Sextupla diametri inscriptæ sphæræ: Octupla radij circunscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

IN Octaedro est IG. radius sphæræ inscriptæ: Dico summam ff. ff. ex quolibet puncto superficiei huius sphæræ tangentis plana in eorum *centris* G. O. &c. esse duplam figuræ BD. quadruplam BA. sextuplam GO. & octuplam similis figuræ BI.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex G. æquatur minimæ + 6 GI. (60. M. 1.) sed minima est 6 DI. (134. *p.*) & 6 GI. sunt 2 BI (136. *p.*) Ergo summa ex G. æquatur 8 BI. sed figura BD. est 4 BI. (3. *l.* 2.) Ergo summa ex G. dupla est figuræ BD. & octupla BI. Ergo cum BD. sit dupla BA. (4. *l.* 2.) erit summa ex G. quadrupla figuræ BA. & quia summa ex G. est 6 DI + 6 GI. vel 18 GI + 6 GI. hoc est 24 GI. & GO. tantum est 4 GI (3. *l.* 2) erit illa istius sextupla. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXXXVIII.

EAdem summa ff. ff. ex quolibet puncto superficiei sphæræ inscriptæ sesquitertia est minimæ summæ: subsesquialtera summæ ex quolibet puncto superficiei sphæræ circunscriptæ: & subtripla summæ ff. ff. ex omnibus lateribus collectæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt IG radius sphæræ inscriptæ: & IB. circunscriptæ. Dico summam ex quolibet puncto G. superficiei inscriptæ esse sesquitertiam minimæ: subsesquialterã summæ ex B. subtriplã summæ *ff*. ex lateribus.

DEMONSTRATIO.

CVm summa ex G. æqualis sit 8*ff* IB. (137.*p*.) & minima sit 6*ff*. IB (134.*p*) erit illa sesquitertia vt 8. ad 6. vel vt 4. ad 3. Deindè cum summa ex angulo B. sit 12*ff*. IB. (136.*p*.) erit summa ex G. subsesquialtera summæ ex B. vel vt 8. ad 12. vel vt 2. ad 3. Tandem cum summa *ff*. ex lateribus sit quadrupla minimæ; nempè æqualis 24*ff*. IB. (136.*p*.) erit sũma ex G. subtripla istius: nempè vt 8. ad 24. vel vt 1. ad 3. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXXXIX.

SI ex centro Octaedri describatur sphæra tangens vnum latus; tanget etiã reliqua: & summa ff. ff ex centro ad contactus, æqualis erit minimæ ad angulos.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SI radio IK. describatur sphæra tangens latus BF. Dico illam tangere etiam omnia latera: & summam ff. ff. ex I. in contactus K. H. &c. esse æqualẽ minimæ in angulos solidos A. B &c.

DEMONSTRATIO.

CVm BD. sit bifariam diuisa in I. & BF. in K. erit IK. parallela DF. & eius dimidium (2. *l.* 6.) Ergo angulus BKI. rectus sicut BFD. (3. *l.* 1.) Quod de omnibus rectis à *centro* in dimidia latera demonstratur: Ergo cùm omnia latera sint æqualia etiam eorum dimidia erunt æqualia: Ergo sphæra tangens vnum latus tãget omnia. Deinde cum potentia IK. sit $\frac{1}{4}$ potentiæ DF. (3. *l.* 2.) & BI. sit $\frac{1}{2}$ DF. (135. *p*) potẽtia IK. erit $\frac{1}{2}$ BI. Ergo 12 *ff*. IK. in duodecim larera æquales erunt minimæ sũmæ in angulos, quæ est 6 *ff*. IB. (134. *p*.) Quod erat demonstrandũ.

PRO-

PROPOSITIO CXL.

SVmma ff. ss. ex dimidio laterum, vel ex quouis puncto superficiei sphæræ lateribus inscriptæ, est noncupla figuræ ex radio sesquialtera minimæ summæ: & sesquioctaua summæ ex superficie inscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 27.

SI radio IK. & *centro* intelligatur descripta sphæra tangens latera: Dico summam *ff. ss.* ex quolibet puncto K. superficiei sphæricæ esse noncuplam figuræ IB. & sesquialteram minimæ summæ ex I. & sesquioctauam summæ ex G. vel ex quolibet puncto superficiei sphæræ inscriptæ radio IG.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff. ss.* ex quolibet puncto K. superficiei dictæ æquatur minimæ + 6 *ff.* IK. (60. M. 1.) hoc est + 3 *ff.* IB. (139 *p.*) sed minima summa æquatur 6. *ff.* IB. (134. *p.*) Ergo summa ex K. æquatur 9. *ff* IB Ergo est noncupla huius: Ergo etiam cum summa ex K. sit 9. *ff.* IB. & minima summa sit 6. *ff.* IB. erit illa sesquialtera istius. Tandem cum summa ex superficie sphæræ inscriptæ, vt ex G. sit 8. *ff.* IB (137. *p.*) & summa ex K. sit 9. *ff.* IB. erit hæc sesquioctaua illius. Quod erat demonstrandum.

Scho-

SCHOLIVM.

Quæ potentiæ sint continuæ, & plures aliæ rationes colligi possunt ex sequenti.

TABVLA POTENTIARVM OCTAEDRI.

Qualium Diameter Octaedri potest.	36.
Radius circuli triangulo inscripti GH.	$1\frac{1}{2}$.
Perpendiculum à centro plani in latus.	$1\frac{1}{2}$.
Radius sphæræ inscriptæ IG.	3.
Perpendiculum à centro in plano.	3.
Radius sphæræ tangentis latera IK.	$4\frac{1}{2}$.
Radius circuli triangulo circunscripti GD.	6.
Semidiameter Quadrati.	9.
Radius sphæræ circunscriptæ IB.	9.
Distantia planorum opp.	12.
Diameter sphæræ planis inscriptæ GO.	12.
Diameter sphæræ tangentis latera.	18.
Latus Octaedri BA.	18.
Recta ab angulo in centrum plani opp.	18.
Diameter circuli circunscripti AGD.	24.
Diameter Quadrati.	36.
Diameter Octaedri, & sphæræ circunscriptæ.	36.
Minima ad contactus planorum.	24.
Minima summa ex centro I.	54.
Minima summa ad contactus laterum.	54.
Summa ex superficie inscriptæ.	72.
Summa ex superficie tangentis latera.	81.
Summa ex superficie circunscriptæ.	108.
Summa ex omnibus lateribus.	216.

PRO-

PROPOSITIO CXLI.

SI angulis, & cẽtro decagoni sint 11. *radij perpendiculares, & radio centri addatur vtrinque latus decagoni, quæ alterna puncta coniungunt Icosaedrum regulare comprehendunt, ex* 20 △△. 30 *lateribus, &* 12 *angulis solidis.*

EXPOSITIO. Fig. 28.

CIrculo HFDA. in 10. partes diuiso. H. G F. &c. sint radij perpendiculares GR. FQ EP. &c. & in *centro* XZ. cui addantur latera decagoni ZYXy. Ductis ad alterna puncta RH. RF. FP. &c. YR. YP. &c yH. yF. yD. &c. Dico solidum esse Icosaedrum regulare ex lateribus, angulis, & planis æqualibus constans.

DEMONSTRATIO.

PVncta R. Q. P. O. N. &c. efficiunt decagonũ parallelum omninò æquale ipsi H G F. &c. (4 *l.* 11.) & radij GR. FQ. EP. &c. sunt vtrique perpendiculares (3 *l.* 11.) Ergo ductis radijs ZN. ZP. &c. recti erunt anguli YZP. YZN. &c. (23. *P.*) Ergo quia YN. æquè potest ac Radius NZ. & latus decagoni ZY. (4. *l.* 2.) erit æqualis lateri Pentagoni RP. (117. *M.* 2) & similitèr TY. RY. &c. Ergo 5 △△ Pyramidis TRPNLY. sunt ex latere ⬠ RP. & similitèr alia 5 △△ Pyramidis HFDBKy.

Dein-

Deinde quia RGF. angulus est rectus (23. *P.*) & RF. æquè potest ac radius RG. & latus decagoni GF. (4 *l.* 2.) erit RF. æqualis lateri ⬠ RP. (117. M. 2) & similitèr FP. PD. &c. Ergo 10 △△ HRF. FRP. &c. sunt etiam ex latere ⬠ RP. Ergo totum solidũ constat ex 20 △△ æquilateris, & 60 angulis planis, & 30 lateribus (quodlibet enim est duobns angulis commune) & 12 angulis solidis æqualibus, cum vnusquisque ex 5 angulis planis æqualibus constet (23. *P.*) Ergo quia constat ex planis, angulis, & lateribus æqualibus solidum est Icosaedrum regulare (24 *P.*) quod, &c.

PROPOSITIO CXLII.

D*Iameter Icosaedri potest quintuplum radij circuli ambientis Pentagonum, & omnes sunt æquales.*

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN prædicto Icosaedro YND. &c. Dico quãlibet diametrum Y*y*. TD. &c. posse quintuplum radij XD. circuli transeuntis per quinque angulos Icosaedri: & omnes diametros esse æquales inter se.

DEMONSTRATIO.

QVia angulus TID. rectus est (ex *constr.*) diameter Icosaedri DT. æquè potest ac radius

dius TI. & diameter circuli ID. (4. *l.* 2.) sed □ ID. æquatur 4 □ radij IT. vel IX. (3. *l.* 2.) Ergo □ TD. diametri Icosaedri æquatur 5 □ dadij circularis IT. & similitèr HN. KP BR. &c. Tũ quia YX. constat ex radio XZ. & latere decagoni ZY. est proportionalitèr secta in Z. (127. M. 2.) Ergo addito minori segmento Xy. vel YZ. composita Yy. potest 5 □ maioris segmenti, vel radij XZ. (107. M. 2.) Ergo 6 diametri Icosaedri singulæ possunt 5 □ radij circularis: Ergo quadrata diametrorum sunt inter se æqualia: Ergo etiam diametri (4. *l.* 6) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLIII.

OMnes diametri Icosaedri se bifariam secãt in eodem puncto: 2. & hoc est centrum sphæræ circunscriptæ: 3. latera, & plana opposita sunt parallela.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN Icosaedro sint diametri Yy. TD. RB. &c. Dico omnes se bifariã intersecari in *x*. quod est *centrum* sphæræ circunscriptæ, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia omnes radij eleuati IT. GR. XZ. &c. sunt plano perpẽdiculares ex *hyp.* 141. *p.* sunt inter se paralleli, ac in eodem plano bini

(2.*l*.11.) Ergo in plano TID. cum IT. X*x*. sint parallelæ, erit vt DX. ad æqualem XI. ita D*x*. ad æqualem *x*T. & vt DX. est dimidium DI. ita X*x*. est dimidium radij IT. vel XZ. (2.*l*.6.) & sic de reliquis: Ergo diametri omnes se bifariam secant in *x*. & cùm sint æquales (142.*p*.) erunt etiam æquales semidiametri *x*Y. *x*N. &c. Ergo si ex *centro x*. radio *x*N. describatur sphæra trãsibit per omnes angulos solidos Icosaedri.

Tandem diametri Y*y*. & TD. se intersecantes sunt in eodem plano (1.*l*.11.) Ergo quia est Y*x*. ad æqualem *x*T. vt *y**x*. ad æqualẽ *x*D. sunt TY. *y*D. parallelæ (2.*l*.6) & similitèr YR. *y*B. &c. Ergo cũ anguli TYR. D*y*B. sint paralleli, sunt plana TYR. D*y*B. parallela (1.*l*.11.) & sic de reliquis. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLIV.

IN Icosaedro perpenditulum △ æquè potest ac latus decagoni, & perpendiculum à centro Pẽtagoni. Tum æquè ac radius, & dimidium minoris segmenti proportionalis.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN △ THK sit perpendiculum T*z*. & bisecabit basim HK (5.*l*.1.) & similiter *y**z*. & etiã X*z*. bisecabit arcum HIK. trãsiens per I (2.*l*.3.) Dico T*z*. æquè posse ac perpendiculũ X*z*. &

la-

latus decagoni IK. tum æquè ac radius X I. & dimidium minoris segmenti eiusdem radij proportionalitèr secti.

DEMONSTRATIO.

QVia angulus zXy. est rectus (141. *p.*) & yX. latus decagoni, & Xz. perpendiculum a *centro* ⌂. recta yz. vel Tz. perpendiculum △ HyK. æquè poterit ac yX. & Xz. (4. *l.* 2.) Ergo, &c. Similitèr quia angulus TIX. rectus est (141. *p.*) recta Tz. perpendiculum △ HTK. æquè potest ac radius TI. & recta Iz. (4. *l* 2.) sed Iz. est minus segmentum semiradij, vel semisegmentum minus radij proportionalitèr secti (129. M. 2.) Ergo Tz. æquè potest ac radius, & dimidium minoris segmenti eiusdem proportionalitèr secti. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CXLV.

IN Icosaedro perpendicularis per centrum in planum △ est per centrum ff. ss. △, & per centrum oppositi △: & vtriusque distantia, qua, & qualibet recta per centrum Icosaedri est bifariam diuisa. 3. Quæ verò latera opposita subcontrariè æqualitèr secat, est per centrum, & contrà.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SI ex *x*. ducatur perpendicularis △ HKy. Dico esse per *centrum ff. ss.* △ &c.

DEMONSTRATIO.

PYramis TRHx. basim habet æquilateram, & latera Hx. Tx. Rx. æqualia (142. *p*) Ergo perpendiculum *xp*. in basim HRT. est per illius *centr. ff. ff.* quod est *p*. (4. *p*.) sed △DPN. est ipsi parallelum (143 *p*.) Ergo perpendiculum est commune (3. *l*. 11.) & etiam per *f. centr. ff. ff.* (4. *p*.) & etiam æquale ex Pyramidum congruentia (1. *P*.) Ergo perpendicularis communis est vtrique plani distantia, & in *x* bisecta: & etiam quæuis alia per *centrum x*, quia cum illa efficit △△ similia (2. *l*. 6.) Deindè TH. ND. æquales sunt, & parallelæ (142. *p*.) & parallelogrammũ efficiunt (7. *l*. 1.) cuius *centrum* est in concursu diametrorum *x*. (55. M. 2.) Ergo quæ sub contrarie secat æquales T*b*. D*d*. erit per *centrum x*. & è *contrà* (55. M. 2.) Quod, &c.

PROPOSITIO CXLVI.

ICosaedri centrum est etiam centrum sphæræ inscriptæ tangentis plana, & etiam tangentis latera, & pariter centrum ff. ff. ad omnes angulos, & contactus.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SI ex *centro* Icosaedri *x*. describatur sphæra tãgens △TRY. vel latus RY. Dico tangere omnia

nia △△, vel omnia latera, & *x*. esse *cẽtrum ff. ff.* ad angulos, & contactus.

DEMONSTRATIO.

DVctis diametris TD. RB. &c. fiunt 20 Pyramides, quæ omnes habent idem perpendiculum (145. *p.*) Ergo sphæra quæ tangit △ TRY. tanget omnia △△: similitèr quia △△ Icoſcelia T*x*H. R*x*H. omninò æqualia sũt, perpendicula habent æqualia ex congruentia (1. *P.*) Ergo sphæra tangens vnum latus, tangit omnia latera Icoſaedri.

Deindè quia omnes diametri ſunt biſariam ſectæ in *x*. (143. *p.*) eſt *x. centr. ff. ff.* ad R. B. & ad T. D. &c. (35. M. 1.) Ergo & ad omnes angulos T. Y. N. &c. (63. M. 1.) eadem eſt demonſtratio de contactibus planorum, & laterum. Quia communia perpendicula ſint in *x*. bifariam diuiſa (145. *p.*) Ergo, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXLVII.

Planum transiens per centrum Icosaedri secat latera, & plana opposita subcontrariè in partes æquales 2. & habet commune cētrum ſſ.ſſ. 3 Et quæuis recta per centrum ipsum planum bifariam diuidit: 4. omnia plana per centrum Icosaedri ipsum, & se ipsa bifariam diuidunt, & èconuerso.

DEMONSTRATIO. Fig. 28.

THesis perspicua est, & etiam demonstratio, quia si planū per *centrum x*. secet latus TH. in *b* & ducatur recta *bx*. tota erit in plano (1. *l*. 11.) & secabit latus oppositum DN. in partes æquales subcōtrariè D*d*. T*b*. tum *d*N. *b*H. (145. *p*.) & sic de reliquis: Ergo, &c.

2. Cum omnes rectæ quæ coniungunt sectiones laterum subcontrariè æquales sint in *centro x*. bifariam diuisæ (145. *p*.) erit *x*. *centr*. *ſſ*.*ſſ*. ad omnes laterum sectiones binas (35. M. 1.) Ergo & *centrum* plani ad omnes sectiones (63. M 1.)

Tertia, & quarta pars, & illius conuersa eodem modo sunt demonstandæ, quo sectio parallelepipedi in *prop*. 77. 78. & 79 Demonstrationē hic ommitto, quia res per se clara multiplici linearum ductu confundenda non est.

PRO-

PROPOSITIO CXLVIII.

IN Icosaedro minima summa ff. ss. ex centro æqualis est 12 ff. ss. ex radio sphæræ, & 3 ff. ss. ex diametro, & 15 ff. ss. ex radio circuli, & □ huius ad □ radij sphæræ est vt 4. ad 5. & summa ff. ss. ex quolibet angulo est dupla minimæ, & æqualis 24. □ radij sphæ...

DEMONSTRATIO. Fig. 28.

QVia cum anguli solidi sint 12 æqualiter à *centro x.* remoti (143. *p.*) erit minima summa æqualis 12 *ff. ss. x*Y. & quia □ Y*y.* æquale est 4 □ *xy* (3. *l.* 2.) & *ff. ss.* sunt vt quadrata (4. *l.* 6) erunt 12 *ff. ss. x*Y. æquales 3 *ff. ss. xy.* & quia □ Y*y.* æquale est 5 □ radij circularis (142. *p.*) erunt 3 □ Y*y.* æqualia 15 □ XD. idemque est de *ff. ss.* & quia 12 □ *x* Y. æqualia sunt 15 □ XD. erunt 4 □ *x*Y. æqualia 5 □ XD. Ergo si □ XD. sit 4. erunt 5 □ XD. 20: & cum 4 □ *x* Y. etiam valeant 20: quodlibet erit 5: Ergo □ XD. ad □ *x*Y. est vt 4. ad 5.

Tandem quia summa *ff. ss.* ex quolibet puncto superficiei sphæricæ, superat minimam totidem □ □ radij: Ergo summa *ff. ss.* ex quouis angulo Y. *æqu.* 24 *ff. ss.* ex radio *xy.* & est dupla minimæ, &c.

PROPOSITIO CXLIX.

DIameter Icosaedri ad radiũ circuli ambientis ⬠ ex latere Icosaedri est vt perpendiculum ex vertice ad perpendiculum ex centro ⬠.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SIt ⬠ HFDBK. ex latere Icosaedri FD. & radius circuli circunscripti XD. perpendicula Dz. Xz. Dico diametrum Yy. ad XD. esse vt Dz. ad Xz.

DEMONSTRATIO.

QVia perpendiculum ex vertice Dz. potest quintuplum perpendiculi à *centro* Xz. (182. M. 2.) sed etiam Yy. potest quintuplum ipsius XD. (141. *p.*) Ergo cùm potentiæ sint proportionales, etiam rectæ: Yy. ad XD. vt Dz. ad Xz. (5. *l.* 6,) Quod, &c.

PROPOSITIO CL.

SI in prædicto circulo decagonum inscribatur, diameter Icosaedri æqualis erit compositæ ex latere decagoni, & secundo diagonio.

EXPOSITIO. Fig. 28.

IN circulo TRPN. sit inscriptum decagonũ, cuius latus NM. & secundum diagonium NV. Dico Yy. æqualem esse MN + NV.

DE-

DEMONSTRATIO.

Etenim diagonium NV. æquale est radio ZN+NM. lateri decagoni (139. M. 2.) Ergo NV+NM. æqualis erit ZN+2NM. sed etiã Yy æqualis est ZX. vel radio ZN. & ZY+Xy. hoc est 2NM. lateribus decagoni (141. *p.*) Ergo Yy. æqualis est VN+NM. Quod, &c.

PROPOSITIO CLI.

Diameter Icosaedri potest triplum diagonij ⬠ inscripti circulo ambienti triangulum Icosaedri.

EXPOSITIO. Fig. 28.

Circulus NDP*n*. circunscribat △ Icosaedri PND. & in eo circulo cõcipiatur inscriptum ⬠ Dico diametrum Yy. posse triplum diagonij dicti ⬠

DEMONSTRATIO.

Cum enim est latere △ PN. descriptum sit ⬠ TRPNL. in circulo radij ZN. erit □ ex diagonio pentagoni in circulo minori NDP*n*. ad □ radij maioris ZN. vt 5 ad 3 (185. M. 2.) sed □ ZN. ad □ Yy. est vt 3 ad 15 subquintuplum (142. *p.*) Ergo ex æquo □ diagonij ⬠ ad □ Yy. est vt 5 ad 15 (1. *l.* 5.) nempè subtriplum. Quod &c.

PROPOSITIO CLII.

IN Icosaedro distantia duplicis plani paralleli oppositi æqualis est composita ex diametro circuli ambientis △, & ex semisegmento maiori eiusdem proportionaliter secti.

EXPOSITIO. Fig. 28.

SInt △△ opposita THK. & PND. & eorum distantia *pf* (145. *p.*) & circuli NDP*n.* circūscripti △ PND. sit diameter D*n* proportionaliter secta in *g*. Dico distantiam *pf* æqualem esse diametro D*n* + $\frac{1}{2}$. *ng*.

DEMONSTRATIO.

PLanū TzD. secās plana parallela THK. PND. facit sectiones parallelas D*n*. Tz. (3. *l.* 11.) Ergo cum radij T*p*. *fn*. sint æquales (109. M. 2.) erunt T*n* *pf* parallelæ æquales (7. *l.* 1.) & cùm angulus T*pf*. sit rectus (145. *p.*) etiam T*n*D. (7. *l.* 1.)

Deindè composita D*n* + *ng*. est proportionaliter secta, & maius segmentum est D*n*. minus verò *ng*. (104 M. 2.) Ergo □ D*n*. maioris segmenti, & □ D*n* + $\frac{1}{2}$ *ng*. compositæ ex maiori, & semisse minoris æquatur 3 □ ex diagonio ⬠ inscripti circulo NDP*n*. (198. M. 2.) sed □ diametri Icosaedri DT *æq*. 3 □ diagonij ⬠ (151 *p.*) Ergo □ DT *æq*. □ D*n*. & □ *n* + $\frac{1}{2}$ *ng*. sed □

DT.

DT. *aeq.* □D*n* + □T*n*. vel *pf.* (4 *l*.2.) Ergo, T*n*. vel *pf.* æqualis est compositæ D*n* + ½ *ng*. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIII.

SI recta sit proportionaliter secta, & ex tota, & maiori segmento circuli describantur in sex partes diuisi, & ad alterna puncta minoris erigatur perpendicula æqualia radiorum summæ, & ad alterna maioris æqualia maiori, & minori radio: quæ puncta coniungunt comprehendent Icosaedrum regulare, &c.

EXPOSITIO. Fig. 29.

RECta GZ proportionaliter secta sit in A. radij sint ZA. ZG. & in minori circulo △ABC & △DFE. radij ZDM. ZAG. maiorem circulum in sex æquales partes diuidunt. Perpendicula sint DS. ET. FR. æqualia radiorum summæ GZ+ZF. tum GO. LX. IQ. ipsi ZG. & MN. KP. HV. ipsi ZA. ductis ergo lineis AO. AN. ON OS. NS. &c. Dico solidum comprehēsum esse Icosaedrum regulare, &c. prout in prop. 141.

DEMONSTRATIO.

IN △ABC. est □BC. *aeq.* 3□ZF. & ZF. bifariā secta in *n*. (112. M. 2.) & □BK *aeq.* □B*n* + □*n*K. (4. *l*. 2.) sed □B*n*. æquatur 3□Z*n*. (113. M. 2)

2.) & quia ZK. est proportionaliter secta in F ex *hyp.* & *n*F. est dimidium maioris segmenti: erit □ *n*K. *æq.* 5 □ Z*n*. (105. M. 2.) Ergo □ BK. *æq.* 8 □ Z*n*. sed □ KP. vel ZF. *æq.* 4 □ Z*n*. (3. *l.* 2.) & □ BP. *æq.* □ PK + □ KB. (4 *l.* 2.) Ergo □ BP. *æq.* 12 □ Z*n*. vel 3 □ ZF. vnde æquales sunt BC. & BP. & similitèr CP. CN. NA. AV. VB. & pariter SO. OT. TQ. QR. RX. XS. Deinde □ AO. *æq.* □ OG. vel ZG + □ GA (4. *l.* 2.) & cum ZG. sit proportionaliter secta in A est □ ZG + □ GA. æquale 3 □ ZA (108. M. 2.) Ergo æquales sunt AO. & AB. & similitèr BQ. CX. tũ SN. RP. TV. Tandem si G*p*. sumatur æqualis HV. vel radio ZA. erunt *p*V. GH. æquales, quia iungunt parallelas æquales G*p*. HV (7. *l.* 1.) sed GH. latus Hexagoni est æqualis radio GZ. vel GO. Ergo etiam *p*V. & *p*O. erit æqualis GA. sed cùm angulus O*p*V. rectus sit vt OGH (7 *l.* 1.) est □ OV *æq.* □ O*p* + □ *p*V. vel □ GA + □ GZ vel 3 □ ZA (108. M. 2.) Ergo OV. æqualis est AB. & similiter VQ. & XN. XP. tum PQ. ON. Ergo omnia triangula sunt æquilatera: & solidum Icosaedrum prout in prop. 141. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLIV.

IN Icosaedro distantia oppositorum laterum potest triplum maioris radij, & æqualis est lateri △ inscripti circulo maiori. 2. & æqualis diagonio ⬠ inscripti circulo per 5 angulos solidos. 3. Et etiam rectæ à centro △ ad angulos oppositi △

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN Icosaedro OBP. &c. Dico distantiam laterum OV. XP. posse triplum radij ZG. &c.

DEMONSTRATIO.

QVia HV. & KP. sunt plano perpendiculares, sunt parallelæ, & in vno plano (2. *l.* 11.) Ergo cum sint æquales (153. *p.*) quæ ipsas iungunt, erunt æquales VP. HK. (7. *l.* 1.) sed HK. est latus △ in maiori circulo, & potest triplum radij ZG (112. M. 2.) Ergo VP. potest triplum ipsius ZG. sed si ducatur recta HK. erit angulus GHK. in semicirculo rectus (3. *l.* 3.) & angulus KHV. rectus est (23. *P.*) Ergo recta KH. est plano HO. perpendicularis (1. *l.* 11) Ergo etiam VP (2. *l.* 11.) Ergo PV. perpendicularis est lateri VO (23. *P.*) & XP. (13. *P*) & est eorum distantia potens triplum GZ.

2. Deindè VP. est diagonium ⬠ VBPRT. Ergo diagonium potest triplum GZ.

3. Quoniam angulus ZYR. rectus est, si duca-

catur ZR. erit □ ZR. æquale □ ZY + □ YR. (4. *l.* 2.) hoc eſt □ GF + □ FZ. ſed quia FG. eſt proportionaliter ſecta in Z (153. *p.*) eſt □ totius FG + □ minoris ſegmenti FZ. æquale 3 □ ZG. maioris ſegmenti (108. M. 2.) Ergo VP. ZR. & HK. æquales rectæ ſunt. Quod, &c.

PROPOSITIO CLV.

IN Icoſaedro radius circuli per 3 angulos remotiores ad radiũ circuli p r 5 angulos eſt vt diagonium ⬠ ad latus △: vel vt recta potens totam, & maius ſegmentum ad rectam, quæ poſsit totã, & minus ſegmentum.

EXPOSITIO. Fig. 29.

REcta GZ. eſt radius circuli per 3 angulos O. Q. X. & *x*. ſit radius circuli per 5 angulos V. B. P. R. T. Dico GZ. ad *x*. eſſe vt diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo, &c.

DEMONSTRATIO.

SInt inſcripta △△, & ⬠⬠ in vtroque circulo: & *l*. latus △ minoris, & L. latus △ maioris: & *d*. diagonium ⬠ minoris, & D. maioris, & erunt vt *l*. ad *L*. ita radius *x*. ad radium GZ. & ita paritèr *d*. ad D (5 *l*. 6.) Ergo *l*. ad L. eſt vt *d* ad D. (1. *l*. 5.) ſed L. & *d*. ſunt æquales (154 *p*) Ergo vt *l*. ad L. ita eſt L. ad D. (2. *l*. 5.) Ergo vt latus △ maioris ad diagonium ⬠ maioris, ita

ra-

radius *x*. ad radium GZ (1. *l*. 5.) nempè vt recta potens totam & maius segmentum ad rectam, quæ possit totam, & minus segmētum (M. 2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLVI.

Latus Icosaedri est maius segmentum distātia laterum proportionaliter sectæ.

EXPOSITIO. Fig. 28.

In Icosaedro OBP. &c. Dico latus AB. esse maius segmentum distantiæ oppositorum laterum VP. proportionaliter sectæ.

DEMONSTRATIO.

Quia latus Icosaedri AB. vel BP. est latus pētagoni per 5 angulos B. P. R. T. V. (141. *p*.) & distantia PV. est diagonium ⌂ in eodem circulo (154. *p*.) sed latus ⌂ est maius segmentum diagonij ⌂ in eodem circulo (122. M. 2.) Ergo latus Icosaedri est maius segmentum distantiæ oppositorum laterum. Quod erat, &c.

PRO

PROPOSITIO CLVII.

Diameter Icoſaedri æquè poteſt ac latus, & diſtantia oppoſiti, vel triplum radij maioris, & minoris. 2. & æquè ac diameter circuli maioris, & radiorum differẽtia: vel diſtantia vtriuſque plani maximi. 3. tum æquè ac diameter minoris circuli, & radiorum ſumma, vel diſtantia △△

EXPOSITIO. Fig. 29.

IN Icoſaedro OBP. Dico □ TC. diametri æquale eſſe □ OV+VP. vel æquale eſſe 3 □ ZG+3 □ ZA. tum □ GK+□ GA. vel □ OP. tũ □ AF+□ FG.

DEMONSTRATIO.

QVoniam diſtantia VP. laterum oppoſitorũ vtrique lateri eſt perpendicularis (145. *p.*) Ergo cum angulus OVP. ſit rectus, erit □ OP. diametri æquale □ OV. lateris + □ VP. diſtantiæ laterum (4. *l.* 2.) ſed □ OV. vel AB. æquatur 3 □ radij AZ. (112. M. 2.) & □ VP. æquatur 3 □ radij GZ (154. *p.*) Ergo □ diametri OP. *æq.* 3 □ GZ+3 □ AZ.

2. Ex perpendiculari GO. ſumatur G*p*. æqualis KP. vel radio ZA. & cum GO. ſit æqualis GZ. (153. *p.*) erit PO. æqualis radiorum differentiæ GA. Ergo cum G*p*. KP. ſint parallelæ æqua-

æquales(3.*l.* 11.) erunt GK*p*P. parallelæ æquales, & anguli ad *p*. recti ſicut angulus K. (2 *l.*1.) Ergo diameter OP. æquè poteſt ac *p* P. quæ eſt diameter GK. & *p*O. quæ eſt radiorum differẽtia GA. (4.*l.* 2.) & etiam diſtantia duplicis plani maximi OQX. VNP. &c.

3. Cũ angulus AFR rectus ſit, erit □ diametri AR æquale □ diametri AF + □ FR (4.*l.* 2.) ſed FR. eſt æqualis ſummæ radiorum F G. (153.*p.*) Ergo □ diametri AR. æquale eſt □ AF + □ FG. diametri minoris, & radiorum ſummæ. Idemque eſt de reliquis, cum omnes diametri ſint æquales(141.*p.*) Ergo, &c.

PROPOSITIO CLVIII.

SI ex recta proportionaliter ſecta, & maiori ſegmento circuli deſcribantur in 10 partes diuiſi: & ad alterna puncta minoris erigantur perpendicula æqualia radiorum ſummæ, & ad puncta maioris alterne æqualia, maiori, & minori radio, quæ alterna puncta coniungunt comprehendent dodecaedrum regulare.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SIt recta X P. ſecta proportionaliter in E. & circuli in 10 partes diuiſi EFA. &c. PQI. &c. & ad F. G. H. I. K. ſint perpendicula *æq* HP. & ad Q. R. S. T. V *æq* XP. & ad P. L. M. N. O. *æq.* XH.

ductis EA. Al lq. &c. Dico comprehendi dodecaedrum regulare.

DEMONSTRATIO.

PVncta eleuata efficiũt plana parallela æqualia, & similia inferioribus (4. l. 11.) & perpẽdicula parallela, & bina in eodẽ plano (2. l. 11.) Iam quia pl. PL. iungunt parallelas æquales Pp Ll sunt illæ parallelæ (7. l. 1.) sed PL. EA. sunt parallelæ (2. l. 6.) Ergo & pl. EA. & in eodem plano, & Zq. communis sectio planorum El. & QZq. deinde quia QF. est æqualis EF. (124. M. 2.) & EFZ æqualis ZX (127. M. 2.) erit QFZ. æqualis XZ. Ergo quia QZ. est semiradius XQ. erit QZ. proportionaliter secta in y. (128 M. 2.) Ergo perpendiculum yz. parallelum Qq. secat proportionaliter Zq. in z. & zff. parallela ZQ. secat proportionaliter Qq. in ff. (2. l. 6.) Ergo vt Q ff. est æqualis radio Pp. vel XF. ita Qq. est æqualis radio XQ & qff. ipsi QF (2. l. 5.) Ergo planum El. continuatum secat Qb. in eodẽ puncto eleuato q & puncta E. A. l. q. p. sunt in eodem plano.

Insuper quia □ Ep æquatur □ P p vel EX + □ PE. vel EF. (4. l. 2.) & □ EA æq. □ EX + □ EF. (117. M. 2.) est Ep. æqualis lateri □ EA. & similiter Al: tum quia XE. est maius segmentum XP. ita EF. ipsius parallelæ PQ. (2. l. 6.) sed EF.

est

est maius segmentum radij EX (125. M. 2.) Ergo PQ. & ipsi æqualis *pff*. æquales sunt EX. sed □ *pq*. æquatur □ *pff* + □ *ffq*. vel QF. vel EF (4. *l.* 2.) Ergo etiam *pq*. æquatur lateri □ EA. & similiter *ql*.

Tandem quia XE. ad XP. est vt EA. ad diagonium DB (122. M. 2.) & vt XE. ad XP. ita EA. ad PL (2. *l.* 6.) erunt æquales PL. & DB. (2. *l.* 5.) Ergo *pl*. æqualis PL. est diagonium pentagoni, & EA*lqp*. pentagonum regulare: & similitèr A*lrm*B. &c. Ergo solidum est regulare dodecaedrum ex 12. planis, & 60. angulis planis: & quia 3 plani vnum solidum efficiunt, cõstat 20. angulis solidis, & 30. lateribus. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLIX.

IN dodecaedro □ diametri æquatur 3 □ diagonij ⬠ & omnes sunt æquales.

EXPOSITIO. Fig. 30.

IN dodecaedro D*g*. Dico □ diametri E*h*. æquale esse 3 □ EC. diagonij ⬠, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia XP. est proportionaliter secta in E. & similiter HS in H. (158 *p.*) erit EH. maius segmentum totius PS. & PE + HS. minus segmentum (1 *l.* 5.) Ergo PH. composita est ex maiori segmento, & semisse minoris: sed quia E*h* est plano perpendicularis, □ E*h*. æq. □ EH + □ H*h*. (4. *l*. 2.) vel + □ HP. compositæ ex maiori segmenti, & semisse minoris (158. *p*.) Ergo □ E*h*. æquatur 3 □ EC. diagonij ⌂ (M. 2.) & similiter *g*D *f*C. kB *i*A.

Deinde quia Q*ff*. N*n*. perpendiculares sunt parallelæ, & æquales radio EX. (158. *p*.) erunt *ffn*. QN. æquales, & parallelæ, & angulus *qffn*. rectus (7. *l*. 1.) Ergo □ *qn*. æquale □ *ffn*. vel totius QN + □ *ffq*. (4. *l*. 2) vel + □ QF. vel semissis minoris segmenti (158. *p*.) Ergo *qn*. etiam potest triplum diagonij EC (M. 2.) & similiter *ps*. *um*. *or*. *tl*. Ergo omnes diametri sunt æquales.

PROPOSITIO CLX.

IN dodecaedro latera, & plana opposita sunt parallela.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SInt latera opposita E*p*. *hs*. Dico esse parallela: & similiter plana opposita *fghik*. ABCDE.

DEMONSTRATIO.

QVoniam angulus ES*s*. rectus est: & etiam angulus *pah*. & S*s*. æqualis maiori radio XS. tum *ap*. ipsi *ax*. vel XS (158. *p*.) si ducantur E*s*. & *ph*. erit □ E*s*. æquale □ radiorum summæ ES + □ radij maioris S*s*. vel SX. & similiter □ *ph*.

□ *ph*. æquale □ *ha*. radiorum summæ + □ *ap*. vel *ax*. radij maioris (4.*l*.2.) Ergo □ E*s*. æquale est □ *ph*. & E*s*. ipsi *ph*. Ergo cũ *p*E. *hs*. sint æquales (158.*p*.) erit *p*E*sh*. parallelogrammum (7.*l*.1.) & *p*E *hs*. parallela, &c.

Deindè quia anguli *p* EA. *ihs*. latera habent parallela E*p*. *hs*. tum EA. *hi*. erunt paralleli, & erunt in planis parallelis (3.*l*.11.) & sic de reliquis *g*. D. tum *f*. C. &c. Ergo plana opposita ABCDE. *fghik*. sunt parallela: idemque est de reliquis oppositis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXI.

IN dodecaedro omnes diametri se bifariam secant in dimidio rectæ per centrum duplicis plani oppositi, quod punctum est centrum sphæræ circumscriptæ, inscriptæ, & tangentis latera, & centrum ff. ss. ad omnes angulos, & contactus.

EXPOSITIO. Fig. 30.

IN dodecaedro D*g*. Dico omnes diametros E*h*. C*f* &c. se bifariam secare in *a*. quod est in medio rectæ X*x*. & *centrum*, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia EX *xh* sunt parallelæ (158.*p*.) & in eodem plano (2.*l*.11.) erit vt EX. ad *hx*. ita X*a*. ad *xa*. & ita E*a*. ad *ha*. (2.*l*.6.) Ergo cũ XE. *xh*.

xb. sint radij æquales; æquales erunt *æx* *æ*X. tū *æb*. *æ*E. tum *æf*. *æ*C. &c.

Deinde quia *qf*. C*n*. latera sūt parallela (160. *p*.) erunt *f*C. *qn* bisectæ (7. *l*. 1.) Ergo quia *f*C. est bisecta in *æ*. etiam *qn*. & similiter *ps*. &c. Ergo sphæra ex *æ*. radio *æf*. transibit per omnes angulos.

Insuper diametri cum planis efficiunt 12 pyramides æquales ex cōgruentia cum æquali perpendiculo: Ergo sphæra tangens vnum planum, tanget omnia, & quæ tanget vnum latus, tanget omnia, & punctum *æ*. erit *cētrum ff ff*. prout in (146. *p*.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXII.

IN dodecaedro perpendicularis per centrum ⬠ est per centrum ff.ss. dodecaedri, & per centrum oppositi ⬠ perpendicularis.

2. *Quæuis recta per centrum dodecaedri est in centro bifariam diuisa.*

3. *Recta quæ latera, vel plana opposita subcontrariè, & similiter secat est per centrum dodecaedri, & èconuerso.*

4. *Planum transiens per centrum dodecaedri secat plana, & latera opposita in partes æquales subcontrariè, & habet commune centrum ff.ss. cum solido.*

5. *In dicto plano quæuis recta per centrum secat ipsum bifariam.*

6. *Omnia plana per centrum dodecaedri, ipsum, & se ipsa bifariam diuidunt, & èconuerso.*

DEMONSTRATIO.

PRima, secunda, & tertia pars demonstrantur prout in prop. 145. Quarta verò, quinta, & sexta prout in prop. 147. licet demonstratio quintæ, & sextæ desumenda sit ex Parallelepipedi sectione in *prop.* 77. 78. & 79. sed quia res per se clara est demonstrationē ommisimus.

PROPOSITIO CLXIII.

DIameter sphæræ inscriptæ æqualis est diametro circuli ambientis pētagonum, & lateri decagoni eiusdem circuli: vel radio + diagonio secundo decagoni.

2\. *Diameter sphæræ tangentis latera æqualis est diagonio ⬠ maioris circuli: vel diogonio, & lateri ⬠ dodecaedri.*

EXPOSITIO. Fig. 30.

DIco diametrum sphæræ inscriptæ æqualē esse HE+EF. vel XE+EI. & diametrum sphæræ tangentis latera æqualem esse diagonio PN vel lateri EA+diagonio EC.

DEMONSTRATIO.

PLanorum distantia X*x*. est diameter sphæræ inscriptæ (161.*p.*) sed X*x*. æqnalis est HE+EP. vel EF (158.*p.*) Ergo, &c. sed diagonium secundum decagoni EI. æquatur compositæ XEF (139.*M.* 2.) vel XEP. (158.*p.*) Ergo EA+EI. *æq.* HX+XP. vel X*x*. (158.*p*) Quod, &c.

2\. Distantia oppositorum laterum *pq*.*ns*. est *pn*. & simul diameter sphæræ tangentis latera: sed quia P*p*. N*n*. parallelæ sunt æquales (158.*p.*) erunt *pn* PN. parallelæ æquales (7.*l.* 1) Ergo diameter sphæræ dictæ *æq.* diagonio maiori PN. sed quia EA. est maius segmentum

ip-

ipsius EC. (122. M. 2.) & vt XE. est maius segmentum XP. ita diagonium EC. ipsius PN. (5. *l.* 6.) Ergo vt EA ad EC. ita est EC. ad PN. (1. *l.* 5.) sed vt EA. ad EC. ita est EC. ad EA+EC. (104. M. 2.) Ergo PN. æquatur EA+EC. (2. *l.* 5.) Ergo distantia laterum P*n*. æqualis est lateri, & diagonio ⬠ dodecaedrum comprehendenti. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXIV.

SI ex centro basis dodecaedri rectæ ducantur ad angulos eleuatos, minor erit latus ⬠: media latus □: maxima latus △: in maiori circulo per 5 angulos descriptorum.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SVmatur ⬠ ABCDE. vt basis dodecaedri, & ex *centro* X. ducantur X*p*. X*q*. X*f*. Dico X*p*. esse latus ⬠: & X*q*. latus □ · & X*f*· latus △ descriptorum in circulo PQR. &c.

DEMONSTRATIO.

QVia XP. est proportionaliter secta in E. est XE. latus decagoni: nempè æqualis PQ. (125. M. 2.) sed P*p*. æqualis est XE (158. *p*.) Ergo & ipsi PQ. sed latus ⬠ PL. potest quod XP. & PQ. (127. M. 2.) & X*p*. potest quod XP. & P*p*. quia angulus XP*p*. rectus est (4. *l.* 2.) Ergo X*p*. est latus ⬠ PL.

2. Quia Q*q*. QX. æquales sunt, & angulus *q*QX. rectus (158. *p*.) est □ X*q*. æquale 2 □ QX. (4 *l*. 2.) sed latus □ inscripti circulo potest etiam duplum radij XQ. (114. M. 2.) Ergo X*q*. est latus □ inscripti circulo PQR.

3. Cùm angulus *fx*X. sit rectus, □ X*f*. *æq*. □ *fx* + □ *x*X. (4. *l*. 2.) vel □ XH + □ HP (158. *p*) sed quia HP. est proportionaliter secta in H. est □ totius HP + □ minoris segmēti *æq*. 3 □ maioris segmenti XP (108. M. 2.) Ergo □ X*f*. *æq*. 3 □ radij XP. & est latus △ circulo inscripti (112. M. 2.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXV.

IN dodecaedro si per 3 angulos diametro propinquiores transeant bina plana, & per 6 remotiores alia bina: erunt diametro perpendicularia, & inter se parallela.

2. *Duo maiora secabunt diametrum trifariam.*

3. *Duo minora, diuident tertiam partem media, & extrema ratione.*

4. *Diameter erit in 5 continuas diuisa.*

EXPOSITIO. Fig. 31.

SIt dodecaedrum ABCD. diameter AE. per 3 angulos KLB. transeat planum, & aliud per F*d*. D. & similiter per sex angulos G. R. M. C. *b*. *a* &

&alud per QPNO*ce*. efficientes in diametro sectiones Z. V. H. *n*. Dico, &c.

DEMONSTRATIO.

QVoniam puncta K L. B. sunt in superficie sphæræ (161. *p*.) & rectæ AK. AL. AB. sunt æquales lateri dodecaedri : & latera KL. LB. BK. æqualia diagonio ⬠ in pyramide KLBA. recta ex A. in *centr. ff ss*. basis erit ipsi perpendicularis : & similiter in pyramide KLBX. recta ex X. (4. *p*.) sed perpendicularis eidem puncto est vnica (1. *l*. 11.) Ergo AZ. XZ eadem recta est plano KLB. perpendicularis: & similiter plano F*d*D. & GRMC*ba*. & QPNO*ce*: Ergo plana sunt parallela (3. *l*. 11.)

2. Tria puncta AGE. in eodem sunt plano (1. *l*. 11.) & quia AE. diameter est sphæræ: erit AGEC. circulus maximus (ex lib. 3. §. 1. nostræ Trigonometriæ) Ergo quia angulus AGE. est in semicirculo, erit rectus (3. *l*. 3.) & cum GV. demonstrata sit perpendicularis ipsi AE. erit AG. media inter AV. & AE (3. *l*. 6.) & □ AE ad □ AG. erit vt AE. ad AV. scilicet in duplicata ratione AE. ad AG (4. *l*. 6.) sed □ AE. est triplum □ AG. diagonij pentagoni (159. *p*.) Ergo AE. tripla est ipsius AV. & similitèr ipsius HE. & HV. Ergo plana GRC. QPO. trifariam secant diametrum, &c.

3. Diuiso latere MC. bifariam, ducta AT. erit proportionaliter secta in S.(123. M 2.) & quia ductæ ZS. VT. faciũt angulos AZS. AVT. rectos æquales (23. *P.*) sunt parallelæ (2. *l.* 1.) Ergo VA. TA. sectæ sunt in eadem ratione (2. *l.* 6.) Ergo etiam AV est proportionaliter secta in Z: & planum KLB. secat proportionaliter tertiam diametri partem.

4. Cũ AV. sit proportionaliter secta, continuæ sunt AZ ZV. AV. vel VH (22. *P.*) Ergo quia toti VH. additum est maius segmentum VZ. sunt contiuuæ ZV. VH. HZ (104. M. 2.) & quia toti HZ. additum est maius segmentum HE. vel VH. continuæ sunt EH. HZ. ZE. Ergo in eadem ratione proportionali sunt 5 continuæ AZ. ZV. VH. HZ. ZE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

Iisdem positis radius minoris circuli est $\frac{1}{3}$ diametri sphæræ. 2. Ad radium maioris vt radius ad latus ☐ inscripti. 3 Ad radium circuli circa ⬠ est vt latus △ ad diagonium ⬠ in eodem circulo. 4. Radius sphæræ ad radium maioris circuli est potentia sesquioctauus.

DEMONSTRATIO. Fig. 31.

1. QVia VA. VY. æquales sunt (165. *p.*) in ▭ YZ.

YZ. æquales sunt KZ. YV (7.*l*.1.) Ergo radius minoris circuli K. æqualis est AV. vel $\frac{1}{3}$ diametri AE. Quod, &c.

2. Quia □ AE. *æq*. 3 □ AG (159.*p*.) qualium □ AE est 9: ipsum □ AG. erit 3: sed in △ rectang. □ AG. *æq*. □ GV + □ VA (4.*l*.2.) & quia AV. est $\frac{1}{3}$ AE. est □ AV. 1. qualium □ AE. est 9: nempè in duplicata ratione 1. ad 3 (4.*l*.6.) Ergo □ GV. erit 2: Ergo GV. radius maioris circuli ad AV. vel KZ. radium minoris est in potentia vt 2 ad 1. vt latus □ inscripti ad radiũ circuli (114.M.2.)

3. Si ducatur KV. cum VA. sit proportionaliter secta in Z. (165.*p*) & KZ. sit æqualis ipsi AV (1.*num*.) recta KV. æquè poterit ac tota KZ. vel AV. & maius segmentum VZ. ac recta AK æquè poterit ac tota KZ. & minus segmẽtum ZA. (4.*l*.2) Ergo KV. ad AK. erit vt diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo (190. M. 2.) si Ergo K*o*. sumatur æqualis KA. & fiat *op*. parallela VA. erit vt KV. ad KZ. ita K*o*. ad K*p*. (2.*l*.6) sed quia KV. potest quod tota KZ. & maius segmẽtũ VZ (4.*l*.2) est KV. latus ⬠ in circulo radij KZ. (117. & 125. M. 2.) Ergo K*o*. vel KA. est latus ⬠ in circulo radij K*p*. (1.*l*.5) Ergo KZ. radius circuli per 3 angulos KLB. ad K*p*. radiũ circuli per 5 angulos ⬠ AKGRL. est vt KV. ad

K*o*.

Ko. vel KA (2.*l*.6.) hoc est vt diagonium ⬠ ad latus △ eiusdem circuli, &c.

4. Quia diameter AE. dupla est radij XA: est □ AE. *æq*. 4 □ XA (3.*l*.2.) Ergo qualium □ AE. est 36. erit □ XA. 9. sed qualiũ □ AE. est 36. est □ AV: 4. nempè vt 9. ad 1. (*ex num*. 2.) Ergo □ GV. quod æquatur 2 □ AV. erit 8. (*num*. 2.) Ergo □ XA. radij sphæræ ad □ GV. radij maioris circuli est vt 9. ad 8. hoc est XA. ad GV. est potentia sesquioctaua. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXII.

Latus dodecaedri potest triplum distätiæ plani minoris, & maioris proximi: vt diameter sphæræ ad diagonium ⬠ dodecaedri.

2. *Distantia circulorum minorũ potest quintuplum distantiæ maiorum.*

EXPOSITIO. Fig. 31.

EST AK. latus dodecaedri: ZV. distantia circuli minoris à maiori proximo: Zn. distantia minorum VH. distantia maiorum. Dico □ AK. *æq*. 3 □ ZV: & □ n. *æq*. 5 □ VH.

DEMONSTRATIO.

1. QVia AV. est proportionaliter secta in Z. (165.*p*.) & æqualis ipsi KZ (166.*p*.) & □ KA. *æq*. □ KZ + □ AZ. minoris segmenti (4.*l*. 2.) sed □ totius KZ. vel AV + □ AZ. minoris

seg-

segmenti *æqu.* 3 □ maioris ZV (108. M. 2.) Ergo □ AK lateris dodecaedri *æqu.* 3 □ ZV. distãtiæ planorum.

2. Quia tota ZH est proportionaliter secta in V: & additum est minus segmentum H*n* (165. *p.*) Ergo □ Z*n*. compositæ ex tota, & minori segmento *æqu.* 5 □ VH. maioris segmenti (107. M. 2.) Ergo distantia Z*n*. pot est quintuplum distantiæ VG. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXVIII.

IN dodecaedro Minima summa ff. ss. æqualis est 5 ff. ss. ex diametro sphæræ, vel 15 ex diagonio ⌂.

2. *Summa ff. ss. ex quouis angulo in reliquos est dupla minimæ.*

3. *Summa ex planorum centris in angulos æqualis est 5 ff ss. ex latere decagoni + 5 ex latere* ⌂ *+ 5 ex latere* □ *+ 5 ex latere* △ *descriptorum in circulo per quinque angulos remotiores.*

DEMONSTRATIO. Fig. 30.

1. CVm anguli solidi sint 20: & in superficie sphæræ (161. *p.*) erit minima summa æqualis 20 *ff ss.* ex radio sphæræ *a*E. hoc est 5 *ff. ss* ex diametro (3 *l.* 2) sed □ ex diametro *æq.* 3 □ ex diagonio (159. *p.*) Ergo minima summa æquatur 15 *ff. ss.* ex diagonio ⌂.

2. Cum

2. Cũ anguli solidi sint in superficie sphæræ, summa ex quolibet angulo superat minimam totidem ff.ss. ex radio sphæræ, quot sunt anguli (60.M.1.) Ergo summa ex angulo superat minimam 20 ff.ss. ex radio sphæræ, vel 5 ex diametro, & est dupla minimæ.

3. Quia summa ex X. *cẽtro* plani ABCDE. æqualis est 5 ff.ss. radij XE + 5 X*p* + 5 X*q* + 5 X*f*: sed quia X E. est maius segmentum radij X P. (158. *p.*) est latus decagoni (125.M.2) & X*p*. est latus ⬠: & X*q*. latus □ : & X*f*. latus △ descriptorum in maiori circulo radij XP. (164. *p.*) Ergo summa ex *centro* cuiuslibet ⬠ in omnes angulos solidos æqualis est 5 ff.ss. ex latere Decagoni, Pentagoni, Quadrati, & Trianguli descriptorum in maiori circulo. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXIX.

Minimæ summæ ff.ss. in solidis regularibus sunt vt angulorum numeri.

2. *Summa perpendiculorũ in plana ex quouis puncto solidi, æqualis est summæ perpendiculorum ex centro, & semper eadem.*

DEMONSTRATIO.

QVia in omnibus solidis regularibus Minima summa æquatur tot ff.ss. ex radio sphæræ, quot anguli: Ergo si solida sint in eadẽ

sphæ-

sphæra, erunt minimæ summæ, vt angulorũ numeri. Qualium in Tetraedro est 4: erit in Octaedro 6: in Cubo 8: in Icosaedro 12: in Dodecaedro 20.

2. Quia ex quolibet puncto in angulos fiunt tot Pyramides, quot plana, & similiter ex *centro*: sed vtraque Pyramidum summa est æqualis toti solido, & inter se: Ergo cùm basium summa sit eadem, nempè omnia plana: eadem erit perpendiculorum summa (5. *l.* 11) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXX.

SVperficies solidi regularis est rectangulum semilateris, & perpendiculi à centro plani toties sumptum, quot sunt anguli plani in solido.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro A B C D. est G. *centrum* plani ABC (1 *p*.) & GE. perpendiculum à *centro* in latus: & EB. semilatus. Dico ▭ GEB. duodecies sumptum, quia sunt 12 anguli plani in Tetraedro esse Tetraedri superficiem; & sic de reliquis.

DEMONSTRATIO.

DVctis GA. GB. GC. & similiter in omnibus planis ex *centro* in angulis fiunt tot triangula, quot anguli, omninò æqualia ex congruentia (4.*l*.1.) sed ▭ GEB. æquale est △ AGB. (8.*l*.1.) Ergo etiam triangulo AGC. CGB. &c. Ergo summa omnium triangulorum, nempè tota superficies solidi, æqualis erit totidem rectangulis GEB. quot sunt triangula, vel anguli plani. Quod, &c.

In Tetraedro sunt anguli plani 12. in octaedro, & Cubo 24: in Icosaedro, & Dodecaedro 60.

PROPOSITIO CLXXI.

SOliditas corporis regularis æqualis est prismati cuius basis sit tota superficies solidi, & altitudo tertia pars perpendiculi à centro solidi in basim: vel radij sphæræ inscriptæ.

EXPOSITIO. Fig. 25.

IN Tetraedro ABCD. est O. *centrum* solidi, & OG. perpendiculum, vel radius sphæræ inscriptæ. Dico Prisma cuius basis sit tota superficies, vel 12 ▭ GEB & altitudo $\frac{1}{3}$ GO. esse Tetraedri soliditatem.

DEMONSTRATIO.

SI enim ex *centro* O. ducantur rectæ in planorum *centra*, & angulos OG OK. OA. OB. &c Fiunt tot Pyramides AGBO. BGCO. CAGO. quot sunt anguli plani: quæ omnes sunt æquales ex congruentia. Sed Pyramis habens ba-

basim □ EGB. & altitudinem OG. est $\frac{1}{3}$ prismatis basim habens □ EGB. & altitudinem OG. & hoc triplum Prismatis habēs basim □ EGB. & altitudinem $\frac{1}{3}$ OG (1. *l.* 11.) Ergo Pyramis est huic Prismati æqualis (2. *l.* 5.) Ergo 12 Prismata basis □ EGB. & altitudinis $\frac{1}{3}$ OG. erunt tota soliditas Tetraedri: & 24 in octaedro, & Cubo: & 60 in Icosaedro, & dodecaedro: hoc est Prisma ex tota superficie, & $\frac{1}{3}$ perpendiculi. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXII.

IDem circulus comprehendit △ Octaedri, & □ cubi: & opposita plana in Octaedro, & Cubo æqualiter distant.

DEMONSTRATIO. Fig. 27.

QVia □ diametri sphæræ ad □ diametri circa □ cubi est vt 36 ad 24 (124. *p.*) sed etiam □ diametri sphæræ ad □ radij circa △ Octaedri est vt 36 ad 24 (134. *p.*) Ergo æquales sunt circulorum diametri (2. *l.* 5.) & circuli ex congruentia.

Denique □ diametri sphæræ æquatur 3 □ diametri sphæræ inscriptæ Cubo (124. *p*) & etiā Octaedri (135. *p.*) Ergo inscriptarum diametri sunt æquales: quæ sunt oppositorum planorum distantiæ.

PROPOSITIO CLXXIII.

IDem circulus comprehendit ⬠ dodecaedri, & △ Icosaedri: & plana opposita in vtroque solido æqualiter distant, vel eadem est sphæra vtrique inscripta.

DEMONSTRATIO. Fig. 29. 30.

QVia diameter sphæræ post triplum diagonij. Pentagoni inscripti circulo ambiẽti △ Icosaedri (151. *p.*) sed eadem diameter post triplum diagonij ⬠ dodecaedri (159. *p.*) Ergo idem est circulus comprehẽdens △ Icosaedri, & ⬠ dodecaedri.

2. Quia radius circuli circa △ Icosaedri est minus segmentum distantiæ planorum, vel diametri sphæræ inscriptæ (153. *p*) & etiam in dodecaedro (158. *p.*) Ergo cum circulus demonstratus sit idem, eadem erit distantia planorum, vel diameter sphæræ inscriptæ. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXIV.

Circulus circa △ Tetraedri æqualis est circulo per 6 angulos dodecaedri.

2. *Radius vtriusque ad radiũ circuli Octaedri, & Cubi est in potentia vt 4 ad 3.*

3 *Latus Tetraedri æqualis est diametro circuli circa □ Cubi, & △ Octaedri.*

DEMONSTRATIO. Fig. 31.

Quia in Dodecaedro radius sphæræ ad radiũ circuli per 6 angulos G. R. M. C. *b*. *a*. est vt 9 ad 8 (166 *p*.) & idem radius sphæræ ad radiũ circuli circa △ Tetraedri est vt 9 ad 8 (111. *p*.) Ergo cùm eadem sit sphæra, idẽ erit circulus, vel æqualis. Quod, &c.

2. Quia Radius sphæræ ad radium circuli circa △ Octaedri est in potentia, vt 9 ad 6 (134. *p*.) & etiam ad radium circuli circa □ Cubi (122 *p*.) sed radius sphæræ est ad circulum Tetraedri & Dodecaedri dictum potentia, vt 9 ad 8 (*ex num*. 1.) Ergo *inverse*, & ex *æquo* radius circuli Tetraedri, & dodecaedri ad radium circuli Octaedri & Cubi, erit potentia vt 8 ad 6. vel vt 4 ad 3. &c.

3. Qualium □ diametri sphæræ est 36. est □ lateris Tetraedri 24 (108. *p*.) & etiam □ diametri circuli in Octaedro, & Cubo est 24 (134.

124.p.) Ergo □ lateris Tetraedri æquale eſt □ diametri circuli ambiẽtis □ Cubi, & △ Octaedri: Ergo & rectæ ſunt æquales. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXV.

IN dodecaedro diagonium ⬠ æquale eſt lateri cubi in eadem ſphæra.

2. *Latus dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris Cubi proportionaliter ſecti.*

3. *Latus dodecaedri ad latus Cubi, eſt vt latus decagoni ad radium, & vt latus Icoſaedri ad diſtantiam laterum oppoſitorum.*

DEMONSTRATIO. Fig. 30.

1. IN dodecaedro diameter ſphæræ poteſt triplũ diagonij ⬠ (159.*p*) & eadem diameter poteſt triplum lateris Cubi (124 *p.*) Ergo diagonium ⬠ & latus Cubi æqualia ſunt (2.*l.*5.)

2. Latus dodecaedri eſt latus ⬠ comprehendentis ſolidum: ſed latus ⬠ ED. eſt maius ſegmentum diagonij EC (122.M.2.) Ergo latus dodecaedri eſt maius ſegmentum diagonij ⬠: vel lateris cubi proportionaliter ſecti ex *num.* 1.

3. Quia latus decagoni eſt maius ſegmẽtum radij (125.M.2.) & latus Icoſaedri maius

ſeg-

ſegmentum diſtantiæ laterum oppoſitorum (156.*p.*) & latus dodecaedri ipſius lateris Cubi, ex *num.* 2. Omnia erũt in eadem ratione (1. *l.* 5.) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXVI.

Latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt Diagonium ⬠ ad latus △ in eodem circulo.

2 *Vel vt recta potens quod tota, & maius ſegmentum ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus ſegmentum.*

3. *Vel vt radius circuli per 3 angulos remotiores Icoſaedri ad radium circuli per 5 angulos eiuſdem.*

DEMONSTRATIO.

1. Quia idem circulus capit △ Icoſaedri, & ⬠ dodecaedri (173.*p.*) ſed diagonium ⬠ eſt latus Cubi in eadem ſphæra (175. *p.*) Ergo latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt diagonium ⬠ ad latus △ eiuſdem circuli.

2. Sed diagonium ⬠ ad latus △ eſt vt recta potens quod tota proportionaliter ſecta, & maius ſegmentum ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus ſegmentum (190. M. 2.) Ergo etiam latus Cubi ad latus Icoſaedri eſt vt recta potens quod tota, & maius, ad rectam quæ poſsit quod tota, & minus.

3. Quia

3. Quia in Icoſaedro radius circuli per tres angulos remotiores, ad radium per 5 angulos eſt vt diagonium ⬠ ad latus △ (155. *p.*) Ergo vt latus Cubi ad latus Icoſaedri. Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXVII.

1 *SVperficies Tetraedri ad ſuperficiẽ Octaedri eſt vt 2 ad 3. vel vt □ ſemilateris Tetraedri ad □ radij ſphæræ, vel vt □ circulo inſcriptum ad □ ex latere △ inſcripti.*

2. *Soliditas Tetraedri ad ſoliditatem Octaedri eſt vt □ ſemilateris Tetraedri ad 3 □ radij ſphæræ, vel ad □ ex latere △ circulo maximo inſcripti.*

DEMONSTRATIO.

1. QVia in Tetraedro, & Octaedro ſunt △△ ſimilia, nẽpè æquilatera; ſuut in duplicata ratione laterum; hoc eſt vt potẽtiæ laterum (4. *l.* 6.) ſed qualiũ diameter ſphæræ poteſt 36: latus Tetraedri poteſt 24 (108. *p.*) & latus Octaedri poteſt 18 (136. *p.*) Ergo △ Tetraedri ad △ Octaedri eſt vt 24. ad 18 (1. *l.* 5.) Ergo 4 △ Tetraedri ad 8 △ Octaedri, vel ſuperficies ad ſuperficiem erit vt 24. ad 36. vel vt 2 ad 3: vel vt 6 ad 9. hoc eſt vt □ ſemilateris Tetraedri ad □ radij ſphæræ (118. *p.*) ſed quia □

cir-

circulo inscriptum æquatur 2 □ radij (114 M. 2.) & □ lateris △ æquatur 3 □ radij (112. M. 2) est □ circulo inscriptum ad □ lateris △ vt 2 ad 3 (2. *l.* 5.) Ergo superficies Tetraedri ad superficiem Octaedri est vt □ inscriptum circulo ad □ lateris △, &c.

2. Quia Tetraedrum resolvitur in quatuor Pyramides similes factæ in *cētro*, & Octaedrum in octo: est summa ad summam, vel solidum ad solidum in ratione composita superficierum, & perpendiculorum à *centro*, vel altitudinum (5. *l.* 11.) sed ratio superficierum est vt 2 ad 3: vel vt 6 ad 9 (*ex num.* 1.) vel vt □ semilateris Tetraedri ad □ radij sphæræ inscriptæ (118. *p.*) & perpendiculum Tetraedri potest 1. qualium diameter sphæræ potest 36. (118. *p.*) & perpendiculum Octaedri potest 3 (140. *p.*) Ergo perpendiculum illius ad perpendiculum istius est in potentia vt 1. ad 3: vel vt Radius sphæræ ad latus △ circulo maximo inscripti (112. M. 2) Ergo ratio composita superficierū, & perpendiculorum est vt □ semilateris Tetraedri ad □ ex latere △ circulo maximo inscripti (21 *P.*) sed hæc est ratio solidorum: Ergo Tetraedrum ad Octaedrum est vt □ semilateris ad 3 □ radij sphæræ, vel ad □ ex latere △ circulo maximo inscripti. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXVIII.

SVperficies Octaedri ad superficiem Cubi est vt latus △ ad diametrum circuli circunscripti.

2. *Soliditas ad soliditatem est in eadem ratione, quæ est vt Radius circuli circa △ Tetraedri ad radium circuli circa △ Octaedri.*

DEMONSTRATIO.

1. QVia tertia pars △ ad quartam partem quadrati in eodem circulo descripti est latus △ ad diametrum circuli (191. M. 2) sed △ Octaedri, & □ Cubi sunt in eodem, vel æqualibus circulis (172. *p.*) Ergo $\frac{1}{3}$ △ octaedri ad $\frac{1}{4}$ □ Cubi, est vt latus △ ad diametrum sui circuli: sed tota superficies octaedri diuiditur in $\frac{24}{3}$ △: cùm habeat 8 △: & superficies Cubi habens 6 □ diuiditur in $\frac{24}{4}$ □: Ergo superficies octaedri ad superficiẽ Cubi est latus △ ad diametrum circuli.

2. Quia soliditas Octaedri est prisma cuius basis sit tota superficies, & altitudo $\frac{1}{3}$ perpendiculi à *centro*: & similitèr soliditas Cubi (171 *p.*) sed perpendicula in Octaedro, & Cubo sunt æqualia, nempè æquales radij sphæræ inscriptæ, vel semidistantia planorum (172. *p*) Ergo prismata, vel solida erũt vt bases (5. *l.* 11.) nempè vt latus △ ad diametrum circuli ex

num.

num. 1. hoc est vt Radius circuli circa △ Tetraedri ad radiũ circuli circa △ Octaedri, nēpè in potentia vt 4. ad 3. (174 *p.*) Quod, &c.

PROPOSITIO CLXXIX.

1. *SVperficies Cubi ad ſuperficiem Dodecaedri eſt vt duplum diagonii ⬠ ad quintuplum radij.*

2. *Solidum ad ſolidum eſt vt duplum diagonium ad quintuplum maius ſegmentum diagonij factum a radio biſecante latus decagoni proximum.*

EXPOSITIO. Fig. 32.

IN circulo dodecaedri ſit ⬠ ABCD. & AC. diagonium: & CH. latus decagoni proximum, & biſectum in I radio GI. ſecāte diagonium in L. Dico 1. ſuperficiem Cubi ad ſuperficiem dodecaedri eſſe vt duplũ diagonij AC. ad quintuplum radij GA: Dico 2. ſolidum ad ſolidum eſſe vt 2 AC. ad 5 AL.

DEMONSTRATIO.

1. DIuidantur AC. & GE. biſariam in X. Q. & erit GQ maius ſegmentum ipſius GR (128 M. 2.) ſicut AB. ipſius AC. (122. M. 2.) ſed vt GR ad GQ. ita 2 GR. ad 2 GQ. vel GE. (5. *l.* 5.) Ergo 2 GR. ad GE. eſt vt AC. ad AB (1. *l.* 5.) Ergo vt ½ AC. ad AB. ita GR. ad GE. & alternan-

nando vt ½ AC. ad GR. ita AB. ad GE (4. *l.* 5.) Ergo ratio AC. ad GE. composita est ex ratione AC. ad AB. & AB. ad GE vel ½ AC. ad GR. (21. *p.*) sed quia AB est latus dodecaedri, & AC. latus Cubi in eadem sphæra (175. *p.*) & AT □ Cubi, & ABCD ⬠ dodecaedri, si ducantur ex *centris* G. Z. ad angulos rectæ, erit △ VZT. ad △ DGC. in ratione cõposita VT. vel AC. ad DC. vel AB. & SZ. vel ½ AC. ad GR (1. *l* 6.) Ergo △ VZT. ad △ DGC. est vt AC. ad GE (1. *l.* 5.) sed Cubus cõtinet 24 △ VZT. quia constat ex 6 □, & quodlibet ex 4 △: & dodecaedrum continet 60 △ DGC. nempè 12 ⬠, & quodlibet 5 △: Ergo tota superficies Cubi ad superficiem dodecaedri, est vt 24 AC. ad 60 GE & quia vt 24 ad 60. ita 2 ad 5: erit superficies Cubi ad superficiẽ dodecaedri, vt 2 AC. ad 5 GE. Quod erat, &c.

2. Cõtinuato latere decagoni in F. est angulus F. dimidium arcus AH. minus dimidio EC. vel HB. (3. *l.* 3.) Ergo est dimidium arcus AB. sed angulus AEC. est dimidium arcus AC. vel æqualis arcui AB (3. *l* 3) Ergo angulus AEC *æqu.* 2 EFC. sed externus AEC *æqu* CFE ECF. (3 *l.* 1) Ergo æquales sunt CFE. ECF & EF. *æqu.* lateri decagoni EC (5. *l.* 1.) Deindè FCP æqualis verticali ACH (1. *l.* 1.) & dimidium arcus AH. vel BE (3. *l.* 3.) & quia GK. bisecat chordã

ex

ex hyp. etiam arcum (2.*l*.3.) & est EK. dimidiũ arcus EB & angulus EGK. *æqu.* FCP (3.*l*.3.) Ergo etiam FCA. AGK. æquales sunt (1.*l*.1.) & assumpto communi GAC. erunt æquiangula △ AGL. & △ ACF. (3.*l*.1.) & latera proportionalia vt AP. ad AF. ita AG. ad AL. (2.*l*.6.) & ita $\frac{1}{6}$ AP. ad $\frac{1}{6}$ AF. & ita 5 AG. ad 5 AL (5.*l*.5.) sed solida regularia æqualia sunt prismati cuius basis sit tota superficies, & altitudo $\frac{1}{3}$ radij, vel $\frac{1}{6}$ diametri sphæræ inscriptæ (171.*p*) Ergo rationem habent compositam ex superficiebus, & diametris sphæræ inscriptæ (5.*l*.11.) sed cùm AF. composita sit ex diametro circuli, & latere decagoni est distantia planorũ, vel diameter sphæræ inscriptæ (163.*p*.) & cum AC. sit latus Cubi (175.*p*.) est AC. diameter sphæræ Cubo inscriptæ (114.*p*.) Ergo Cubus ad dodecaedrũ est in ratione composita superficierum 2 AC. ad 5 AG (ex *num*. 1.) & diametrorum inscriptarum AC. ad AF. vel 5 AG ad 5 AL sed ratio 2 AC. ad 5 AL. composita est ex ratione 2 AC. ad 5 AG. & 5 AG ad 5 AL (21.*P*.) Ergo Cubus ad dodecaedrum est vt 2 AC. ad 5 AL. (1.*l*.5.) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXX.

1. *SVperficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, est vt diagonium ⬠ ad latus △ vel vt latus Cubi ad latus Icosaedri eiusdem sphæræ, vel vt recta potens quod tota proportionaliter secta, & maius segmentum ad rectam, quæ possit quod tota, & minus.*

2. *Solida sunt in eadem ratione.*

EXPOSITIO. Fig. 32.

SIt AC. diagonium ⬠ dodecaedri, & AN. latus △. Dico superficiem dodecaedri ad superficiem Icosaedri esse vt AC. ad AN: & ita solidum ad solidum, &c.

DEMONSTRATIO.

QVia $\frac{1}{5}$ ⬠ ad $\frac{1}{3}$ △ eiusdem circuli est vt diagonium AC. ad latus △ AN (186. M. 2.) sed idē circulus capit ⬠ dodecaedri, & △ Icosaedri (173. *p.*) Ergo $\frac{1}{5}$ ⬠ dodecaedri ad $\frac{1}{3}$ △ Icosaedri est vt AC. ad AN (1. *l.* 5.) sed dodecaedrū habet $\frac{60}{5}$ ⬠: vel 12 ⬠: & Icosaedrū $\frac{60}{3}$ △ vel 20 △: Ergo $\frac{60}{5}$ ⬠ ad $\frac{60}{3}$ △ vel superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, est vt AC. ad AN (5. *l* 5.)

2. Quia dodecaedrum, & Icosaedrum æqualem habent altitudinem, nempè distantiam planorum, vel sphæram inscriptam; prismata ipsis æqualia æqualem habent altitudinem

nem (171.*p.*) Ergo se habebũt vt bases (5.*l.* 11.) vel superficies, nempè vt diagonium AC. ad latus △ AN. *ex num.* 1. vel vt potens totam, & maius segmentum rectæ proportionaliter sectæ ad potētem quod tota, & minus (190. M. 2) & quia diagonium AC. est latus Cubi in eadē sphæra (175. *p.*) & latus △ est latus Icosaedri in eadem sphæra (173. *p.*) erit superficies, & soliditas dodecaedri ad superficiem, & soliditatem Icosaedri vt latus Cubi ad latus Icosaedri. Quod, &c.

SCHOLIVM.

CVm notæ iam sint rationes Tetraedri ad Octaedrum; Octaedri ad Cubum, Cubi ad Dodecaedrum, & Dodecaedri ad Icosaedrũ, omnium inter se rationes cognitæ erunt Tetraedri ad Cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum. Octaedri ad Icosaedrum, & Dodecaedrum, & Cubi ad Icosaedrum per compositionem rationis factam prout in figuris planis in fine secundæ partis.

Plures aliæ partium cōparationes fieri possunt ex iam demōstratis, quod vt facilius præstet Geometra, Tabellas præcedētes inspiciat.

In fine animadvertendum est non posse dari aliud corpus regulare præter quinque exposita, quod facile demonstrari poterit.

Quoniam ad angulũ solidum comprehen-

den-

dendum, requirũtur saltem tres anguli plani, minores quatuor rectis (3.*l.* 11) Ergo cũ angulus Hexagoni contineat 120.*gr.* tres anguli efficient 360. nempè integrũ circulum, vel quatuor rectos, & sic angulũ solidũ nequeunt cõprehẽdere; & multò minus tres anguli Heptagoni, Octagoni, &c. Remanent ergo ex figũris regularibus △ □ & ⬠ ad solida regularia.

Tres igitur anguli Trianguli regularis cõprehẽdunt angulum Tetraedri : & quatuor angulũ Octaedri; & quinque angulũ Icosaedri, vndè resultant Tetraedrum, Octaedrum, & Icosaedrum. Sex verò anguli trianguli faciũt quatuor rectos, vt patet si ex *centro* Hexagoni ducantur sex rectæ in angulos.

Quatuor anguli Quadrati cùm sint recti efficiunt 4 rectos, & angulum solidũ nequeunt comprehendere (3.*l.* 11.) & multò minus 4 anguli ⬠.

Tribus igitur angulis rectis comprehenditur solidus angulus Cubi, & tribus angulis ⬠ comprehenditur solidus angulus dodecaedri: vndè Cubus, & dodecaedrum resultant.

Cũ ergo reliqui anguli figurarũ regulariũ inutiles sint, & harum trium anguli nullã aliã patiantur combinationem aptam, quinque tantum esse possunt corpora, vel solida ordinata, vel regularia. Quod, &c.

CAP.

CAPVT IV.

DE RESOLVTIONE PROBLEMATVM.

Nimis arduum, & operosum esset Problemata omnia, quæ ex præmissis theorematibus elici possunt, adducere: more nostro aliqua prælibabimus, quam plurimis omissis, quæ à studioso Lectore, si theoremata ritè perceperit, facilè excogitari poterunt, & resolvi.

Non ideò tamen praxes omnes debuerunt ommitti, imò operæ pretium fuit aliquas adducere, quæ Tyrones Geometras manu ducant, & alliciant ad similes proponendas, & demonstrandas, licet qui Geometriæ adyta penetrauerint, & diuitias scrutati fuerint, prototypis his non indigeant; cum pro ingenij fœlicitate orbi literario nobiliora communicare possint, quod vtinam præstarent omnes, quibus tantæ Regiæ data est clauis.

PROPOSITIO CLXXXI.
Problema 1.

1. *CViusvis Pyramidis centrum ff. ss. inuenire, & minimam summam ff. ss.*

2. *Pyramidis Tetraedræ minimam summã invenire etiam sine centro.*

I. CONSTRVCT. ET DEMONST. Fig. 33.

SIt Pyramis ABCD. inveniatur primò *centrũ* basis E(80.M. 1.) & ex DE. sumatur EF. pars denominata à numero angulorum Pyramidis, eritque F. *centrum* ipsius (67.*p*.) Tandem ex F. inveniatur minima summa ad omnes angulos(81.M. 1.) eritque factum.

II. CONSTRVCTIO.

SIt Pyramis Tetraedra A B C D. inveniatur summa *ff. ss.* ex omnibus lateribus AB. BC. CA. AD. BD. CD & sit □ GH (6.*p*. 2.) diuidatur GH. bifariam in K. Dico □ GK. esse minimam summam □ □ Pyramidis.

DEMONSTRATIO.

QVia □ GH. est summa □ □ ex omnibus lateribus ex *construct.* & quadruplum □ GK(3.*l*.2) sed summa □ □ ex lateribus est etiã quadrupla minimæ in Pyramide Terraedra (11.*p*.) Ergo □ GK. est minima summa □ □ Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXII.
Problema 2.

1. *CViusvis Pyramidis invenire rectam à vertice in centrum basis.*

EXPOSITIO. Fig. 34.

SIt Pyramis ABCDE. quæritur rectaEF, à vertice in *centrum* basis.

CONSTRVCTIO.

1. INveniatur summa □ □ ex lateribus eleuatis EA. EB EC. EC(6.*p*.2.) quæ sit □H. Inveniatur præterea *centrum* basis F(80. M.1.) & minima summa *ff ff*. FA FB FC. FD. (6.*p*.2) quæ sit □I. & □K. sit differentia inter □H. & □I. tandem sit □K. æquale totidem □ □ L. quot sunt anguli basis: nempè in nostro casu sit □K *æqu* 4 □L. Dico L. æqualem esse rectæ quæsitæ EF.

DEMONSTRATIO.

QVoniam F. est *centrum* basis: sunt □ □ EA. EB. EC. ED. *æqu*. □L. vel minimæ summæ +4□EF(60.M.1.) & □H. æquale est □I+ □ K. ex *constr*. erit □ K æquale 4 □ EF. sed etiam □K. æquale est 4□ L. ex *constr*. Ergo □L æquale est □EF. vnde, & recta L. æqualis est rectæ EF. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIII.
Problema 3.

CVius vis Pyramidis minimam summam ☐☐. invenire etiam sine centro

EXPOSITIO. Fig. 34.

SIt Pyramis ABCDE Quæritur minima m summam ☐☐. ex *centro* G. in angulos A. B. C. D. E. licet ob corporis impenetrabilitatem *cē-trum* G. inveniri non possit.

CONSTRVCTIO.

INveniatur prius ☐H æquale ☐ ☐ EA. EB. EC. ED. & recta Lq. æqualis rectæ à vertice in *centrum* basis EF. (182. *p.*) Diuidatur præterea Lq. in tot partes, quot sunt anguli Pyramidis, vt hic in 5: & sit *p.* primum punctum diuisionis, & erit *pq* æqualis rectæ GE (47. *p*) Tandem fiat ☐ M. æquale 5 ☐ *pq*. quot scilicet sunt anguli Pyramidis, & sit ☐ N. differentia inter ☐H. & ☐ M (2. *p.* 2.) Dico ☐ N esse minimam summam ☐ ☐ ex *centro* G. in angulos A. B. C. D. E.

DEMONSTRATIO.

QVia ☐H. æquale est ☐ ☐. EA EB. EC. ED. & etiam ☐ M + ☐ N. ex *constr.* Ergo ☐ M + ☐ N. æquantur ☐ ☐ EA. EB. EC. ED. sed ☐ ☐ EA. EB. EC. ED. *equ.* minimæ summæ

ex

ex G+5 □ GE (60. M. 1.) Ergo cùm GE. *pq.* sint æquales; erunt □ M+ □ N. æqualia Minimæ summæ ex G+5 □ GE. vel *pq.* Ergo cùm □ M. sit æquale 5 □ *pq.* ex *constr.* erit □ N. æquale minimæ summæ ex G. Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIV.

Problema 4.

D*Ata basi, & Minima summa, invenire summam ff. ff. laterum eleuatorum.*

EXPOSITIO. Fig. 34.

IN Pyramide ABCDE. sit data basis ABCD. quadrilatera, vel Pentagona, &c. & minima summa ex G. sit □ N. Quæritur summa *ff. ff.* EA. EB. EC. ED.

CONSTRVCTIO.

INveniatur prius *centrum* basis F. (80. M. 1.) & Minima summa FA. FB. FC. FD. quæ sit □ I. & □ K. sit differẽtia inter □ N & □ I. (6. *p* 2.) deinde quadrato numeri angulorum basis addatur ipse numerus: vt hic anguli basis sunt 4: eius quadratum 16: summa 20: Sit ergo □ K æquale 20 □ L*p.* (6 *p.* 1.) & recta *pq* sit tripla, quadrupla, vel quintupla ipsius L*p.* iuxta numerum angulorum basis: & nunc est quadrupla. Insuper □ M. fiat quintuplum □ *pq.* iuxta numerum angulorum pyramidis (6. *p.* 1.) &

□ H,

□H. æquale □M+□N. & erit □H. summa □□EA.EB.EC.ED.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex G. in A.B. C.D. *æqu.* summæ ex F +4□FG.(60.M.1.) & quia FG. est quinta pars ipsius FE. vel quarta GE.(67.*p.*) vel vt 1. ad 4. cùm quadrata sint in duplicata ratione est □FG. ad □GE. vt 1. ad 16.(4.*l.*6.) Ergo cũ □GE. sit æquale 16 □FG. erunt □□ ex G. in A.B.C.D.E. *æqu.* □□FA.FB.FC.FD+20□ FG.(4.*P.*) sed □□ ex G. vel □N. *æqu.* □□ ex F. vel □I+□K. vel +20□L*p.* ex *constr.* Ergo æquales sunt L*p.* FG. & quia EG. quadrupla est FG. & *pq.* ipsius L*p.* ex *constr.* æquales etiã sunt GE *pq.* sed □□ ex E. *æqu.* □□. ex G+5□GE. (60.M.1.) Ergo □□EA.EB.EC.ED. *æqu.* □N. minimæ summæ+5□*pq.* vel ex *constr.* + OM. sed □H. *æqu.* □N+□M. ex *constr.* Ergo □H. *æqu.* □□ ex E. in A.B. C.D. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXV.
Problema 5.

DAta basi, Minima summa, & ratione laterum eleuatorum, determinare singula latera, & Pyramidem.

EXPOSITIO. Fig. 34.

PYramidis ABCDE. sit data basis ABCD. & minima summa ex *centro* G. sit □N. ratio verò laterum EA. ad EB. vt *a* ad *b*. & EA. ad EC. vt *a*. ad *c*. & EA. ad ED. vt *a*. ad *d*. vel si rationes hoc ordine datæ non sint, reducãtur ad hunc ordinem claritatis gratia. Quæruntur determinata latera EA. EB. EC. ED. & indè Pyramis ABCDE.

CONSTRVCTIO.

INveniatur prius □H. summa □□EA. EB. EC. ED (184 *p*) deinde sit *b*. media inter *a*. *m*, & *c*. inter *a*. *n* & *d*. inter *a*. *o*. (2. *p*. 6.) & diuidatur H. sicut tota composita *a* + *m* + *n* + *o*. & sint partes *f*. *g*. *h*. k. (2. *p*. 3.) Tandem invenientur mediæ inter H*f* H*g*. H*h*. Hk. (2 *p*. 5.) Dico primam mediam esse EA secundam EB. tertiã EC. quartam ED. & ita infinitè.

DEMONSTRATIO.

QVia rectæ EA. EB. EC. ED. sunt vt *a*. *b*. *c*. *d*. & rationes *a*. ad *m*. *n*. *o*. duplicatæ sunt ratio-

num

num *a* ad *b.c.d.* ex *constr.* erunt □ □ EA.EB.EC. ED. vt rectæ *a.m.n.o.* (4.*l.*6.) Ergo summa □ □ vel □ H. ad singula Quadrata EA. EB. EC. ED. est vt tota $a+m+n+o$. ad singulas *a.m.n.o.* (4 *l.* 5.) vel vt H. ad singulas partes *f.g.h.K.* ex *constr.* sed □ H. est ad ▭ H*f*.H*g*.H*h*.H k vt H. ad *f.g.h.* k. (1 *l.*6.) Ergo quia □ H. eandem rationem habet ad □ EA.EB.EC ED. & ad ▭ H*f*. H*g*.H*h*.H k. est □ EA. æquale ▭ H*f*. & □ EB ▭ H*g*. & □ EC. ▭ H*h*. & □ ED. ▭ H k. (2.*l.*5.) Ergo EA. media est inter H.*f*. & EB. inter H*g*. &c. (1.*l.*6.) Ergo prima media est EA. secunda EB. &c. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXVI.
Problema 6.

PEr datam rectam secantem latus, & planū anguli solidi tribus planis comprehensi, planum ducere secans Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 34.

SIt angulus solidus ABCD. tribus planis cōprehensus, & recta BE secet latus DB. in B. & planum ADC. in E. quæritur planum ABC. transiens per rectam BE. & secans Pyramidem minimam ABCD.

CONSTRVCTIO.

DVcatur per punctum E. recta AEC. bifariā diuisa in E (160. M. 2.) & iungantur CB. AB. Dico planum ABC. secare Pyramidem minimam per rectam BE.

DEMONSTRATIO.

CVm in △ ABC. basis AC. sit bifariam diuisa, erunt △△ AEB. ECB. æqualia (1. *l.* 6.) Ergo cum planum ABC. sit bifariam diuisum recta BE. secabit per illam Pyramidem minimam (19. *p.*)

Aliter. Quia planum ABC. facit sectionem AC. bifariam diuisam in E secat △ ACD. minimam (160. M. 2.) Ergo secat Pyramidem minimam ABCD (20. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXVII.
Problema 7.

PEr datum punctum intra angulum solidum tribus planis comprehensum, ducere planũ secans Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 34.

INtra angulum solidum DABC datum sit punctum F. quæritur planum ABC. quod secet Pyramidem ABCD. omnium minimã per punctum F.

CONSTRVCTIO.

SVmatur in quouis latere quodlibet punctũ H. per quod, & per datum F. ducatur HFG. secans oppositum planum in G. & ducatur DG. fiat deindè FI dimidium FH. & IE parallela ipsi BD. secans DG. in E. & ducatur EFB. per quam ducatur planum ABC. secans Pyramidem minimam per EB. (186. *p.*) Dico esse ABCD. minimam per punctum F.

DEMONSTRATIO.

QVia EI. HB. sunt parallela, vt IF. est dimidiũ FH. ita EF. ipsius FB (2. *l.* 6.) & quia AC. est bisecta in E. erit F *centrum* minimum △ ABC (1. M. 2.) Ergo quia planum ABC. habet *centrum ff. ſſ.* in F. secat per F. Pyramidem minimam (28 *p.*) Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXVIII.
Problema 8.

DAto puncto intra Pyramidem Tetraedrũ determinare angulum solidum, ex quo Pyramis omnium minima secari potest.

EXPOSITIO. Fig. 35.

INtra Pyramidem ABCD. datum sit punctũ *o*. petitur determinatio anguli D. ex quo secanda sit Pyramis minima.

CONSTRVCTIO.

DVcantur ex angulis A. B. C. D. per *o*. rectæ secantes opposita plana in *r. i. e. y*. & inventis planorum *centris* (1. M. 2.) *z. d. n. x*. ductis tandem rectis ad dimidiata latera *a. b. c d f t*. si omnia puncta *i e r*. cadunt intra trapezia alicuius anguli solidi, ex illo abscindetur Pyramis minima: vt in hoc casu ex angulo D.

DEMONSTRATIO.

QVia rectæ *df. dt. nt. nd. xd. xf. df. dt*. sunt sectiones planorum hexaedri determinãtis Pyramidem minimam (43. *p*.) Ergo cum punctum *o*. sit intra hexaedrum anguli D. ex angulo D. secabitur Pyramis omnium minima (42. *p*.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO CLXXXIX.
Problema 9.

PYramidem tetraedram per datum angulũ, vel punctum in latere in data ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SIt data Pyramis Tetraedra, & angulus C. vel quodlibet pũctum *b*. in latere, quæritur planum *a*BC. vel *ab*C. secãs Pyramidem in ratione data *x*. ad *z*.

CONSTRVCTIO.

1. SI punctum datum sit angulus C. eligatur quodlibet latus illius anguli nempè CB. & latus oppositum AD. diuidatur in data ratione, vt *x*. ad *z*. ita AD. ad A*a*. & ductis AB. AC. erit planum ABC. quæsitum.

2. Si punctum datum sit *b*. in aliquo latere DB. ducatur ex *b*. in angulum oppositum A. vel C. recta, nempè *b* C. & ex *b*. ducatur recta *ba*. diuidens △ ABD. oppositum angulo assumpto C. in data ratione *x*. ad *z*. (156. M. 2.) & ductis *a*C. *b*C erit planum *ab*C. quæsitum.

DEMONSTRATIO.

QVia △ ABD. & △ AB*a*. habent eandem altitudinem in B. se habent vt bases AD. ad A*a*. (1. *l*. 6.) vel *x*. ad *z*. ex constructione.

Si-

Similitèr, quia Pyramides ABDC. AB*a*C. habent eandem altitudinem in C. se habent vt bases ABD. ad AB*a* (5. *l.* 11.) nempè vt *x.* ad *z.* Ergo secta est Pyramis ABCD. in data ratione plano *a*BC.

Similiter Pyramis ABDC ad æquè altam *ab*.DC. est vt basis ABD. ad *ab*D. (5. *l.* 11.) nempè vt *x.* ad *z.* ex *constr.* Ergo, &c.

Omnis ratio quæstioni apta est, vndè problema nullam determinationem requirit.

PROPOSITIO CXC.

Problema 10.

PEr datum punctum in superficie Pyramidis tetraedræ, illam secare in quacumque data ratione.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SIt Pyramis ABCD. & punctum datũ *o.* quæritur planum secans Pyramidem ABCD. in qualibet data ratione *x.* ad *z.*

CONSTRVCTIO.

1. DVcantur per *o.* recta *coa.* secans △ *ca*D. minimum & diuidens △ ABD. in maxima ratione (160. M. 2) si verò ratio △ ABD. ad △ *ca*D. sit vt *x.* ad *z.* ductis rectis *a*C. *c*C. in angulum plano oppositum, erit planum C*ac.* quæsitum.

2. Si

2. Si autem ratio data x. ad z. maior sit ratione △ ABD. ad △ *ca* D. inveniatur hæc ratio, & sit vt x. ad y. fiat deindè vt y. ad z. ita DC. (latus eleuatum supra planum angulũ ex quo sectum est △ minimum) ad D*b*. & ductis *ab*. *cb*. erit planum *cab*. quæsitum.

3. Si data ratio x. ad z. minor sit ratione △ ABD. ad *ca*D. ducatur per *o*. recta *dq*. secans △ ABD. in data ratione x. ad z. (163. M. 2.) & ductis rectis *d*C. *q*C. in angulum plano oppositum C. erit planum *dq*C. quæsitum.

DEMONSTRATIO.

IN *casu* 1. Pyramis ABDC. ad æquè altam *ca* DC. est vt basis ABD. ad basim *ca* D. (5. *l*. 11.) sed ex *hyp*. ABD. ad *ca*D est vt x. ad z. Ergo Pyramis ABCD ad *ca*DC. est vt x. ad z.

2. In *cacasu* 2. Quia Pyramides ABDC. *ca* D*b*. habent angulum D communem: altitudines in C. & *b*. sunt vt DC. ad D*b*. (2. *l*. 6.) hoc est ex hypothesi vt y. ad z. sed Pyramis ABDC. ad *ca*D*b*. est in ratione composita basis ABD. ad *ca*. vel x. ad y. & altitudinis DC. ad D*b*. vel y. ad z. (5. *l*. 11) Ergo cùm ratio x. ad z. composita sit ex rationibus x. ad y. & y. ad z. erit Pyramis ABDC. ad *ca*D*b*. vt x. ad z. (1 *l*. 5.)

3. In *casu* 3. Pyramis ABDC. ad Pyramidem *dq*DC. æquè altam in C. est vt basis ABD.

ad

ad dqD. (5.*l.* 11.) hoc est *constr.* vt x. ad z. Quod erat, &c.

Ex ipsa constructione liquet Problema omnem rationem admittere.

PROPOSITIO CXCI.
Problema 11.

PEr datum intra Pyramidem tetraedrum punctum secare ipsam in data ratione, quæ maior non sit maxima Pyramidis datæ ad Pyramidem minimam.

EXPOSITIO. Fig. 38.

INtra Pyramidem ABCD. datum sit punctum o. per quod ducendum est planum secans Pyramidem in data ratione x. ad z.

CONSTRVCTIO.

PRimò inveniatur angulus D. ex quo Pyramis minima resecanda est (188.*p.*) Secundò ducatur planum adb. secans Pyramidem abdD (187.*p.*) Tertiò inveniatur ratio Pyraramidis ABCD. ad Pyramidem abdD. quæ si est vt x. ad z. planum abd. secabit Pyramidem in data ratione.

Si autem ratio Pyramidis ABCD. ad abdD. sit vt x. ad y. & maior quàm ratio x. ad z. ex puncto I. quod bisecat ad. ducatur cie. vt $\triangle adD$. ad

ceD.

*ce*D. ſit vt *y*. ad *z*. (161. M. 2.) & ductis *cb*. *eb*. erit planum *ceb*. quæſitum.

DEMONSTRATIO.

PYramis ABCD. ad Pyramidem *adb*D. eſt vt *x*. ad *y*. ex *hyp*. vel *conſtr*. ſed Pyramis *ad*D*b*. ad æquè altam *ce*D*b*. eſt vt baſis *ad*D. ad *ce*D. (5. *l*. 11.) hoc eſt vt *y*. ad *z*. ex *conſtr*. Ergo ex æquo Pyramis ABDC ad Pyramidem *ce*D*b*. eſt vt *x*. ad *z*. Quod erat, &c.

Determinatio Problematis in hypotheſi cõtenta perſpicua eſt, eadem enim quantitas ad maiorem minorem habet rationem: & maiorem ad minorẽ (2. *l*. 5.) Ergo Pyramis ABCD. ad minimam *adb*D. maximam habet rationẽ: vndè ſi ratio data maior fuerit hac maxima, erit problema impoſsibile cùm Pyramis minor minima ſecari non poſsit, alitèr non eſſet illa minima.

PRO-

PROPOSITIO CXCII.
Problema 12.

Datam Pyramidem Tetraedram per datã in superficie rectam angularem in data ratione diuidere.

EXPOSITIO. Fig. 39.

Sit Pyramis ABCD. & in eius superficie quæuis recta angularis, scilicèt transiens per aliquem angulorum, quæ sit CB vel C*a*. per quã diuidenda sit Pyramis in ratione *xz*. ad *xo*.

CONSTRVCTIO.

1. Si data recta sit latus BC. diuidatur latus oppositum AD. in *b*. vt *xz*. in *o*. & ductis B*b*. C*b*. erit factum.

2. Si recta fuerit C*a*. diuidatur *xz*. in *i*. vt AB. in *a*. si *xi*. sit æqualis *xo*. ducta *a*D. erit factum. Si verò *xi*. sit maior quàm *xo*. diuidatur latus conterminum angulo A. nempè AD. in *b*. vt *xi*. in *o*. Si verò *xi*. minor sit *xo*. diuidatur latus conterminum B. nempè BD. in *d*. vt *zi*. in *o*. & ductis *ab*. C*b*. vel *ad* C*d* erit factum.

DEMONSTRATIO.

1. Primum cõstat, quia Pyramides ABCD. ABC*b* supra eandem basim sunt vt altitudines AD. ad A*b*. (1. *l*6.) nempè vt *xz*. ad *xo*. ex *constr* Ergo, &c.

2. Pyramis ABCD.ad A*a*CD. est vt basis ABC.ad A*a*C(5.*l*.11.) sed △ABC.ad △A*a*C. æquè altum est vt AB.ad A*a*.(1.*l*.6) hoc est vt *xz*.ad *xo*.ex *hyp*. Ergo Pyramis ABCD.ad A*a* CD.est vt *xz*.ad *xo*.(1.*l*.5.)

Si verò *xi*.fuerit maior quàm *xo*. Pyramis ABCD.ad A*a*C*b*. est in ratione composita basium,& altitudinum(5.*l*.11.)sed basis ABC.ad A*a*C.est vt AB.ad A*a*.(1.*l*.6.) vel vt *xz*.ad *xi*. ex *Constr*.& altitudo AD.ad A*b*. vt *xi*.ad *xo*. ex *constr*. Ergo Pyramis ABCD. ad A*a*C*b*. est vt *xz*.ad *xo*.(1.*l*.5.)

Tandem si *xi*.fuerit minor *xo*.cum ABC.ad *a*BC.sit vt AB.ad *a*B.(1.*l* 6.) hoc est vt *xz*.ad *zi*.ex *constr*. sed altitudo BD.ad altitudinem B*d*.est vt *zi*.ad *zo* ex *constr*. Ergo Pyramis AB CD.ad *a*BC*d*.est vt *xz*.ad *zo*.(1.*l*.5.)Ergo Pyramis ABCD.ad residuum A*a*C*d*D.erit vt *xz*. ad residuum *xo*.(5.*l*.5.) Quod erat,&c.

Ex ipsa demonstratione constat problema omnem rationem admittere,& nulla indigere determinatione.

PRO-

PROPOSITIO CXCIII.
Problema 13.

DAtam Pyramidem Tetraedram per datã in superficie rectam secantem duo latera in data ratione diuidere, quæ maior sit ratione plani ad triangulum sectum, vel minor ratione plani ad trapezium sectum.

EXPOSITIO. Fig. 40.

SIt data Pyramis ABCD. & data recta in superficie *ab*. quæritur planum *abc*. secans pyramidem in ratione *xz*. ad *xo*. quæ maior sit ratione ABC. ad △*ab*A. vel minor ratione ABC ad *ab*CB.

CONSTRVCTIO.

P*Rimò*. Ratio ABC. ad A*ab*. sit vt *xz*. ad *xi*. minor quàm ratio data *xz* ad *xo*. eritque *xi*. maior quàm *xo*. (2. *l*. 5.) diuidatur igitur latus AD. in *c*. vt *xi*. in *o*. & ductis *ac*. *bc*. erit factum.

Secundo. Sit ratio ABC ad *abCB*. vt *xz* ad *xe*. & maior quàm ratio *xz* ad *xo*. eritque *xe*. minor quàm *xo*. (2. *l*. 5.) Diuidatur ergo AD. in *c*. vt *ze*. in *o*. & ductis *ac*. *bc*. erit factum.

DEMONSTRATIO.

PYramis ABCD. ad Pyramidem A*ab*D. est in ratione composita basium ABC. ad *ab*A.

& altitudinum AD. ad Ac. (5. *l.* 11.) sed ratio ABC. ad A*ab* est vt *xz*. ad *xi*. ex *hyp*. & ratio AD. ad A*c*. vt *xi*. ad *xo*. ex *constr*. Ergo ex æquo Pyramis ABCD. ad pyramidem A*abc*. erit vt *xz*. ad *xo*. in ratione data (1. *l*. 5.)

Secundò. Quia basis ABC. ad *ab*CB. est vt *xz*. ad *xe*. ex *hyp*. erit ABC. ad residuum *ab*A. vt *xz*. ad residuum *ze* (5. *l*. 5.) sed Pyramis ABCD. ad pyramidē *ab*A*c*. est in ratione composita ABC. ad *ab*A. quæ est *xz*. ad *ze*. & altitudinum AD. ad A*c*. quæ ex *constr*. est vt *ze*. ad *zo*. (5, *l*. 11.) Ergo ex æquo ratio ABCD. ad *ab*A*c*. est vt *xz*. ad *zo*. (1. *l*. 5.) Ergo ABCD. ad residuū *ab*CBD. erit vt *xz*. ad residuū *xo*. vel in ratione data (5. *l*. 5.) Quod, &c.

Ex quibus constat problema omnem rationē admittere quando △A*ab*. maius, vel æquale est trapezio *ab*BC. Si autem trapezium fuerit maius, hæc construnctio non admittit rationes medias inter ABC. ad *ab*CB. & ABC. ad *ab*A.

PRO-

PROPOSITIO CXCIV.
Problema 14.

PEr datam rectam intra Pyramidem tetraedram secantem vnum latus, & planum oppositum: vel per punctum extra Pyramidem secare ipsam in data ratione apta.

EXPOSITIO. Fig. 41.

SIt data recta *co*. secans latus DC. in *c*. & planũ ABD. in *o*. vel sit datum extra Pyramidem punctum *i*. & secanda sit Pyramis in ratione *xz*. ad *xo*.

CONSTRVCTIO.

SIt ratio DC. ad D*c*. vt *xz*. ad *xi*. & per punctũ *o*. ducatur *boa*. (161. M. 2.) secans planum ABD. vt *xi*. ad *xo*. ductis *bc*. *ac*. erit factum.

Secundò. In quouis latere DC. assumatur quodlibet punctum *c*. vt ducta *ci*. secet planũ oppositum in *o*. Ergo per rectam *co*. secabitur Pyramis vt antea.

DEMONSTRATIO.

IN vtroque casu Pyramis ABCD. ad Pyramidem *ab*D*c*. est in ratione composita altitudinum DC. ad D*c*. & basium ABD. ad *ab*D. (5. *l*. 11.) hoc est ex *constr*. in ratione cõposita *xz*. ad *xi*. & *xi*. ad *xo*. Ergo vt *xz*. ad *xo*. Quod, &c.

Ex ipsa constructione apparet differentiam

ra-

rationum DC ad D*c*. & *xz*. ad *xo*. nempè rationem *xi*. ad *xo*. si fuerit maioris inæqualitatis, posse esse minorem quàm ratio △ABD. ad △ minimum quod per *o*. secari potest ex angulo ADB. & maiorem ratione △ABD. ad △ maximum per *o* A. vel *o* B. sectum ex angulo ABD. vel si differentia dicta sit minoris inæqualitatis vt *xe*. ad *xo*. poterit ratio residui *ze*. ad residuũ *zo*. esse minor ratione △ABD. ad maximum ▭ AB*ab*. prout in constructione 2. *prop*. 193. In secundo casu quia punctum *c*. liberè sumi potest in latere DC. maiorem extensionem habet problema.

SCHOLIVM.

DEterminandum restat quomodò Pyramis tetraedra per datam quamlibet rectam in in data ratione secanda sit: licet enim in *prop*. 27. determinatum sit planum, quod habet *cētrum* in recta, secare ex angulo Pyramidē minimam: nobilioribus Geometris reseruatum est, quomodò per illam sit Pyramis in data ratione secanda.

PRO-

PROPOSITIO CXCV.
Problema 15.

D*Atis extremis, & summa mediarum in quatuor continuis, invenire medias.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SIt data minor extrema HX. maior XZ. summa mediarum XD. quæruntur determinatæ mediæ XV. VD.

CONSTRVCTIO.

EFficiant quemlibet angulũ DXH. & ZXA. & XA. sit æqualis XD. ducantur præterea DA. DZC. AHC. CXS. & ex Z recta ZV. (quæ ommissa est) parallela ipsi CX. secans XD. in V. & erunt XV. VD. quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

QVia si sumantur *f.* ad *m.* vt HX. ad XZ. & supponantur *g.* & k. mediæ inter *f.* & *m.* in △ ADC. erit HX. ad XD. vt *f* ad *g*+k. vt minor ad summam mediarum ex *hyp.* Ergo CZ. ad ZD. erit vt *f.* ad *g.* (59. *p num.* 5) vel quia HX. ad XD. est vt antecedens *f.* ad summam consequentiũ *g*+k. (39. M. 2.) Ergo CZ. ad ZD. erit vt *f.* ad *g.* & AS ad SD vt *f* ad k. Ergo cùm sint parallelæ CX. ZV. est XV. ad VD vt CZ. ad ZD. vel vt *f.* ad *g.* (2. *l* 6.) vel vt *g.* ad k. & XV. ad XD. vt *g.* ad *g*+k. Ergo determinatæ sunt mediæ XV. VD. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXCVI.
Problema 16.

EX quatuor continuis data summa primæ, & tertiæ: tum quartæ, & tertiæ, tum ratione tertiæ ad summam primæ, & quartæ: distinguere omnes.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SIt HO. summa primæ, & tertiæ: OL. summa tertiæ, & quartæ: & ratio tertiæ ad summã primæ, & quartæ sit vt EG. ad GC. quæruntur singulæ proportionales.

CONSTRVCTIO.

SIt HOL. eadem recta, & SOF. efficiat quemlibet angulũ, & æquales SO. HO. tum OL. OF. per O. ducatur DOG. & sumpta quæuis OG. fit GO. ad OD. vt GE. ad EC. nempè vt antecedens datum ad summam antecedentis, & consequentis. Ducantur prætereà DLB. HGB. se intersecantes in B: Si ergo fiat vt BG. ad GH. ita LO. ad *l*. erit prima *l*. qua ablata ex HO. remanebit tertia, hac ablata ex OL. remanebit quarta: & vt tertia ad quartam ita erit prima ad secundam.

DEMONSTRATIO.

QVia BG. ad GH. est vt tertia + quarta ad primã ex 60. *p. num.* 3. Ergo *l*. erit prima, &c.

PRO-

PROPOSITIO CXCVII.
Problema 17.

EX quatuor continuis data summa primæ, & tertiæ, tum quartæ, & tertiæ, & ratione summæ extremarum ad tertiam, invenire omnes.

EXPOSITIO. Fig. 18.

DAtæ sint HO. summa primæ, & tertiæ: tum OL. summa tertiæ, & quartæ, & ratio summæ extremarum ad tertiam sit vt *l*. ad *r*. quæruntur singuli termini.

CONSTRVCTIO.

SInt HOL. eadem recta, & SOF. secet ipsam, & SO. HO. sint æquales: tũ OF. OH. & quæuis alia ROC. secet ipsas in O. sitque RO. ad OC. vt *r*. ad *l*+*r*. & ducantur CFB. SRB. se intersecantes in B. Si ergo HO. diuidatur vt CB. in F. pars minor erit prima: reliquum tertia, qua ablata ex OL. remanebit quarta: & vt tertia ad quartam, ita prima ad secundam: omnes igitur notæ erunt.

DEMONSTRATIO.

QVia si in eadem ratione continuæ sunt *f*. *g*. k. *m*. in △BSC. quia FO. ad OC. est vt *m*+k. ad *f*+k. ex *constr*. erit CF. ad FB. vt *f*. ad k. (60. *p*. *num*. 22.) nempè vt prima ad tertiam: constat ergo constructio.

PROPOSITIO CXCVIII.
Problema 18.

EX 6 continuis data prima, vel vltima, & ratione secundæ ad summam primæ, & quintæ: tum ratione quintæ ad summam primæ, & secundæ invenire omnes.

EXPOSITIO.

SInt cõtinuæ *f.g* k.*m.l.p.* & data sit *f.* vel *p.* tum ratio *g.* ad *f*+*l.* vt FQ. ad QD. & ratio *l.* ad *f*+*g.* vt LQ. ad QC. quæruntur omnes.

CONSTRVCTIO.

SInt FQD. eadem recta, & LQC. similitèr se intersecantes in Q ducãtur DLB. CFB. CD. BQZ. & fiat vt CF. ad FB. ita *f.* ad *l.* & erit *l.* quinta: vel vt FB. ad BC. ita *p.* ad *g.* & erit secunda: tũ vt DL. ad LB. ita *f.* ad *g.* & erit secunda, vel vt BL. ad LD. ita *p.* ad *l.* & erit quinta, vndè reliquæ innotescent.

DEMONSTRATIO.

COnstat ex *prop.* 61. *num.* 10. & 12. Quia cùm FQ ad QD. sit vt *g.* ad *f*+*l.* est CF. ad FB. vt *f.* ad *l.* & DL. ad LB. vt *f.* ad *g.* Ergo, &c.

Plura inquiret Geometra in 4. 5. vel 6. continuis, &c. variata si opus fuerit hypothesi propositionum 59. 60. & 61.

PROPOSITIO CXCIX.
Problema 19.

1. *Datam rectam proportionaliter secare.*
2. *Maiori segmento addere minus:*
3. *Minori segmento addere maius.*
4. *Compositam ex tota, & minori, vel*
5. *Compositam ex tota, & maiori diuidere in partes.*

CONSTRVCTIO. Fig. 42.

1. Thesis perspicua est, constructio autem sic perficietur. Sit AV. proportionalitèr secanda: & ipsi æqualis VH. & H*m*. eidem æqualis, & perpendicularis, & *m* K. parallela AH. diuisa VH. bifariam in X. radio XA. describatur circulus secans *m*K. in K. & KZ. perpendicularis AV. eritque AV. proportionaliter secta in Z.

2. Dato maiori segmento VH. addendum sit minus VZ. sumatur VA. æqualis VH. & hac bisecta in X. radio XA. describatur circulus: sit H*m* perpendicularis æqualis VH & *m*K. parallela, & KZ perpendicularis: eritque VZ. minus segmentum.

3. Dato minori segmento HE. addendum sit maius HZ. sint HE. HV. æquales, & H*m*. æqualis, & perpendicularis: *m*K parallela bise-

cta HV. radio XE. describatur circulus, & KZ. sit perpendicularis, & erit HZ. maius segmentum.

4. Data AE. summa totius, & minoris segmenti distinguenda sunt singula: diuidatur AE bifariam in X. & trifariam in V. H. & H*m*. VY. perpendiculares æquales HV. & *m* K. parallela: ducatur KXD. & erit D*g*. tota proportionaliter secta, K*g*. minus segmentum, & *gh*. maius.

5. Data AV. composita ex tota, & maiori segmento singula sunt distinguēda. Sit VH. æqualis AV. reliqua vt in *num.* 1. & erit ZV. tota, & AZ. maius segmentum.

DEMONSTRATIO.

1. QVia AV. est proportionaliter secta in Z. 2. Similiter ZH. in V: 3. Similiter ZE. in H. 4. Quia cùm ZH. sit perdendiculariter secta in V. & additum sit minus segmentum H*n*. est tota Z*n*. composita ex tota ZH. & minori segmento: sed cum KZ. YV. *m* H. *n* D. sint parallelæ, erit KD. in *g*. *h*. vt Z*n*. in V. H. (2. *l* 6.) Ergo K*g* est minus segmētum totius *g* D proportionaliter sectæ: vt ZV. totius V*n*. 5. Quia AV. est proportionaliter secta in Z. minus segmentum AZ. erit maius totius ZV (104. M. 2.) Ergo AV. composita est ex tota VZ. & maiori

seg-

ſegmento ipſius AZ. Quæ omnia conſtant ex (165.*p.*) Quod,&c.

PROPOSITIO CC.

Corpora regularia invenire in data ſphæra, & eorum rectas determinare, vel è cõuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 42.

Sit datæ ſphæræ diameter AE. quærũtur latera ſolidorum regularium, circulorũ radij, & ſphærarum tangentium,&c.

CONSTRVCTIO.

Deſcripto circulo ſphæræ maximo ACEL. diameter AE. ſit trifariam ſecta in V.H. & ducantur perpendiculares GVC. QHO. ſint VY. H*m.* æquales VH. & ducatur KY*m*F. tum KZB. F*n*D. Prætereà ducantur AK. KV. KXD. AG. GE. E*m*L. & ſumatur K*o.* æqualis AK. & ſit *op.* parallela AE. & *pq. po.* æquales, & *qr.* parallela EA. & continuetur KA*r.* eruntque omnia parata.

TETRAEDRVM.

1. L*Atus Tetraedri est EG.* 2. *GV. radius circuli circa △: & GC. diameter.* 3. *mL. radius circuli inscripti triangulo.* 4. *EV. perpendiculum Tetraedri.* 5. *EL. perpendiculum △.* 6. *XV. radius sphæræ inscriptæ: & VH. diameter.* 7. *AG. diameter sphæræ tangentis latera.*

Demonstratio sumitur ex tabula *prop.* 118.

1. Quia EV. EG. EA sunt continuæ (3. *l.* 6.) & □ EV. ad □ EG. vt EV. ad EA (4 *l.* 6.) sed EV. ad EA est vt 2. ad 3. vel vt 4. ad 6. ex *constr.* Ergo qualium □ EV. est 16: □ EG. erit 24: & □ EA 36. Ergo EG. est latus Tetraedri ex 118. *p.*

2. Quia □ GE. *æqu* □ EV + □ VG (4. *l.* 2.) si ex 24. auferantur 16. remanet □ GV. 8. Ergo GV. est radius circuli circa △: & illius dupla GC. erit diameter (118. *p.*)

3. Quia △△ EH*m*. *md*L. sunt similia (2. *l.* 6.) & EH H*m*. æqualia: erunt L*d*. *dm* æqualia, & ipsi XH (7. *l.* 1.) sed qualium □ HE. est 4 est □ XH. 1. (3. *l.* 2.) & □ L*m*. æquale □ L*d*. + □ *md*. (4. *l.* 2.) Ergo □ L*m*. est 2. qualium □ EH. est 4. & □ EA. est 16. Ergo L*m*. est radius circuli inscripti triangulo (118. *p.*)

4. Quia □ EV. est 16. & □ EA. 36. est EV. perpendiculum Tetraedri (118. *p.*)

5. Quia EX. potest 9. & EL duplum vel 18. erit EL. perpendiculum △(118. *p.*)

6. Quia XH. potest 1. qualium AE. potest 16. erit XH. radius sphæræ inscriptæ, & VH. diameter eiusdem (118. *p.*)

7. Si □ EG. 24. auferatur ex □ EA 36. erit □ GA. 12. & dimidium GA poterit 3: Ergo dimidium GA. est radius sphæræ tangentis latera: & GA. diameter (118. *p.*)

CVBVS.

1. *Latus Cubi est AG. & diameter sphæræ inscriptæ.* 2. *GE. diameter circuli circa □ & diameter sphæræ tangentis latera.* 3. *EL. recta ab angulo in centrum basis: & ipsius □ erit minima summa ad centra, vel contactus planorum.*

Demonstratio sumitur ex tabula *prop.* 127.

1. Quia sunt continuæ AE. AG. AV. sicut AE tripla est AV erit □ AE. 36. triplum □ AG. 12. (4 *l.*6) Ergo AG. erit latus Cubi, & diameter sphæræ inscriptæ (127. *p.*)

2. Quia □ GE est 24 qualiũ □ AE est 36. erit GE. diameter circuli circa □, & diameter sphæræ tangentis latera (127. *p.*)

3. Quia □ EX est 9. erit □ EL 18. illius duplum (4. *l.* 2.) Ergo est EL. recta ab angulo in

cen-

centrum basis:& □ EL.minima summa ad cõtactus(127 *p.*)

OCTAEDRUM.

1. L*Atus Octaedri est EL.& diameter sphæræ tangentis latera.* 2. *AG. diameter sphæræ inscriptæ.* 3. *EG.diameter circuli circa △ & GR.radius eiusdem.* 4. *GR.diameter circuli inscripti △.* 5. *AG.distantia duplicis plani oppositi,& diameter sphæræ inscriptæ.* 6. □ *EG.minima summa ad contactus.*

Demonstratio ex tabula *prop.*140.

1. Quia □ EL est 18 duplum □ EX.9: erit EL latus Octaedri, & diameter sphæræ tangentis latera(140.*p.*)

2. Quia □ AG est 12. qualium □ A E. 36: ex Cubo *num.*1. erit AG. diameter sphæræ inscriptæ(140 *p.*)

3. Quia □ EG.est 24.ex Tetraedro *num.*1. erit EG.diameter circuli circa △(140.*p.*)

4. Quia GR.est dimidium GE. & □ GE. 24.erit □ GR.6.(3.*l.*2.) Ergo GR. est diameter circuli triangulo inscripti(140.*p.*)

5. Quia eadem est distantia planorum in Cubo,& Octaedro(172.*p.*) & AG.est distantia planorum in Cubo, nempè ipsum latus Cubi, erit AG. distantia planorum in Octaedro:

dro: tũ quia AG. est diameter sphæræ inscriptæ ex *num*. 2. Ergo, &c.

6. Quia □ EG. est 24. erit minima summa ad contactus planorum (140. *p*.)

DODECAEDRVM.

1. L*Atus Dodecaedri est AK*. 2. *AG. est diagonium* ⬠. 3. *K*p. *est radius circuli circa* ⬠. 4. *K*q *radius maioris circuli per 5 angulos*. 5. *GV. radius circuli per 6 angulos*. 6. *KZ. radius circuli per 3 angulos*. 7. q*K*p *distantia planorum oppositorum, & diameter sphæræ inscriptæ*. 8. *GAK. distantia laterum, & diameter sphæræ tangentis latera.*

Demonstratio. Primum, & secundum constant ex *prop*. 165. Tertium ex *prop*. 166. Quartum demonstratur: quia VZ. est maius segmẽtum VA. vel KZ. (165. *p*.) sed *op*. ad *p*K. est vt VZ. ad ZK (2. *l*. 6.) Ergo *po*. vel *pq*. est maius segmentum ipsius *p*K: Ergo K*q* est proportionaliter secta in *p* (104 M. 2) Ergo cùm maius segmentum K*p*. sit radius circuli circa ⬠, erit K*q*. radius maioris circuli per 5 angulos (158. *p*.)

Quintum, & sextum constant ex *prop*. 166. Septimum ex *prop*. 167. Octauum ex *prop*. 163. cùm AK. sit latus dodecaedri, & GA. diagoniũ Pentagoni: Ergo, &c.

ICO-

ICOSAEDRUM.

1. R*Adius circuli circa* △ *est* Kp. 2. *Radius maioris circuli per 3 angulos* Kq. 3. *Radius circuli per 5 angulos* gh. 4. *Latus Icosaedri* Kr. 5. *Distantia planorum* qKp. *& diameter sphæræ inscriptæ.* 6. *Recta potens triplum* Kq. *est diameter sphæræ tangentis latera.*

Demonstratio. 1. Quia K*p*. est radius circuli circa ⬠ dodecaedri: ex dodecaedro: Ergo est radius circuli circa △ Icosaedri (173.*p*.)

2. Quia K*q*. est radius maioris circuli in dodecaedro: Ergo & in Icosaedro (153. & 158.*p*.)

3. Quia DK. est composita ex tota, & minori segmento, & *gh*. est maius segmentum (199.*p*.) Ergo KD. potest quintuplum *gh* (107. M.2.) sed diameter sphæræ KD. potest quintuplum radij circuli per 5 angulos Icosaedri (142.*p*.) Ergo *gh*. est radius dicti circuli.

4. Quia *pq*. est minus segmentum K*q*. & AZ ipsius AV vel KZ. (ex dodecaedro *num*. 4) sed vt KZ. ad ZA. ita K*q*. ad *qr*. (2.*l*.6.) Ergo *rq*. est etiam minus segmentum ipsius K*q*. & sunt æquales *pq*. *qr*. sed R*r*. æquè potest ac K*q*. & *qr*. (4.*l*.2.) Ergo R*r*. potest triplum maioris segmenti K*p*. (108 *p*.) sed K*p*. est radius circuli cir-

circa △ Icosaedri ex *num.* 1. & latus △, vel Icosaedri potest triplum radij (112. M. 2) Ergo K*r*. est latus Icosaedri.

5. Quia *q*K*p*. est distantia planorum dodecaedri, & diameter sphæræ inscriptæ ex *num.* 7. *dodecaedri*: Ergo etiam Icosaedri ex (173. *p.*)

6. Constat ex 154 *p.* Quod erat, &c.

FINIS

totius Operis.

L^{a} I

P. III.

Fig. 1.

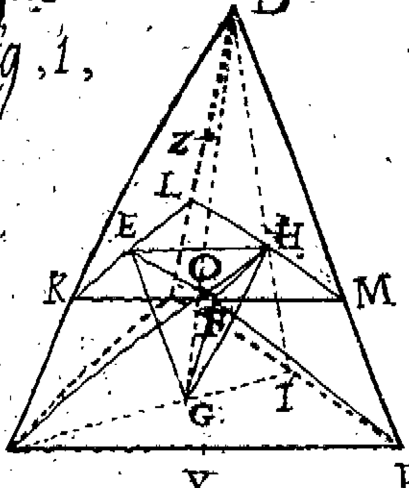


Fig. 2.

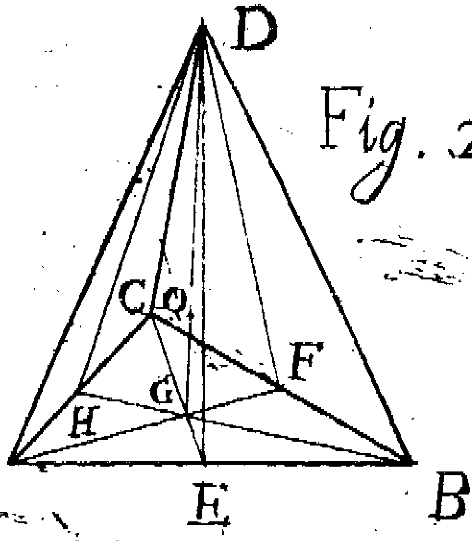


Fig. 3.

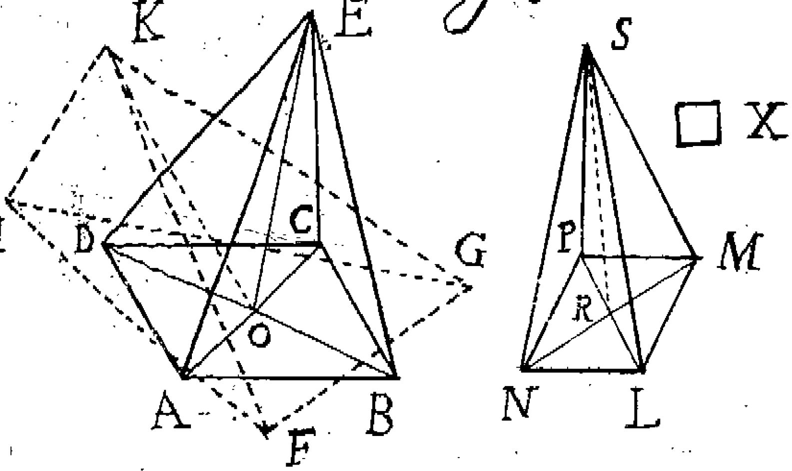


Fig. 4.

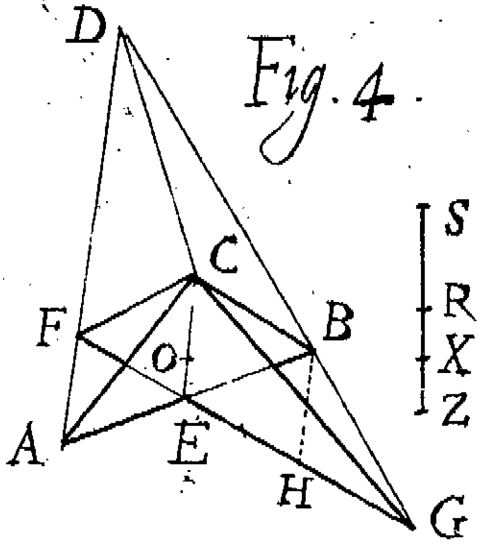


Fig. 5.

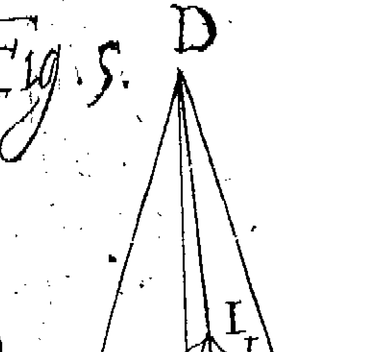


Fig. 6.

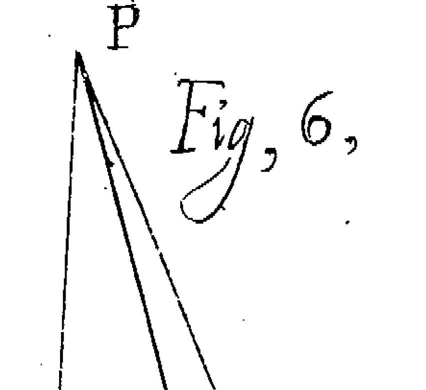
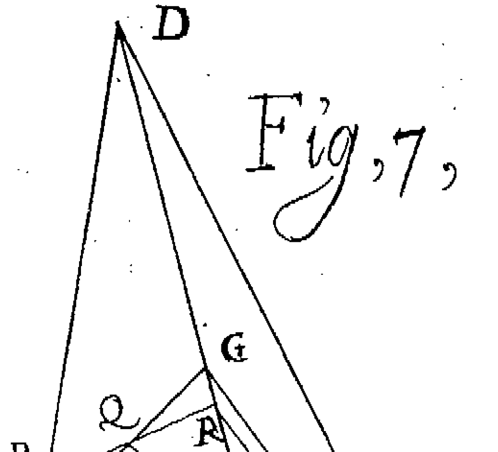


Fig. 7.



L. II.

P. III.

Fig. 8.

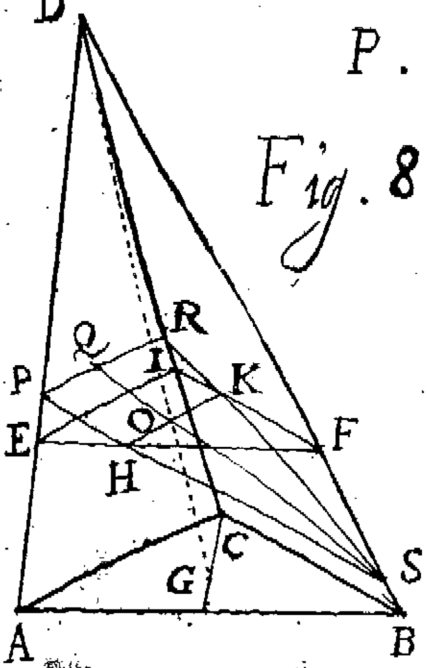
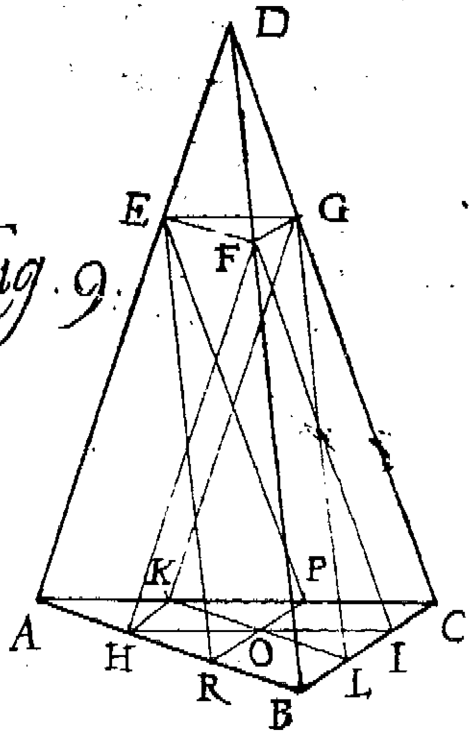
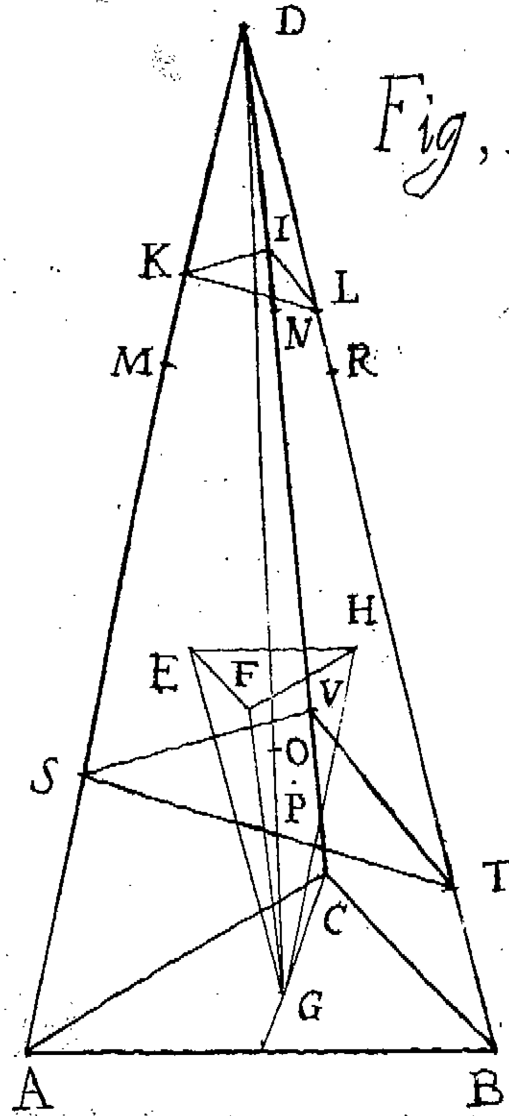


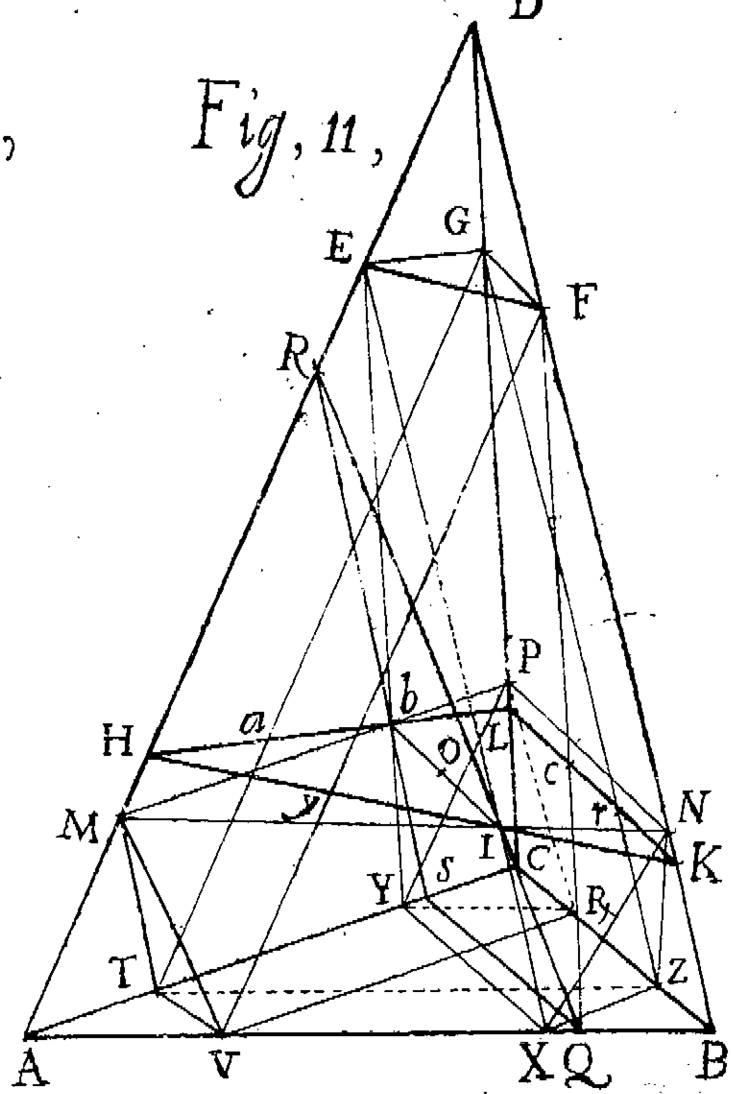
Fig. 9.



Fig, 10,



Fig, 11,



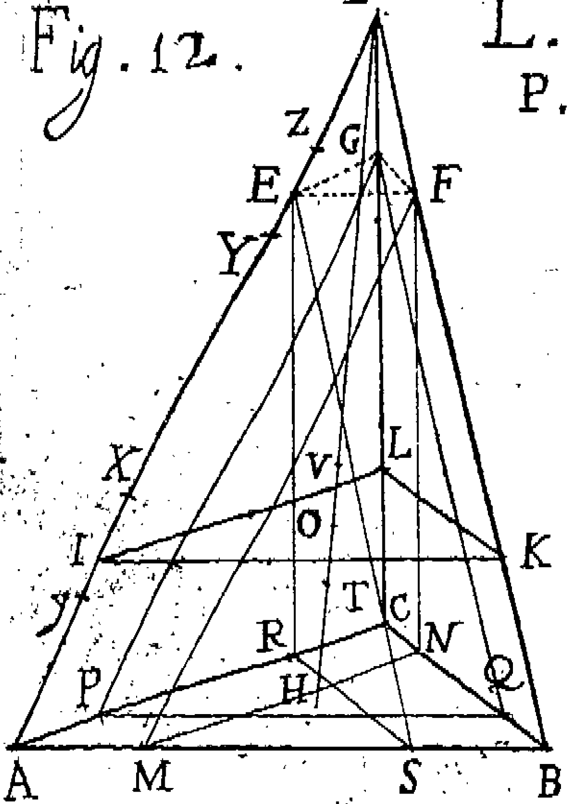
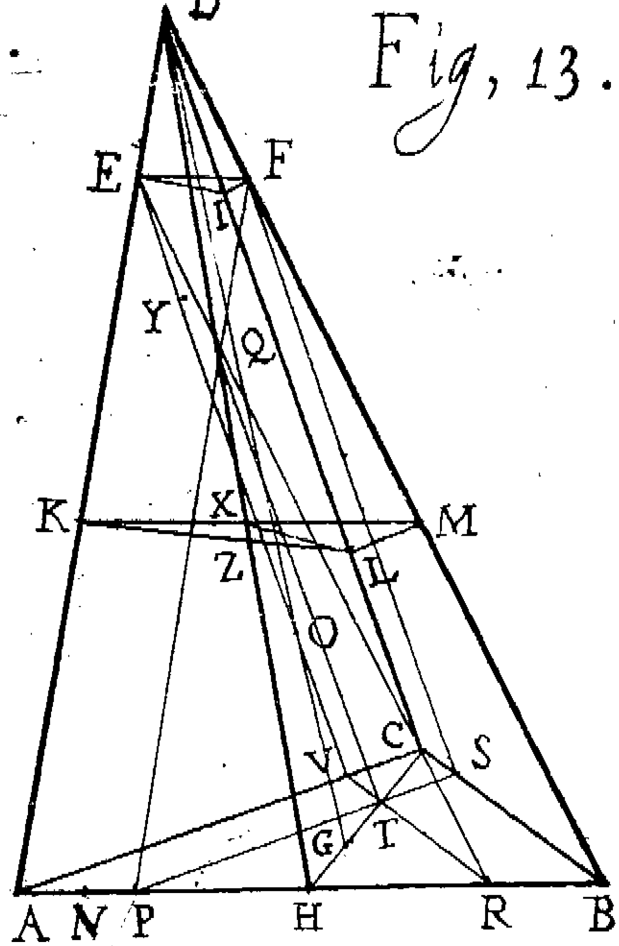


Fig. 12.



Fig, 13.

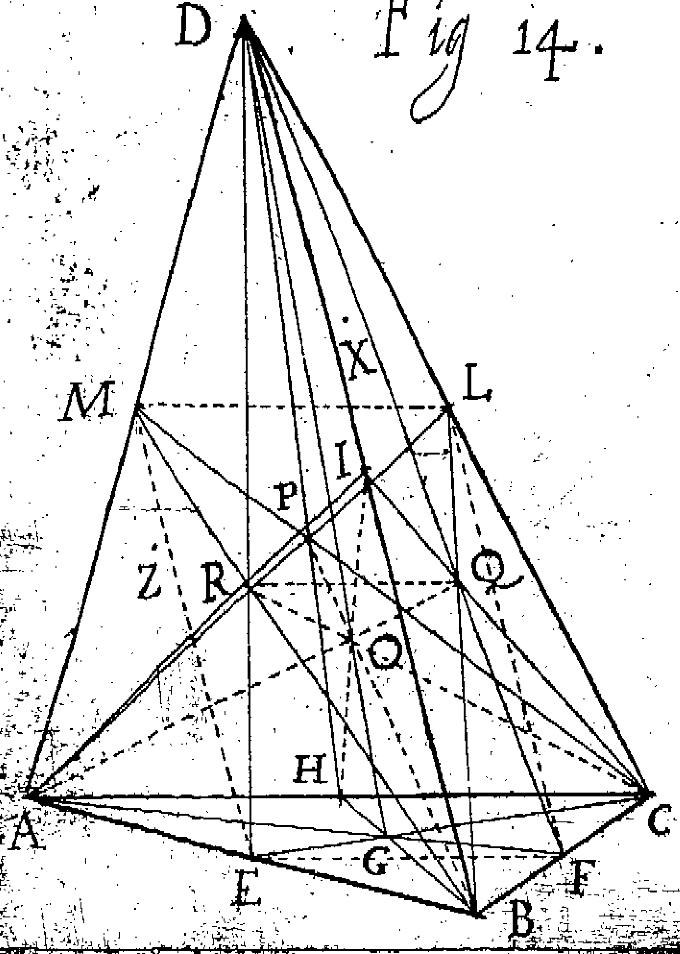


Fig 14.

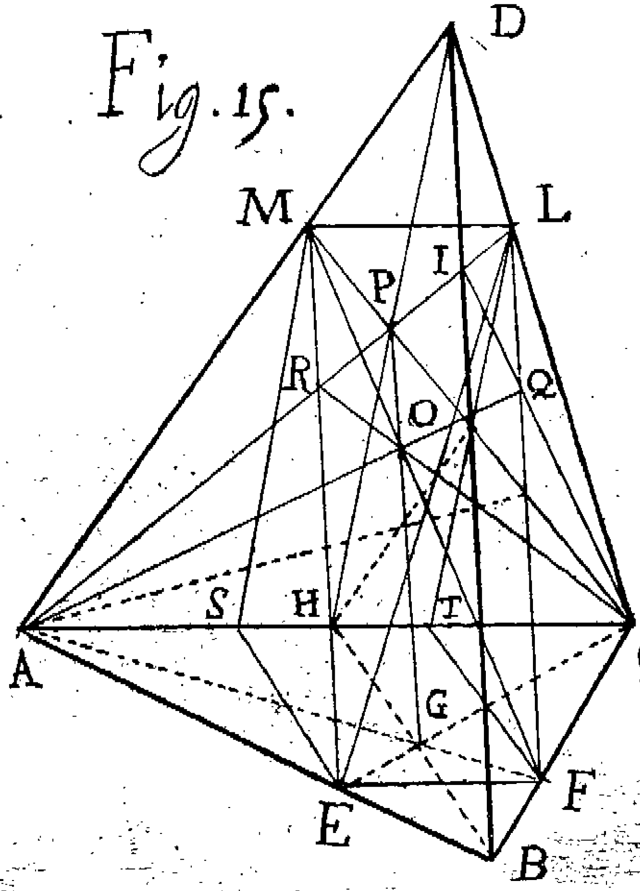


Fig. 15.

Fig. 16.

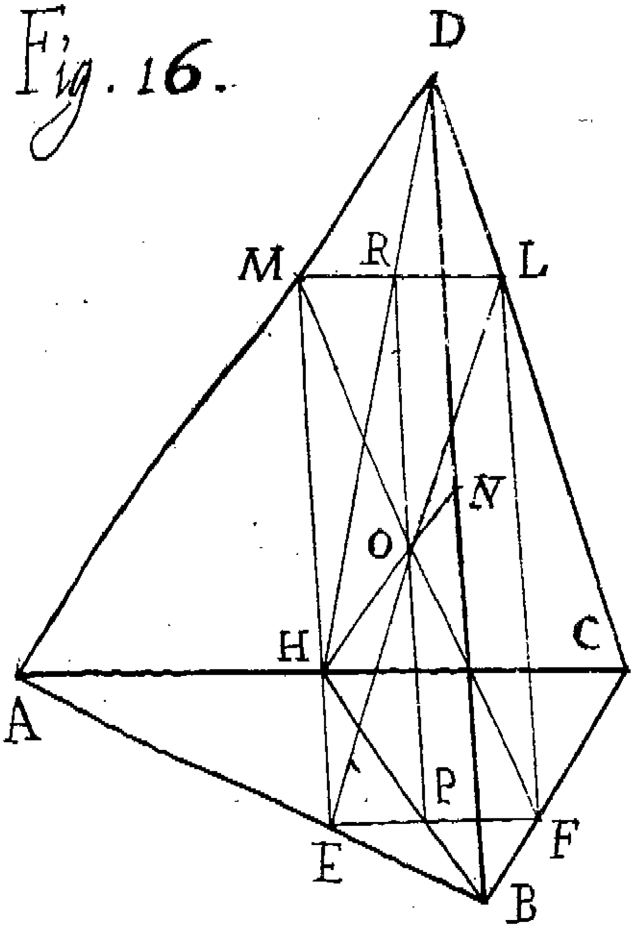


Fig. 17.

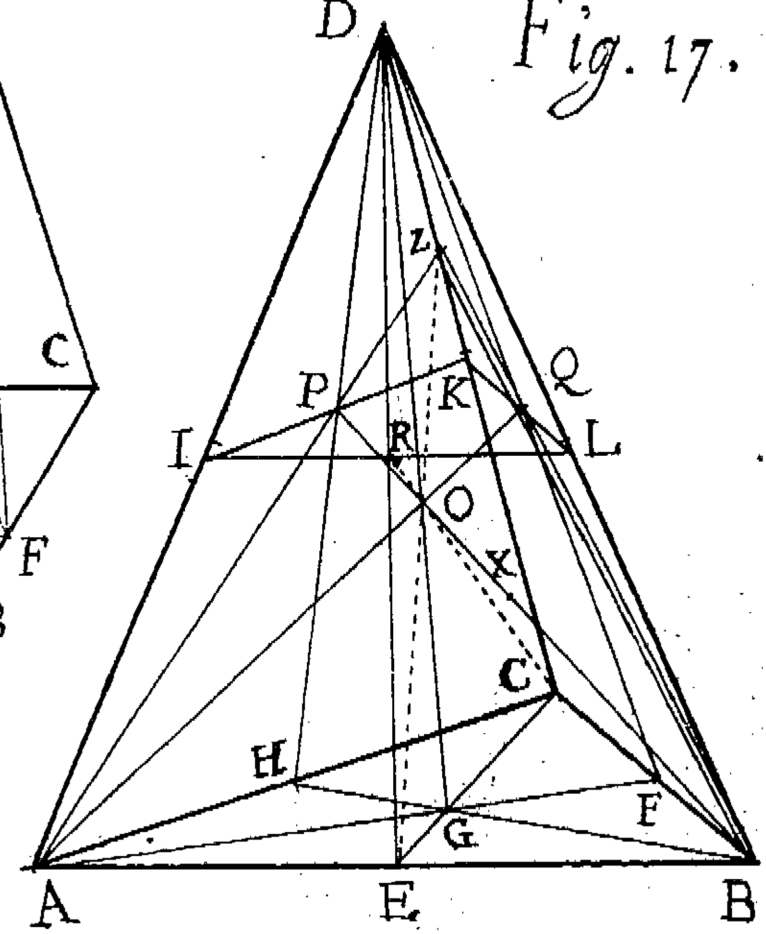


Fig. 18.

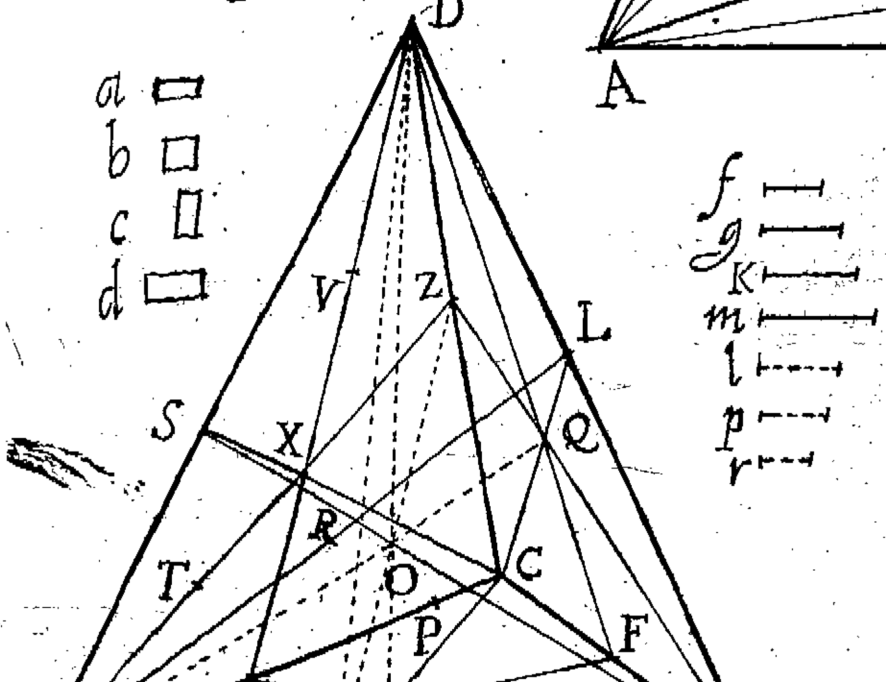
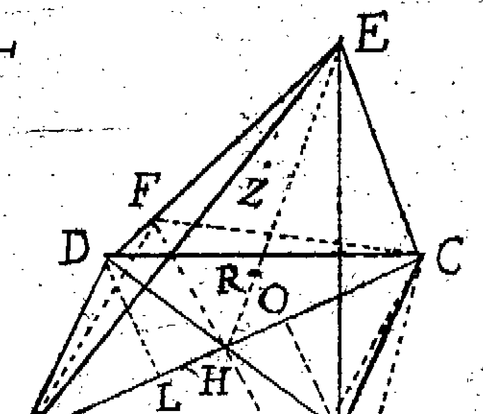
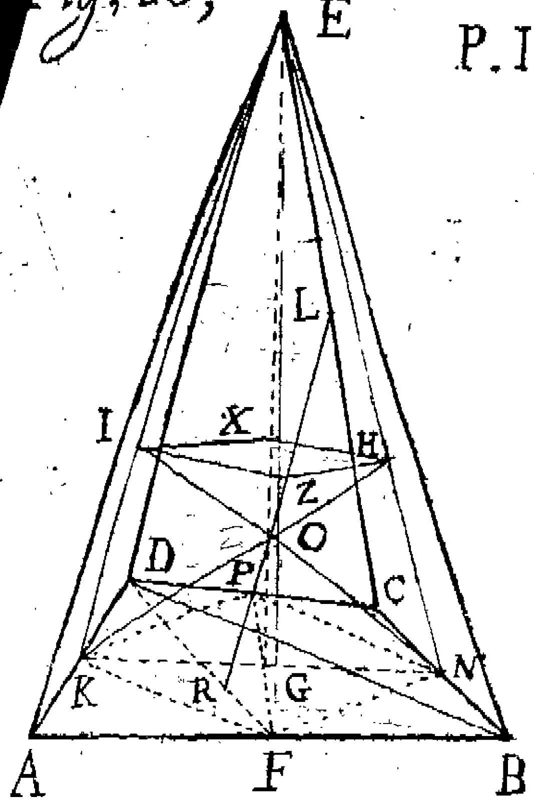


Fig. 19.



La. V.
P. III.

Fig, 20,



Fig, 21,

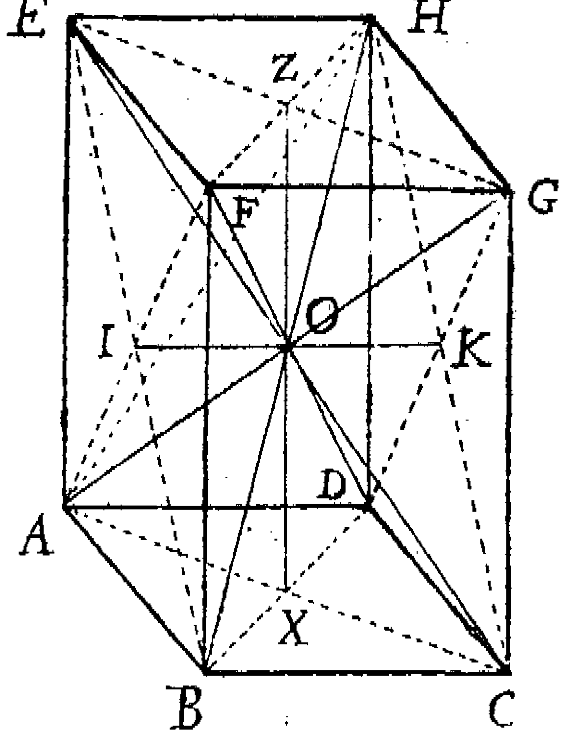


Fig. 22.

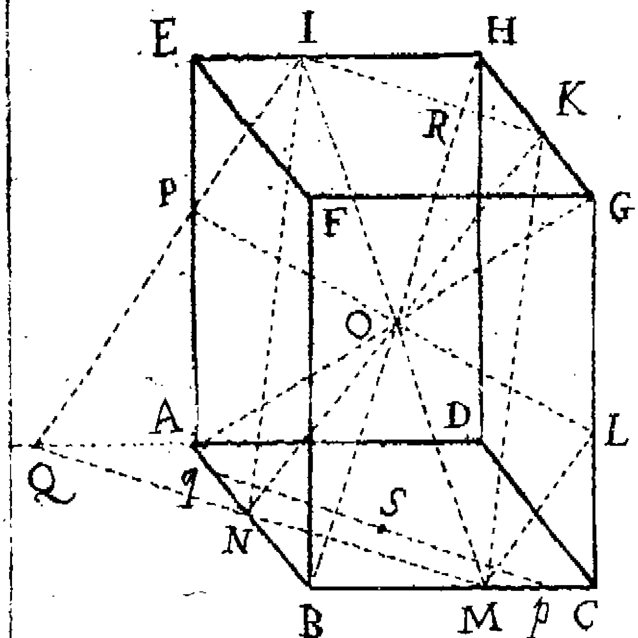
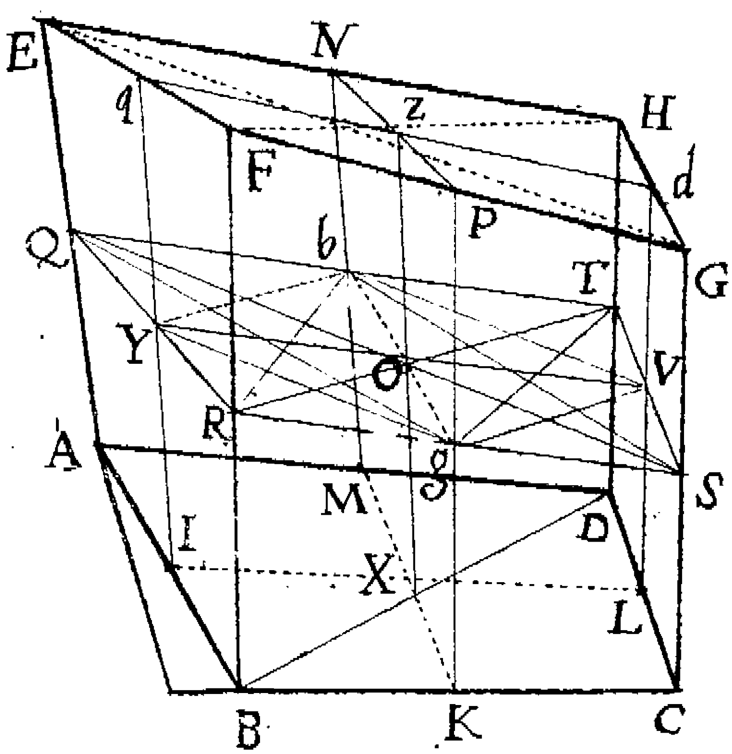


Fig. 23.



L.^a VI
P. III

Fig. 24.

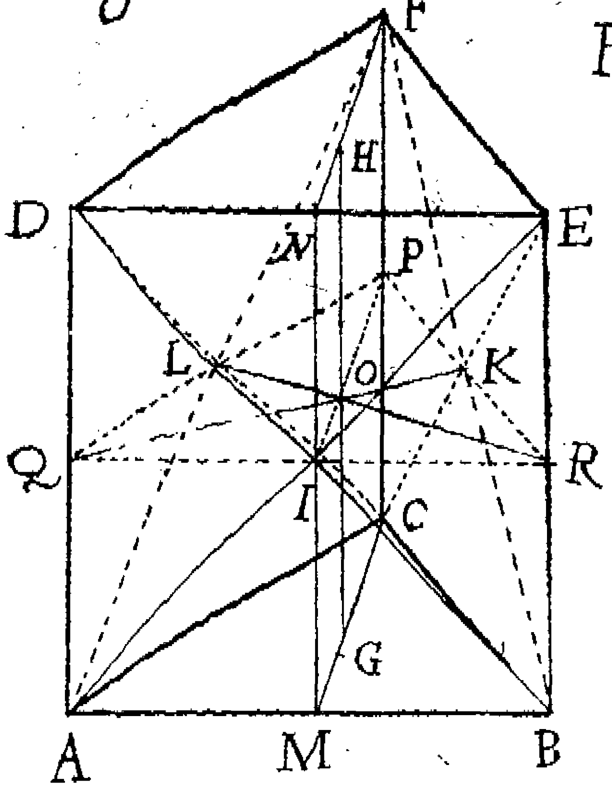


Fig 25.

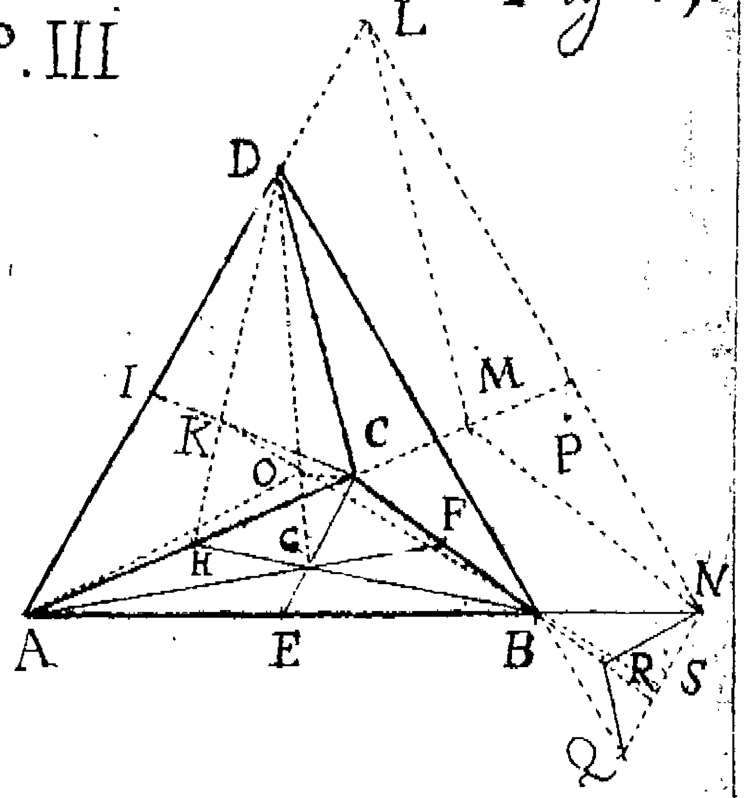


Fig. 26.

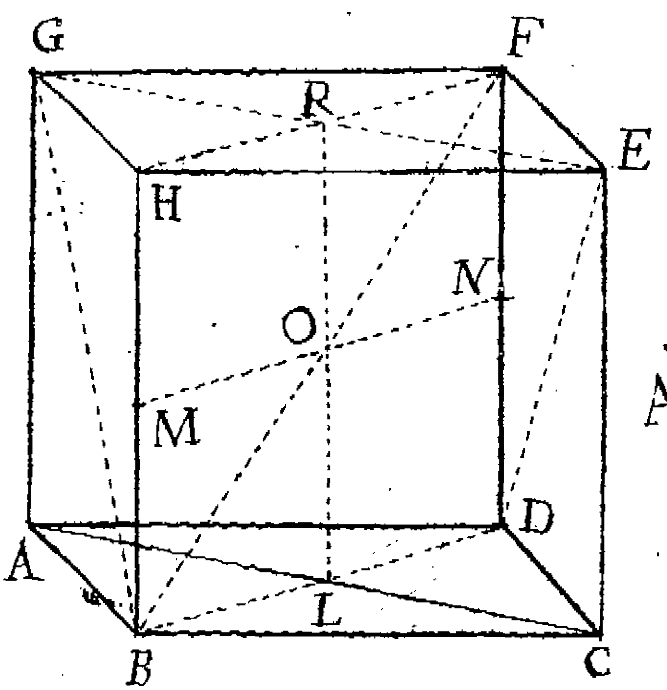
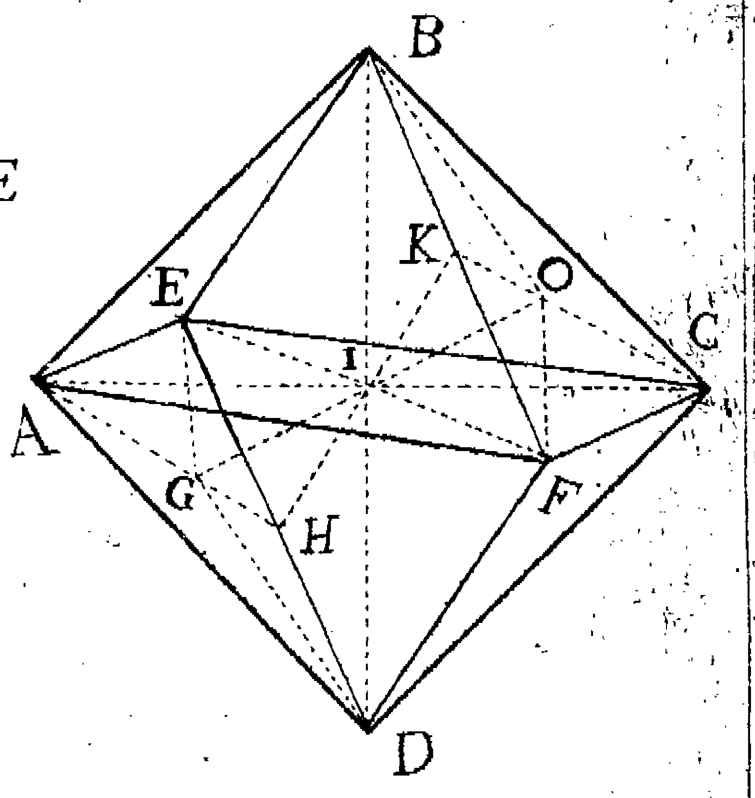


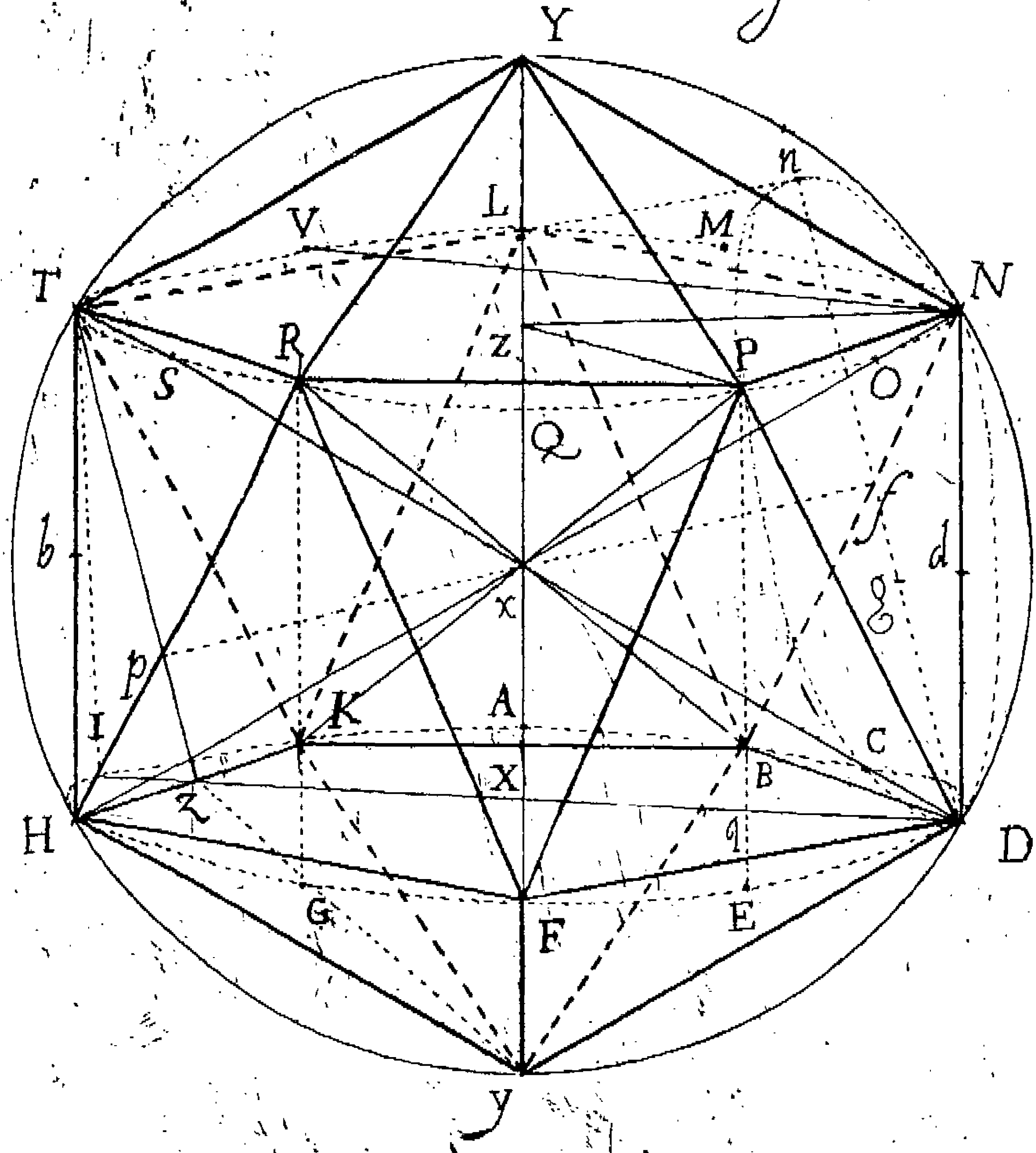
Fig. 27.



L.ª VII.

P. III.

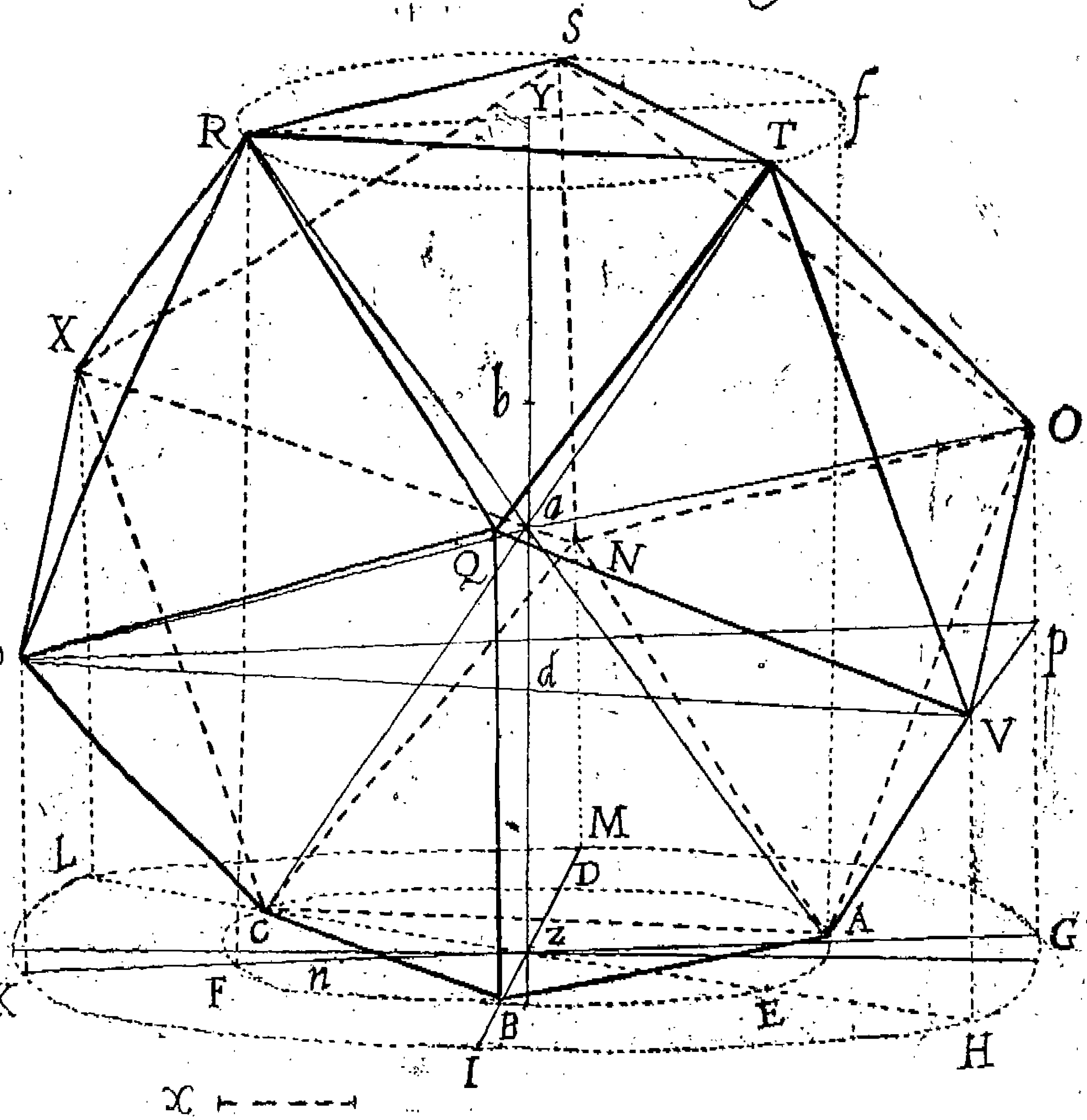
Fig. 28.



L.ª VIII.

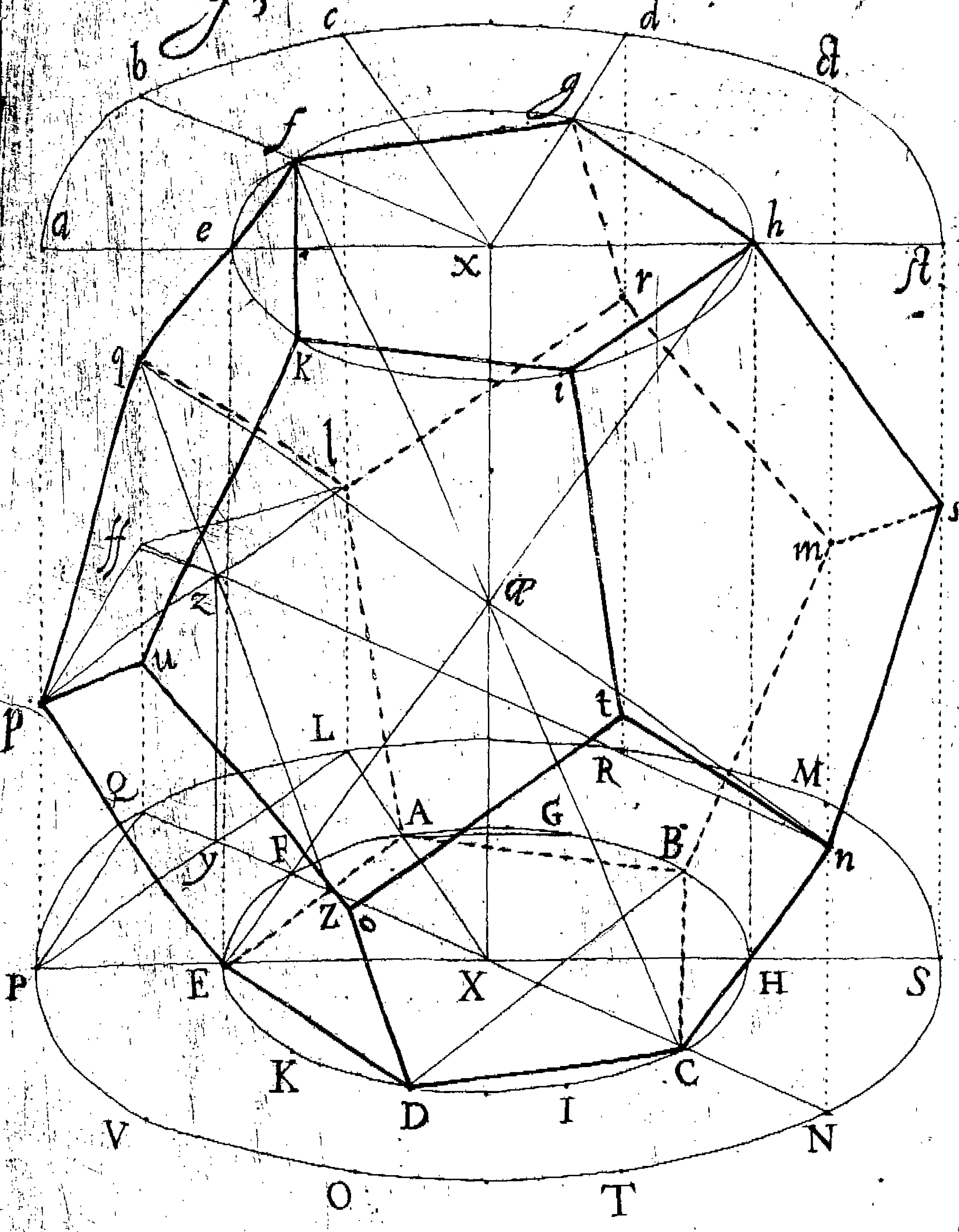
P. III.

Fig. 29.



Lª. IX P. III

Fig 30.



Lª. X.
P. III.

Fig. 31.

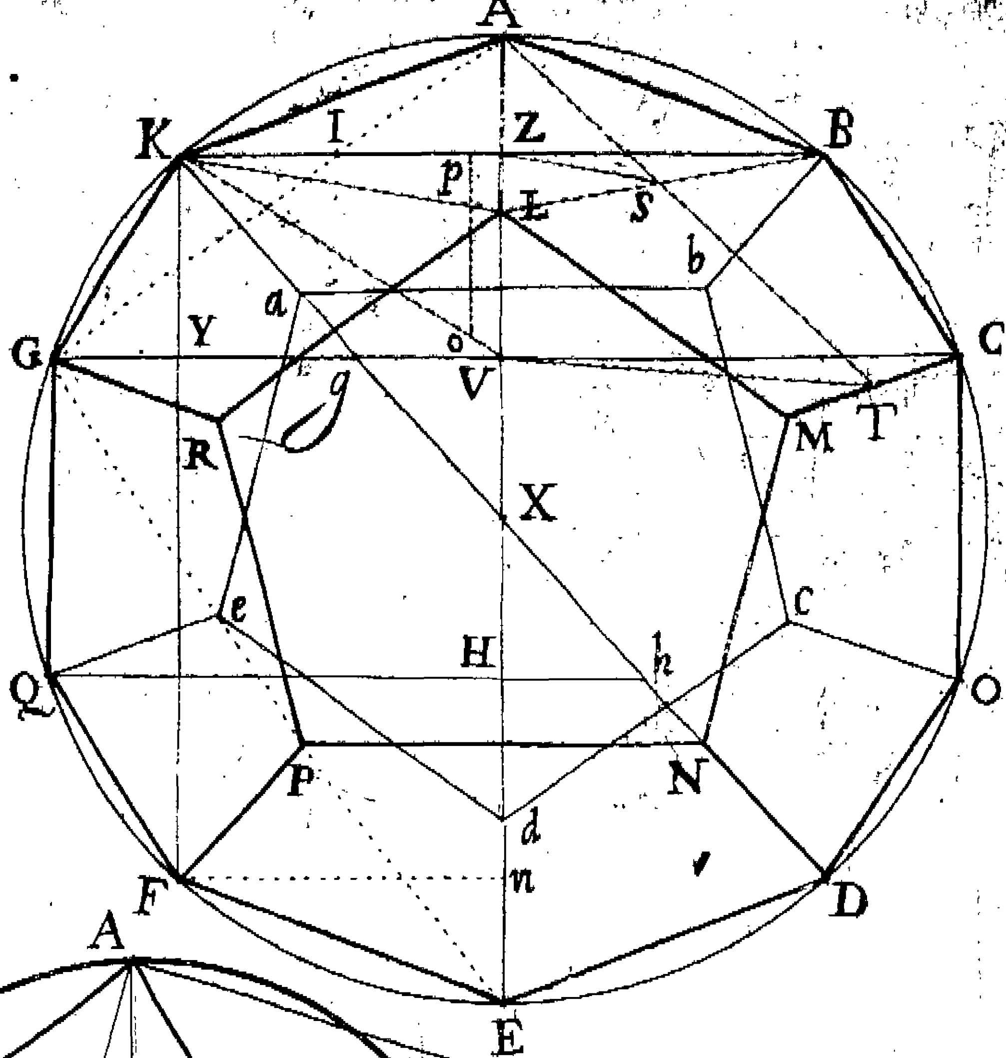
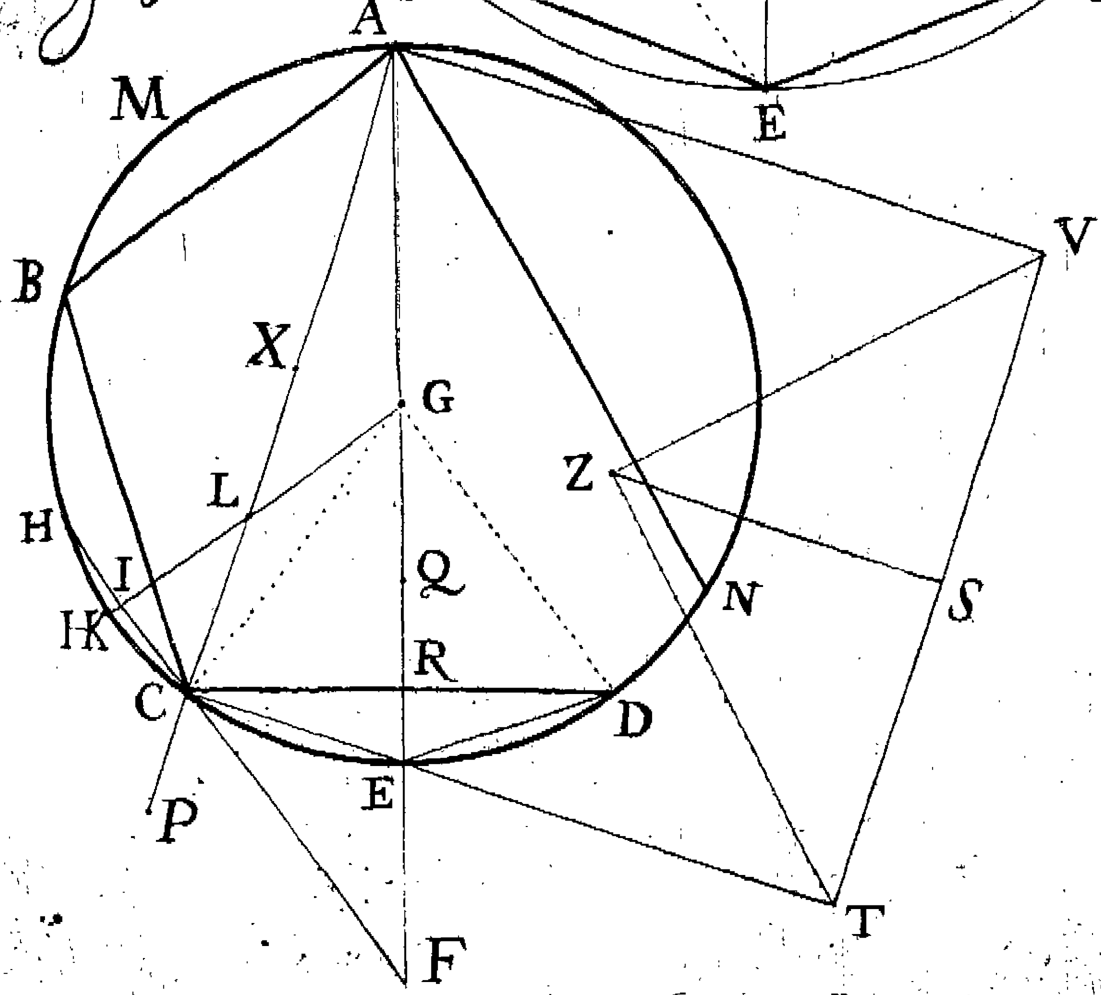


Fig. 32.



Lª. XI. P III.

Fig. 33.

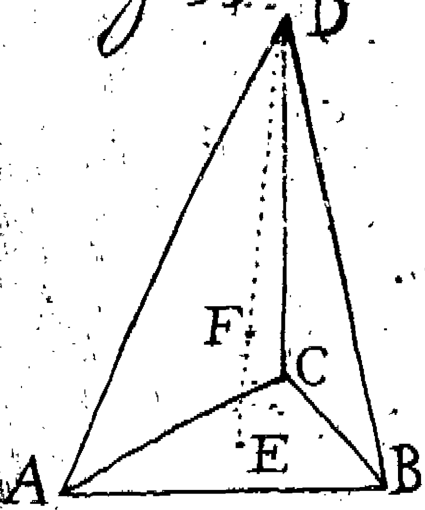


Fig. 34.

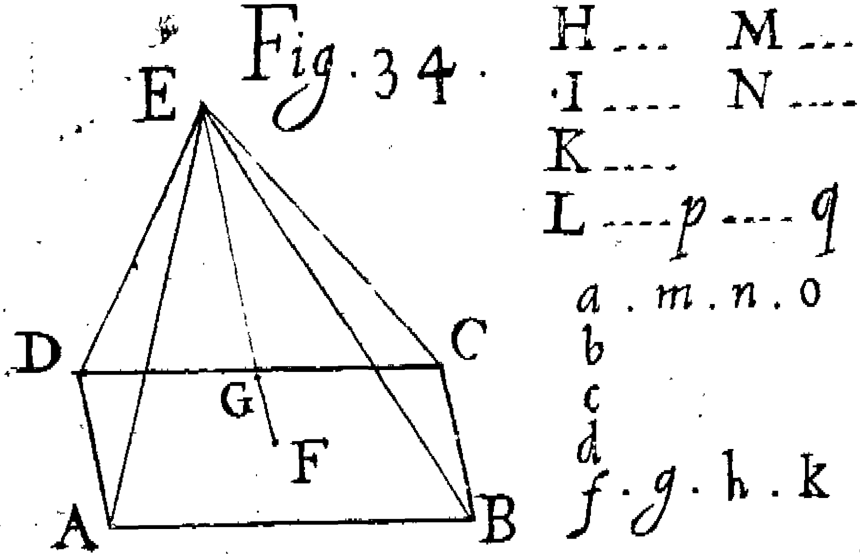


Fig. 34

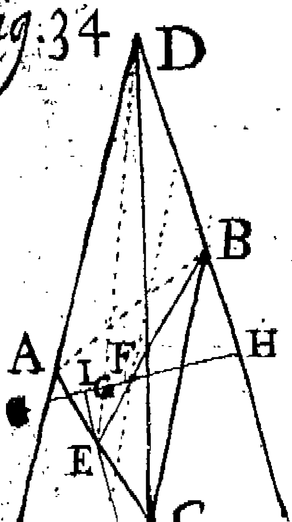


Fig. 35.

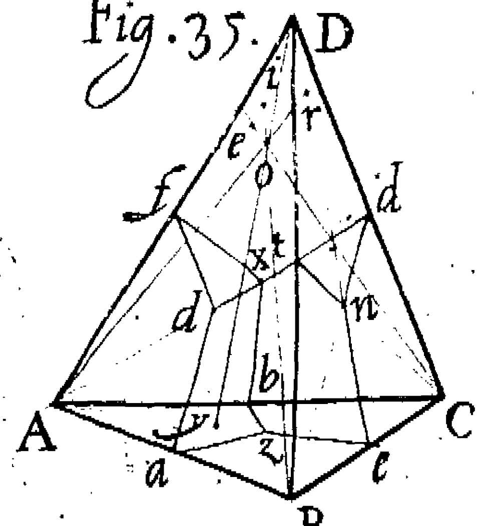


Fig. 36.

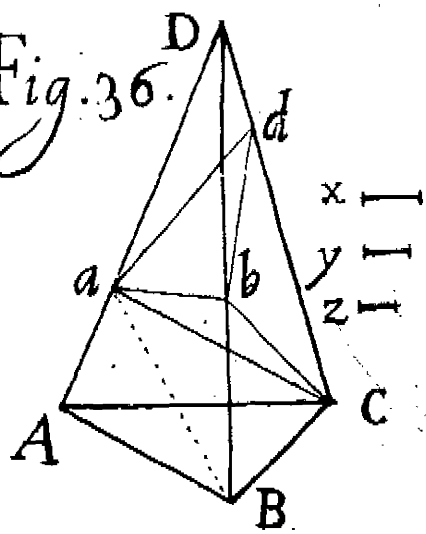


Fig. 37

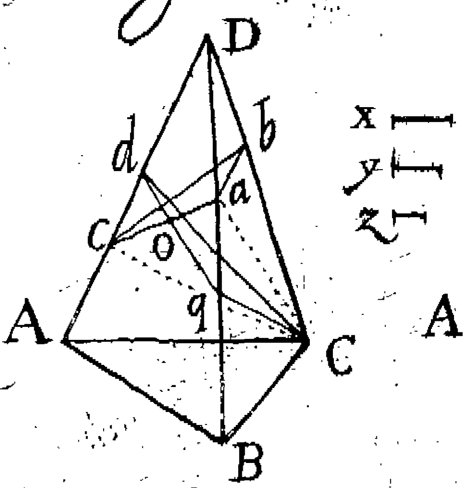


Fig. 38.

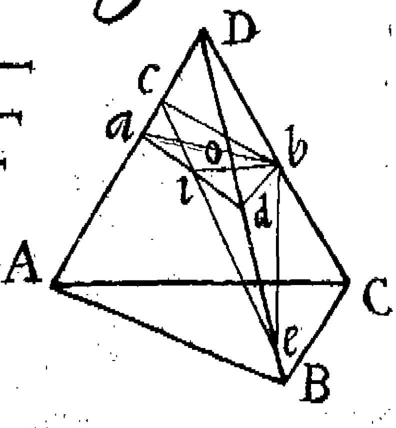


Fig. 39.

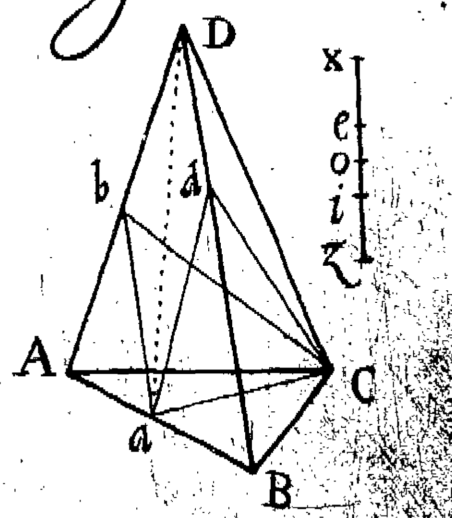
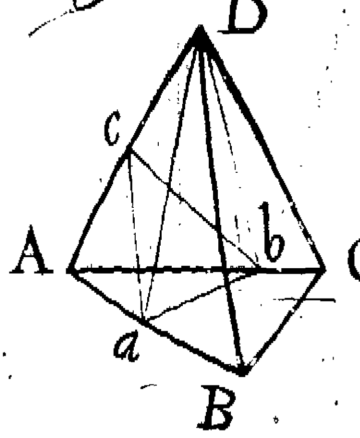


Fig. 40.



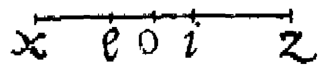


Fig. 41.

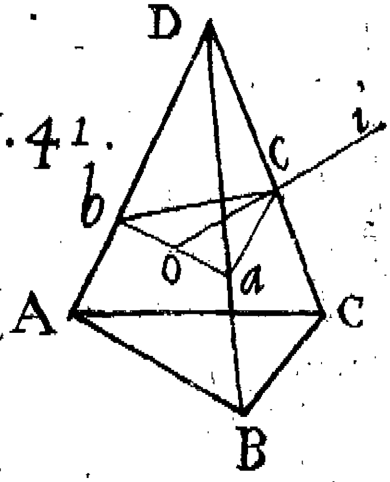


Fig. 42.