WOLF, Christian

Christiani Wolfii... Elementa matheseos universae : tomus primus... -- Editio novissima, multo auctior et correctior. -- Genevae : Apud Henricum-Albertum Gosse, & Socios, 1743

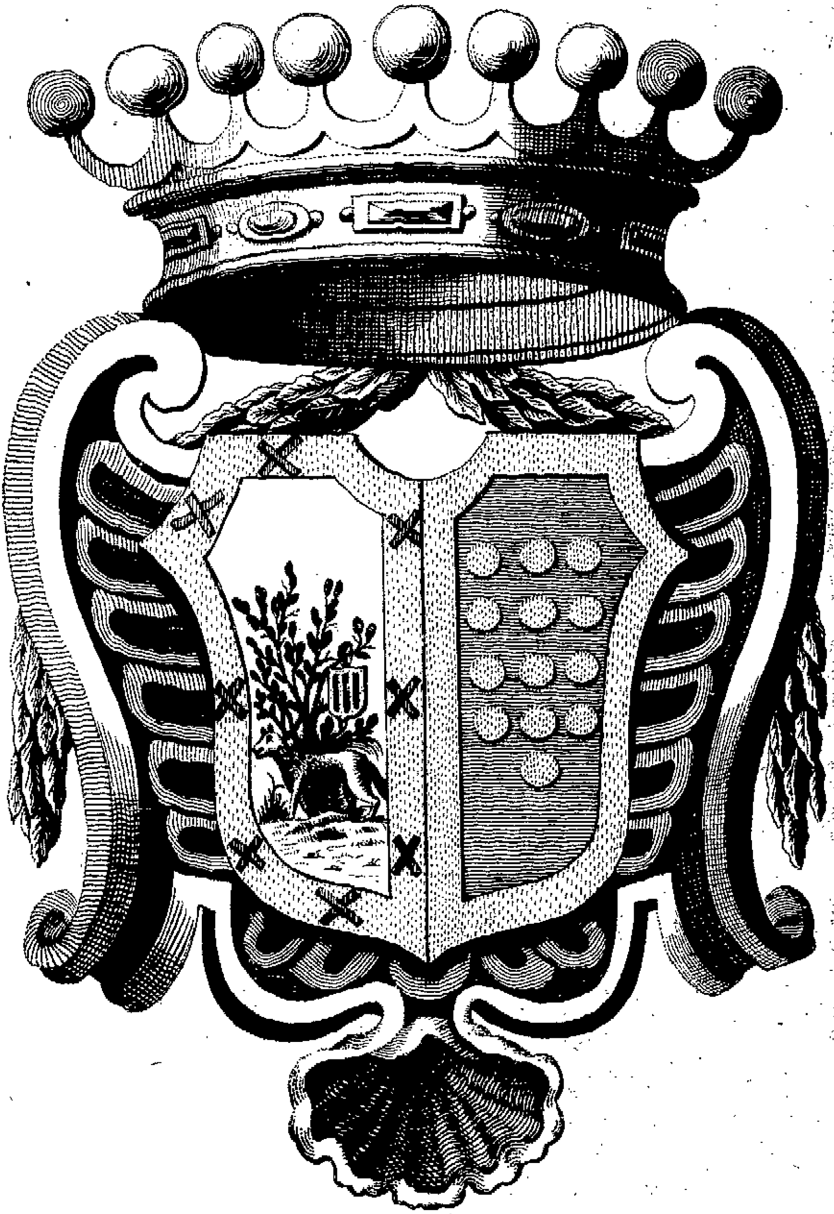
XXII, 512 p., [1] h. de lám., [30] de grab. pleg., []1, *3, 2*4, 3*3, A-Z4, 2A-2Z4, 3A-3S4 ; 4º marquilla

Port. a dos tintas, con grab. xil . -- La h. de lám. es calc., representando al autor: "Daudet sculp: Lugd: 1731" . -- Las h. de grab. pleg. son calc . -- Numerosas cabeceras xil., intercaladas en el texto . -- Texto a dos col . -- Antep.

1. Matemáticas-Tratados, manuales, etc. 2. Matematikak-Tratatuak, eskuliburuak, etab. I. Título

R-5049 Ejemp. falto de antep. -- Enc. perg. -- Ex-libris del Conde del Carpio

R-5049



Boizo ft

C. S. C14.

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI, FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

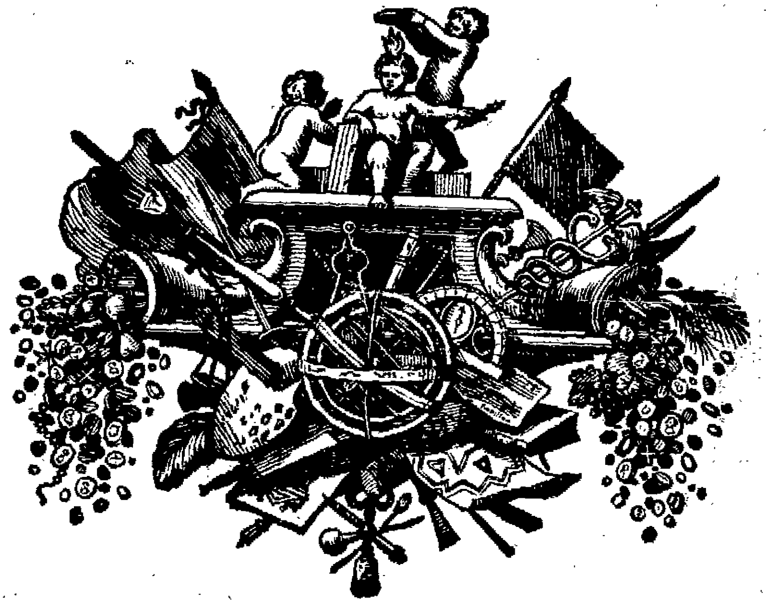
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS PRIMUS,

Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, & ANALYSIM, tam FINITORUM quam INFINITORUM complectitur.

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCXLIII.

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

DOMINO,

WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI

CATTIMELIBOCI, DECIÆ, ZIEGENHAINÆ,

NIDDÆ ET SCHAUMBURGI, &c. &c.

EXERCITUS EQUESTRIS FOEDERATI BELGII

GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO

PRÆFECTO BELLICO, &c. &c.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

SERENISSIME PRINCEPS, DOMINE CLEMENTISSIME,

SCientiæ Mathematicæ Imperatoribus, Regibus & Principibus ab omni ævo in pretio fuere, ut non modo munificentia sua eas promoverint, sed & ipsimet animum ad eas excolendas applicaverint. Non opus est, ut de ALPHONSO X Castellæ ac Legionis Rege, & ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS MAGNI nepote, Astronomiæ instauratoribus, de MATTHIA

Hunga-

Hungariæ Rege inventorum mathematicorum insigni remuneratore, de FRIDERICO II *Daniæ & Norwegiæ Rege atque* RUDOLPHO II *Imperatore* TYCHONIS *Mecænatibus, de* FERDINANDO, *magno Etruriæ Duce,* GALILÆI *Protectore, de* CAROLO II & LUDOVICO XIV *Angliæ & Galliæ Regibus, Societatum Scientiarum conditoribus, de Duce* BURGUNDIÆ, *Elementorum Geometriæ scriptore, & de pluribus aliis Principibus summis dicamus: Eccur enim e longinquo petenda sunt exempla, ubi domestica prostant? Cur ad vetusta provocandum, ubi præsentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ* WILHELMUS IV. *Hassiæ Landgravius successu felicissimo, quo* TYCHONI, *Phœnici illi Astronomorum, judice* HEVELIO, *palmam dubiam reddidit; Astronomiæ & Mechanicæ instaurandæ gratia Cassellis molitus est. Et Orbis universus admiratur, quæ Magnus Parens Tuus,* CAROLUS, *Sapientis cognomen instar* ALPHONSI *dudum meritus, in omni Mathesi ac Philosophia experimentali præstitit, atque munificentiam tanto Principe dignam deprædicat, qua Artes mathematicas & Naturæ cognitionem promovet. Tu,* PRINCEPS SERENISSIME, *qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroem in bello, Regnatorem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis Mathematicis magno æstimandis secundus. Quare cum Elementa mea Matheseos universæ multo auctiora novoque habitu induta, ut Opus plane novum existimari debeant, denuo in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam & praxin sternitur, veræque methodi leges, ad accurate & utiliter philosophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime necessariæ, animo Lectoris sensim sensimque instillantur; nullus dubitavi,* PRINCEPS SERENISSIME, *ad pedes*

Tuos ea deponere, certo persuasus Tibi non improbatum iri meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis studium. Deus Te servet, Principum Hassiæ Decus! Ita vovet,

SERENISSIME PRINCEPS,

DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

MARBURGI d. 8.
Martii 1730.

Humillimus cultor
CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆ-


CHRISTIANUS WOLFIUS, CONSILIARIUS AULICUS HASSIACUS, MATHEMATUM ET PHILOSOPHIÆ PROFESSOR &
Daudet sculp: Lugd: 1731.

PRÆFATIO.

Etsi nullo tempore, quo scientiis honos fuit, defuerint Viri egregii, qui praeclaris ingenii ac virtutum dotibus supra communem mortalium sortem evecti, divina illa Mathemata digna statuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici successu suspiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum Veterum monumenta palam loquuntur; ante nostram tamen ætatem ad illud fastigium non fuerunt evecta, in quo hodie constituta miramur. Neque indigna sunt, quæ in dies magis magisque excolantur & explosa loquaci sophistica in Scholas revocentur, cum neminem, nisi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis osor affectu præpeditam habuerit mentem, fore existimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac sublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte nostra præclare sentiat. Mentem enim humanam valde perficit Mathesis, ad Philoſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in Scientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium † autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam; non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant, quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum HOROCCIO * loquar) *pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant*: cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quominus evincam, non eſſe Mathematicos

† Autor ſum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus* MELANCHTHON, vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed Philoſophicis, ſed Theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis* VOGELINI Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quaſdam hinc inde adſpergemus, conſenſum *Philippeorum* cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram MELANCHTHON: *Scio*, inquit, *has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quaſdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.*

* In *Aſtronomia* Kepleriana *defenſa atque promota*, c. 1. p. 23.

maticos (liceat mihi denuo HOROCCII verbis † uti) ***tam perfrictæ frontis, ut absurdas quasvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium brevissimo inanis gloriæ statu intumescant & inter inconditos plaudentium strepitus placide sibi adulentur***; multo minus ita dibuccinare laudes suas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis est, qui Scientias mathematicas & rerum evidentia ac sublimitate, & demonstrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe superiores mentem perficere negare ausit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non distinguit; qui denique culmen perfectionum non prospicit, ad quod menti pervenire datum est. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, si non modo clara ab obscuris, distincta a confusis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus discernere valebis, sed & ipsemet fueris exactus & perspicuus in definiendo, solers & circumspectus in observando, ingeniosus & accuratus in experimentando, severus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonstrando, patiens & profundus in meditando, sagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæso, comparantur habitus tam præclari? Non nisi crebro exercitio. Multus ergo sis necesse est in notionibus evolvendis, in demonstrationibus concipiendis, in problematibus resolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda est opera. Cum adeo disciplinas, quæ huic scopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui

† In *Prolegomen.* p. 8.

mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; studium mathematicum ad acuendum judicium apprime necessarium pronunciamus & sine eo ad solidam rerum cognitionem perveniri posse negamus. *

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum sint in Mathesi hospites ac plane rudes; se jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Mathesi alienis pessime judicantes: veruntamen quod ad tam inconsiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) sane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, sibi rem cum Mathematico fuisse. Quid si Agrimensorem viderit, aut Architectum, aut Conspicillorum politorem, aut Instrumentorum fabrum, aut Virum, cui data est docendi quidem, sed non sciendi Mathesin potestas? Quis enim adeo insanus est, ut unumquemque censeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non insolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheseos apprime peritum, quem Professores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam post fata mactant, idem tamen a Mathematicis summis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheseos imperitus appelletur. Enimvero etiamsi hoc demus, Artis nostræ osorem audivisse Mathematicum de rebus ad Mathesin non spectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim nisi judicaret qui ingenii

* MELANCHTHON, loc. cit. *Si qui non totos se huic studio dedent, tamen his ad judicia formanda --- opus est cognitione Elementorum Geometriæ.* Idem paulo ante: *Cum demonstrationes Geometriæ maxime sint illustres; nemo sine aliqua cognitione hujus artis perspicit, quæ sit vis demonstrationum, nemo sine ea erit artifex methodi.*

ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo ſapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret diſcrimen; nec concedendum erat, in Matheſi cum laude verſatis res quaslibet profundius ſcrutari datum eſſe. Denique ſi vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad ſe non pertinentibus male judicaſſe; hinc ſaltem colliges, ipſum occaſione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non ſemper familiare, ſtatuiſſe.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata ſibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, ſi qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes ſe ſolos eſſe principia veritatis; ſed quod Matheſeos cultura reliquis ſtudiis præmiſſa efficiat, ut alias diſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſcio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reipublicæ præſunt, caverent ne ad cetera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reipublicæ faciem contueremur †. Ut enim taceam, quæ a doctrina in Eccleſiam

† MELANCHTHON, loc. cit. *Jacent deſertæ & neglectæ Artes mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas* (quidni & noſtra?) *juventutem ab hac vera Philoſophia ad inſulſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e Scholis, annitendum erat, ut pura & nativa Philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reipublicæ perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.*

& Rempublicam redundant, emolumenta, plurimum refert, si, qui ob eruditionem utrique præficiuntur sint assidui, considerati, moderati & veritatis amantes, quos Matheseos studium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet usum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoscere student earumque usum scrutari gestiunt, eos ad Mathematum culturam invitamus. Ostendet Algebra atque Geometria sublimior, nihil esse tam abditum, quin detegatur: docebit Astronomia cum Geographia, nihil esse a sensibus hominum tam remotum, quin id satis distincte cognoscere & accurate dimetiri valeamus: testabitur Calculus astronomicus, quanta certitudine futura Cœli phænomena prædicere liceat, etsi Genius nullus motuum, quibus sidera feruntur, leges Astronomis revelaverit: Optica cum Astronomia discrimen inter repræsentationes rerum in intellectu & in imaginatione monstrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analysis regulas generales suppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum sensibus compescatur imaginatio, ne meditationes turbet: Methodus denique mathematica rectum rationis usum manifestabit.

Quanta sit vis Mathematum in Scientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydrostatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Astronomia & Geographia abunde perspicitur: quæ omnes argumenta quædam Physica solidius atque profundius pertractata exhibent, quam sine Matheseos principiis fieri poterat. Nonne enim Physici est explicare motum, gravitationem corporum, proprietates aëris, Phænomena visus, structuram Universi, naturam &

pro-

proprietates corporum Mundi totalium? Quod si vero quæ de motu solidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydrostatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aëre in Aërometria, de visu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Astronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Physicorum systematibus occurrunt, demtis præsertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus descripta sunt; quantum descriminis intercedat inter doctrinas physicas principiis mathematicis superstructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc desiderant, illicò constabit. Unde non miramur *Robertum* BOYLIUM, de Scientia naturali experimentando præclare meritum, ita scribentem: † *De Mathematica nonnihil tibi propositurus sum, cum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) seducaris Philosophorum istorum modernorum autoritate, qui cum Physici objectum sit materia, mathematicas disciplinas, tanquam abstractis saltem quantitatibus & figuris occupatas, studio naturali obesse magis, quam prodesse contendunt. Quamvis enim opinionem ipsius* KEPLERI, *trium Imperatorum Mathematici aliorumque Astronomorum recentium absurdam, hominibus persuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius absolvendum non omnino idoneum reddere possit, restabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in specie Mechanicis, Mathe-*

† In *Considerationibus circa utilitatem Philosophiæ naturalis experimentalis*, Exercitat. VI. §. 1. & 2. p. m. 483.

Mathematicæ in Physica usum ingentem mihi demonstrantibus, sæpe jam exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & studium Algebræ speciosæ, quam puer ferme addidici, majorem impendissem partem temporis & industriæ, quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me integrum Tractatum scripsisse memini) aliisque practicis Mathematicæ partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: * *Vereor, implorandam esse à Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, si in Mathesi magis pollerem, accuratius tractassem.* Alibi nimirum ostendi †, tum demum in Scientia naturali ad certudinem seu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, si Mathesis ad Physicam applicetur.

Nisi utilitates, quas Mathesis ad vitam affert, sponte sua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydrostaticæ, Hydraulicæ usus in Oeconomia amplissimus facile ostendi, sed etiam evidenter demonstrari posset, maximam felicitatis humanæ partem Mathesi superstructam: ut taceam commoda, quæ Mathesis præstat absolutis studiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, si in illa fuerint hospites ac peregrini.

Cum adeo disciplinarum mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, desiderari adhuc Matheseos universæ Elementa, quæ ad illas consequendum sufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheseos universæ publici

* In Præfat. ad *Nova Experimenta Physico-Mechanica de vi Aëris elastica.*
† In Præfat. ad *Elementa Aërometriæ*, A. 1709. seorsim edita.

blici juris feci, in quibus ea potissimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermisi, quarum non adeo manifestus est usus. Dum liber adhuc sub prælo sudabat, contigit ut multi eundem expeterent †: quo ipso adductus Bibliopola desiderabat, ut eundem in sermonem Latinum transfunderem. Hujus ego desiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo destinaveram, cum consultius mihi videretur, si theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus composito fieri par erat, ut Latinum scilicet etiam satisfaceret ad sublimiora tendentibus. Quæ igitur sermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt, novoque ordine digesta sunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus istiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod sex, minimum quinque per diem horas instituendæ juventuti Academicæ, cum in Mathesi, tum in Philosophia impendam; varia obstacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam sumptus in editionem fecerat, instabat ut opus cœptum perficerem; singulas fere propositiones typis describendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ essent, typothetis scilicet quotidie pensum semidiurnum a manu mea exspectantibus. Quodsi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure displicent, ea nec mihi placere scias velim. Si totum displicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce utan-

† Elementa ista Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis rescripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adspexit.

utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem, non ſine operæ, ſumptuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: Ex his unuſquiſque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit: reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his Elementis etiam inſtar Lexici Mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex EUCLIDE paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere. Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ, ipſis Calendis Octobris A. 1713.

PLATO apud *Theonem Smyrnæum*, Cap. I. p. 20.

Adoleſcentibus eorumque ætati conveniunt Diſciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

MONITUM

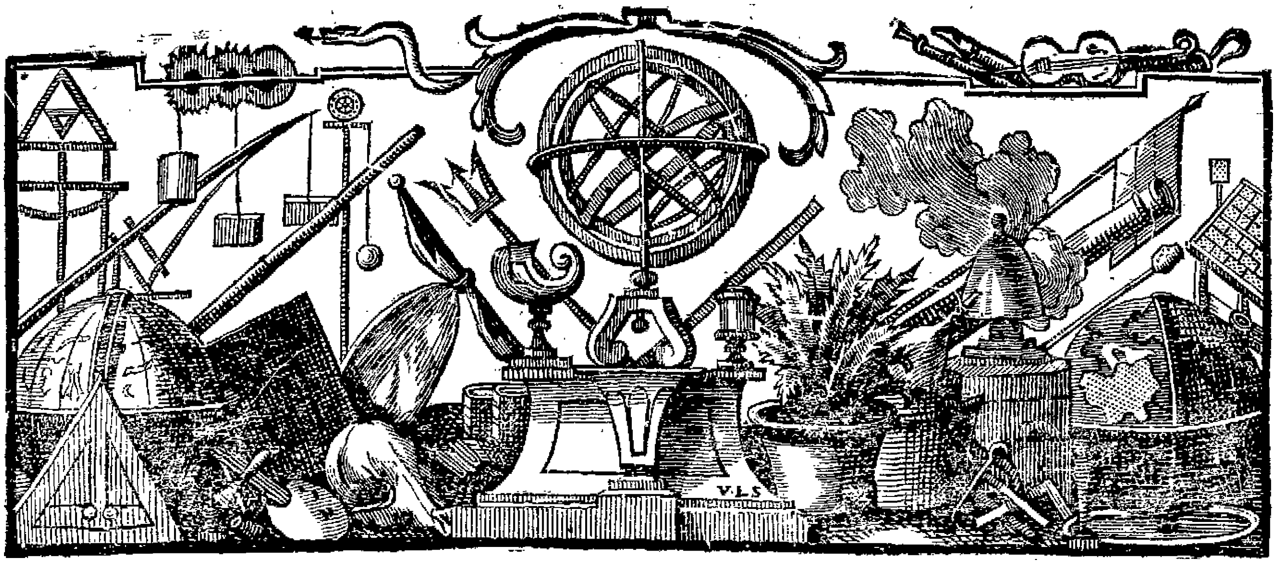
MONITUM AUTORIS
DE EDITIONE NOVA.

NOvam horum Elementorum Editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt: quo ipso contingit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in Editione priore per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quatuor Tomis complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim intersperſa sunt, Arithmeticæ accesserunt Capita nonum & decimum integra, de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus; Geometriæ Caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum; Trigonometriæ & Algebræ Problemata varia, quæ vel utilitate sese commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analysi finitorum, tum Analysi infinitorum figuræ novæ Tabulis æneis incisæ. Et quoniam Philosophiam certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur, nuperque in Opere Logico † methodum, quæ convenit doctrinæ ſolidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonſtrationum formam diſtincte expoſuimus; ideo demonſtrationes ita digeſſimus, ut exempla regulis ad amuſſim reſpondeant, & Elementa hæc manu aſſidua volventibus naturalis ratiocinandi modus ſua veluti ſponte ſeſe inſinuet, naſcanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis reſpondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his Elementis attenta mente perlegendis fuerint aſſidui fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum ſperamus, maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum, d. 11. Martii A. 1730.

† Prodiit A. 1728. in 4°.

MONITUM AUTORIS
DE
EDITIONE NOVISSIMA.

ELEMENTA noſtra Matheſeos univerſæ abunde ſeſe commendarunt iis, qui brevi temporis ſpatio ac magno laboris compendio vel eos in Matheſi progreſſus facere decreverunt, ut ad præclara Summorum Mathematicorum inventa, quæ noſtro ævo magno numero proſtant & in dies augentur, pateret aditus. Quoniam vero in Editiones anteriores plurima irrepſerunt vitia typographica, nonnulla etiam, quæ feſtinanti calamo debentur; optandum omnino erat, ut correcta extaret Editio, ne quid utilitati eorum decederet. Nemo ignorat, quam vaſtum ſit illud reformandæ Philoſophiæ opus, quod condere cœpimus. Ea jam ſumus ætate, quippe in anno climacterico magno conſtituti, ut, ſi vel maxime Numen optimum vitam ac corporis animique vires diutiſſime conſervet, eidem tamen abſolvendo non ſufficere videatur reſiduum adhuc temporis ſpatium, præſertim cum minimam ejus partem iſti labori impendere detur. Hortantur nos plurimi tam Exteri, quam Germani, ut tempus omne in Opere philoſophico continuando conſumamus, additis rationibus, quæ plurimum apud me valere debent. Nobis itaque conceſſum minime videbatur, ut correctam Elementorum Matheſeos Editionem daremus. Enimvero cum a primis, quod Græci ajunt, unguiculis ſtatuerimus non nobis vivere, ſed aliis, aliisque inſerviendo conſumi; Elementa noſtra revidere &, quæ irrepſerunt, errata emendare placuit, eorundemque Editorem hortati ſumus ut correctionem typorum committeret Mathematum perito & in iis corrigendis ſedulo. Quodſi tamen nonnulla forſan adhuc attentionem noſtram ſubterfugerint, ea Lector benevolus boni ac æqui conſulet.



DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui Methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam, præter hanc unicam, cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent quotquot disciplinarum studia ingrediuntur. Eumque in finem studium mathematicum tantopere commendant Viri docti ac intelligentes, quos inter (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHAUSIUM nominasse sufficiat, quorum in Philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de Methodo mathematica Commentationem, mole exiguam, sed rerum ubertate gravem, Elementis Matheseos universæ præmisi, ne in iis desiderari paterer industriam meam, quorum ad recte philosophandum quam maxime necessaria est cognitio: (*d*) inprimis cum exiguus admodum sit eorum numerus, quibus interiora methodi sunt perspecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc Commentatio de Methodo, singulari cum attentione perlegenda, &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa evolvuntur, præcepta methodi sunt relegenda; tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis satisfiat. Ita demum Matheseos studium vere acuet intellectum,

(*a*) In Tractatu *De directione ingenii* (qui inter *Opera posthuma* idiomate Anglico *Londini* 1706, edita habetur) p. 30.
(*b*) *De inquirenda veritate*, lib. 6. c. 6. & 7.
(*c*) In *Introductione ad Mathesin & Physicam* Germanice conscripta p. m. 17. & seqq.
(*d*) Uberius huc spectantia exposuimus in Logica, seu Philosophia rationali.

CON-

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus mathematica definitur §. 1, & ejus forma generaliter describitur §. 2. Hæc ut specialius explicetur, docetur quid sint Definitiones §. 3, & harum gratia traditur explicatio Notionum, tum in genere §. 4, cum in specie clararum §. 6, obscurarum §. 7, distinctarum §. 8, confusarum §. 9, adæquatarum §. 10, 11, & inadæquatarum §. 12. Ostenditur, quænam notiones in numerum Definitionum admittantur §. 13, 14, 15. Definitiones dividuntur in nominales & reales §. 16, 17, 18. Exponuntur quatuor modi inveniendi Definitiones nominales §. 19, 20, 21, 22, & quatuor alii inveniendi reales §. 25, 26, 27, 28. Indicatur quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales §. 23, 24, quam reales §. 29, possibiles sint. Declaratur indoles Axiomatum & Postulatorum §. 30, 31, 33, & abusus quidam notantur §. 32. Disseritur quoque de Experientia §. 34, 35, 36, 37. Definitur Theorema §. 38, & distincte agitur de propositionis partibus, Thesi, atque Hypothesi §. 39, 40, 41, 42, & de Demonstratione §. 43, 45, 47; ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis §. 44. Similiter declaratur Problematum §. 48, Corollariorum §. 49, 50, Scholiorum §. 51, ratio. Asseritur Methodi mathematicæ universalitas §. 52, & ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat §. 53, interdum minus §. 54. Denique respondetur ad objectiones, quæ contra Methodum mathematicam a nonnullis afferri solent §. 55, 56, 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. PER *Methodum mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a Definitionibus: inde ad Axiomata & Postulata; in Mathesi mixta, ad Experientias, seu Observationes, progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur, & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus LEIBNITIUS (*a*): quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit; ex. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est, ex. gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis: ex. gr. quod circulus sit figura, linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est, ex. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; ex. gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis, & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita EUCLIDES non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi, & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant; ex. gr. quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia, &c. Defectum scilicet analyseos supplent propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in Definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde, satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia

(*a*) In *Actis Eruditorum*, An. 1684. p. 537.

obvia sit, necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim percepta haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est Quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad Definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, Eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut Definitio notio distincta evadat, qualis (*vi* §. 13) esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes, varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. Ex. gr. Si ex definitione Trianguli quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem Figuræ habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in Definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: qua ratione Definitiones aliæ inveniuntur. Ex. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut Definitio Figuræ quadrilateræ, aut multilateræ cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (*vi* §. 20) determinationes quædam omitti, sic etiam novæ superaddi possunt. Ex. gr. in definitione trianguli, species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem Trianguli rectilinei abit. Ponamus porro esse latera omnia inter se æqualia; notio trianguli generalis in notionem Trianguli æquilateri degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint, nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. Ex. gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis Definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero Definitionum, per methodum tertiam & quartam inventarum, est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat; sive, juxta tertiam, determinationes datas in alias similes convertas;

 vertas;

vertas; sive, juxta quartam, datis alias superaddas: nostrum autem arbitrium nullam rebus existendi necessitatem imponit. Licet ex. gr. spatium tribus lineis rectis comprehendi possit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ spatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter se æquales esse possint. Tales itaque Definitiones possibiles esse demonstrandum est: id quod Geometræ circa figuras præstant, dum earum constructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales, vel a priori inveniuntur, vel a posteriori innotescunt. A priori Definitiones reales investigabis, si ex plurium possibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam possibile producis; ex. gr. ex combinatione machinarum simplicium machinam quandam compositam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo casui persæpe aliquid datur. Exemplo est compositio telescopii, per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante BORELLO.

§. 26. Difficilius idem præstatur; si, ex data Definitione nominali, realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur quæ in ista continentur; ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur: postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. Ex. gr. datur in Astronomia Definitio nominalis Eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est Definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi istud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere, & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, Eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram Terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori Definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentes attendimus. Ex. gr. Si quis videat in campo circulum describi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad Definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur; quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione, ex. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc Definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet; nempe 1°. utrum ea existant, aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus; 2°. num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus; id quod ex natura Definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem, vel experientia, vel eorum quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus,

remi-

reminiſcentia conſequimur. Ita, ex. gr. in Definitione Circuli ſuperius (§. 27.) tradita, per experientiam claret lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi poſſe. Aſt, in Definitione Eclipſis lunaris, ratione, experientia licet ſtipata, aſſequimur Lunam Telluris umbram ingredi poſſe.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales, cum in ſe conſiderari, tum inter ſe conferri poſſunt. Quicquid ex conſideratione eorum, quæ in una Definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, ſi quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Poſtulatum* vero, ſi quid effici poſſe affirmet, vel neget. Ex. gr. Ex geneſi Circuli, liquet omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter ſe æquales eſſe, cum unam eandemque lineam in diverſo ſitu referant. Hæc adeo propoſitio in Axiomatum numero habetur. Aſt dum per eandem Definitionem intelligitur, ex quovis puncto, quovis intervallo, circulum deſcribi poſſe: id inter Poſtulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur Axiomatum & Poſtulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoſcitur, demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quam primum realitas Definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *Propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac Axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in Axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt ipſum EUCLIDEM, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in Axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ, aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet, per recordationem vel maxime confuſam eorum quæ olim ſæpius experti ſumus, aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus; immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes; quale ex. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe, item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. EUCLIDIS igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri Axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo, ſi verum fateri fas eſt, vera Axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum Axiomatibus & Poſtulatis etiam *Experientiæ* nonnunquam confunduntur. Experiri autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus: ex. gr. dum, accenſa candela, conſpicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares

gulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim, ex. gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis Observationes recensentur; utpote quotidianæ, ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum Observationes, a diversis Astronomis, tempore diverso, diversisque instrumentis celebratæ, fideliter referuntur; cum non in cujusvis potestate existant.

§. 36. Mathematici quoque Experientias a conclusionibus inde deductis accurate distinguunt; aliis ut plurimum has cum istis confundentibus. Ex. gr. quod, candela accensa, corpora, quæ ante non apparebant, in conspectum prodeant, per Experientiam innotescit. Quodsi vero perpendens, lumen in causa esse cur tenebris discussis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo se habentium eundem esse effectum, infero; Quicquid lumine collustratur, videri potest: hæc propositio non in Experientiarum, sed conclusionum per legitimam consequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Istiusmodi conclusiones, omissis Experientiis, commemorantur, si modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. Ex. gr. maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Proprias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in solstitio observatam annotet opus est; sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem æquatoris assumserit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam Experientia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis cum demonstrare nequeas; ut credatur jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subsit, ut fides deductis habeatur sine ratione flagitas.

§. 38. Propositio theoretica ex pluribus Definitionibus inter se collatis eruta *Theorema* appellatur. Ex. gr. Si, in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem Definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur; Parallelogrammum esse Trianguli duplum: ea propositio in Theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni Theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 40.

§. 40. Absolute possibile non est nisi Ens a se: reliqua vero omnia tantum admisso alio possibilia esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in Propositione una exprimenda. E. gr. triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In Propositione itaque, tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet Propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur; quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur quod, vel affirmatur, vel negatur. Ex. gr. in Propositione allata, Hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant;* Thesis autem, *illud hujus dimidium est.*

§. 41. Notandum vero, si in ipsa rei Definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, Hypothesin distincte non exprimi. Ex.gr. si tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; Hypothesi carere videtur Propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet Propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En Hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in Propositione affirmativa necessarius nexus inter Hypothesin atque Thesin; in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subjecto deprehenditur, quod Hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in Thesi continetur. E. gr. in hoc Theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus, quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter Thesin & Hypothesin in Propositionibus affirmativis, repugnantiam in negativis, *Demonstratio* manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in Hypothesi ac Thesi continentur, eorundemque proprietates, ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ, Demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerunt evicta; Definitiones ac Propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur, citari solent; partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes Definitionum, Axiomatum, Postulatorum, Theorematum & Problematum non exiguum habent usum; nec sine ratione in Mathesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit, nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam veritatis propositionis datæ convinci possis. Et quoniam Definitiones primi conceptus existunt, Axiomata vero ex iis immediate deducuntur, Theoremata vero, vel immediate, vel mediate, ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in Demonstratione provocatur, statim addiscitur, utrum multa supponenda sint, nec ne, & quo ordine sit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem Definitionum, Axiomatum & Postulatorum, Theorematum & Problematum, dijudicandam peculiaribus artificiis opus sit; nomina veritatum citatarum simul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonstrandi persuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de syllogismo agitur, dudum exposita. Sunt enim Demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit Demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt, vel Definitiones, quas jam constat esse possibiles, vel Propositiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonstratu haud difficile foret, (a) genuinam Demonstrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non posse, nisi cogitationes nostræ juxta regulas syllogisticas dirigantur; his tamen ambagibus in præsenti opus non est. Cum enim de quæstione facti disputemus; exempla allegasse sufficit. Scilicet non ignotum est, CLAVIUM Demonstrationem Propositionis primæ Elementi primi EUCLIDIS in syllogismos resolvisse: immo HERLINUM atque DASIPODIUM sex priora Elementa EUCLIDIS & HENISCHIUM integram Arithmeticam per syllogismos in forma exhibitos demonstrasse.

§. 47. Equidem non ignoro esse, hac nostra præsertim ætate, non paucos qui sibi persuadent Demonstrationum mathematicarum formam a legibus syllogismorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; sed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, sed & attentione magis severa utentibus; quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & sic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoscerem. Fatetur certe LEIBNITIUS (b), Vir in Mathesi & omni eruditione reliqua summus, *firmam esse demonstrationem, quæ præscriptam a Logica formam servat.* Similiter *Johannes* WALLISIUS, Mathematicus profundus (c), agnoscit, *id, quod in Mathesi proponitur probandum, syllogismi unius pluriumve ope deduci.* Immo

(a) Ostendimus id in *Logica* §. 551, & seqq.

(b) *Acta Erudit.* A. 1684, p. 541. Conf. *Essais de Theodicée* p. 37, 40, 41, 73. (c) *Operum Mathem.* Vol. 3, f. 180, hoc est *Logic.* lib. 3, c. 22.

Immo ingeniosissimus etiam HUGENIUS (*d*) observavit, *paralogismos in Mathesi sæpius vitia formæ existere.* Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*e*) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum Virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inspectione non minus quam ex aliarum propositionum citatione, multæ præmissæ syllogismorum supplentur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in Demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione*, ac *Demonstratione*. In Propositione, quid fieri debeat, indicatur. In Resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. Denique in Demonstratione evincitur, factis iis, quæ Resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesin Resolutio, Thesin vero Propositio constituit. Generalis enim omnium Problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est; Factis iis quæ Resolutio præcipit, illud quoque efficitur quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de Problematibus plura dicantur.

(*d*) *Acta Erudit.* A. 1711. p. 477.
(*e*) Vide eas in *Logica* §. 551. & seqq.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur Propositiones generales, & ex quibusdam Propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur Propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum Corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc, vel isto, in specie ut denuo demonstretur opus non est. Ex. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum Corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis Propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. Ex. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc Corollarium subjungatur; *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus angulus esse potest*: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique, tam Definitionibus, quam Propositionibus, earumque Corollariis, subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet; nec diffi-

diffitebitur sine ea ad solidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam posse. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo sæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc usque Mathematici fere soli, in Geometria inprimis, ejus leges sancte custodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis disciplinis applicare studuerunt; conatui tamen ipsorum eventus minime respondit. Etenim nunc notiones non satis evolverunt; nunc sine probatione assumserunt quæ maxime probari debebant; nunc per saltum ratiocinati sunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri possunt.

§. 53. Explicatæ Methodi legibus cum ex asse satisfiat, in Mathesi præsertim pura; non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant; hoc est, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoscendam animum appellunt, accuratius, quam alii solent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale Demonstrationum mathematicarum meditatio censeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex studio Matheseos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas, aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri solitas, addiscunt. Licet enim in vita communi utiles existant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non nisi a seria Demonstrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre solent; præsertim cum satis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheseos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1°. quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent: 2°. quod ordinem, quo generaliora & simpliciora specialibus & compositis præponi necesse est, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco absolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut satisfiat, explicandum est, quando Definitiones sint superfluæ, & quales esse debeant Propositiones ut probatione non indigeant: id quod ex fine Definitionum, atque indole Demonstrationum redditur manifestum. Definitiones nimirum hunc habent usum, ut vel subsequentibus aliis intelligendis inserviant, vel principia demonstrandi præbeant. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, ullam dedisse Definitionem qua, nec ad subsequentes explicandas, nec in Propositionibus demonstrandis utuntur. Quamdiu vero exempla istiusmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere desinant, quod nimii sint in definiendo, & suum potius errorem agnoscant, quod Definitionibus non alium tribuant usum, nisi qui in rebus definitis agnoscendis & ab aliis distinguendis consistit. Diximus porro superius, præmissas syllogismorum tamdiu continuannuandas esse, donec ad Definitiones, quas jam constat esse possibiles, & Propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi Propositiones identicæ, ac Experientiæ claræ, in quibus Notiones primæ fundantur. Reliquæ Propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, Propositiones identicas, & Notiones in Experientiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse possimus; præsertim ubi extra Mathesin versamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt; *Ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *Ordo naturæ* retinendus.

ELEMENTA

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

NON dubito fore aliquos, qui mirabuntur quod Elementa Matheseos universæ conscribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero, quam perperam nonnulli Mathesin universalem appellant, eam ego ab ARITHMETICA diversam non agnosco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum quam numerorum sint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vulgo tractari solent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare solent, non integrum trado, quia in demonstrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reservatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus solius demonstro, quia cum rigore demonstrandi, quem mihi observandum proposui, ea demonstrandi ratio non subsistit; utpote in qua multa communiter sine probatione assumuntur, quæ & a Veteribus demonstrata, nec mihi sine probatione concedi posse visa sunt, ubi solidam doctrinam cordi habueris. Veram autem

autem MATHESIN UNIVERSALEM in desideratorum numero colloco; eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam mensuras convenientes præscribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda necessaria sunt; ea ad Analysin rejeci. Tyrones, sub initium, praxes arithmeticas solas, cum definitionibus, sibi familiares reddere debent; theorematibus problematumque demonstrationibus omissis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent; ut non modo eorum sensum clare perspiciant, sed eadem quoque memoriæ firmiter infigant, quo in promptu sint, quoties iis, vel ad demonstrandum, vel ad inveniendum opus est. Iis intellectis, problematum demonstrationes expendere, ac his perceptis inoffenso pede ad theorematum demonstrationes progredi licebit. Absit autem, ut quis arbitretur omnibus calcandam esse hanc semitam. Quorum enim est major mentis acies, congenita vel aliis studiis acquisita, & facilius conservatur attentio; illi Elementa integra eo ordine perlegere possunt, quo conscripta sunt. Usus Arithmeticæ per disciplinas reliquas omnes se diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiscenda est. Quantus Arithmeticæ in vita civili usus sit, experientia loquitur: quantus in Physicis & aliis Philosophiæ partibus, experientur quotquot, Mathesi absoluta, solidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu possit, in ipsa pertractatione hinc inde annotavimus, &, si quis culturam convenientem studio arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magistra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

1. ARITHMETICA est Numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. *Patet adeo, Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia* CARTESIUS, *cum in Tractatu* De methodo, *tum in iis, quæ* De ingenii directione *inter posthuma habentur; &* R. P. MALEBRANCHIUS *in egregio opere* De inquirenda veritate. *Plura, quamvis paucis, nos damus infra* (§. 125).

DEFINITIO II.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris LEIBNITIUS unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversa* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. *Ponamus ex. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO V.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura*, seu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C, & D dicentur ejus *Partes*; & intuitu partis B, reliquas C, & D, &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in* Geometria *&* Analysi *abunde patebit.*

SCHOLION II.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros, cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales, comprehendere valeamus.*

DEFINITIO IX.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas*.

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit, & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.*

DEFINITIO X.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest; quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. *Signum æqualitatis est* $=$.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* HARIOTUS Anglus (a), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* CARTESIO *adhibent Signum sequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Autores* HARIOTO *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO XI.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16), & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20).

HYPOTHESIS II.

22. *Signum majoritatis est* $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* HARIOTUS (b). *Eum secuti Celeberrimus* WALLISIUS (c) *&* R. P. LAMY (d). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.*

DEFINITIO XII.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo*

(a) In *Artis Analyticæ praxi*, Sect. 1. f. 10.
(b) Loc. cit. (c) Vide *Arith.* c. 35. f. 186. Vol. I. Oper. Mathem. (d) *Element. Geometriæ* lib. 3. sect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

militudo est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero; modo sit istiusmodi ut sine alio assumto intelligi possit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas sine alio assumto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13, 14); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 25), atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit* LEIBNITIUS. *Dixit nempe* Similia, quæ non possunt distingui, nisi per compræsentiam. *Quoniam vero terminus* compræsentiæ *plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res* compræsentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodsi* Cajus *in præsentia* Grachi *horologium suum depromat; næ is attonitus sibi persuadebit horologium suum esse, quod* Cajus *manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est horologium* Caji *a suo distinguit* Grachus *per compræsentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similium ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo compræsentia sistuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum similitudinis est* ∽.

SCHOLION.

29. *Commendatur in* Miscellaneis Berolinensibus (*e*). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota* est, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est toto.

DEFINITIO XIV.

31. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata, tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit.

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. Ex. gr. *Si quis simpliciter dicat,* sex; *is non determinat, quænam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra si quis dixerit cum addito,* sex globi aurei; *is speciem entium determi-*

(*e*) Part. 3. pag. 139.

terminat, quæ numerat, adeoque utitur numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO XVII.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5). *Ex. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas, ex. gr. per materiam ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diversæ evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO XVIII.

37. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

42. *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. *Numerus irrationalis*, sive *surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in Hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus WEIGELIUS *in Arithmetica tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed & Illustris* LEIBNITIUS (f) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem, ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit Cl.* DANGI-

(f) *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, An. 1703. p. 175. & seqq. Edit. Amstel.

DANGICOURT *circa progreſſiones arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica dyadica duabus tantum notis utitur, leges progreſſionum numerorum dyadice expreſſorum facillime omnium deteguntur. Et* CAROLUS XII, *Rex Sueciæ, calculum ſexagenarium excogitavit, referente* Emanuele SUEDENBORGIO (h), *novis characteribus & numeris, noviſque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum ſatis verſati.*

DEFINITIO XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, ſunt, *Unum*, *Duo*, *Tria*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine inſigniri ſolent, nec opus eſt ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; ſex *Sexaginta*; ſeptem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejuſque quævis multipla, dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum, &c. utimur ad confuſionem in numeris magnis evitandam, quorum diſtinctis notionibus formandis inſerviunt.*

HYPOTHESIS V.

49. *Notæ numericæ conſtituantur novem ſequentes*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Ut vero non ſolum unitates, ſed & decades, centenarios, millenarios, &c. indigitare poſſimus, valor ipſis tribuatur localis; ita ut ſolitariæ, vel in loco dextimo poſitæ, unitates ſive digitos, in ſecundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ ſcilicet ſit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine ſe invicem excipiunt:

Unitates Decades Centenarii	} Simplices.
Unitates Decades Centenarii	} Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	} Millionum.
Unitates Decades Centenarii	} Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	} Billionum.
Unitates Decades Centenarii	} Millenariorum Billionum.
Unitates Decades Centenarii	} Trillionum.
Unitates Decades Centenarii	} Millenariorum Trillionum &c.

SCHOLION I.

51. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent* Georgius HENISCHIUS *in libello* De numeratione multiplici, vetere & recenti, *atque* Guil. BEVEREGIUS *in* Arithmeticæ chronologicæ *libro primo*

(g) In *Miſcellaneis Berolinenſ.* p. 336. & ſeqq.
(h) *Obſervat. miſcellan.* part. 5. p. 1. & ſeqq.

mo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur; quem morem nos sequimur. Ab Arabibus *inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* WALLISIUS (*i*), *quod* ALSEPADI *Arabs in Commentario ad* TOGRAI *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam* Indis *tribuat. Idem refert* (*k*), *quod* Saraceni *eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* GERBERTI, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus Ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum, nomine* SYLVESTRI II, *circa* A. C. 999 *evectus, ex ipsis ejus Epistolis* A. 1636 *Parisiis recusis probat.* Joannes Fridericus WEIDLERUS, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus* (*l*), *ex MSC.* BOETHII *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* BOETHIO *fuisse cognitos, quem* A. C. 524 *vitam finiisse constat.* WALLISIUS (*m*) *non ignoravit, in* BOETHII. BEDÆ, *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* WEIDLERUS *MSC., cujus authoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHOLION II.

52. *Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui Artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo situm sit, ut Ars characteristica perficiatur.*

COROLLARIUM II.

53. Quodsi notis numericis substituantur litteræ ad arbitrium electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION III.

54. Ex. gr. *Denotent litteræ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.*

PROBLEMA I.

55. *Numerum scriptum enunciare; hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initió a dextris facto.
2. Nota dextima classis tertiæ notetur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero sinistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50). *Sic factum est, quod petebatur.*

Ex. gr. Numerus sequens.

2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadrin-

(*i*) *Arithmet.* Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (*k*) In Tract. *De Algebr.* c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem. (*l*) In Dissertatione *De characteribus numerorum vulgaribus, & eorum ætatibus*, An. 1727 publice ventilata, §. 8. & seqq. p. 17. & seqq. (*m*) In Tract. *De Algebr.* loc. cit.

quadringentis septuaginta tribus billionibus, sexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis septuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta septem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus distincte concipiendis, seu ex confusione extricandi, vires intellectus humani extendat; abunde perspicient oculatiores, si ad præsens Problema fuerint satis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus usus est* VIETA (*n*): *minores introduxit* HARIOTUS (*o*), *quem mox imitatus est* CARTESIUS (*p*), *& nunc sequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola subscribitur. Eorum inferior, seu* Denominator, *indicat unitatem, seu totum in partes divisum; superior vero, seu* Numerator, *numerat partes in casu proposito datas.* Ex. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator 2 vero duas istiusmodi partes assignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator subscribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41).

(*n*) In variis scriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (*o*) In *Artis Analyticæ praxi.* (*p*) In *Geometria.*

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio* est inventio alicujus numeri, ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *Summandi*; quæsitus autem *Summa*, vel *Aggregatum*.

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis est* $+$, *quod per* plus *efferri solet.* Ita $3+4$ denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur, 3 plus 4.

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum*.

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum subtractionis est* $-$, *quod per* minus *efferri solet.* Ex. gr. $7-3$ denotat Differentiam inter 3 & 7, pronunciatur, 7 minus 3.

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum*. In specie, factorum alter, qui aliquoties

sumitur,

ſumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat quoties ille ſumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis (§. 66), iſtiusmodi autem inventio non eſt niſi iterata additio (§. 62); multiplicatio eſt iterata ejuſdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis eſt punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco poſitum, quod per* multiplicatum *effertur*. Ex. gr. 4. 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9, factum, cujus factores ſunt 7, 5 & 9. *Litteræ ſine ullo ſigno junguntur*. Ex. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *bcd*, factum cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit diviſio, *Diviſor*; qui denique indicat, quoties diviſor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & diviſione opus non eſt, ut numeri dati ſint homogenei, quemadmodum in additione & ſubtractione requirebatur* (§. 61, 64). *Cum enim in additione, ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum* (§. 61, 9); *omnes omnino ſummandi ad eandem unitatem referri* (§. 10), *conſequenter homogenei inter ſe eſſe debent* (§. 35). *Quoniam vero porro liquet ſummam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipſis unitatem referri; conſequenter iiſdem homogeneam eſſe* (§. *cit.*); *in ſubtractione vero numerus minuendus reſpondet ſummæ, ſubtrahendus & reſiduus aggregandis ſeu ſummandis* (§. 61, 64): *ulterius patet, in ſubtractione etiam minuendum, ſubtrahendum, & reſiduum numeros inter ſe homogeneos eſſe debere. In multiplicatione contra, multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, ſicut in diviſione, diviſor ad unitatem rationem dividendi ad quotum; adeoque opus non eſt, ut multiplicator multiplicando & facto, diviſor dividendo & quoto ſit homogeneus. Quodſi diviſor conſideretur tanquam pars dividendi; ex dictis conſtat diviſorem eſſe dividendo homogeneum: ſed tum quotus, qui indicat quoties pars iſta ex ſuo toto auferri poteſt, nec dividendo, nec diviſori homogeneus. Singula ſuo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum diviſionis ſunt duo puncta* (:), *quæ per* diviſum *efferri ſolent*. Ex. gr. 8 : 4 denotat quotum ex diviſione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* eſt quotus ex diviſione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par* eſt, qui bifariam ſive per 2, dividi poteſt; ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar* eſt, qui a pari unitate differt; ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXXII.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, ſi eum ita dividit, ut quotus ſit numerus integer ſine fractione, vel ſi fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXIII.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXXVII.

79. *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO XXXVIII.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui, præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA I.

81. *Idem est æquale sibimet ipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA II.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15).

THEOREMA I.

84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est; id ipsum altero majus est (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§. 81). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum analyseos perfectæ! Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero analyseos perfectæ indicium est* (§. 45, de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20). Sed lineæ AB pars [nempe AC] alteri lineæ AC toti [nempe sibimet ipsi] æqualis est. Ergo linea AB linea AC major [nempe totum AB parte AC majus] est. *Quod erat demonstrandum.* *Fig.* 1.

THEOREMA II.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibimet ipsi (§. 81); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est.

Sed totum idem eſt cum omnibus partibus ſuis ſimul ſumtis (§. 9): ergo iiſdem æquale eſt. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ æqualia ſunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea ſunt æqualia inter ſe.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = C$ & $B = C$; dico eſſe $A = B$. Quoniam enim $B = C$, *per hypotheſim*, B ſalva quantitate ſubſtitui poteſt ipſi C (§. 15). Subſtituatur adeo B ipſi C in caſu priore, ubi $A = C$: habebimus $A = B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro ſit $A = B$ & præterea $C = A$, $D = B$; dico eſſe $C = D$. Quoniam enim $A = B$ & $C = A$, *per hypotheſim*, erit $B = C$, *per caſ.* 1. Quare cum porro ſit $D = B$, *per hypotheſim*, erit quoque $C = D$, *per caſ.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas; aggregata ($A + C$ & $B + D$) ſunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

$A + C = A + C$ (§. 81). Sed quoniam $C = D$, *per hypotheſim*, poterit D ſubſtitui pro C (§. 15): quo facto, habemus $A + C = A + D$. Porro $B + D = B + D$ (§. 81). Sed $A = B$, *per hypotheſim*. Ergo A ſubſtitui poteſt pro B (§. 15): quo facto, habemus $B + D = A + D$. Quare $B + D = A + C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus eſt, etiam altero æqualium majus vel minus eſt.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = B$ & $C > A$; dico eſſe $C > B$. Quoniam enim $C > A$, *per hypotheſim*, A parti ipſius C æquale eſt (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum ſit $A = B$, *per hypotheſim*, erit etiam $P = B$ (§. 87). Ergo $C > B$ (§. 20). *Quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C < A$, dico eſſe $C < B$. Quia $C < A$, *per hypotheſim*, parti hujus æquale eſt (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo ſit $P + C = A$ (§. 86) & $A = B$, *per hypotheſim*; erit quoque $P + C = B$ (§. 87). Eſt itaque C parti ipſius B æqualis (§. 9); conſequenter $C < B$ (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C), vel æqualia addas; aggregatum prius ($B + C$) majus eſt, poſterius vero ($A + C$) minus. Quodſi majori (B) majus (C), & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius ($B + C$) majus eſt, poſterius ($A + D$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A < B$, *per hypotheſim*, parti hujus æquale eſt (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, eſtque adeo $B = P + A$ (§. 86). Quare cum etiam ſit $B + C = P + A + C$ (§. 88); erit $A + C$ pars ipſius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P + A + C > A + C$ (§. 84), conſequenter $B + C > A + C$ (§. 89). *Quod erat unum.*

Quoniam $B > A$, *per hypotheſim*, erit

$B+C > A+C$, *per demonstrata.* Similiter quia $C > D$, *per hypothesim*, erit $A+C > A+D$, *per demonstrata.* Ergo cum $A+D$ sit pars ipsius $A+C$ (§. 20); erit multo magis $B+C > A+D$ (§. 84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) subtrahas; quæ relinquuntur (C–A & D–B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

$C-A=C-A$ (§. 81). Sed quoniam $A=B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $C-A=C-B$. Similiter $D-B=D-B$ (§. 81). Sed quia $C=D$, *per hypothesim*, salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habebimus $D-B=C-B$. Quamobrem $C-A=D-B$ (§. 87).

THEOREMA VIII.

92. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C), vel æqualia subtrahas; residuum prius (A–C) majus est, posterius (B–C) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A=P+B$ (§. 86), consequenter $A-C=P+B-C$ (§. 91). Sed $B-C$ est pars ipsius $P+B-C$ (§. 9), consequenter $P+B-C > B-C$ (§. 84). Ergo & $A-C > B-C$ (§. 89). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

93. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (m A & n B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia $A=B$, *per hypothesim*, erit etiam $A+A=B+B$, seu in genere $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. (§. 88). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), si m & n fuerint multiplicatores, erit $A+A+A+A$ &c. $=m\,A$ (§. 67, 68). & $B+B+B+B=n\,B$ (§. §. *cit.*). Quare cum in eo casu, ubi $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. sit $m=n$; erit etiam $m\,A=n\,B$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

94. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas; quoti (A:C & B:D) æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:C=A:C$ (§. 81). Sed quia $A=B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). & sic $A:C=B:C$. Ob eandem rationem $B:D=B:C$. Quare $A:C=B:D$ (§. 87). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares, in numeris præsertim rationalibus, per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio; tum quia prima & secunda (id quod supra §. 85 annotavimus)* Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* Calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt:) hic, si tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.*

CAPUT II.

De speciebus Arithmeticæ in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis, &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

Ex. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 3 & 4 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (sc. *decas*) & 6 (*decades*) sunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 (*millenariis*) datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

3578	A
524	B
63	C
4165	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sunt partes eorumdem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decanibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86); adeoque summa eorundem est (§. 61). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

97. *Unitates numerorum singulæ tamdiu per digitos repræsentantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, ex. gr. quod* $3+2=5$, $9+5=14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM I.

98. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime sinisteriori connumeretur.

Ex. gr.

Ex. gr. Si numeri addendi fuerint A,B,C, ita procedendum: cum 7 & 3 sint 10; residuus numerus 5 scribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 sunt 10; 2 & 1 sunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum.

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

Quoniam vero 7 & 2 sunt 9, porro 9 & 1 sunt 10; adde 1 seriei millenariorum & residuum 1 scribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 sunt 10 millenarii, seu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero sunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

SCHOLION II.

99. *Modus hic addendi est maxime naturalis (§. 49): nec absimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest, & pro unoquoque unitas reponitur in serie proxime majore. Ex. gr. sint expensæ:*

Januarii	45 thal.	16 grofs.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit summa	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant grossum, in serie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9, valor grossi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur seriei grossorum. Similiter quoniam thalerus 24 grossis constat, in serie grossorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco grossorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in Corollario aut Problemate peraguntur.

COROLLARIUM II.

100. Si omnes numeri dati unitatum instar considerentur, evidens est inter summandum tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei dexterioris in finisteriorem transferuntur. Sic, in exemplo Problematis, loco *quindecim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est *6*. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*; sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc solvitur

PROBLEMA III.

101. *Examinare additionem; hoc est, explorare, utrum numerus inventus sit æqualis omnibus datis simul summatis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex serie qualibet dexteriore in proxime finisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum: quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties

 ties

ties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. 91), conſequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. in exemplo Problematis 2, inter ſummandum 3 novenarii omittuntur, & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarii abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Diſcrimen inter Demonſtrationem & Examen haud obſcurum eſt. Illa evincit per regulas præſcriptas inveniri debere numerum quæſitum; hoc docet regulas ad caſum ſingularem rite fuiſſe applicatas. Unde apparet Examinis utilitas, fruſtra obnitente* RAMO (a), *qui Demonſtrationem cum Examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex ſumma quam aggregandis, notis ſingulis inſtar digitorum conſideratis, abjiciatur novenarius, & ex reſidui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum Examen tum fallere poſſit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantiſper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia ſunt Examina, etſi non omnes errores detegant, modo iiſdem ſeſe non ſubducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).
2. Sub numerus hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus, &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur.
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

Ex. gr.	Si ex	9 8. 0. 0. 4. 0. 3 4. 5 9
ſubtrahas		4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
Differentia eſt		5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates

(a) In *Schol. Mathem.* lib. 4. pag. 114.

tates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus, & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, residui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris, ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas, *vi operationis*, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 50). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 86). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem e toto majore subtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.*

Ex. gr.	45. thal.	16. gr.	6. num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 subtrahi nequeant, ex 16 grossis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 grossi ex residuis 15 auferri nequeant, ex 45 thaleris unus ablatus in 24 grossos convertitur: unde si subtrahantur 23, residuus est 1 grossus 15 addendus, ut residui loco ponantur 16 grossi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION II.

105. *Quodsi numerus major e minore subtrahi jubeatur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur signo —. Ex. gr. Si quis 8 thaleros solvere debet, atque 3 nonnisi possidet: tribus solutis, 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA V.

106. *Examinare subtractionem.*

RESOLUTIO.

Residuo addatur subtrahendus (§. 96). Quodsi enim summa fuerit æqualis minuendo; subtractio rite peracta (§. 64).

Ex. gr.	9800403459	Minuendus.
	4743865263	Subtrahend.
	5056538196	Differentia.
	9800403459	

ALITER.

Quoniam in Subtractione residuum cum subtrahendo æquatur minuendo (§. 64); si minuendus sumatur pro aggregato, residuum cum subtrahendo pro aggregandis (§. 61); examen per novenarium succedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA VI.

107. *Examinare additionem per subtractionem.*

1. Describantur in continua serie multipla

pla ſeptenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua ſeptenarii additione invenienda. Eſt enim $7+7=14$, $14+7=21$, &c.

2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

	566
8259	8259
	526
2687	2687
	3425
10946	10946

ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10 & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iiſdem ſuperſcribatur.

4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis; &, proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur, & a ſumma 12 ſeptenarius, vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

Demonstratio.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, ex. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86, 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. 91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *Q. e. d.*

Aliter.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. 96).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

Ex. gr. Sit exemplum additionis

	A	B	C	D
	3	5	7	9
	8	4	6	2
	5	3	7	6
1	7	4	1	7
	1	2	1	0

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17, & reſidua 1 ſcribatur

batur sub 7. Similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14, residuo 2 sub 4 scripto. Summa notarum in serie C 20 tollatur ex 21 & residuum 1 ponatur sub 1. Denique si summa seriei D 17 ex 17 subtrahatur, relinquitur 0: quod indicio est, numerum 17417 esse summam quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summandorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus summæ omnes centenarios, decades, unitates summandorum. Quodsi ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot præcise millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumti continent, atque adeo summa numeris summandis simul sumtis æqualis est (§. 87); consequenter additio rite peracta (*§. 61*).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, si loco septenarii numerus alius sumatur ipsa Demonstratio insinuat. Solent etiam, examinis loco, additionem iterare, sed diversa ratione, ita ut una vice ascendendo, altera vero descendendo summatio perficiatur; facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo versus sinistram.*

PROBLEMA VII.

109. *Abacum* Pythagoricum, *hoc est, Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos repræsentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in *9* partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6; aggregatum 8 ponatur sub 6; & ita porro.
4. Quodsi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus *Pythagoricus* construetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum* Pythagoricum *memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (*§. 96*).
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex Abaco *Pythagorico* scribantur singula producta ex singulis

gulis

gulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris; similiter ex illis in reliquas hujus notas; ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. *96*). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

Ex. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum, vi Abaci *Pythagorici*, sit 30, scribe 0 sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci *Pythagorici*, primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipsum (§. *9*), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem, &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. *61*), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 50), consequenter totus multiplicator (§. *9*) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. *66*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.*

```
  3578       4760
    30       2000
------    -------
107340    9520000
```

PROBLEMA IX.

113. *Lamellas* Neperianas *parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per Abacum* Pythagoricum.

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta, parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur. *Fig.* 2.
2. In illis quadratulis ea lege scribatur Tabula *Pythagorica*, ut notæ solitariæ, aut dextræ, triangulum dextrum, notæ autem sinistræ sinistrum cedat.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHO-

Scholion.

114. *Has lamellas sub initium seculi superioris invenit* Joannes Neperus, *Baro* Merchistonii, *Scotus*, *& peculiari libello descripsit, cui* Rhabdologiæ *nomen imposuit.*

Problema X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum* Neperianarum *ope.*

Resolutio.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam, &
4. Ipsi respondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondentes & decenter infra factores (§. 111) scribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam summam collige. *Sic f. e. q. p.*

Fig. 3. Ex. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 respondet, exscribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo versus sinistram proxime sequente 9 & 5 adde & summæ 14 notam dextram scribe juxta 6, sed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; sinistram vero itidem 1 adde notæ 3 in sinistro triangulo deprehensæ. Summam 4 si 1846 a sinistris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

```
   5987
    937
-------
  41846
 17934
53802
-------
5601386
```

Problema XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque, sine Abaci* Pythagorici *subsidio, multiplicare.*

Resolutio.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo, & decuplo, per additionem, subtractionem, & mediationem, singula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui *duplum*. Addatur huic simplum, summa est numeri dati *triplum*. Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc est, ipse numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur simplum, vel duplum, habebitur *sextuplum*, vel *septuplum*. Ex decuplo subtrahatur duplum, vel simplum, residuum erit *octuplum*, vel *noncuplum*. Sine Abaci itaque *Pythagorici* subsidio multiplicaturo familiaris sit sequens a *Jobo* Ludolffo, in Academia Erfordiensi nuper Mathematum Professore, in Arithmeticam primum introducta.

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1 *Simplum.*
2. Duplum.	1 + 1 *Simplum & simplum.*
3. Triplum.	2 + 1 *Duplum & simplum.*
4. Quadruplum.	2 + 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & simplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10 − 2 *Decuplum sine duplo.*
9. Noncuplum.	10 − 1 *Decuplum sine simplo.*

Ex. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894 7788	3894 7788 11682
Quadruplum	**Quintuplum**	**Sextuplum**
7788 7788 15576	38940 19470	3894 19470 23364
Sextuplum	**Octuplum**	**Noncuplum**
7788 19470 27258	38940 7788 31152	38940 3894 35046

Si multiplicator ex pluribus notis constet, infra lineam scribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui possint, quæ desiderantur. Sub ducta igitur altera linea scribantur more consueto (§. 111) multiplicandi multipla.

```
 37896 A
  6874
 ---------
 75792 B
 189480 C
 ---------
 151584 D
 265272E
 303168F
 227376G
 ---------
 260497104
```

Ex. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam scribatur B ipsius A duplum & porro C decupli ipsius A dimidium. Reperies ergo 1°. D ipsius A quadruplum, sumendo duplum ipsius B; 2°. E septuplum ipsius A, addendo B & C; 3°. F octuplum ipsius A, vel addendo C, B & A, vel B subducendo a decuplo ipsius A, hoc est ex A cyphra aucto; 4°. denique G, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis constet, sæpius ex productis jam inventis, per additionem vel subtractionem, inveniri possunt quæ adhuc desiderantur; nec tum *Nomenclaturæ* propositæ stricte inhærendum, ita ut non opus sit infra lineam demum scribi duplum multiplicandi & decupli ejusdem dimidium.

```
743) 895765482
     ----------
     1791530964
     3583061928
     6270358374
     ------------
     665553753126
```

Ex. gr. sit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, si multiplicando subscribatur 1° duplum, 2° dupli duplum, 3° summa ex simplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter si multiplicans fuerit 789, sub multiplicando scribitur decuplum sine simplo, quod est noncuplum. Ex eo si denuo auferatur simplum, relinquetur octuplum. Quod si & ab hoc simplum subducas, residuum erit septuplum.

```
789) 895765482
     ----------
     8061889338
     7166123856
     6270358374
     -----------
     706758965298
```

PRO-

PROBLEMA XII.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si divisor unica fuerit nota:

1. Scribatur is sub nota dividendi sinistima, aut, si ea minor fuerit sub proxime sequente, ac ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties in nota vel notis suprascriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram versus post lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in divisorem & productum ex nota vel notis suprascriptis dividendi subtrahatur, & his deletis, si quod fuerit residuum, suprascribatur.
3. Divisor ad notam subsequentem versus dexteram promoveatur, & ope Abaci *Pythagorici* denuo investigetur, quoties is in notis suprascriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 3.

$$\begin{array}{llll} \cancel{1} & & \cancel{2} & 2 \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{array} \Big(2618\tfrac{2}{3}$$

Ponantur 3 sub 7, & per Abacum *Pythagoricum* innotescit 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc est 6, subtrahatur ex 7 lineola transversa delendis, residua unitas suprascribatur. Promoveatur divisor 3 sub 8, cumque, vi Abaci *Pythagorici*, 3 in 18 sexies contineatur, scribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 subducatur: quo in casu nihil relinquitur. Quodsi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio est, numerum propositum in tres partes æquales exacte dividi non posse.

DEMONSTRATIO.

Ex ipsa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, consequenter unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Casus II. Si divisor ex notis pluribus constet.

1. Sinistima ejus nota scribatur sub nota sinistima dividendi & reliquæ dexteriores sub proxime sequentibus versus dexteram.
2. Ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties prima divisoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum & dispiciatur, utrum factum ex numeris suprascriptis subtrahi possit, nec ne.
4. Si subtractio fieri queat, scribatur is loco quoti post lunulam & subtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus subtractio fit, lineola transversa deleantur, & qui residui fuerint, suprascribantur. Quodsi vero subtractio non succedat, loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec fac-

 tum

tum ex eo in divisorem ad notas dividendi quàm proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Divisor loco uno versus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec divisor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 32.

$$
\begin{array}{l}
\quad \cancel{1} \\
\quad \cancel{2}\,1 \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{7} \\
\cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}6 \;\Big(245\tfrac{16}{32} \\
\cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} \\
\quad \cancel{3}\cancel{3}
\end{array}
$$

Scribantur 32 sub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in ea contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 subtrahi potest, 2 scribantur post lunulam &, subtractione peracta residuisque 14 suprascriptis, divisor loco uno promoveatur. Quo facto investigetur quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc est 128, subducatur ex 145, residuo 17 suprascripto & 4 in loco quoti post lunulam repositis. Promoveatur divisor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in divisorem 32, nempe 160 subtrahatur ex 176, residuo 16 ut ante suprascripto. Dico numerum inventum $246\frac{16}{32}$ esse quotum quæsitum.

Si divisor ex pluribus præsertim constet notis, præstat multipla quoti subtrahenda sub notis dividendi, ex quibus subtractio fieri debet, immediate scribi & sub subtrahendo residuum, cui continuandæ divisionis gratia jungitur nota dividendi sequens, donec nulla superfuerit, adeoque divisio absoluta.

Ex.gr. Sit dividendus 385797, divisor 8672, quem tibi sub loco quoti notabis.

$$
\begin{array}{r l}
385797 & \Big(\dfrac{44}{8672} \\
34688 & \\
\hline
38917 & \\
34688 & \\
\hline
4229 &
\end{array}
$$

Jam cum 8 in 38 quater contineatur, scribe divisoris 8672 quadruplum sub notis dividendi 38579, & residuum 3891 sub eodem, juncta eidem nota sequente 7, ut divisio continuari possit. Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis aufertur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

Demonstratio.

Eadem fere est demonstratio, quæ in casu primo, hoc unice notato, quod, cum ex Abaco *Pythagorico* constare nequeat quoties divisor integer in notis dividendi suprascriptis contineatur, interea supponatur toties illum in his contineri, quoties sinistima divisoris nota continetur in sinistima aut duabus sinistimis dividendi notis. Licet enim hæc suppositio subinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

Scholion.

118. *Equidem hæc methodus tædiosa videtur, quod raro verus quotus prima statim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod instituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

Problema XIII.

119. *Divisionem per lamellas* Neperianas *absolvere.*

Re-

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.
5. Quodſi eadem ratione partes quoti reliquas inveſtiges, diviſio tota abſolvetur.

Fig. 3. Ex. gr. Sit dividendus 5601386, diviſor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; ſub diviſore deſcendendo in infima ſerie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc ſubtrahitur, & in lamella unitatum reſpondens 9 loco quoti ſcribitur. Reſiduo 2211 jungitur nota dividendi ſequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipſi in lamella unitatum reſpondens 3 ſcribatur loco quoti, & ſubtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
5601386(937
53802..
-------
 22118.
 17934.
-------
  41846
  41846
-------
  00000
```

PROBLEMA XIV.

120. *Sine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more conſueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam ſcribatur diviſor, ejus duplum & decupli dimidium ſive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2, & 5 adſcribi oportet. Inde nimirum quodcunque diviſoris multiplum (§. 116) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot diviſor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.
4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.
5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine Abaci *Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; ſcribe 2 loco quoti & 350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividen-

```
385724615 (2204140
350        -------
---           175 | 1
 357          350 | 2
 350          875 | 5
 ---
   724
   700
   ---
    246
    175
    ---
     711
     700
     ---
     115
```

videndi proxime sequentem 7 & 357 denuo compara cum divisoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 subtrahe & quoti loco rursus scribe 2. Residuo 7 junge notam subsequentem 2. Quia dividendus 72 est divisore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipsique dupli duplum, hoc est quadruplum divisoris, 700, quam proxime conveniat, quotus erit hoc in casu 4. Quodsi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & residuum erit 115.

SCHOLION.

121. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia est altera in Problemate duodecimo exposita. Quamvis igitur eam serio commendem, nolim tamen ut Abacus* Pythagoricus *prorsus rejiciatur, quoniam subinde casus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia assertum nostrum confirmabit.*

PROBLEMA XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit peracta.

```
38476) 1346660 (35
       115428
       ------
        192380
        192380
       -------
        000000
```

Ex. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum est 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri potest.
2. Residuum 2 ducatur in multiplicatorem 4, si novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium superaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri potest, noteturque residuum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodsi residuum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus residuo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, residuum in multiplicando ducatur non in ipsum multiplicatorem, sed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

Ex. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum residuorum factum cum sit 4, id indicio est multiplicationem rite fuisse peractam.

```
  857
   65
 ----
 4285
5142
-----
55705
```

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), & factum quidem summæ, multiplicandus toties iteratus quot multiplicator unitates habet numeris aggregandis respondeat (§. 61, 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus est novenarius, quoties fieri potest (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto quoties datur, residuum toties relinquitur quot multiplicator

unitates

unitates habet; evidens eſt, iſtud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere quoties licet, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde eſt, ſive reſiduum in multiplicatorem, ſive multiplicator in reſiduum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonſtrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, ſi novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere quoties fieri poteſt, & reſiduum hoc ducendum eſſe in reſiduum ex multiplicando, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonſtratio majorem evidentiam nanciſcitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare diviſionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in diviſorem, aut diviſor in quotum.
2. Facto addatur, ſi quod a diviſione fuerit reſiduum.

Quodſi hac ratione prodeat dividendus, diviſio legitime peracta. (§. 212).

Ex. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus eſt 245, reſiduum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Conſtat igitur diviſionem legitime fuiſſe peractam.

$$\begin{array}{r} 245 \\ 32 \\ \hline 490 \\ 735 \\ \hline 7840 \\ 16 \\ \hline 7856 \end{array}$$

ALITER.

Cum, vi examinis prioris, dividendus ſit factum ex diviſore in quotum; examen quoque inſtituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex diviſore & quoto, novenarium quoties datur, atque reſiduum in diviſore multiplicando per reſiduum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo reſiduum ex diviſione.

Ex. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem ſi tentetur in diviſore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 reſiduum erit. Quodſi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur reſiduum ex diviſione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur, ut in dividendo, reſiduum 8.

SCHOLION GENERALE.

125. *Supereſt ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expoſitis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum ſcriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in diviſione a ſubtractione peracta deletione, &c. continentur. Scriptio numerorum varias ſuppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præſentes exhibet quamdiu libuerit, qui alias diſparent cum vix eam ſubierint: quo ipſo cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domeſticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum defiguntur. Hinc diſcimus*

1. Intellectum uti debere in meditando ſubſidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet caſu particulari derivandis.

2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide imprimis Cor. 1, *Probl.* 2, (§. 98), *Probl.* 4, (§. 103), *Probl.* 11, (§. 116), *& Probl.* 14, (§. 120.) *Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet*

3. Ad minuendam in meditando difficultatem, singula distincte imaginationi repræsentanda esse; ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secundæ juncta tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum Demonstrationes geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus, in multiplicatione ac divisione, facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis, vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, ex. gr. ex Abaco Pythagorico, *in memoriam nobis revocamus. Unde patet*

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota prima dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, ex. gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur,

qualis esse debeat rei natura, ex. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione, prima statim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum, non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. *Ratio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Consequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. EUCLIDES *Rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit Vir summus* LEIBNITIUS. *Equidem &* HOBBESIUS *Definitionis* Euclideæ *correctionem tentavit* (a); *sed infeliciter. Cum enim Rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod* Euclidea, *quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter se habere possunt.*

(a) In Tractatu *De principiis & ratiocinatione Geometrarum*, c. XI. p. 22.

SCHOLION II.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæquales,

les, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM IV.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO XL.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, ex. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, ex. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO XLI.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas, vel numerus rationalis, ad numerum rationalem, ex. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A & B toties subtrahas, quoties fieri poterit, ex. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, ex. gr. ter, itidemque ex B, ex. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumto, ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus, aut prædicta pars, pro unitate assumitur, & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numerot exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.*

DEFINITIO XLII.

136. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. Ex. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus, eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM I.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse exponens rationis; ex. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROL-

COROLLARIUM IV.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131, 136), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

DEFINITIO XLIII.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *Ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3, &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$, &c. Ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XLIV.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$, &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$, &c. Ex. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XLV.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$, &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$, &c. Ex. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; *Ratio* minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$, &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$, &c. Ex. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XLVII.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; *Ratio* minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$, &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$, &c. Ex. gr. ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION I.

147. *En genera & ſpecies rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, ex. gr. pro dupla* 2 : 1, *pro ſeſquialtera* 3 : 3;) *non tamen ab eo ignorari poſſunt, qui ſcripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam* CLAVIUS *annotavit* (a) *exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, ſi denominatorem exponentis dividas per numeratorem. Ex. gr. ſi exponens fuerit* $\frac{5}{8}$; *erit* 8 : 5 $=$ $1\frac{3}{5}$. *Unde innoteſcit, rationem vocari ſubſupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION II.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perſpecturus ſpeciebus recenſitis plures non dari, conſiderare debet, quotum ex diviſione termini majoris per minorem emergentem, ſeu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel eſſe* 1°. *Numerum integrum, vel mixtum; hunc vero vel* 2°. *ex unitate & fractione, cujus numerator eſt unitas, vel* 3°. *ex unitate & fractione, cujus numerator eſt numerus, vel* 4°. *ex numero & fractione, cujus numerator eſt unitas, vel denique* 5°. *ex numero & fractione, cujus numerator numerus eſt, conſtare. Habemus ergo in caſu primo* rationes multiplices & ſubmultiplices, *in ſecundo* ſuperparticulares & ſubſuperparticulares, *in tertio* ſuperpartientes & ſubſuperpartientes, *in quarto* multiplices ſuperparticulares & ſubmultiplices ſubſuperparticulares, *in quinto denique* multiplices ſuperpartientes & ſubmultiplices ſubſuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari poſſunt. Aut enim exponens* 1°. *eſt fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel ſimplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si ſimplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel* 2°. *unitas eſt, vel* 3°. *unitate major. Similiter ſi multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel* 4°. *unitas eſt, vel* 5°. *unitate major. In caſu primo* ratio eſt ſubmultiplex; *in ſecundo* ſubſuperparticularis; *in tertio* ſubſuperpartiens; *in quarto* ſubmultiplex ſubſuperparticularis; *in quinto* ſubmultiplex ſubſuperpartiens.

(a) In *Comment. ad Elem.* V. EUCLIDIS. f. 179. Tom. 1. Oper.

DEFINITIO XLVIII.

149. *Rationes eædem* ſunt, quarum antecedentes ad ſuos conſequentes eodem modo referuntur, hoc eſt, quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

150. *Per hanc definitionem agnoſci poſſe etiam identitatem rationum irrationalium patet ex Schol. Def.* 42. (§. 137).

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis ſuum conſequentem, vel quantam conſequentis partem continet; toties antecedens alterius ſuum conſequentem, vel tantam conſequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in conſequente ſuo continetur, toties antecedens alterius continetur in ſuo conſequente (§. 131).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B $=$ C : D, ſeu, in exemplo ſingulari, 8 : 4 $=$ 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in poſterum deſignabimus (§. 141).

SCHO-

SCHOLION II.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter* A. B : : C. D *scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non-scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149), rationes eædem sunt etiam similes (§. 24), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas, vel similitudo, dicitur *Proportio.* Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales.* Ex. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem est cum antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 6 : 12 : *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *Terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius A S. VINCENTIO (a) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, & Proportionalitatem vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

(a) *Quadratura Circuli* lib. 8. f. 865.

DEFINITIO LI.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, si F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. Ex. gr. *6* ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam $6 : 2 \ (= 3) > 5 : 4 \ (= 1\tfrac{1}{4})$; sed 3 ad *6* minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita *6* ad *96* est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA XI.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum, vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. *69*); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati (§. *160*), adeoque numerus rationalis (§. *39*)

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134, *136*); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA XII.

163. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quodsi adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer, ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31). Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. *39*); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes* A : B *&* C : D, *similes eidem tertiæ* F : G, *sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt
$6 : 3 = 8 : 4$ etiam eædem ei-
$10 : 5 = 8 : 4$ dem tertiæ (§. 154).

Ergo $6 : 3 = 10 : 5$

Quare cum sit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 152); erit A : B = C : D (§. 87); consequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro

Porro A : B = C : D, & F : G = H : E, itemque C : D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H : E, *per demonstr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonstr.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

168. *Idem C ad æqualia A & B, & æqualia A & B ad idem C, vel etiam ad æqualia C & D, eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 71, 94); consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 71, 94); consequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 152). *Quod erat secundum.*

Sit denique A = C & B = D, erit A : B = C : D (§. 71, 94); consequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XV.

169. *Si fuerit A : B = C : D; erit etiam* invertendo *B : A = D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E, & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69); consequenter B : A = 1 : E & B : C = 1 : G (§. 152). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* seu E = G (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168); consequenter B : A = D : C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

170. *Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: & si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *p* & P per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132): Erunt adeo dissimiles (§. 24). Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si *t* : *p* = T : P, *per hypoth.* erit *p* : *t* = P : T (§. 169). Ergo, *per demonstrata*, P & *p* sunt partes similes. *Quod erat alterum.*

Si P & *p* sunt partes similes totorum T & *t*, erit P : T = *p* : *t*, *per num.* 1. adeoque T : P = *t* : *p* (§. 169), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA XVII.

171. *Partes similes P & p sunt inter se ut tota T & t.*

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, ex. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima, aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus *t* toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars *p*, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqualis fiat. Toties itaque P continet p, quoties T ipsum t. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* Ex. gr. *In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THEOREMA XVIII.

173. *Si* A : B = C : D; *erit etiam* alternando *seu* permutando A : C = B : D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque similes (§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D (§. 171).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D, *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169); consequenter B : D = A : C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit A : B = C : D, & B = D; erit etiam A = C. Est enim A : C = B : D (§. 173). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit B : A = D : C, & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A : B = C : D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA XIX.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

A : B = D : B, *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si A : B = D : C & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A = C : B, *per hypoth.* Ergo C : C = A : B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, si C : A = D : B & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

DE-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 3 & 3 \\ \hline 18 & 36 \end{array}$$

$6 : 12 = 18 : 36.$

Cum sit $1 : C = A : D$ & $1 : C = B : E$ (§. 66); erit $A : D = B : E$ (§. 167); consequenter $A : B = D : E$ (§. 173). *Q. e. d.*

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem est (§. 13); consequenter 1 : C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo si $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XXI.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

$$3)\ \begin{array}{c} 24 : 12 \\ \hline 8 : 4 \end{array}$$

$8 : 4 = 24 : 24$

Cum sit $1 : C = F : A$ & $1 : C = G : B$ (§. 174); erit $F : A = G : B$ (§. 167); consequenter $F : G = A : B$ (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

182. Si $A > B$, etiam $F > G$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA XXII.

183. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{c} 3 : 6 = 12 : 24 \\ 3 \qquad\quad 3 \\ \hline 1 : 6 = 4 : 24 \end{array}$$

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 173). Sed $A : E = F$, & $C : E = G$, *per hypoth.* Ergo $F : G = A : C$ (§. 181) $= B : D$ (§. 167); consequenter $F : B = G : D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 173). Sed $B : E = H$, & $D : E = K$ *per hypoth.* Ergo $B : D = H : K$ (§. 181); consequenter $A : C = H : K$ (§. 167), & hinc tandem $A : H = C : K$ (§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{c} 2 : 6 = 3 : 9 \\ 6 \qquad\quad 6 \\ \hline 12 : 6 = 18 : 9 \end{array}$$

Quia $A : B = C : D$, *per hypoth.* $A : C = B : D$ (§. 173). Sed $EA : EC = A : C$ (§. 178). Ergo $EA : EC = B : D$ (§. 167); consequenter $EA : B = EC : D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse $A : BE = C : DE$, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti*

quoti eandem inter ſe rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} 3:6 = 12:24 \\ \underline{2 \;\; 6 \quad\; 2 \;\;\; 3} \\ 6:18 = 24:72 \end{array}$$

A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo EA : B = EC : D (§. 184), conſequenter EA : FB = EC : FD (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

$$\begin{array}{l} 3:6 = 12:24 \\ \underline{3 \;\; 2 \quad\; 3 \;\;\; 2} \\ 1:3 = 4:12 \end{array}$$

Sit A : E = G, B : F = H, C : E = K, & D : F = L. Quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* G : B = K : D (§. 183). Ergo & G : H = K : L (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXV.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad conſequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad conſequentem ſuum. Et majus antecedente rationis minoris ad conſequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit A : B > C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, neceſſe eſt ut minus quam A, hoc eſt, pars ipſius (§. 20), per B dividatur (§. 182): quæ pars ſi dicatur F, erit F : B = C : D, hoc eſt, in majore ratione, antecedentis pars eandem rationem habet ad conſequentem, quam minoris antecedens ad ſuum (§. 152). *Quod erat unum.*

Similiter ſi A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, neceſſe eſt ut majus quam A, cujus adeo pars eſt A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod ſi dicatur F, erit F : B = C : D, hoc eſt, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad conſequentem, quam majoris antecedens ad ſuum conſequentem (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

187. *Si fuerint quotcunque rationes ſimiles A : B, C : D, E : F, G : H, &c.; ſumma omnium antecedentium A + C + E + G, &c., eſt ad ſummam omnium conſequentium B + D + F + G, &c., ut antecedens unius rationis A ad ſuum conſequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. eſſe $A = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{2}D$, $E = \frac{1}{2}F$, $G = \frac{1}{2}H$; erit $A + C + E + G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}H$ (§. 88), hoc eſt ſumma omnium antecedentium eſt ſubdupla ſummæ omnium conſequentium; conſequenter ut antecedens unius rationis ad ſuum conſequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, ſi alia quæcunque ratio antecedentium ad conſequentes ponatur, vel etiam antecedentes ſint conſequentibus majores; patet propoſitum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. *Si fuerit ut totum A + C ad totum B + D, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum A + C ad totum B + D, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DE-

DEMONSTRATIO.

24 : 12	
6 : 3	
18 : 9	

Aut $A:B=C:D$, aut $A:B>C:D$, aut denique $A:B<C:D$ (§. 21). Ponamus $A:B>C:D$. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§.186), hoc est, $F:B=C:D$ (§.152), consequenter $F+C:B+D=C:D$ (§.187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$, *per hypoth.* erit $F+C=A+C$ (§. 177), adeoque $F=A$ (§.91). Sed F est pars ipsius A, *per demonstrata*. Pars igitur toti æqualis. Quod cum sit absurdum (§.84), ut sit $A:B>C:D$ fieri nequit.

Sit jam $A:B<C:D$. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc est, $G:B=C:D$ (§. 152), consequenter $G+C:B+D=C:D$ (§.187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$, *per hypoth.* erit $G+C=A+C$ (§.177), adeoque $G=A$ (§.91). Sed A est pars ipsius G, *per demonstrata*. Ergo pars toti æqualis. Quod cum sit absurdum, ut sit $A:B<C:D$ fieri nequit.

Quoniam itaque nec $A:B>C:D$, nec $A:B<C:D$, *per demonstrata*: erit utique $A:B=C:D$, consequenter $A:B=A+C:B+D$ (§.187). *Q.e.d.*

THEOREMA XXVIII.

189. *In rationibus similibus $A:B$ & $C:D$, differentia antecedentium $A-C$ est ad differentiam consequentium $B-D$ ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§.173). Ponamus $A>C$ & $B>D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§.9, 20). Quamobrem cum sit $A:B=C:D$, *per hypoth.* erit $A-C:B-D=A:B$, vel $=C:D$ (§.188). *Q.e.d.*

THEOREMA XXIX.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* componendo, *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

DEMONSTRATIO.

$4:2=10:5$	
$6:4=15:10$	
vel $6:2=15:5$	

Si $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§.173). Sed $A+B:C+D=A:C=B:D$ (§. 187). Ergo $A+B:A=C+D:C$; item $A+B:B=C+D:D$ (§.173). *Q.e.d.*

THEOREMA XXX.

191. *Si fuerit $A:B=a:b$ & $A:C=a:c$, &c. erit $A:A+B+C=a:a+b+c$.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=a:b$, & $A:C=a:c$ *per hypoth.* erit $A:a=B:b=C:c$ (§. 173, 167). Quare $A:a=A+B+C:a+b+c$ (§.187), & hinc $A:A+B+C=a:a+b+c$ (§.173). *Q.e.d.*

THEOREMA XXXI.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes $A:B=C:D$, $E:F$*

 $=G:$

$= G:H$, $I:K = L:M$, *&c.; erit summa omnium antecedentium primarum rationum* $A+E+I$, *&c. ad summam omnium consequentium* $B+F+K$, *&c. ut summa omnium antecedentium secundarum rationum* $C+G+L$, *&c. ad summam omnium consequentium* $D+H+M$, *&c.*

DEMONSTRATIO.

Cum $A:B$, $E:F$, $I:K$, &c. itemque $C:D$, $G:H$, $L:M$, &c. sint rationes similes, *per hypoth.* erit $A+E+I$, &c.$:B+F+K$, &c. $=A:B$, & $C+G+L$, &c.$:D+H+M$, &c. $=C:D$ (§. 187). Est vero $A:B=C:D$, *per hypoth.* Ergo $A+E+I$, &c.$:B+F+K$, &c.$=C+G+L$, &c.$:D+H+M$, &c. (§.167). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem: itemque* convertendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

$$6:4=15:10$$
$$2:4=5:10$$
$$2:6=5:15$$

Si fuerit $A:B=C:D$, *per hypoth.* erit $A:C=B:D$, (§. 173), consequenter $A-B:C-D=B:D=A:C$ (§.189). Ergo $A-B:B=C-D:D$, & $A-B:A=C-D:C$ (§.173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F; erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens secundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

$$4:2=6:3$$
$$2:8=3:12$$
$$4:8=6:12$$

Quoniam $A:B=D:E$ & $B:C=E:F$, *per hypoth.* erit $A:D=B:E$ & $B:E=C:F$ (§. 173); consequenter $A:D=C:F$ (§. 167). Quare $A:C=D:F$ (§.173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Quodsi fuerit $A:B=D:E$, & $C:B=F:E$; cum etiam sit $B:C=E:F$ (§.169), erit $A:C=D:F$ (§.194).

COROLLARIUM II.

196. Similiter si fuerit $A:B=C:D$, & $A:F=C:G$; cum etiam sit $B:A=D:C$ (§.169), erit $B:F=D:G$ (§.194).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit $A:B=C:D$, & $F:A=G:C$, cum etiam sit $A:F=C:G$ (§.169), erit $B:F=D:G$ (§.196).

THEOREMA XXXIV.

199. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ E ad suum consequentem F, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad consequentem secundæ F.*

De-

DEMONSTRATIO.

$8 : 4 = 12 : 6$	Quoniam A : B
$4 : 16 = 3 : 12$	= E : F *per hypoth.*
$8 : 16 = 3 : 6$	si ponatur B : C
	= F : G, erit A : C

= E : G (§. 194). Est vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo D : E = F : G (§. 167), & D : F = E : G (§. 173); consequenter A : C = D : F (§. 167). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

199. Quodsi fuerit A : B = E : F, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM II.

200. Similiter si fuerit B : A = F : E, & B : C = D : E; cum etiam sit A : B = E : F (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (§. 169), erit A : C = D : F (§. 200).

COROLLARIUM IV.

202. Si idem C, vel æqualia, per majus A & minus B dividas; quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim A : C = 1 : F, & B : C = 1 : G (§. 174); adeoque C : B = G : 1 (§. 169). Ergo A : B = G : F (§. 198). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (§. 149).

THEOREMA XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 182), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177). Quare A > B (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit C : A < C : B (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc est, D : A = C : B (§. 152), & hinc D : C = A : B (§. 173). Sed D < C (§. 20). Ergo A < B (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

4	2
2	4
8 =	8

Sint duo factores A & B, erit $1 : A = B : AB$ & $1 : B = A : BA$ (§. *66*). Est vero etiam $1 : A = B : BA$ (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth*. $B : AB = B : BA$ (§. 167). Ergo $AB = BA$ (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam $AB = BA$ (§. 207); erit $CAB = CBA$ (§. 93), adeoque & $ABC = BAC$ (§. 207). Similiter quia $CB = BC$ (§. 207); erit $ACB = ABC$ (§. 93), adeoque & $CBA = BCA$ (§. 207). Quare $CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA$ (§. 87), hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA XL.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur; quotus est multiplicans: si per multiplicantem; quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. *66*). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. *69*). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. *66*); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. *69*). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. *76*).

THEOREMA XLI.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. *66*). Ergo factum æquale est dividendo (§. 177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLII.

213. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales $A : B = C : D$; sint totidem aliæ inter se quoque proportionales $E : F = G : H$: si posteriores singulas in singulas priores ducas; facta inter se proportionalia sunt, nempe $AE : FB = GC : DH$.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Cum sit *per hypoth.*

$$\begin{array}{l} A : B = C : D \ \& \ E : F = G : H \\ E \quad F \quad E \quad F \qquad C \quad D \qquad C \quad D \\ \hline \end{array}$$

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH. (§. 185). Sed EC = CE & FD = DF (§. 207). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167) = GC : HD (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens = m; secundæ C : D exponens sit = n. Erit m : 1 = A:B & n : 1 = C:D (§. 140). Ergo mn : 1 = AC : BD (§. 213); consequenter mn est exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc est compositæ ex A:B & C : D (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens est* 2, *hujus* 4. *Rationem compositam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192 : 24 = 8, *quod est factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c.; prima A ad tertiam C est in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata, &c. primæ A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§. 159). Sed AB : BC = A : C (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam, &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F, &c. series; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, &c. (§. 159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes compositæ ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$6:3=4:2$	Sit $A:B=C:D$,
$3:1=12:4$	$E:F=G:H$, $I:K$
$5:1=20:4$	$=L:M$, *per hypoth.*
	erit $AE:BF=CG:$
$90:3=960:32$	DH (§. 213), adeo-
$=30$	que & $AEI:BFK$
	$=CGL:DHM$ (§.

cit.). Ratio vero $AEI:BFK$ componitur ex rationibus $A:B$, $E:F$ & $I:K$; ratio $CGL:DHM$ ex rationibus $C:D$, $G:H$, $L:M$ (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; æquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque secundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.*

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per mA & mC, itemque æquemultiplices ipsarum B & D, per nB & nD. Cum sit $A:B=C:D$, *per hypoth.* erit etiam $mA:nB=mC:nD$ (§. 185); consequenter $mA:mC=nB:nD$ (§. 173). Quamobrem si $mA=mC$, erit $nB=nD$; si $mA>mC$, etiam $nB>nD$; si $mA<mC$, etiam $nB<nD$ (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* EUCLIDES (*a*) *in iis definiendis, ac inde ceteras demonstrat.*

(*a*) Elem. V. def. 5.

CAPUT IV.

De speciebus Arithmeticæ in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. *Si numerator est æqualis denominatori; fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro: si minor; fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro: si major; fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (ex. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis; *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis; consequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si

Si denique numerator major est denominatore; *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86). Ergo integrum parti fractionis æquale est; consequenter ipsa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales, vel eodem majores, dicuntur vulgo* spuriæ; *quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi quæ integro minores* (§. 38).

PROBLEMA XVII.

223. *Invenire, quot integra fractio* ($\frac{8}{4}$), *quæ integro major, contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem est cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum scribatur loco numeratoris. Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66, 169). Sed unitas & denominator datus sunt idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX

225. *Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent: major est, cujus numerator habet rationem majorem: minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales sunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est: cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204). *Q. e. d.*

Ex. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries continetur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

227. Quodſi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in caſu priore facta ($\frac{8}{12}$), in poſteriore quoti ($\frac{2}{3}$) conſtituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178, 181).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem menſuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Diviſor primæ diviſionis, ſeu numerus datus minor, denuo dividatur per reſiduum primæ diviſionis.
3. Similiter diviſor ſecundæ diviſionis dividatur per reſiduum ſecundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, diviſorem ultimum eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum.

Ex. gr. Sint numeri dati 168 & 240; reperietur eorum communis menſura maxima 24 hunc in modum:

7		
$\cancel{1}\cancel{8}2$	24	$\cancel{1}$
$\cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}$ (1	$\cancel{1}\cancel{6}8$ (2	$\cancel{7}\cancel{2}$ (3
$\cancel{1}\cancel{6}8$	$\cancel{7}\cancel{2}$	$\cancel{2}\cancel{4}$

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth. & §. 74*). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 78).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ, ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72; adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis, ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum ſit abſurdum (§. 74), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

229. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$, per diviſ. tert.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$, per diviſ. ſec. $= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$, per num. I, $= 7 \cdot 24$.

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$, per diviſ. prim. $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, per num. I & II $= 10 \cdot 24$.

SCHO-

SCHOLION II.

230. *In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratia divisio subtractioni substituitur: ut exemplum ostendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA XX.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere; h. e. invenire fractionem datæ* ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, sed minoribus numeris expressam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48, per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quam, iterata per mensuras minores sponte animadversas divisione, fractiones reducere.*

PROBLEMA XXI.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere; h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales sunt, & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5} = \frac{2.5}{3.5}$ & $\frac{4.3}{5.3} = \frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4} = \frac{2.6.4}{3.6.4}$ & $\frac{1.3.4}{6.3.4}$ & $\frac{3.3.6}{4.3.6} = \frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 93 & § 207, 208. Quod vero æquivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

236. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 235).
2. Addantur numeratores (§. 96) & summæ subscribatur denominator communis.

Ex. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 235) $= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§. 223).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 235) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 223) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi

addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem suntreducendi (§. 35). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 103) & residuo denominator communis subscribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 235) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fractio æquatur numeratori per denominatorem diviso; hoc est,* $\frac{3}{4} = 3:4$.

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem, seu integrum, ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38, 59). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140); si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviso (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ $(\frac{2}{3}) = A:B$ (§. 238) $= F$, & $\frac{C}{D}$ $(\frac{1}{2}) = C:D$ (§. *cit.*) $= G$; erit $B:A = 1:F$, & $D:C = 1:G$ (§. 69). Ergo $BD:AC = 1:FG$ (§. 213), hoc est, $\frac{AC}{BD}$ $(\frac{2.1}{3.2}) = \frac{FG}{1}$ (§. 169) $= FG$ $(\frac{2}{6})$. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, quæ multiplicatio vocatur. Ex. gr.* $\frac{2}{3}$ *multiplicare per* $\frac{1}{2}$ *idem est ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum. Ex. gr. factum ex* $\frac{3}{7}$ *in* 2 *est* $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem* $(\frac{4}{5})$ *per aliam fractionem* $(\frac{2}{3})$ *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. Ex. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$.
2. Divisor inversus ducatur in dividendum

dum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$, seu $1\frac{1}{5}$ (§. 223), est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181); consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per dividentem emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus (*juxta* §. 239) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes* (§. 141), *eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

PROBLEMA XXVI.

245. *Integrum* (3) *per fractionem* ($\frac{4}{7}$) *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in Problemate præcedente (§. 243). Ex. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione Problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analysi numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. SI numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur; factum 4 *Numerus Quadratus*: ipse autem hujus intuitu *Radix Quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad Radicem quadratam, ita Radix ad ipsum Quadratum (§. *66*, *246*); erit Radix media proportionalis inter unitatem & Quadratum (§. 156).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* seu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix Cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad Radicem, ita Radix ad Quadratum (§. *66*, *246*) & ut unitas ad Radicem ita Quadratum ad Cubum (*66*, 248); erit etiam Radix ad Quadratum ut Quadratum ad Cubum (§. 167), hoc est, Unitas, Radix, Quadratum & Cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156), & Radix Cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter Unitatem & Cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *Potestatum*, *Potentiarum*, *Dignitatum* nomine appellari solent. VIETA eadem *Magnitudines scalares* vocat.

DEFINITIO LVI.

251. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens Quadrati est 2, Cubi 3 (§. *246*, *248*).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut Radix dicatur *Dignitas prima*, Quadratum *secunda*, Cubus *tertia* &c. Qui *Arabes* sequuntur, singulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum DIOPHANTO (*a*) utuntur VIETA (*b*) & OUGHTREDUS (*c*). Nomina *Arabum* sunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum* seu *Biquadratum*, *Surdesolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdesolidum secundum*, *Quadratiquadrati Quadratum*, *Cubus Cubi*, *Quadratum Surdesolidi*, *Surdesolidum tertium* &c. Nomina DIOPHANTI sunt; *Latus* seu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus &c.*

SCHO-

(*a*) In *Libris Arithmeticorum*.
(*b*) In *Isagoge in Artem Analyt.* c. 3. f. m. 3.
(*c*) In *Clave Mathem.* c. 12. p. m. 34.

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zensum. *Hinc composita* : Zensizensus, Zensicubus, Zensizenzensus, Zensurdesolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. *Qui* Arabum *denominationibus usi, Potentiarum signis sequentibus utuntur* : 1. R, 2. ℨ, 3. C, 4. ℨℨ, 5. ß, 6. ℨC, 7. Bß, 8. ℨℨℨ, 9. CC, 10. ℨß, 11. Cß &c. *Multo commodius* CARTESIUS *(a), monito* KEPLERI *(b) obsecutus, radici superius a dextris jungit exponentem*, ex. gr. *si* a *fuerit radix, erunt Potentiæ ipsam sequentes*, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, si* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 &c. *ita ut sit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. *Quantitatem ad dignitatem desideratam evehere* idem est ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. Ex. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem est ac invenire numerum 2, qui aliquoties in se ipsum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates superiores nonnisi in Analysi usum habeant; in præsenti genesin & analysin Quadratorum & Cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos nosse debet, quos sequens tabula exhibet* :

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LX.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis superioris cujuscunque dicitur *Binomia*, si ex duabus: *Trinomia*, si ex tribus: *Multinomia* sive *Polynomia*, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

THEOREMA LI.

259. *Potentiæ ejusdem gradus sunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem; hoc est, Quadrata habent rationem duplicatam: Cubi triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam: &c. rationem suarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, si radices A & B aliquoties in seipsas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio Quadratorum componitur ex duabus, Cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, &c. reliquarum Potentiarum ex tot rationibus similibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo Quadrata habent rationem duplicatam, Cubi triplicatam, &c. ceteræ Potentiæ rationem tantuplicatam suarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159).

(*a*) In *Geometria*.
(*b*) *Harmonices mundi* lib. 1. f. 35. 36.

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium Potentiæ eædem sunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim Potentiæ eandem rationem multiplicatam ipsarum A : B, B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D, E : F &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter se eædem sunt, *per hypoth.* Ergo potentiæ istæ, v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. constituunt rationes compositas ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt (§. 250); consequenter easdem (§. 218); atque adeo proportionales sunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ, componitur ex Quadrato partis primæ, ex Facto dupli primæ in alteram & ex Quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus Quadratus, si Radix in seipsam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis sigillatim ducitur in utramque simul (§. 111). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in seipsam, hoc est, ex Quadrato partis primæ (§. 246); 2°. ex facto partis primæ in secundam & ex facto secundæ in primam, hoc est, ex duplo facto primæ in secundam, seu ex Facto dupli primæ in secundam (§. 207, 208); 3°. ex facto partis secundæ in seipsam, hoc est, ex Quadrato partis secundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonstratio est ocularis, si, in quocunque exemplo singulari, multiplicatio non actu peragitur, sed saltem indicatur; quo in casu exempli universalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræsentant, quod singularia in universum omnia commune habent. Ex. gr. sit radix binomia 34, aut 30 + 4; erit*

30 + 4	*Radix binomia.*
30 + 4	
16	*Quadratum partis II.*
120	*Facta ex I in II.*
120	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonstrationibus concipiendis, quam in propositionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. Cum pars dextra, sive secunda, inter unitates, sinistra sive prima, inter decades locum obtineat (§. 50); Quadratum illius in loco dextimo, Factum ex unius duplo in alteram in secundo, Quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).

SCHOLION II.

264. *Scilicet Quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo Facto ex parte una in alteram cyphra una, Quadrato autem partis sinistræ duæ adjunguntur; ut numeri solitarie positi justum locum nanciscantur* (§. 49).

COROLLARIUM II.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures sinistimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, Quadratum numeri cujuscunque componi ex Quadratis singularum partium & Factis ex duplo partis cujus-

cujuslibet in omnes ipsa sinisteriores: ut adeo Theorema unum compositioni omnium numerorum Quadratorum sufficiat.

SCHOLION III.

266. *Sit radix 346 : sumatur 340 pro parte una & 6 pro altera; erit* (§. 261).

340 + 6	
340 + 6	
36	*Quadratum pars* III.
2040	*Facta ex parte* III *in* I & II *simul.*
2040	
1600	*Quadratum partis* II.
12000	*Facta ex* I *in* II.
12000	
90000	*Quadratum partis* I.
119716	*Quadratum totius.*

COROLLARIUM III.

267. Quonam in loco singula producta terminentur, ex Corollario primo & ejus Scholio intelligitur (§. 263, 264). Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur, ut justum nanciscantur locum (§. 49).

SCHOLION IV.

268. *Extractio Radicis Quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi Quadratis per Theorema præsens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA XXVII.

269. *Ex numero quocunque dato Radicem Quadratam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes Radicis, quot classes habentur (§. 265, 267). Notandum vero, quod classi sinistimæ interdum nonnisi nota unica relinquatur.

2. Jam cum in classe sinistima reperiatur Quadratum notæ sinistimæ Radicis (§. *cit.*); in *Tabula Radicum* (§. 275) quæratur numerus Quadratus ei, qui classem sinistimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; Radix vero ejus post lunulam scribatur.

3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota sinistima classis subsequentis, & inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quotus per Abacum *Pythagoricum* (§. 109), inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda Radicis (§. 261, 210).

4. Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis, & factum ex numero subscripto integro in divisorem (§. 263) subducatur, ut in divisione moris est.

5. Quodsi operatio, juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis classibus iteretur; prodibit Radix quæsita (§. 265, 267).

Ex. gr.		
11	56	(34
9	: :	
2	56	
	64	
2	56	
	0	

11	97	16	(346
9	: :	: :	
2	97	: :	
	64	: :	
2	56	: :	
	41	16	
	6	86	
	41	16	
		0	

PROBLEMA XXVIII.

270. *Radicem Quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239); Quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); Radicem Quadratam extracturus, eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita Radix Quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$; ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui Quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est Quadratus & ex fractione extrahatur Radix (§. 270): quæ prodit fractio Radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris Quadrati Radix indicat.

SCHOLION I.

272. *Ex. gr. Si ex 2 extrahenda Radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus Radix $\frac{8}{6}$, sive $1\frac{2}{6}$, exhibet Radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.*

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus, eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); Radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui Quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit Radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION II.

274. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Quadrata ex 345; prodibit* $18\frac{57}{100}$.

```
 3|45(18 57/100
 1| : :
 ------------
 2|45
  (28)
  224|
 ----------
   2.1.|0.0
   (3|65)
   1 8 25
   ----------
    2 7.5.00
     (37 07)
    2 5 949
    ---------
     1 5 5 1
```

SCHOLION III.

275. *Si Tabulis numerorum Quadratorum pro Radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus Quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores occu-*

8697.5	(294 $\frac{9}{10}$
86436	
539|0.0	
(5885)	
530|01	
899	

occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, ex. gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si Tabulæ longius extendantur.

THEOREMA LIV.

276. *Numerus Cubicus Radicis binomiæ componitur ex numeris Cubicis duarum partium, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam & ex Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus Cubicus prodit, si Quadratum per Radicem multiplicetur (§. 248). Sed Quadratum Radicis binomiæ componitur ex Quadratis partium & Facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare Cubus componitur ex Cubo partis primæ, ex triplo Facto Quadrati partis primæ in secundam, ex triplo Facto Quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam, & Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam (§. 207), atque ex Cubo partis secundæ (§. 246, 248). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit ex. gr. Radix 34 seu 30 + 4, erit*

30 + 4	*Radix*
16	*Quadrat. part.* II.
120	*Facta ex* I *in* II.
120	
900	*Quadrat. part.* I.
64	*Cubus part.* II.
480	*Facta ex Quadrat.* II. *in* I.
480	
3600	*Factum ex Quadrat.* I. *in* II.
480	*Fact. ex Quadrat.* II. *in* I.
3600	*Facta ex Quadrat.* I. *in* II.
3600	
27000	*Cubus part.* I.
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus Cubicus dextræ in loco dextimo, Factum ex triplo Quadrato ejus in sinistram in secundo, Factum ex triplo Quadrato sinistræ in dextram in tertio, Cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM II.

279. Si Radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ ~~dextimæ~~ sinistimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod Cubus quicunque componatur ex Cubis singularum partium radicis & ex Factis tripli Quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex Factis tripli Quadrati cujuslibet dexterioris in omnes sinisteriores.

SCHOLION II.

280. *Sit Radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, consequenter (§. 276).*

346	
346	
90000	*Quadrat. part.* I.
12000	*Facta ex* I *in* II.
12000	
1600	*Quadrat. part.* II.
115600	*Quadrat.* I *&* II *ſimul.*
2040	*Facta ex* III *in* I *&* II *ſimul.*
2040	
36	*Quadrat. part.* III.
27000000	*Cubus part.* I.
3600000	*Facta ex Quadr.* I *in* II.
3600000	
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
3600000	*Fact. ex Quadr.* I *in* II.
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
480000	
64000	*Cubus part.* II.
693600	*Facta ex Quadr.* I *&* II *ſimul in* III.
693600	
12240	*F. ex Quad.* III *in* I *&* II *ſim.*
693600	*F. ex Quadr.* I *&* II *ſim. in* III.
12240	*Fact. ex Quadr.* III *in* I *&* II *ſimul.*
12240	
216	*Cubus part.* III.
41421736	*Cubus totius.*

Notandum ſcilicet, ſectionem numeri in duas partes arbitrariam eſſe; cumque Theorema generaliter de Radice utcunque in duas partes diviſæ loquatur, idem quoque ad quamlibet ſectionem applicari poſſe. Ex. gr. *numerus* 346 *non modo, ſtante Theoremate, in* 340 *&* 6, *vel in* 300 *&* 46, *verum etiam in* 195 *&* 151, *in* 89 *&* 257, *& in duas quaſcunque alias partes dividi poteſt: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris Quadratis, immo in genere in Potentiis quibuſcunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis ſingula terminentur facta, ex Corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur. *Vide exemplum in Schol. præc.* (§. 280).

PROBLEMA XXIX.

282. *Ex numero dato Radicem Cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus diſtinguatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto Etenim ex tot notis Radix componitur, quot claſſes emergunt (§. 278, 281). Notandum vero, non repugnare, ut claſſi ſiniſtimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In *Tabula Radicum* (§. 257) quæratur numerus Cubicus eo proxime minor numero, qui in claſſe ſiniſtima continetur, niſi ipſe in eadem inveniatur, atque ab hoc ſubtrahatur; ejus vero Radix poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars prima Radicis (§. 274).
3. Quoti inventi Quadratum triplum (§. 278, 281) ſcribatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis, & inde porro ſiniſtrorſum ſi ex pluribus notis conſtiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars ſecunda Radicis (§. *cit* & §. 210.)
4. Diviſor ducatur in novum quotum, & productum ſub eo deleto ſcribatur; ſub nota vero media claſſis ejuſdem terminetur Factum ex triplo

triplo Quadrato novi quoti in præcedentem; sub dextima denique Cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri Cubici suprascriptis subtrahantur (*§. cit.*).

5. Quodsi operatio per reliquas classes, juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit Radix quæsita (§. 279).

```
Ex. gr.                      47 | 437 | 928 (362
                             27 |     |
                            --- | --- |
                             20 | 437 |
              Divisor (       2 |  7).. |
     Fact. ex d. in q. 16       | 2 ..  |
Fac.ex 3 □ n.q. in pr. 3        | 24 .  |
     Cubus novi quoti           | 216   |
---------------------------------------
     Summa factor.           19 | 656   |
---------------------------------------
                                781 | 928
              Divisor (388      |  8)..
Fact. ex Div. in q. n.      777 |  6 ..
Fact. ex 3 □ n. q. in pr.     4 | 32 .
           Cubus n. q.          |    8
---------------------------------------
     Summa factorum           781 | 928
---------------------------------------
                          000 000
```

Problema XXX.

283. *Radicem Cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator Cubus est.*

Resolutio & Demonstratio.

Eodem, quo supra (§. 270), modo patet, Radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

Corollarium I.

284. Hinc porro eodem, quo supra, (§. 271), modo consequitur, Radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui Cubus non est, per hujus denominatoris Cubum multiplicetur, & Radici Cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

Scholion I.

285. Ex. gr. *Si ex* 12 *extrahenda Radix Cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *Cubum ipsius* 8, *& ex facto* 6144 *extrahatur Radix Cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$, *seu* $2\frac{2}{8}$, *Radix prope vera, cujus defectus est minor quam* $\frac{1}{8}$.

Corollarium I.

286. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 273), modo fluit, Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non Cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur, & operatio (§. 282) continuetur.

Scholion II.

287. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Cubica ex* 3; *eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

```
    3 (1 44/100
    1
  -------------
    2 | 0.0.0
      | 3 . .
    1 | 2 . .
      | 48 .
      |   64
  -------------
    1 | 744
  -------------
  256 | 0.0.0
   58 | 8 . .
  235 | 2 . .
    6 | 72 .
      |   64
  -------------
  241 | 984
  -------------
   14  016
```

SCHOLION III.

288. *Si Tabulis numerorum Cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda Radice Quadrata commendavimus.*

PROBLEMA XXXI.

289. *Examinare extractionem Radicis Quadratæ ac Cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix Quadrata inventa ducatur in se ipsam, & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo Radix extracta; erit numerus inventus Radix Quadrata dati, vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

$$\begin{array}{r} 1857 \\ 1857 \\ \hline 12999 \\ 9285 \\ 14856 \\ 1857 \\ \hline 3448449 \\ 1551 \\ \hline 3450000 \end{array}$$

Ex. gr. Radicem Quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc Radicem 1857 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix Cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

$$\begin{array}{r} 144 \\ 144 \\ \hline 576 \\ 576 \\ 144 \\ \hline 20736 \\ 144 \\ \hline 82944 \\ 82944 \\ 20736 \\ \hline 2985984 \\ 14016 \\ \hline 3000000 \end{array}$$

Ex. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta Radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc Radicem 144 in seipsam, & factum 20736 denuo in 144. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est ~~Radix~~ 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA LV.

290. *Exponens rationis Quadratorum est Quadratum: Cuborum Cubus: & in genere Potentiarum cujuscunque gradus Potentia ejusdem gradus exponentis Radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam; Cubi triplicatam: & in genere Potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum Radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ, & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit Quadratum (§. 246), triplicatæ Cubus (§. 248), & in genere multiplicatæ cujuscunque Potentia exponentis Radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEOREMA LVI.

291. *Si ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione Radicis per Radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis Quadratorum, Cuborum, vel in genere Potentiarum similium se mutuo dividentium (§. 136), adeoque Quadratum, Cubus & in genere potentia exponentis rationis Radicum (§. 290). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer Quadratus, Cubus, vel Potentia alterius gradus: cujus quoniam Radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250); etiam exponens Radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si Radix Radicem non metitur, nec Quadratum Quadratum, nec Cubus Cubum, nec Potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74); consequenter fractio integro major ex istiusmodi Quadratis, Cubis, vel Potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

THEOREMA LVII.

293. *Si numeri integri non datur Radix in integris, nec dabitur per fractos.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit Radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per seipsum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239), isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus sit integer, *ex hypoth.* fractus ejus Radix esse nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§. 75); ex numeris primis in se nulla perfecta Radix extrahi potest in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293).

HYPOTHESIS XIII.

295. *Interdum utile est, extractionem Radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* ($\sqrt{}$): *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$ denotat Radicem quadratam ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat Radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales Radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; consequenter numeros* (§. 10), *eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri* surdi: *quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit* (b). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

(*b*) Vid. STIFELIUS in *Arithm. integra* lib. 2. c. 12. p. 134.

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. *SI fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 8 : 4 4 3 24 = 24	A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 152). Ergo AD : BC = CD : DC (§. 185). Sed CD = DC (§. 207). Igitur AD = BC (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA LIX.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

6 : 12 = 12 : 24 12 6 144 = 144	Quoniam enim A:B = B:C (*per hypoth.* & §. 156, 152); erit AC = BB (§. 297).

Sed BB est Quadratum ipsius B (§. 250). Ergo factum extremarum AC æquatur Quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

299. *Si quantitas AD, producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D, fuerit æqualis alteri BC, ex duabus aliis B & C eodem modo producta; erit A : B = C : D.*

DEMONSTRATIO.

6 8 4 3 24 = 24 4:8 = 3:6	AC : AD = C : D (§. 178). Sed AD = BC, *per hypoth.* Ergo AC : BC = C : D (§. 168); consequenter A : B = C:D (§. 181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex facto 576 extrahatur Radix quadrata 24 (§. 269); quæ erit numerus quæsitus (§. 298).

PROBLEMA XXXIII.

302. *Datis tribus numeris 3, 12, 5, quartum: aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5; aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus: in altero casu tertius quæsitus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 297, 298). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

303. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim, *per Probl. præs.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§. 225).

Ex. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ — } 2 \text{ — } 24 \\ 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{48}\,(16 \\ \cancel{33} \end{array}$$

COROLLARIUM II.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. Ex. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION I.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum* (.) *numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut, ex. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0. 23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *scribimus* 5. 0047. *Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit* Johannes REGIOMONTANUS.

SCHOLION II.

307. *Resolutio hujus Problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac Regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportione constiterit.* Ex. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, si aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore* 100 *congii effluant. Tres in hoc casu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere; consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæstio per Regulam trium solvi nequit.*

SCHOLION III.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. Ex. gr. pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est*

 pre-

pretium 17 *librarum* ? *Cum ſit, ut* 3 *libræ ad* 17 *libras, ita illarum pretium (quod eſt* 4 *thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3 L. — 17 L. — 4 Th.

$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 68 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \\ \cancel{68} \\ \cancel{33} \end{array}$ ($22\frac{2}{3}$ th.

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ *thaleris ? Cum ſint ut 4 thaleri ad* $22\frac{2}{3}$, *ita 3 libræ ad quæſitas; harum numerus ita innoteſcit:*

4 Th. — $22\frac{2}{3}$ Th. — 3 L.

$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 68 \end{array}$ $\begin{array}{r} \cancel{2} \\ \cancel{68} \\ \cancel{44} \end{array}$ (17 L.

Hinc ſimul patet, quomodo Regula trium examinetur, hoc eſt, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION IV.

309. *Similiter merces operariorum eſt tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, ſi æqualibus articulis æqualia penſa abſolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, ſi penſa æqualia ſinguli abſolvunt. Ex. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum ſpatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. — 360 F. — 2 H.

$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 720 \end{array}$ $\begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{720} \\ \cancel{666} \end{array}$ (120 H.

SCHOLION V.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipſis reſpondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in groſſos, groſſi in nummos, libræ in ſemuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. Ex. gr. 3 libræ & 4 ſemunciæ veneunt 2 thaleris & 4 groſſis, quanti libræ 2? Calculus talis eſt*

3 L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.

$\begin{array}{r} 32 \\ \hline 100 \text{ S.} \end{array}$ — $\begin{array}{r} 32 \\ \hline 64 \text{ S.} \end{array}$ — $\begin{array}{r} 24 \\ \hline 52 \text{ gr.} \end{array}$

$\begin{array}{r} 52 \\ \hline 128 \\ 320 \\ \hline 3328 \end{array}$ $\begin{array}{r} \cancel{3328} \\ \cancel{1100} \end{array}$ ($33\frac{28}{100}$ ſeu $\frac{7}{25}$ g.

Quodſi noſſe cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ *groſſi, ita reperies* (§. 304).

25 — 7 — 12

$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 84 \end{array}$ $\begin{array}{r} \cancel{29} \\ \cancel{84} \\ \cancel{25} \end{array}$ ($3\frac{9}{25}$ num.

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ *unius nummi eodem modo reperiri: ſed cum tanti non ſit ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.*

SCHOLION VI.

311. *In ſcriptis Arithmeticorum* Regula trium inverſa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in ſecundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *uſi ſumus* (§. 302), *quia ſcilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non eſt, ſi numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. Ex. gr. 125 milites operi exſtruendo 6 menſes impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 abſolvatur. Evidens eſt, quod ſit, ut ſpatium 2 menſium ad ſpatium 6 menſium, ita numerus militum, qui opus intra ſex menſes abſolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exſtruunt. Quo minore enim temporis intervallo exſtruitur,*

tur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
                          6
                        ———
                         750

750 (375 Mil.
222

SCHOLION VII.

312. *Interdum gemina Regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. Ex. gr.* 300 *thaleri dant intra* 2 *annos usuram* 36 *thalerorum, quantam dabunt* 20000 *thaleri intra* 12 *annos. Hic per Regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a* 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra* 12 *annos existat:*

300 Th. – 20000 Th. – 36 Us.
                                  20000
720000 (2400 Us.   ———
33000   720000

2 A. – 12 A. – 2400 Us.
                       12
                     ———
28800 (14400 Us. 4800
222   24
                     ———
                     28800

SCHOLION VIII.

313. *Exemplis istiusmodi Regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis* 300 *thaleri eandem dent usuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *& duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quanta* 20000 *intra* 12; *omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis* 300, *id est* 600 *thaleri dant usuram (intra annum scilicet)* 36, *quantam dabunt duodecies* 20000, *id est* 240000 *thaleri (itidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 us.
                 36
              ———
              1440000   22
              72   8640000 (14400
              ———   666600
              8640000

Posterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION IX.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iteratæ Regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. Ex. gr. Lucrum commune trium personarum est* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *secundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi 1000 Th.
secundi 500
tertii 300
———
Summa Collatorum 1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
                     2000
                   ———
                   2000000

***

111
12222
2000000 ($1111\frac{2}{18}$ Lucrum primi.
1888800
111
1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
2 000

1000000

111
555
1000000 ($555\frac{10}{18}$ Lucrum secundi.
18800
11
1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
2 000

600000

33
3666
6000000 ($333\frac{6}{18}$ Lucrum tertii.
188800
11

Examen.

$1111\frac{2}{18}$	Lucrum primi	
$555\frac{10}{18}$	secundi	
$333\frac{6}{18}$	tertii	
2000 Th.	Lucrum commune.	

Scholion X.

315. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum, in Medicina aut Artibus aliis, ex data ratione quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponderis dati. Ex. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit 8 librarum. En calculi typum:*

Pondus $\left\{\begin{array}{l}\text{primi}\\ \text{secundi}\\ \text{tertii}\end{array}\right\}$ simplicis 4 Unc. 5 2

Summa 11 Unc.
11 Unc. — 8 L. — 4 Unc.
16

128 Unc. 1
4 176

512 511 ($46\frac{6}{11}$ Pond. simp. primi
111
1

11 Unc. — 128 Unc. — 5 Unc.
5 1
192
640 640 ($58\frac{2}{11}$ pond. simp. secund.
111
1

11 Unc. — 128 Unc. — 2 Unc.
2 33

256 256 ($23\frac{3}{11}$ Pond. simp. tertii.
111
1

Examen.

Pondus simplicis primi	$46\frac{6}{11}$	Unc.
secundi	$58\frac{2}{11}$	
tertii	$23\frac{3}{11}$	
Pondus mixti	128 Unc. = 8 lib.	

Scholion XI.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302), *primus & secundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur, & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pre-

Pretium 3 Lib. *eſt* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1   3   3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. *eſt* 26 Thal. *quant.* 7 libr.
7) 2   2)   1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION XII.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 *& alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, abſque reductione in* Schol. 5 (§. 310) *præſcripta calculus initur; ut ſequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *eſt* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5 L.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifeſtum ſcilicet eſt, bis 6 nummos conficere groſſum unum, adeoque quinquies 6, groſſos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 groſſi thalerum 1, & inſuper bis 8 groſſos 16 efficiunt. Quod ſi ergo thalerus iſte 15 reliquis, & 2 priores groſſi 16 reliquis addantur, prodibit pretium quæſitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

318. *Si terminus primus vel ſecundus fuerit* 1, *& in priore caſu ſecundus aut tertius, in poſteriore primus in factores reſolvi poteſt; integram ſæpe operationem ſine ſcriptionis ſubſidio mens abſolvit: id quod exempla, quæ ſequuntur, docent.*

Pretium 1 libr. *eſt* 24 th. *quantum* 20 libr.
4   4
6

80
6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *eſt* 18 th. *quantum* 1 libr.
3   2
4   ~~18~~(~~6~~($1\frac{1}{2}$ th.
~~3~~ ~~4~~

Poteſt etiam numerus datus reſolvi partim in factores, partim in partes componentes. Ex. gr. 1 *libra conſtat* 9 *groſſis, quodnam eſt pretium* 35 *librarum?*

Quoniam	1 *libra*	*conſtat*	9 *groſſis*	
conſtabunt	3 *lib.*	1 *thal.*	3 *gr.*	
	30 *lib.*	11 *thal.*	6 *gr.*	
	5 *lib.*	1 *thal.*	21 *gr.*	
	35 *lib.*	13 *thal.*	9 *gr.*	

Hic nempe numerus 35, *per quem multiplicatio fieri debet, reſolvitur in partes* 30 & 5, *pars vero altera* 30 *in factores* 3 & 10.

SCHOLION XIV.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit* 1, *multa compendia ſimilia multiplicatio & diviſio, ſine Abaci* Pythagorici *ſubſidio peragenda* (§. 116, 120), *ſuppeditat. Ex. gr. pretium* 9 *librarum eſt* 20 *thalerorum, quantum eſt pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium deſideratum, ſi parti decimæ illius, id eſt* 2 *thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id eſt,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium* 5 *librarum eſt* 54 *thalerorum, quantum erit pretium* 1 *libræ? R. Quoniam pretium quæſitum eſt quinta pars dati, duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæſitum. Item: Pretium* 1 *libræ eſt* 18 *groſſorum, quantum erit librarum* 19? *R. Quoniam* $19 = 20 - 1$, *a duplo pretii dati cyphra aucti* (360) *ſubducatur ſimplum* (18), *reſiduum erit pretium* (342 *groſſorum*) *quæſitum.*

SCHOLION XV.

320. *Si duo termini ejuſdem denominationis unitate differant, ſingulari quodam compendio utimur, quod ex ſubjunctis exemplis manifeſtum. Ex. gr. Pretium* 5 *librarum eſt* 30 *thalerorum, quantum erit* 4 *librarum? R. Quoniam pretium* 4 *librarum una parte quinta deficere debet a pretio* 5 *librarum; pretium datum* 30 *dividatur per*

5 &

5 & quotus 6 ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum 24. *Item: pretium* 8 *librarum est* 24 *thalerorum, quantum erit librarum* 9? *R. Quia pretium* 9 *librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum* 24 *dividatur per* 8 *& quotus* 3 *eidem addatur, summa* 27 *erit quæsitum.*

SCHOLION XVI.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* Ex. gr.

Pret. 100 libr. *est* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2   2) ——   1
Fac.   15 th. 2 gr.

It. Pret. 60 libr. *est* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1   6   42
480   6
7   7
Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. SI in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; eas *continue Æquidifferentes* voco. Si vero in serie quatuor eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *discretim Æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 sunt numeri discretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* arithmetice proportionales, (*& vere proportionales, de quibus ante,* geometrice proportionales *appellari solent, ut ab iis distinguantur:*) *sed minus proprie, nec ad mentem Veterum.*

COROLLARIUM I.

324. Si termini semper crescunt, in continue æquidifferentibus terminus secundus est aggregatum ex primo & differentia; tertius summa ex secundo & differentia: si decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; secundum aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in discretim æquidifferentibus si termini crescunt, secundus est aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: si vero decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

THEOREMA LXI.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes; summa primi & tertii est medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7 10
7 4
————
14=14

Si enim termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, tertius ex secundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo mo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo secundi dupla. *Q.e.d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrescunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$\begin{aligned} II &= I + D \\ III &= II + D \end{aligned}$$

Ergo III = I + 2D

Hinc III + I = 2 I + 2 D = 2 II.

THEOREMA LXII.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes; summa primi & quarti æqualis est summæ secundi & tertii.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccc} 3-5 & = & 8-10 \\ 8 & & 3 \\ \hline 13 & = & 13 \end{array}$$

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$\begin{array}{lcl} II = I + D & \quad & IV = III + D \\ III \quad III & & I \quad I \\ \hline II + III = III + I + D & & IV + I = I + III + D \end{array}$$

PROBLEMA XXXIV.

330. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2.

Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA XXXV.

331. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8.

Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescentium vocatur *Progressio geometrica.* Ex. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrescentium dicitur *Progressio arithmetica.* Ex. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: STIFELIUS in *Arithmetica* sua (*a*) *Exponentes* vocat. Ex. gr. sint duæ progressiones:

Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128; &c.

COROLLARIUM I.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

(*a*) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progressione geometrica ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250, 332); si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251). Ex. gr. 2 est dignitas prima, ejusque exponens 1; 64 dignitas sexta, ejusque exponens 6.

THEOREMA LXIII.

337. *Si logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334); adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 332). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, Quadratum sit factum ex Radice in seipsam (§. 246); logarithmus Quadrati est duplus logarithmi Radicis.

COROL-

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum Cubi esse triplum (§. 248); Biquadrati quadruplum; Potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi Radicis (§. 250).

COROLLARIUM III.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus Radicis ad logarithmum Potentiæ, seu ipsius Dignitatis (§. 251, 255).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus Potentiæ prodit, si logarithmum Radicis multiplices per exponentem ejus (§. 65); adeoque logarithmus Radicis habetur, si logarithmus Dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *Ex. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus Radicis Quadratæ 8 est dimidius logarithmi 6 Quadrati 64, & 2 logarithmus Radicis Cubicæ 4 est subtriplus logarithmi 6 Cubi 64.*

THEOREMA LXIV.

343. *Si logarithmus unitatis est 0; erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum divisoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

344. *Ex. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

SCHOLION II.

345. *Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat* STIFELIUS (a): *qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a* Justo BYRGIO *primum reperto* (b), *sed a* Johanne NEPERO *supra laudato primum ostenso* (c).

PROBLEMA XXXVI.

346. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. progressionem geometricam constituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 &c.

 2. Equi-

(a) In *Arithmet.* lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50. (b) KEPLERUS in *Tabulis Rudolphinis* c. 3. f. 11. (c) In *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptione.*

2. Equidem manifestum est, (§. 334) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu 9. Inter 1.0000000 (A) & 10.0000000 (B) quæratur medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0.00000000 atque 1.00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334), hoc est numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum distantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9.0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quærantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.95424251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras, & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.

CALCULI TYPUS.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numerii medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	6.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim vero non opus est, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore investigentur: compositi enim cum per alios numeros dividi possint (§. 76), adeoque & ex aliis se mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi, *per Theor.* 63 *&* 64 (§. 337 *& seqq.*) inveniuntur. Ex. gr. si logarithmus numeri 9 bisecetur, prodit logarithmus 0.4771 2125 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteristica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, est 0; pro numeris a 10 ad 100, est 1; pro numeris a 100 ad 1000, est 2; &c.

SCHOLION.

348. *Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *usque ad* 20000, *& a* 90000 *ad* 100000, *primus construxit* Henricus BRIGGIUS, *Professor Geometriæ Savilianus in Academia Oxoniensi, ex consilio tamen primi inventoris* NEPERI (*a*), *& methodum construendi una exposuit in sua* Arithmetica Logarithmica. *Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus VLACCUS (*b*). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon logarithmorum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROBLEMA XXXVII.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

RESOLUTIO.

1. Resecentur 4 notæ ad sinistram numeri dati, & earum ex Canone excerpatur logarithmus.
2. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ (§. 347).
3. Logarithmus inventus subtrahatur a proxime sequente in Canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in Canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium; ita notæ residuæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam, *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendam: quæ si
5. Addatur logarithmo *per n.* 1 *&* 2 invento; summa erit logarithmus quæsitus.

Ex. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reseca quatuor notas 9237 & characteristicam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus respondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri	9238 =	3.9655780
subduc. log. num.	9237 =	3.9655309
relinquitur differ. tabul.		471

Inferatur: 10 — 471 — 5.
5) 2 ... 1 (§. 316).
235

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235
Summa est logar. quæs.	4.9655544

SCHOLION.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non sunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis scrupulosi non sumus, methodus tradita sufficit, si præsertim notæ residuæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in nostro casu adeo exactum reperimus, ut accuratior in Tabulis majoribus* BRIGGII *non occurrat.*

PROBLEMA XXXVIII.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

(*a*) Vide præfat. ad *Arithmeticam Logarithm.*
(*b*) In altera editione *Arithmeticæ Logarithmicæ* BRIGGII.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

Ex. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus 3 = 0.4771213

Logarithmus $\frac{3}{7}$ = —0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343); adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit* 0, *jam notavit* STIFELIUS (a), *& mirum non est. Fractio enim minor unitate* (§. 221). *Sed unitatis logarithmus est* 0 (§. 346). *Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

353. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238, 343).

Logarithmus 9 = 0.9542425
Logarithmus 5 = 0.6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

(a) In *Arithmet. integra*, lib. 3. c. 5. p. 249. b.

Logarithmus 23 = 1.3617278
Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

PROBLEMA XXXIX.

355. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in Tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in Tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex. gr. Quæratur numerus respondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632
——— minor 3.7589875

Differentia prima	757
Logarithmus datus	3.7589982
— proxime minor.	3.7589875
Differentia secunda	107

757 — 100 — 107   107.00 (14
        100   757
     10700   313.0
                 3028
                  102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quæsitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1, vel 2 (§. 347); characteristica mutatur

tatur in 3, & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346).

Ex. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in Tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 8321. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in Tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo Tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei respondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§ 346).

Ex.gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in Tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus Tabulæ, sive numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratur (§. 355).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

Ex. gr. Quæratur fractio respondens Logar. defectivo —0.3679767. Hic ex 4.0000000 subd. relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§.337,66). Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 305). Q. e. d.

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsiti (§. 302, 337, 343).

Ex.

Ex. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.
Logarith. $68 = 1.8325089$
Logarith. $3 = 0.4771213$

Aggregatum $= 2.3096302$
Logarithm. $4 = 0.6020600$

Logarith. quæs. 1.7075702, cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsiti sunt a* BRIGGIO *&* VLACCO *logarithmi, cum* NEPERUS *tantum Canonem, utut diversæ indolis, logarithmorum pro sinibus & tangentibus construxisset. Tyrones igitur hanc de logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. FRactio *decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. Ex. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic seriei*: $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ scribatur 3. 42857 (§. 306), loco denominatorum (numeratoribus solitarie positis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus $3^{0}.4^{\prime}\,2^{\prime\prime}\,8^{\prime\prime\prime}\,5^{IV}\,7^{V}$.

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu 3.42857^{V}.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam nonnisi meris cyphris constet (§. 346): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonnisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION II.

367. *Ex. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8. 735; *logarithmus numeratoris* 8735 *est* 3. 9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3. 0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0. 9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0. 324; *logarithmus numeratoris est* 2. 5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3. 0000000; *consequenter logarithmus fractionis decimalis* = 1. 5105456. *Iidem ergo sunt*

sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.

COROLLARIUM V.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLION III.

369. *Ex. gr. In fractione decimali 8.735''' apex ultimæ notæ est 3; a logarithmi igitur numeri 8735, qui est, 3.9412629, characteristica 3 subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis 0.9412629. Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fractio decimalis exacta est*, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

Ex. gr. $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit $8 : 10 = 4 : 5$ (§. 181).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel vera minorem, vel majorem; defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

Ex. gr. $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonnisi prope veram, defectu scilicet existente minore quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

Ex. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0.42857 & 0.0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex ''': nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales, perinde ac numeri integri, constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis, additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98, 103) nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exempla

I. Additionis:

3.50782	0.0638
0.0003	0.00562
51.247	7.138
54.75512	7.20742

II. Substractionis.

2.7864	0.95436
0.158	0.08512
2.6284	0.86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

Ex. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0.42857 per 0. 0047 multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7, & deinde in 4, sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

$$\begin{array}{r} 0.42857 \\ 0.0047 \\ \hline 299999 \\ 171428 \\ \hline 0.002014279 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0. 801.

$$\begin{array}{r} 2.3576+ \\ 0.34 \\ \hline 94304 \\ 70728 \\ \hline 0.801584 \end{array}$$

COROLLARIUM II.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in facto incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duæ notæ sinisteriores 11 certæ sunt. In exemplo anteriore si factor 0. 34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

$$\begin{array}{r} 18.357 \\ 6.34 \\ \hline 73428 \\ 55071 \\ 110142 \\ \hline 116.38338 \end{array}$$

COROLLARIUM III.

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. Ex. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

$$\begin{array}{r} 0.6666 \\ 6.8 \\ \hline 53332 \\ 39999 \\ \hline 453322 \end{array}$$

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA XLV.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex

apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343), & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

Ex. gr. Si 0. 002014279 dividatur per 0. 0047, quotus est 0. 42857 (§. 374, 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3, & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra. cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0. 002014279 dividatur per 0. 42857, quotus est 0. 0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0. 0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§. 371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. Ex. gr. Si dividendus fuerit 21. 3456 & divisor 3. 82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM III.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. Ex. gr. Si divisor sit 2. 5786, dividendus 3. 067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia dividendi 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas, in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium, accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18. 358 & 6. 35; factum quod obtinetur 116. 57330 convenit cum superiori 116. 38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§. 376). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382) nunc 3. 068 dividas per 2. 5786, nunc 3. 067 per 2. 5787, quotus utrobi-

```
 18.358
   6.35
-------
  91790
 55074
110148
-------
116.57330
```

utrobique est 1. 1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376, 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. FRactiones *sexagesimales* sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales.*

SCHOLION.

386. Ex. gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1,60,3600,216000,12960000, &c. sunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis, perinde ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. Ex. gr. $\frac{3}{1} = 3^{\circ}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *scrupulum tertium*; & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex, sive index, est 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA XLVI.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99).

Ex. gr.	35°	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53	20	41	55

PROBLEMA XLVII.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104).

Ex. gr	28°.	$15'$.	$4''$.	$20'''$
	17	29	18	45
	10	45	45	35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^{\circ} = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA XLVIII.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

Resolutio.

Multiplicatio fractionum ſexageſimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374), niſi quod ex ſpecie minore abjiciatur toties ſexagenarius, quoties fieri poteſt, & tot ſpeciei proxime majori addantur unitates, quoties ſexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod diviſio per 60 prodit (§. 223).

Ex.gr. Si multiplicandus $3^\circ\ 15'\ 38''$, multiplicator $2^\circ\ 18'\ 47''$. Duc ſingulas partes multiplicandi 1°. in 47, 2°. in 18, 3°. in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 ſcr. quartis = $29'''\ 46^{\text{iv}}$. Scribuntur adeo 46 pro ſpecie minima infra lineam cum ſuo apice & $29'''$ reſervantur ſpeciei proxime ſequenti annumeranda. Cum igitur factum ex $47''$ in $15' = 705'''$; additis 29 prodibunt $734''' = 12''.\ 14'''$. Scribuntur adeo 14 infra lineam & $12''$ reſervantur facto proxime ſequenti ex 3° in $47''$ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam ſummam (§. 391) collecta exhibent factum quæſitum $7^\circ\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46^{\text{iv}}$ aut, ſi prope verum quæſiveris, $7^\circ\ 32'\ 31''$, cum ſpecies proxime major dimidium illius ſuperet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

		3°	15′	38″
		2	18	47
	2	33	14	46^{iv}
	58	41	24	
6	31	16		
7°	32′	30″	38‴	46^{iv}

Scholion.

394. *Ne tædia diviſionis devoranda ſint, conſtructus eſt* Canon hexacontadon, *qui facta in ſpecies reſoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29. 46. *Ratio conſtructionis ex operatione in Problemate præcepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco* Pythagorico (§. 109), *factorum unum a latere, alterum in fronte Canonis deſcribi.*

Problema XLIX.

395. *Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales dividere.*

Resolutio.

Diviſio peragitur ut in fractionibus decimalibus; niſi quod in multiplicatione quoti per diviſorem tenenda ſint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393), &, ubi ſpecies dividendi prima fuerit minor ſpecie diviſoris prima, iſta reducenda ſit ad ſpeciem proxime minorem, & ſequenti addenda, ut diviſioni ſit locus.

Ex. gr. Si $7^\circ\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46^{\text{iv}}$ dividere jubeamur per $2^\circ\ 18'\ 47''$; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco ſcribe 3°. Duc 3° in $2^\circ\ 18'\ 47''$ & factum $6^\circ\ 56'\ 21''$ ſubtrahe ex $7^\circ\ 32'\ 30''$, ut relinquatur $36'\ 9''$. Junge reſiduo ſpeciem ſequentem 38 & diviſionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit abſoluta; quemadmodum ex typo exempli liquet:

2° 18′ 47″)	7°	32′	30″	38‴	46^{iv}	(3° 15′ 38″
	6	56	21	: :	: :	
		36	9	38	: :	
		34	41	45	: :	
		1	27	53	: :	
		ſive	87	53	46	
			87	53	46	
				0		

Scholion.

396. *Non abſimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque abſolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in diviſione menſuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

PEREXIGUUS est eorum numerus, qui Geometriæ pretium suum statuunt: notatione enim delusi cum Arte agrimensoria eam pessime confundunt, nec ea animo ipsorum obversatur idea, quam nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in scientiis quam in artibus ejus sit usus. Equidem ob Problemata, quorum resolutionem trado, nonnisi ad locorum distantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheseos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (a) dicta sunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ studium, a rigore in demonstrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non solent, & passim demonstro, quæ sine probatione

tione

(a) In Commentat. de Methodo §. 52, 53.

tione ad aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus; sed sufficit eum probari peritis, & quod majus est, methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidisse, supra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus LEIBNITIUS similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in Geometria esse usum; ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum *Leibnitiana* clarior sit. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonstratione Problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex Theorematum hypothesibus figuras construant, & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio (*c*). Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam, difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant,

(*b*) L. c. §. 52.
(*c*) In Schol. Theor. 7. §. 158.

ELEMENTA

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

1. GEometria est Scientia extensorum quatenus terminata sunt, hoc est, Linearum, Superficierum, & Solidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extensio ex simultanea alicujus rei per locum diffusione oritur; ita in mente repræsentatur, dum multa in uno continuo simul percipimus. Hinc notio extensionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9 Arith.); *sed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, superficies, ac solida repræsentari possunt. Unde est, quod Geometria rebus plurimis applicari possit, ejusque adeo quam latissime pateat usus.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Nempe *Congruentia* est coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium facessat, vitanda est vocis termini æquivocatio: id quod in sequentibus satis cavetur. A termini vero definitione consulto abstinemus, ne ad demonstrationes metaphysicas dilabamur.*

DEFINITIO III.

5. *Eundem situm habere* dicuntur, inter quæ idem extensum poni potest.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* EUCLIDES: Punctum est, *inquit*, cujus pars nulla est. *Nec sine ratione punctum*

punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.

DEFINITIO V.

Tab. I. Fig. 1. 10. *Linea* describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§. *6*).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8); linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos, vi Cor.* 1 (§. 11)?

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abstractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem, neglectis ceteris, cognoscere jubemur; ex. gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DEFINITIO VI.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita ex. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, qua ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcumque est toti similis. Tab. I Fig. 1.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. *26 Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim, diversitate hujus motus, partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24 *Arithm.*), contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate, ac directione; celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio; consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum

rum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc Definitio latior praxi respondet: strictius* EUCLIDES *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri sit æqualis: quam nos, in Arithmetica, partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*; & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter* Willebrordum SNELLIUM *(a), exponunt* RICCIOLUS *(b),* MALLETUS *(c),* EISENSCHMIDIUS *(d), aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat Tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium Pes regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque Pes integer particulas* 1440.

(a) In ERATOSTHENE *Batavo*, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.

(b) In *Geogr. Reform.* lib. 2. c. 7. f. 43 & seqq.

(c) *Geometrie pratique*, lib. 1. p. 108.

(d) In *Disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr.* Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{1}{4}$
Londinen.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{5}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* STEVINUS, *teste ipsius* Geometria practica, *dubio procul exemplo* REGIOMONTANI. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arithm.) *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Joannes BAYERUS *in* Logistica decimali *&* Stereometria *logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. Ex. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur:* $3^{0}\ 5^{I}\ 7^{II}\ 8^{III}$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra, sive decempedas, designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{0}\ 5^{I}\ 7^{II}\ 8^{III}$ *scribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciscus NOEL *autor est (e), divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ; secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

(e) In *Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis*, c. 7. p. 104 & seqq.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab. I. Fig. 2. 37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta, dicitur *Semidiameter*, item *Radius*. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet primum in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. EUCLIDES arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§. 385 Arithm.) *& apicibus suis notantur* (§. 387 Arithm.). *Gradui tanquam integro, seu unitati, cessit* o; *minuto primo* 1; *secundo* 2; *tertio* 3; *&c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27). *Ex. gr. 3 gradus, 25 minuta, 16 secunda, ita scribes:* $3^{\circ}\ 25'\ 16''$. *Etsi autem* Ægyptii *veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, exacte divi-*

dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem 2, 3, 4, 5 *& 6 metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt, post* STEVINUM (*a*), OUGHTREDUS (*b*), WALLISIUS (*c*), *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 364, & seqq. 393, & seqq. Arithm.). *Id consilium secuti sunt* Henricus BRIGGIUS *in* Canone triangulorum artificiali *apud* Henricum GELLIBRAND *in* Trigonometria Britannica, Joannes NEWTON *in* Astronomia *pariter ac* Trigonometria Britannica, *&* Nicolaus MERCATOR *in* Institutionibus Astronomicis. STEVINUS (*d*) *contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in* Seculo sapiente, *quod adstruere conatur, obtinuisse.*

DEFINITIO XXI.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diversa.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig. 2. 45. *Segmentum circuli* est pars ipsius AFBA, arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO XXIII.

46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehensa.

DEFINITIO XXIV.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra hunc; *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit. Tab. I. Fig. 5. Fig. 4.

(*a*) In præf. ad Tract. *de Logistica decimali.*
(*b*) *Clavis Mathemat.* c. 1. p. m. 2.
(*c*) *Algebræ* c. 9. f. 39. Vol. II. *Oper. Math.*
(*d*) In *Cosmographia* lib. 1. def. 6. f. 109. *Operum* Gallice editorum.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL, ex centro C ad contactum L ducta, est radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM II.

49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & *c* habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44). Fig. 4.

DEFINITIO XXV.

50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

52. Si recta MN circulum in O secet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37). Fig. 7.

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 37), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO XXVI.

54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *Crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*. Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION.

55. *Angulus hic, vel unica littera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris* BAC *indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti* x, *eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

 DE-

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 9. 57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, radio prorsus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 41).

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 6. 61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune, & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab. I. Fig. 11.

DEFINITIO XXXIII.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXIV.

67. *Anguli verticales*, o & x, sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXV.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, x & y, dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, u & y, item z & y, dicuntur *oppositi*: & quidem u dicitur *oppositus externus*, z vero *oppositus internus* ipsius y.

DEFINITIO XXXVII.

70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*. Tab. I. Fig. 13.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54), atque arcui AD insistit (§. 56).

DEFINITIO XXXVIII.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

Co-

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 13. 73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 39), atque arcui AD insistit (§. 41, 56); consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO XXXIX.

Tab. I. Fig. 14. 74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Insistit ergo arcui HI (§. 41, 56).

DEFINITIO XL.

Tab. I. Fig. 3. 76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO XLI.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLII.

Tab. I. Fig. 11. 78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit rectum angulum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65), & contra.

DEFINITIO XLIII.

Tab. I. Fig. 9. 80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. Fig. 12. 81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat.

COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLV.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor. Tab. I. Fig. 15.

DEFINITIO XLVI.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta, absolute considerata, *dicuntur* punctis opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191), *qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt* (§. 224); *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur.*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLIX.

88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia. Tab. I. Fig. 16.

DEFINITIO L.

89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet. Tab. I. Fig. 17.

DEFINITIO LI.

90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia. Tab. I. Fig. 18.

DEFI-

DEFINITIO LII.

Tab. I. Fig. 19. 91. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est.

DEFINITIO LIII.

Tab. I. Fig. 20. 92. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO LIV.

Tab. I. Fig. 16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

Tab. I. Fig. 19. 95. *Hypothenusa* ML est latus, in triangulo rectangulo, angulo recto K oppositum.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* sunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli fuerint recti; *obliquangula*, si obliqui.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. Fig. 21. 98. *Quadratum* ABDC est figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LX.

Tab. I. Fig. 22. 99. *Rhombus* EFHG est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LXI.

Tab. I. Fig. 23. 100. *Rectangulum*, sive *oblongum*, MLKI est figura quadrilatera, rectangula, latera opposita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ est figura quadrilatera, obliquangula, latera opposita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens. Tab. I. Fig. 24.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS est figura quadrilatera, non parallelogramma. Tab. I. Fig. 25. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera opposita sunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum basium* dici solet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iisdem dicitur.

DEFINITIO LXV.

104. *Figura polygona*, seu *multilatera*, ABCED, vel FGHKI, est, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Tab. I. Fig. 26. 27. Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex, *Hexagonum*; si septem, *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur,

cuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. Fig. 24. 111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab. I. Fig. 19. 112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet, pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXIV.

Tab. I. Fig. 19. 114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositi.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit; tumque *Circulus figuræ* dicitur *circumscriptus*. Tab. VI. Fig. 10.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura abcde* dicitur *Circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant; tumque *Circulus figuræ* dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*; & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent; adeoque similia sunt (§. 24 *Arith.*)

CAPUT II.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 28. 121. *A Dato puncto* A *ad datum punctum* B *lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta Tab. I. Fig. 28.

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam

Tab. I. Fig. 28. graphio HI, penna, aut plumbagine.

II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum, creta vel cerussa delibutum, punctis datis A & B apprimatur, &, medio digitis prehenso, sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo

Tab. I. Fig. 29. Recta designatur per baculos LK in punctis datis, beneficio libellæ M, ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium, aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION I.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis, & his similibus familiare vitium.*

SCHOLION II.

123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod, anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra, præsertim duriore, defigi queant.*

SCHOLION III.

124. *Utendum vero est atramento, non communi, sed Sinico: tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA II.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium, vel plures, in eadem recta cum iis insigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in *Opticis*.

PROBLEMA III.

126. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus sit necesse est mensura (§. 23). Nimirum, pro lineis in charta datis, abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo; vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes, & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes, & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis; Tab. I. Fig. 30.

I. In charta,

1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, ex. gr. in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem mensuræ alterum attingat, ex. gr. 5. Erit linea AB, 1° 5′.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121), &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Fu-

2. Funis cannabinus, aut catena, mensuram largiens, ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 238): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes, atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION I.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem* Tab. I. *recta continuo collocatis (§. 125). Notandum* *Fig.* 31. *tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi, atque annulorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ, eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipso B defigi poterit. Parantur* Tab. I. *autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus,* *Fig.* 32. *earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.*

SCHOLION II.

128. *Si pertica circa alterum sui extremum, tanquam centrum, per quadrantem circuli elevata, & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in Scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION III.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt.* SCHWENTERUS (a) *autor est, cum aliquando exercitiis geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat* 16 *pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes* 15 *rediisse. Ut igitur hi navi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, &, postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas. Ne autem fu-* Tab. I. *nis humum contingat, sustentaculum Z ipsi* *Fig.* 33. *supponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo, vel pondere plumbeo constat.*

PROBLEMA IV.

130. *Data longitudine lineæ, in mensura ex. gr.* Parisina; *invenire eandem in mensura alia, ex. gr.* Londinensi, *cujus ad priorem nota est ratio.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. linea data 186 pedum *Parisinorum*, quæritur quot eadem sit pedum *Londinensium?* Quoniam pes *Londinensis* est ad *Parisinum*, ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311 *Arithm.*):

135 : 144 = 186 26784 ($198\frac{54}{135}$ ped. *Londin.*

```
      186      135) 135::
      ---           -----
      864           1328:
     1152           1215:
     144            -----
     -----           1134
     26784           1080
                     ----
                       54
```


(a) *Geometr. pract.* lib. 1. Tract. 1. p. 381.

PROBLEMA V.

Tab.II. Fig.34. **131.** *Ex dato quovis centro* C, *dato radio quocunque* AC, *Circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C, & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C, ita crus alterum peripheriam designabit (§. 37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur; radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga, sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION I.

Tab.II. Fig.35. 132. *Si fune aut filo utimur, cavendum est ne stylus FA, quo peripheria designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF = 3, AE = 4 & FE = 5. Ratio patet per Theorema* Pythagoricum *infra demonstrandum,* (§. 417).

SCHOLION II.

Tab.II. Fig.37. 133. *Circini, ut instrumenta geometrica reliqua, ex orichalco parantur, ob durabilitatem, tractabilitatem, & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus describendis inservit, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione rursus delendi. Longitudo vel 3, vel 6 digitorum esse solet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA I.

135. *Diameter* AE *dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum, in duas partes æquales.* Tab.II. Fig.2.

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*); consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE, [producta, si opus sit, (§. 21)] ex assumto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

137. *Si ex centro* C *duorum circulorum concentricorum ducantur radii* CDA *&* CEB; *tum arcus* DE *&* BA *ad peripherias, tum sectores* DCE *&* ACB *ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.* Tab.II. Fig.34.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici, *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 44), & arcus

Tab.II. *Fig.*34. arcus AB atque DE, itemque ſectores ACB & DCE deſcribantur, radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus iſti atque ſectores eodem modo determinantur (§. 119); conſequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes ſimiles ſunt (§. 120); adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB, intra crura ejuſdem anguli ACB ex ejus vertice C deſcripti, ſint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad ſuas quoque peripherias eandem rationem habent; conſequenter inter ſe ſunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipſi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æſtimatur per rationem arcus ex vertice intra crura deſcripti ad totam peripheriam (§. 58); perinde eſt, quocunque radio arcus iſte deſcribatur (§. 137).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, ſive crura producantur, ſive minuantur.

THEOREMA III.

Tab.II. *Fig.*46. 141. *Angulorum æqualium* A *&* a *menſuræ* BC *&* de *ſunt arcus ſimiles: & contra, ſi angulorum* A *&* a *menſuræ* BC *&* de *ſimiles ſunt; anguli æquales ſunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuſcunque A vel *a* quantitas æſtimetur per rationem arcus BC, vel *de*, ex vertice A, vel *a* intra crura deſcripti, ad integram peripheriam (§. 58); ſi A = *a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias ſuorum circulorum eadem eſſe debet; conſequenter cum ſint partes ſuarum peripheriarum (§. 41), ſimiles ſunt (§. 170 *Arithm.*) *Quod erat unum.* Tab.II. *Fig.*46.

Si arcus BC, & *de*, menſuræ angulorum A, & *a* (§. 57), fuerint ſimiles; ad peripherias, quarum partes ſunt (§. 41), eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æſtimetur (§. 58), eadem omnino eſſe debet, hoc eſt, anguli æquales ſunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus ſimiles eandem rationem habeant ad peripherias, quarum ſunt partes (§. 170 *Arithm.*); ſi fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales ſunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo menſuræ angulorum æqualium fuerint partes ejuſdem peripheriæ, vel æqualium peripheriarum; æquales ſunt (§. 141); & contra.

THEOREMA IV.

143. *Anguli recti* KLM *menſura eſt quadrans circuli.* Tab. I. *Fig.* 11.

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L ſuper recta NM deſcribi poſſit ſemicirculus (§. 136); angulorum x & o menſuræ AC & CB junctim ſumtæ conficiunt ſemicirculum (§. 57). Ergo unius menſura eſt dimidius ſemicirculus, hoc eſt circuli quadrans (§. 142). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141); & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THEOREMA V.

Tab. I. Fig. 6. 147. *Duo anguli deinceps positi*, x *&* y, *aut quotcunque ad idem punctum* E *super eadem recta* CD *constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra: si* x *&* y *fuerint duobus rectis æquales;* CE *sita est in directum ipsi* ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita; recta quædam alia, veluti EA, ipsi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o+y$ & x erunt deinceps positi (§. 62), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque $o+y+x=y+x$ (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.* Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inaccessum, vel obtusum, Quadrante metiri jubemur, & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris, & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA VI.

152. *Angulum metiri.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57); totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope Semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta,

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

2. Gra-

Tab.II. 2. Gradus, in arcu DE inter crura
Fig.36. anguli AC & CB intercepto, numerantur.

Tab.II. II. In Campo,
Fig.38. 1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula instrumento indicat, notatur.

SCHOLION I.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur*, Instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro, quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION II.

154. *Diameter Transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero Instrumentorum goniometricorum unius pedis, aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In Transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo Instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum Transportatorio non multo minorem diametro ejus Instrumenti, quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA VII.

155. *Data quantitate anguli, ipsum* Tab.II.
describere. *Fig.36.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ducatur recta CB, &

2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum Instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.

4. Ducatur recta CA, per C & D.

Erit ACB angulus quæsitus (§. 141).

II. In campo, Tab.II.

1. Collocetur Instrumentum goniometricum, ut in Probl. præc. (§. 152). *Fig.38.*

2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.

3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

156. *Si recta* AB *alteram* CD *secet* Tab.I.
in E; *anguli verticales*, x *&* o, *item* y *Fig. 6.*
& E, *sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=180^\circ \\ y+o=180^\circ \end{array}\right\} \text{(§. 148)}$$

Ergo $x+y=y+o$ (§. 87 *Arithm.*) adeoque $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse $y=$E. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo, aut alio in casu, angulum inaccessum x metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

SCHO-

SCHOLION.

158. *Cum Tyrones sub initium studii mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras, per data ex hypothesibus Theorematum assumta, construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare* (§. 126, 152) *juvat: ita sensus & veritas Propositionis elucescit, & animus ad Demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In Demonstratione magis acquiescunt Tyrones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto; non secus ac Theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoris consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA VII.

Tab. I. Fig. 6. 159. *Omnes anguli* x, y, o, E, *&c. circa punctum aliquod* E *constituti, sunt æquales quatuor rectis.*

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E, vertice communi angulorum x, y, o, E, &c. (§. 54) intervallo quocunque Ea circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum x, y, o, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 57). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli, circa idem punctum constituti, junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA VIII.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro, quoniam quæ sibi mutuo congruunt eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15 *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum, *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent; consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

163. *Si linea lineæ congruit; singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§. 11). Ergo si lineæ congruunt; non modo puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§.39); consequenter circuli ipsi congruere debent (§.3).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto, eodem radio, circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA XI.

Tab.II. Fig.39. 166. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius* a *ponatur super verticem alterius* A, *præterea crus illius* ac *super crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet.*

DEMONSTRATIO.

Si negas; necesse est ut *ab*, vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus D*f* (§.131): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§.39). Ergo, in casu priore, *De* mensura anguli *bac* minor; in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§.20 *Arithm.*). Quod utrumque cum sit absurdum (§.142); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. I. Fig.9. 167. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *supra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *æqualis est.*

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A, intra crura AD & AE, arcus DE (§.131); erit is mensura anguli DAE (§.57). Sed quoniam crura DA & DE supra crura alterius anguli AB & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (§. *cit.*); consequenter DAE = BAC (§.142). *Q. e. d.* Tab. I. Fig.9.

THEOREMA XIII.

168. *Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congrunt.* Tab.II. Fig.40.

DEMONSTRATIO.

Est *ab* = AB, *per hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ AB (§.17). Ergo *ab* ipsi AB congruit (§.162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§.3, 11).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt; singula puncta unius erunt in recta altera (§.162); atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§.39), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§.168); consequenter etiam circuli congruere debent (§.164); atque adeo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§.161).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habentis; minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§.20 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 88, 89); Theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEOREMA XX.

Tab. I. Fig. 16. **186.** *In triangulo æquilatero* ABC *omnes anguli sunt inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AC=CB (§. 88); ergo A=B (§. 184). Est vero etiam AC=AB (§. 88); ergo C=B (§. 184). Quare A=C (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA XXI.

Tab. III. Fig. 55. **188.** *Si trianguli* ABC *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DAB *major quolibet interno opposito* B, *vel* C.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB, bifariam divisa in F, ductaque recta CF, producenda in G (§. 21) donec fiat FG=FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit $z = y$ (§. 156); consequenter $o = x$ (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arithm.*); ergo & DAB > x (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. III. Fig. 57. **189.** *In omni triangulo* ABC, *latus majus* AC *opponitur majori angulo* B; *minus* AB *minori* C; *& contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20 *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 121): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), adeoque $o = x$ (§. 184). Sed o > C (§. 188). Ergo x > C (§. 89 *Arithm.*); consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.* Tab. III. Fig. 57.

Sit B > C, *per hypoth.* Si non sit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB; adeoque in casu primo B = C (§. 184), in altero B < C, *per demonst.* Sed cum utrumque hypothesin evertat, absurdum est. Consequenter si angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

190. *In omni triangulo* ABD, *duo latera* AD *&* BD *simul sumta sunt tertio* AB *majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD = DC, adeoque AC = AD + DB (§. 88 *Arithm.*): erit △BDC æquicrurum (§. 89) & hinc y = C (§. 184). Cum vero sit $y < x + y$ (§. 84 *Arithm.*), erit etiam C < $x + y$ (§. 89 *Arithm.*). Quare AC, seu AD + DB > AB (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

191. *Linea recta* AB *est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos* A *&* B *continentur.* Tab. I. Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC + CB > AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit AD + DC > AC & CE + EB > CB (§. *cit.*), consequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (§. 90 *Arithm.*), adeoque

Tab. I. *Fig.* 1. que multo magis AD + DC + CE + EB > AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant; erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est, omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ab B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15, 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

PROBLEMA IX.

Tab.II. *Fig.*42. 194. *Metiri distantiam duorum locorum* A *&* B *ex eodem tertio* C *accessorum.*

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur, ope funis & catenæ, ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* tranferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ *ab* (§. 126). Dico, *ab* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192). Quoniam vero A*a* & B*b* sunt lineæ rectæ, *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 50),

erit $x = y$ (§. 156).

Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per constr.*

Ergo $ba = AB$ (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in C, investigetur quantitas anguli *x* (§. 152). Tab.II. *Fig.*42.
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB, cum angulo intercepto *x*, construatur juxta Scalam geometricam modicam triangulum *acb* (§. 180).
4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Est enim $acb = ACB$, & $ac : cb = AC : CB$, *per constr.* consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis *cb* & *ab* in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In mensula geometrica, in D horizontaliter collocata, assumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam Tab.II. *Fig.*43.
2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat; ducaturque in hoc regulæ situ recta *cb*.

Tab.II. Fig.43. 3. Similiter collineatio fiat in punctum A, ducaturque *c a*.

4. Investigetur longitudo rectarum *c*A & *c*B (§. 126) &

5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex *c* in *a* & *b*.

6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

Tab.II Fig.42. 195. *Quodsi angustia spatii non permittit, ut integræ* AC *&* BC *in* a *&* b *transferantur; poterunt* aC *&* bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ *&c. ipsarum* AC *&* BC: *quo in casu, eodem modo ut in resolutione secunda, demonstrabitur, esse* ab $=\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipsius* AB.

SCHOLION II.

196. *Notent Tyrones artificium, quo demonstrationes geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed & proprio marte invenire possunt. Nimirum quicquid, vel ex constructione Problematis, aut hypothesi Theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur; veluti in Demonstratione prima præsentis, quod* x = y aC = AC *&* bC = BC. *Quo facto, dispiciatur cujusnam Theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius Theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod* ab = AB. *Cum vero maxima Demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum Theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA XXV.

197. *Si ex punctis extremis* C *&* O *rectæ alicujus, radiis* CP *&* PO, *qui junctim sumti recta* CO *majores sunt, describantur circuli, ii se mutuo secabunt.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Sit CP < CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arithm.*), adeoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C, radio CP, circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 92 *Arithm.*). Sed PO = MO (§. 40 & *per demonst.*). Ergo NO < MO (§. 89 *Arithm.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA X.

198. *Super data recta* AB *triangulum æquilaterum construere.* Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro, intervallo ipsius AB, describatur arcus *y*, &
2. Ex B, eodem intervallo, alius *x* (§. 131), qui priorem in C intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB:

Erit ACB triangulum æquilaterum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 16. Etenim AC = AB, & BC = AB (§. 40). Ergo AC = BC (§. 87 *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§ 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. *Data basi* DE, *& crure* DF, *quod illa dimidia majus sit; triangulum æquicrurum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 17. 1. Ex uno basis extremo D, intervallo cruris dati DF, describatur arcus, &

2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF+EF > DE, *per hypoth. & constr.* priorem in F intersecabit (§. 197).

3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121). Dico DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per constr.* Ergo EDF est triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF, totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *d f e* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df : de* (§. 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA XXVI.

Tab. II. Fig. 45. 202. *Duo semicirculi* CLE *&* DGF *nonnisi in puncto unico* G *se mutuo secare possunt.*

DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea se etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG; BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL = BG (§. 40); erit BGL = BLG (§ 184). Sed BGL > AGL (§. 84 *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 89 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40); AGL = ALG (§. 184). Quare BLG > ALG (§. 89 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 45.

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA XXVII.

204. *Si in duobus triangulis* ACB *&* a c b, *fuerit* AC = a c, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A, radio AC, descriptus concipiatur arcus *y*, & ex centro B, radio BC, alius *x* (§. 131). Concipiamus porro △*acb* ita poni supra △ACB, ut punctum *a* super A, & recta *ab* super AB, cadat. Quoniam *ab* = AB, *per hypoth.* punctum *b* super B cadet (§. 169). Et quia *ac* = AC, & *bc* = BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 173); consequenter punctum *c* super C cadet (§. 202), & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 170). Quare *a* = A,

b = B,

Tab.II. Fig.41. $b = B$, $c = C$ (§. 167); cumque $\triangle acb$ alteri ACB congruat (§. 3), $\triangle acb$ $=$ & $\backsim$ $\triangle$ ACB (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig.18. 205. *Datis tribus lateribus* AB, BC, CA, *quorum duo simul sumta* AC *&* BC *tertio* AB *majora sunt; triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A, intervallo ipsius AC, describatur arcus y, &
2. ex B, intervallo ipsius BC, arcus alius x (§. 131), qui ob AC+BC $>$ AB *per hypoth.* priorem in C secabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AB & BC (§. 121). Ita factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare si, in duobus triangulis ACB & acb, fiat AC : AB $=$ $ac : ab$, AC : BC $=$ $ac : bc$; triangula eodem modo determinantur (§. 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175, 109).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. Fig.46. 208. *Angulo dato* DAE *æqualem* bac *constituere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex A, intervallo AC, describatur arcus BC, erit AB$=$AC (§. 40).
2. Ducatur recta $ac$$=$AC, & ex a, intervallo ipsius AB, describatur arcus x; item
3. Ex c, intervallo ipsius CB, alius y, qui ob AB$+$BC $>$ AC (§. 190), seu $ab + bc > ac$ (§. 190), priorem in b intersecabit (§. 197). Tab.II. Fig.46.
4. Ducatur recta ab (§. 121). Dico esse $a = $A.

II. In Solo,

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In a & c defigantur baculi, ea lege ut sit $ac = $ AC.
3. Ad eos funis, vel catena, ita applicetur, ut pars ipsius $ab$$=$AB, & altera $cb$$=$CB fiat.
4. In b defigatur baculus. Dico esse $bac$$=$BAC.

Interdum etiam in Solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu $ac$$=$AC, $ab$$=$AB, $cb$$=$CB, *per construct.* Ergo bac $=$BAC (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum* HIK *in duas partes æquales dividere.* Tab.II. Fig.47.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur, radio quocunque, arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M, intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121). Dico esse HIN $=$NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL$=$IM (§. 40), LN$=$MN, *per constr.* IN $=$ IN. Ergo HIN $=$NIK (§. 204). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XV.

Tab.II. Fig.50. 210. *Lineam rectam* AB *in duas partes aequales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,
1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore, ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121).
Dico esse AE = EB.

DEMONSTRATIO.

Tr. ACB est aequicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis est (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.II. Fig.51. 1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineae attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo,
1. Filum longitudini lineae AB aequale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineae datae rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA XVI.

212. *Ex puncto* G *in recta* ML *data perpendicularem* GI *excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta,
1. Posito circino in G, arbitrario intervallo resecentur utrinque partes aequales GK & GH. Tab.II. Fig.49.
2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat intersectio in I (§. 197).
3. Ducatur recta GI (§. 121), quae erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH, & KI = IH, *per construct.* IG = IG. Ergo anguli ad G sunt aequales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Normae, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat. Tab.II. Fig.52.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quae erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normae est rectus, *per hypoth.* Sed ipsi aequalis est IGL (§. 167): ergo IGL est itidem rectus (§. 145), adeo-

adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab.II. II. In Solo,

Fig.52. Norma utimur majore, & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab.II. 1. Filum KIH, in duas partes æquales

Fig.49. in I divisum, ex punctis K & H extenditur &

2. In I baculus defigitur, tandemque

3. KH bifariam secatur in G (§. 210).

Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, & KG=GH, *per construct.* & GI = GI; anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204); consequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. Fig.53. **213.** *Ex uno puncto* D, *super eadem recta* AB, *nonnisi perpendicularis unica* CD *erigi potest in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit prætereа DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD *per hypoth.* ADC similiter rectus est (§. *cit.*); consequenter ADE=ADC (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q.e.d.*

THEOREMA XXIX.

Tab. III. Fig.53. **214.** *Si recta* CD *perpendicularis ad* DE *continuetur in* F, *erit etiam* DF *ad* DB *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus x rectus est (§. 78). Ergo y similiter rectus est (§. 65, 145), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.* Tab. III. Fig.53.

THEOREMA XXX.

215. *Si duo puncta* H *&* Q *alicujus rectæ* HI *a duobus punctis* K *&* L *alterius rectæ* MN *utrinque æqualiter distent; erit* HI *ad* MN *perpendicularis.* Tab. III. Fig.54.

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK=HL & QK=QL (§. 192). Est vero etiam QH=QH. Ergo $o=x$ (§. 204); consequenter cum HI=HI, anguli ad I æquales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

216. *A dato puncto* H *ad rectam* MN *perpendicularem* HI *demittere.* Tab. III. Fig.54.

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in H, intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.

2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197).

3. Ducatur per Q recta HI (§. 121).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KQ=LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§. 192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat. Tab. II. Fig.52.

2. Du-

Tab. II. 2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad
Fig. 52. ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est quæ in casu simili Problematis 16 (§. 212).

II. In Solo,

Tab. III. Aut utimur norma majore, ut in Probl. 16, aut

Fig. 54. 1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur. (§. 125).

2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per construct.* HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab. III. Fig. 56. 217. *Ab uno puncto* H, *ad eandem rectam* LM, *non nisi unica perpendicularis* HI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit o rectus (§. 78). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit x quoque rectus (§. *cit.*). Est vero $o \triangleright x$ (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

218. *In omni triangulo rectangulo* HIK *angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui* H *&* K *sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 79). Sed y Tab. III.
$\triangleright m$, item $y \triangleright$ H (§. 188). Ergo
K & H sunt recto minores, adeoque Fig. 56.
acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 95, 189).

THEOREMA XXXIII.

221. *In triangulo obtusangulo* PNO Tab. I.
angulus obtusus nonnisi unicus est, reli- Fig. 20.
qui P *&* O *sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

$y + x = 2$ rectis (§. 147). Sed y, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§. 66). Ergo x recto minor. Quoniam vero $x \triangleright$ O, item $x \triangleright$ P (§. 188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

PROBLEMA XXXIV.

224. *Linea perpendicularis* HI *est* Tab.
brevissima omnium, quæ a puncto H III.
ad eandem rectam LM *duci possunt.* Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM, *per hypoth.* angulus x rectus est (§. 78), adeoque HK hypothenusa (§. 95), consequenter HK $\triangleright$ HI (§. 220). *Q. e. d.*

Corollarium I.

225. Ergo distantia puncti a linea, vel plano, est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

Corollarium II.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia, & contra (§. 81).

Corollarium III.

227. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 115).

Corollarium IV.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

Corollarium V.

Tab. I. Fig. 21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98, 100), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod si ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114), consequenter AC vel KL altitudo (§. 227).

Theorema XXXV.

Tab. III. Fig. 58. 230. *Si* HI *fuerit parallela &* BA *perpendicularis ad* KL; *erit eadem* AB *etiam perpendicularis ad* HI.

Demonstratio.

Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE=CD (§. 226), & E=D (§. 78, 145); consequenter BG=BC & $y=u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (§. 79). Ergo & $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Quare cum porro sit AB=AB; erit & $m=n$ (§. 179), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 58.

Corollarium.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81).

Theorema XXXVI.

232. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *sunt etiam parallelæ inter se, & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 59.

Demonstratio.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (§. 214, 230). Ergo GH=KL & HI=LM (§. 226); consequenter GH+HI=KL+LM (§. 88 *Arithm.*) hoc est, GI=KM (§. 86, 87 *Arithm.*); adeoque AB parallela ipsi EF (§. 226). *Quod erat unum.*

Posterius patet per prius.

Theorema XXXVII.

233. *Si duas parallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H; *erunt* 1°. *anguli alterni* y *&* u *æquales;* 2°. *angulus externus* x *æquatur interno opposito* u; 3°. *duo interni oppositi* o *&* u *sunt æquales duobus rectis.* Tab. III. Fig. 60.

Demonstratio.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifesta sunt per Theorema 35 (§. 230). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21) donec fiat IM=GI & KL=HK.

1°. Quo-

Tab. III. Fig. 60. 1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD, *per construct.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM, *per constr.* & HI = IH. Ergo GH = HM, & $u = z$ (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG = GL, & $y = t$. Quamobrem & GL = HM (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88 *Arithm.*), hoc est, HL = GM (§. 86 *Arithm.*) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$, & $u = z$ *per demonstrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15 *Arithm.*), hoc est $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2°. $x = y$ (§. 156), & $u = y$ (*per num.* 1). Ergo $x = u$ (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3°. $x + o = 180°$ (§. 148). Sed $x = u$ (*per num.* 2). Ergo $u + o = 180°$ (§. 15 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. II. Fig. 41. 234. *Datis duobus lateribus* AB *&* BC, *cum angulo* A *uni eorum* BC *opposito; triangulum* ABC *construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B, intervallo alterius lateris dati BC, crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). *Sic factum est, quod petebatur.*
4. Quod si BC < BA; aut bis secabit crus AC, aut idem tangit; adeoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 309), in priore constare debet, utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus. Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque angulo uni eorum opposito, triangulum construi possit; iis datis, reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & *abc*, fuerit AB = *ab*, BC = *bc*, & A = *a*; erit etiam AC = *ac*, B = *b*, C = *c*, & △ABC = △*abc*.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse quæ per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales quæ ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM II.

237. Quodsi in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis ABC & *abc*, fuerit A = *a* & AB : BC = *ab* : *bc*, triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam B = *b*, C = *c*, BC : CA = *bc* : *ca* & CA : AB = *ca* : *ab* (§. 175).

THEOREMA XXXVIII.

238. *Perpendicula* KH *&* GI *æquales parallelarum partes* KG *&* HI *intercipiunt.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230, 226), $u = y$ (§. 233), & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

Tab. III. Fig. 61. 239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppositis* y *&* z *simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$, & $o = z$ (§. 233); consequenter DCA $= x + o = y + z$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XL.

240. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147). Ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. I. Fig. 19. 241. In triangulo igitur rectangulo MKL, duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si triangulum fuerit æquicrurum (§. 184).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus est obtusus; duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 16. 243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus 60°, nimirum 180 : 3. (§. 186).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; &, si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

247. In quovis triangulo anguli ad basin *y* & *z* junctim sumti sunt duobus rectis minores. Tab. III. Fig. 61.

COROLLARIUM VIII.

248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basin *y* & *u* æquales sunt (§. 184); si angulus ad verticem F subtrahitur a 180°, & residuum bisecatur; unus angulorum æqualium *y* vel *u* prodit. Similiter, si duplum anguli unius ad basin *y* a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab. I. Fig. 17.

PROBLEMA XIX.

249. *In extremitate* F *lineæ* FG *perpendicularem* FH *excitare.* Tab. III. Fig. 62.

RESOLUTIO.

1. Super FG construatur △ æquilaterum FIG (§. 198).
2. Producatur GI in H (§. 21), donec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG est æquilaterum, *per constr.* $o = 60°$ & $u = 60°$ (§. 243). Ergo $y = 120°$ (§. 239); consequenter ob FI = HI *per constr.* $x = 30°$ (§. 248). Cum adeo $x + o = 90°$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab. III. Fig. 63. 250. *Si recta* DE *secet rectam* AB *in* C; *non alibi eandem denuo secabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, ex. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170), atque adeo eam non secat (§. 50): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

Tab. II. Fig. 41. 251. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc, *fuerit* AB=ab, A=a *&* B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c, *&* △ ACB= *&* ∽ △ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *b*=B, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC & *bc* super BC (§. 166); consequenter *c* super C (§. 250) cadit. Cum adeo △ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac*=AC, *bc*=BC, *c*=C (§. 177), & △ *abc*= & ∽ △ ABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 246), consequenter AC = *ac*, AB = *ab* & △ ACB = & ∽ △ *acb* (§. 251).

THEOREMA XLIII.

Tab. II. Fig. 44. 253. *Si in triangulo* DFE *anguli ad basin* u *&* y *æquales; triangulum est æquicrurum.*

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Est ergo △ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 44.

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88).

THEOREMA XLIV.

255. *Si duas lineas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H, *ita ut vel* 1°. y = u; *vel* 2°. x = u; *vel* 3°. o + u = 180°; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit K=I (§. 78, 145). Est vero & *y*=*u*, *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK =GI (§. 252); consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2. *x*=*u*, *per hypoth.* *x*=*y* (§. 156). Ergo *y*=*u* (§. 87 *Arithm.*); consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat secundum.*

3. *o*+*u* = 180°, *per hypoth.* Sed *o*+*x* = 180° (§. 147). Ergo *u*=*x* (§. 87 *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

256. *Si duæ lineæ* EG *&* AB *fuerint perpendiculares ad eandem tertiam* HI; *erunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 58.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 58. Fiat AB $=$ EG, ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81); consequenter EB $=$ GA (§. 238). Quare cum etiam sit GB $=$ GB; erit EGB $=$ ABG (§. 204); consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 64. 257. *Parallelæ* DF *&* GA *inter easdem parallelas* FA *&* DG *sunt æquales. Et contra, si* DF *&* GA *fuerint parallelæ & æquales; erit etiam* FA *ipsi* DG *parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233). Quare cum AD $=$ AD, erit DF $=$ GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF $=$ AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth.* $o = u$ (§. 233). Quare cum etiam sit DA $=$ DA, erit $x = y$ (§. 179); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), adeoque etiam æqualis, *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

Tab. III. Fig. 65. 258. *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA $=$ KV (§. 212).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 226).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur. Tab. III. Fig. 65.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255).

Aliter.

Ex modo præcedente enatus est sequens. Tab. III. Fig. 66.

1. Triangulum rectangulum AVN, ex ligno ebenino aut alio Indico paratum, ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ, basis VN, ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum Tab. III. Fig. 67.

1. Re-

Tab. III. Fig. 67. 1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.

2. Altera ad datum punctum V adducatur, &

3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur; quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG=FH, EF=GH, *per constr.* & EH=EH, erit $o=x$ (§. 204); adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG, & RS ipsi FH parallela, *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232). *Q. e. d.*

II. In campo,

Tab. III. Fig. 68. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Ad V fiat $o=x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 125), ipsi RS parallela (§. 255).

Aliter.

1. In punctis K & I defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Fiat $u=x$ (§. 208), & TA=VK.

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x=u$, *per constr.* erit TA parallela ipsi KV (§. 255); consequenter $z=y$ (§. 233). Est vero etiam TA =KV, *per construct.* & TV=TV. Ergo $m=n$ (§. 179); consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præsens remedium attulit* Jacobus LEUPOLDUS, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEOREMA XLVII.

260. *Per idem punctum* C *eidem rectæ* DE *parallela nonnisi unica* AB *duci potest.* Tab. III. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem secans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), consequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum sit absurdum (§. 218), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. *Q. e. d.*

Aliter.

Angulus NCH=NQD & NCA =NQD (§. 233). Ergo NCH=NCA (§. 87 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), HG & AB non sunt simul ipsi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVIII.

261. *Si recta* NO *secet duas rectas alias* HG *&* DE *in* C *&* Q, *ita ut duo* Tab. III. Fig. 69.

Tab. III. Fig. 69. *duo anguli interni oppositi* HCO *&* DQN *fuerint simul sumti duobus rectis majores; lineæ* GH *&* ED *versus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores, *per hypoth.* Ergo HCO $>$ ACO (§. 92 *Arithm.*); consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR $=$ CF (§. 226), consequenter PS $>$ PR (§. 84 *Arithm.*) $>$ CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225), adeoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

262. *Si duas rectas* HG *&* DE *secet transversa* NO *in* C *&* Q, *ita ut anguli* GCO *&* EQN *simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ* CG *&* QE *versus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores, *per hypoth.* Ergo GCO $<$ BCQ, (§. 92 *Arithm.*); consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF $=$ IL (§. 226); consequenter IK $<$ IL (§. 84 *Arithm.*) $<$ CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§. 262), versus oppositam divergunt (§. 261).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta* AB, *& angulis adjacentibus* A *&* B, *qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum* ABC *describere.* Tab. I. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250, 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una, datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat $A = a$, & $B = b$; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120). Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit $A = a$, & $B = b$; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam $C = c$ (§. 246); hoc est, △△ ACB & *acb* sibi mutuo æquiangula (§. 109).

(§. 109). Quare △△ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 296), & hinc latera homologa, seu æqualibus angulis opposita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 70. 268. *Si in triangulo* ABC *recta* DE *basi* AC *parallela ducatur; segmenta crurum cruribus proportionalia sunt; hoc est*, BA : BC = BD : BE = AD : EC; *&* BA : AC = BD : DE; *atque* △ BDE ∽ △ BAC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x = y$, & $o = u$ (§. 233); adeoque △BDE ∽ △BAC, & BA : BC = BD : BE, & BA : AC = BD : DE (§. 267). Ergo & BA : BD = BC : BE (§. 173 *Arithm.*); consequenter AD : BD = EC : BE (§ 193 *Arithm*), seu BD : AD = BE : EC (§. 169 *Arithm.*), vel denique BD : BE = AD : EC (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LI.

Tab. III. Fig. 71. 269. *Recta* FH, *angulum* GFE *bifariam secans, basin* GE *cruribus adjacentibus* EF *&* GF *proportionaliter secat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI = FG, erit $o + x = y + u$ (§. 239). Sed $o = x$, *per hypoth.* & $y = u$ (§. 184), adeoque $2y = 2o$ (§. 15 *Arithm.*). Ergo $o = y$ (§. 94 *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268) = GF : GH (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173 *Arithm.*); consequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 *Arithm.*); seu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173 *Arithm.*); hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 71.

PROBLEMA XXII.

271. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.* Tab. III. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus x ipsi ABC æqualis (§. 208).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$, *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC data tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM II.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arithm.*).

PROBLEMA XXIII.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.* Tab. IV. Fig. 73.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, ex. gr. 5.

2. Super

Tab. IV. Fig. 73. 2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 198).

3. Ex E in a transferatur recta AB, itidemque ex E in b.

4. Ducatur recta ab: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico esse $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{5} AB$, $a2 = \frac{2}{5} AB$, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$, & $EC = ED$, *per construct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$. (§. 168, 173 *Arithm.*). Quare, cum angulus E utrique triangulo ECD & Eab communis sit, erit $EC : CD = Ea : ab$, & $o = x$, (§. 183). Sed $EC = CD$, *per construct.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$, *per demonstr.* erit $a1$ parallela ipsi C1 (§. 255); consequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268), hoc est, ob $EC = CD$, *per construct.* & $Ea = ab$, *per demonstr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168 *Arithm.*). Sed $C1 = \frac{1}{5} CD$, *per construct.* Ergo $a1 = \frac{1}{5} ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{5} AB$, consequenter $12 = \frac{1}{5} AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 74. 275. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta ab secabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C1 = ab : a1$, & $CD : C2 = ab : a2$, &c. (§. 274).

SCHOLION.

276. Corollarii hujus usus amplissimus est in Architectura tam civili, quam militari; præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ.

PROBLEMA XXIV.

277. *Scalam geometricam construere.* Tab. IV. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10 æquales B1, 12, 23, 34, &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F, &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249).
3. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7, &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B1, 12, 23, 34 &c. pedes, 99 digitum unum, 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10} AB$, *per construct.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B1, 12, 23 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 99 est parallela ipsi A9, *per construct.* $C9 : CA = 99 : A9$, (§. 268). Sed $C9 = \frac{1}{10} CA$, *per construct.* Ergo $99 = \frac{1}{10} A9$ (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A9 sit pes, *per demonstr.* erit 99 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHO-

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 75. 278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K; erit intervallum IK = $1^{\circ}\ 4'\ 5''$ & ita porro.

PROBLEMA XXV.

Tab. IV. Fig. 76. 280. *Invenire distantiam duorum locorum* AB, *quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse DC=BA.

DEMONSTRATIO.

Nam BE=EC, $o=x$, *per construct.* & $y=u$ (§. 156). Ergo AB=DC (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 77.
1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse MN=BA.

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Fig. 77. BK=KM, & IK=KL, *per construct.* $o=u$, (§. 156). Ergo IB=ML, & $y=x$ (§. 179). Quare cum sit $o+m=u+n$ (§. 156), & IK = KL, *per constr.* erit IA=NL (§. 251); consequenter AB=NM (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 78.
1. Mensula geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*.
2. Quæratur distantia stationis a loco accesso AC (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica in *ac* transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat, & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.
6. Denique in Scala geometrica capiatur intervallum ipsius *ab* (§. 277).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c=C$, & $a=C$, (*per construct.* & §. 167), erit $ac:ab=AC:AB$ (§. 267), hoc est, iidem numeri rationes $ac:ab$ & AC : AB indigitant (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).
2. Ope Instrumenti transportatorii & Scalæ geometricæ construatur triangulum *acb* (§. 264).

3. Ad

Tab. IV. Fig. 78. 3. Ad Scalam geometricam applicetur recta *ab* (§. 277).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 76. Sine Instrumentis tædiosior est Problematis resolutio, quam ut commendari possit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E assumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).
2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79.

1. Duabus stationibus in C & D electis, in prima C collocetur mensula, & per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.
2. Quæratur distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica transferatur in *cd* (§. 279).
4. Baculo in C defixo, mensula collocetur in D, ea lege ut punctum *d* ipsi D, hoc est puncto in quo defigebatur ante baculus immineat, & per dioptras regulæ ad *cd* applicatæ respicienti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ *da* & *db*.
6. Tandem distantia punctorum *a* & *b* investigetur in Scala geometrica (§. 279).

Dico esse $cd : ab = CD : AB$.

DEMONSTRATIO.

Est enim $cdb = CDB$, & $bcd = BCD$ (*per construct.* & §. 167). Ergo $dc : cb = DC : CB$ (§. 267). Similiter cum sit $acd = ACD$, & $adc = ADC$ (*per construct.* & §. 167), erit $dc : ac = DC : AC$, adeoque $bc : ac = BC : AC$ (§. 196 *Arithm.*); consequenter, ob $acb = ACB$ (*per construct.* & §. 167), $ac : ab = AC : AB$ (§. 183), & ob $dc : ac = DC : AC$ (*per demonstr.*) $dc : ab = DC : AB$ (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 79.

Aliter.

Tab. IV. Fig. 80.

1. Electis duabus stationibus C & D, investigetur quantitas angulorum y & x, item z & w (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).
2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126). &
3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala geometrica transferatur recta *cd* ipsi CD respondens (§. 279).
4. Super ea, ope angulorum x & D, construatur triangulum *bcd*, &, ope angulorum z & C, alterum *acd* (§. 264).
5. Tandem in Scala geometrica investigetur distantia punctorum *a* & *b* (§. 279).

Dico esse $ab : cd = AB : CD$.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente.

SCHO-

SCHOLION I.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

SCHOLION II.

Tab. IV. *Fig.* 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensulæ situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem accessam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

Tab. V. *Fig.* 82. 1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.

2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).

3. Quodsi contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit; propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus est; sin punctum superius; procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.

4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126).

Dico esse CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares, inter se parallelæ sunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268). Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In distantia plurium, ex. gr. 30, 40, & amplius, pedum defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta. Tab. V. *Fig.* 83.

2. Investigetur distantia baculorum GF, & baculi minoris ab altitudine quæsita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).

3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arithm.*).

4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.

Ex. gr. Sit HF = 48′, GF = 20′, GE = 16′, FC = 5′.

```
20 : 16 = 48 | 5) 192 (38 2/5 = BH
 5    4    4 |    15    5   = FC
         192 |    42   43 2/5 = AB
                  40
                   2
```

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sintque BA (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230); adeoque GE & BH parallelæ (§. 256); consequenter GF : GE = HF : HB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF &

Tab.V. Fig.83. & AC (*per constr.* & §. 227); erit FC = HA (§. 226). Quare BH = FC = BH + HA (§. 88 *Arithm.*) = BA (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Fig.84. Tab. IV. Fig.81.

1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipsius FE sit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.
2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur distantia stationis ab altitudine *e*C (§. 126), &
5. Ex Scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod
7. Ad Scalam geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifestat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227), & C*e* ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad C*e* (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256); consequenter *ec* : *cb* = *e*C : CA (§. 268).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. 152), & distantia stationis *e* C (§. 126). Tab.V. Fig.84.
2. Super *ec* in Scala geometrica minore assumta (§. 279) construatur triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim *c* = C, & *e* = E, *per constr.* Ergo *ec* : *cb* = *e*C : CB (§. 267). *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam Instrumenti altitudo, quam ipsa* CB *addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in Instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo* BC *eodem modo investigari potest, quo ipsam* AC *invenimus.*

PROBLEMA XXVIII.

286. *Altitudinem inaccessam* AB *metiri.* Tab.V. Fig.83.

RESOLUTIO.

Sine Instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis CA vel FH quæritur, per Problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in Problemate præcedente (§. 284).

Aliter.

1. Statione in D electa, mensula collocetur ut in Problemate præcedente (§. 234). Tab.V. Fig.85. n. 1.

2. Du-

Tab.V. *Fig.*85. 2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.

n. 1. 3. Baculi in G defixi, ut sit in recta *f*C, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126), &

4. Ex Scala geometrica transferatur in *fe* (§. 279).

5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus, & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat, & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.

7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216): quæ

8. Ad Scalam geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.

n. 2. 9. Quodsi puncta, B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur *eb*, & perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim *fea* & F*e*A, est angulus *afe* = AF*e*, & *aef* = A*e*F, *per construct.* Ergo *fe* : *ea* = F*e* : *e*A (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (*per* §. 227 *& constr.*) adeoque inter se parallelæ (§. 256). Quare *ae* : *ac* = A*e* : AC (§. 268), consequenter *fe* : *ac* = F*e* : AC (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat unum.* Tab.V. *Fig.*85.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per demonstrata*: erit *ae* : *ab* = A*e* : AB (§. 268); consequenter *fe* : *ab* = F*e* : AB (*per demonst. &* §. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli AFC in D, & anguli A*e*C in G; itemque C*e*B in eadem statione G (§. 152).
2. Quæratur distantia F*e* (§. 126).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi C*e*B æqualis (§. 208), & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21).

Dico esse *fc* : *ab* = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LII.

Tab. I. Fig. 5. 287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (*§.* 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (*§. 9 Arithm.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL=CM, & CL=CN (*§.* 40), adeoque CM=CN (§. 87 *Arithm.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

Tab. V. Fig. 86. 288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z secat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z secabit peripheriam illius in E (§. 50); eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit CB=AC, & CE=AC (§. 40); adeoque CB=CE (§. 87 *Arith.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

289. *In eodem vel in æqualibus circulis; chordæ æquales* AB & DE *æquales arcus subtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* BC=CE, & AC=CD (§. 40); angulus ACB=DCE (§. 204); consequenter arcus AB & DE, mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales sunt (*§.* 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales sunt, *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur isti æquales sunt (§. 142). Quoniam porro BC=CE, & AC=CD (*§.* 40); erit quoque AB=DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LV.

290. *Si in circulis inæqualibus arcus* AB & ab *fuerint similes; chordæ cognomines ad suos radios* AC & ac *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* similes sunt, *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & *acb* (§. 57); erit ACB=*acb* (§. 141). Est vero AC : BC=*ac* : *bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo AB : BC=*ab* : *bc* (§. 183). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

Tab.V. Fig.88. 291. *Radius* CE, *chordam* BA *bifariam secans in* D, *etiam arcum bifariam secat in* E; *& ad chordam* BA *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD=DB, *per hypoth.* AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo $o=x$, & $y=u$ (§. 204); consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142): *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 57); erit $y=u$ (§. 142). Est vero etiam AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo AD=DB, & $o=x$ (§. 179); consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AC =CB (§. 40), & hinc $m=n$ (§. 184); consequenter $y=u$ (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142), & AD=DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LVII.

292. *Si recta* NE *chordam* AB *bifariam secet, & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit, & tam arcum* AEB *quam* ANB *bifariam secat.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AD=DB, *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB (§. 179), Tab.V. Fig.88. consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB æquales esse. *Quod erat unum.*

Arcus AN=NB, & AE=EB, *per demonstr.* Ergo NA + AE=NB + BE (§. 88 *Arithm.*); consequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum transit (§. 39). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XXIX.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210): hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXX.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B *&* C *circulum describere.* Tab.V. Fig.89.

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E; itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121). Dico I esse centrum circuli per A, C, & B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B sunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo recta AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad EC perpendicularis; & ED ipsam AC, GH vero BC

Tab.V. Fig.89. BC bifariam secat (§. 210). Ergo utraque per centrum transit (§. 292). Quare, cum DE & GH tantum in I se mutuo secent (§. 250); erit I centrum circuli per puncta data A, C, & B transeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

295. Assumtis in peripheria, vel arcu circuli tribus punctis; centrum inveniri, datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales sunt (§. 161).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116).

THEOREMA LVIII.

Tab.V. Fig.87. 298. *In eodem vel æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *a centro* C *æqualiter distant: & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE a centro C, *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc o & x recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Porro cum AB = DE, *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis *per demonstrata*, ipsam AB; CG vero perpendicularis ad DE, *per demonstrata*, ipsam DE bisecet (§. 291); erit FA = DG (§. 177 *Arithm.*). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 40); erit CF = CG (§. 235). *Quod erat unum.*

Quodsi distantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum sit $o = x$ *per demonstr.* & AC = CD (§. 40); erit AF = DG (§. 235). Sed AF = $\frac{1}{2}$AB, & DG = $\frac{1}{2}$DE (§. 291). Ergo AB = DE (§. 177 *Arithm.*). *Quod erat alterum.* Tab.V. Fig.87.

THEOREMA LIX.

299. *Chordarum maxima est diameter* AB. Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Est enim CO = BC & CN = CA (§. 40). Sed CO + CN > ON (§. 190). Ergo BC + CA, hoc est, BA > ON (§. 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

300. *Si intra triangulum* ACB *supra ejusdem basi* AB *construatur triangulum* ADB; *erunt crura interioris* AD *&* DB *simul sumta minora cruribus exterioris* AC *&* CB *simul sumtis: angulus vero ad verticem interioris* D *major angulo ad verticem exterioris* C. Tab.V. Fig.90.

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC + CE (§. 190); AE + EB < AC + CE + EB (§. 90 *Arithm.*), hoc est, AD + DE + EB < AC + CB (§. 86, 89 *Arithm.*). Sed DB < DE + EB (§. 190). Ergo multo magis AD + DB < AC + CB. *Quod erat unum.*

Quoniam $o > x$, & $u > m$ (§. 188); erit $o + u > x + m$ (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LXI.

301. *Chorda arcus majoris* AB *major est; chorda minoris* AD *minor.* Tab.V. Fig.91.

DEMONSTRATIO.

EB + EC > BC (§. 190), hoc est, quia DE + EC = BC (§. 40), EB + EC

Tab.V. Fig.91. +EC ▷ DE+EC (§.89 *Arithm.*); consequenter EB ▷ DE (§. 92 *Arithm.*). Est vero AE+DE ▷ DA (§. 190). Ergo multo magis AE+EB ▷ DA, hoc est, AB ▷ DA (§. 86, 89 *Arithm.*). *Q. e d.*

THEOREMA LXII.

Tab. I. Fig. 7. 302. *Secantium* MA, MN, ME *ex eodem puncto* M *ductarum maxima est* MA, *quæ per centrum transit: reliquæ sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum* MD, MO, MB *sunt tanto majores, quo magis a centro distant: minima est* MB *secantis* MA *per centrum transentis.*

DEMONSTRATIO.

1. NC+MC ▷ MN (§. 190). Sed NC=CA (§. 40). Ergo MA=CA +CM (§.86 *Arithm.*)=NC+CM (§. 88 *Arithm.*) ▷ MN (§. 89 *Arithm.*) *Quod erat primum.*

2. MO+EO ▷ ME (§. 190). Sed ON ▷ EO (§. 301). Ergo multo magis MO+ON, hoc est, MN (§. 86 *Arithm.*) ▷ ME. *Quod erat secundum.*

3. CO+OM ▷ MC (§. 190). Sed CO=CB (§. 40). Ergo OM ▷ MB (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. CD+DM ▷ CO+OM (§. 300). Sed CD=CO (§. 40). Ergo DM ▷ OM (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIII.

Tab.V. Fig.92. 303. *Si ex puncto* E *intra circulum assumto ducantur in peripheriam rectæ* EF, EB, EG, *&c. item* EA, ED, EH *&c. maxima erit* FF, *quæ per centrum* C *transit: reliquæ* EB, EG *&c. tanto majores, quo maximæ propiores. Contra minima est* EA, *quæ continuata per centrum transit: reliquæ* ED, EH *&c. sunt tanto majores, quo ab ea remotiores.* Tab.V. Fig.92.

DEMONSTRATIO.

1. EC+BC ▷ EB (§.190). Sed BC =CF (§. 40). Ergo EC+BC=EC +CF (§.88 *Arithm.*) hoc est, EF (§. 86 *Arithm.*) ▷ EB (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. EI+GI ▷ GE, & IB+IC ▷ BC (§. 190), hoc est, ob BC=GI+IC (§. 40), IB+IC ▷ GI+IC (§. 89 *Arithm.*), adeoque IB ▷ GI (§. 92 *Arithm.*). Quare EI+IB ▷ EI+GI (§. 90 *Arithm.*); adeoque EI+IB, hoc est, EB (§. 86 *Arithm.*) ▷ GE. *Quod erat alterum.*

3. CE+ED ▷ CD (§. 190), Sed CD=CE+EA (§. 40). Ergo CE +ED ▷ CE+EA (§. 89 *Arithm.*); consequenter ED ▷ EA (§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. EK+KD ▷ ED, & KH+KC ▷ CH (§. 190), hoc est, ob CH=CK +KD (§. 40), KH+KC ▷ KC+KD (§. 98 *Arithm.*), adeoque KH ▷ KD (§. 92 *Arithm.*). Quare EK+KH ▷ EK +KD (§. 90 *Arithm.*); adeoque EK +KH, hoc est, EH (§. 86 *Arithm.*), ▷ ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIV.

304. *Recta* IL *radio* CL *perpendiculariter*

Tab. I. Fig. 3. *lariter insistens tangit circulum in unico puncto* L : *nec inter tangentem* HL & *circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL, *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK > CL (§. 220); consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI, seu HI, extra circulum cadit (§. 40); & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), adeoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypothesi repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor: angulus vero semicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* EUCLIDIS *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter* Jacobum PELETARIUM Cenomani *in Gallia Matheseos Professorem, &* Christophorum CLAVIUM *Jesuitam* Bambergensem: *quorum (a) hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum sustulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem* De angulo contactus & semicirculi *Tractatum, An.* 1656, *conscripsit* WALLISIUS, *qui legitur Operum Vol. II. f.* 605 *& seqq. ubi, cum* PELETARIO, *angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & seqq. Tom. I. Oper.

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest. Tab. I. Fig. 3.

PROBLEMA LXV.

308. *Omnis recta* HI *circulum tangens radio* CL *ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216); hæcque, utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47); consequenter CK > CN (§. 84 *Arithm.*) > CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arithm.*). Est vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

311. *Ducere rectam* HI *circulum in dato puncto* L *tangentem.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. 1. Ex centro circuli C ad punctum
Fig. 3. contactus L ducatur radius CL.

2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVI.

Tab. V. 312. *Arcus* FG *&* HI *inter chordas*
Fig. 91. *das parallelas intercepti sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH & GI *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF — KG = KH — KI, hoc est, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVII.

Tab. I. 313. *Angulus ad centrum* ACD *est*
Fig. 13. *duplus anguli ad peripheriam* ABD, *eidem arcui* AD *insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258); erit EB = DF (§. 312); adeoque $o = x$ (§. 142). Sed $o = y$ (§. 156). Ergo $x = y$ (§. 87 *Arithm.*) $= \frac{1}{2}$ACD. Porro $o = u$ (§. 233). Ergo $u = y = \frac{1}{2}$ACD (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Tab. V. II. In casu altero, $o = 2y$, & $u = 2x$,
Fig. 93. *per cas.* I. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 88 *Arithm.*), hoc est, ABD $= \frac{1}{2}$ACD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Fig. 94. III. In casu tertio, $o + u = 2y + 2x$; *per cas.* I. & $o = 2y$, *per cas.* I. Ergo $u = 2x$ (§. 91 *Arithm.*), hoc est, $\frac{1}{2}$ACD = ABD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LXVIII.

314. *Anguli ad peripheriam* ABD Tab. I.
mensura est arcus dimidius AD, *cui in-* *Fig.* 13.
sistit.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70, 56); adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72, 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313, 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Tab. V.
Ducatur utcunque recta CD: erit ar- *Fig.* 95.
cus dimidius AD mensura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB, *per cas.* I. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.*

III. Sit denique HIK angulus in mi- Tab. V.
nore segmento. Ducatur utcunque *Fig.* 96.
recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL, & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK, *per cas.* I. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI Tab. I.
eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus in- *Fig.* 14.
sistentes, æquales sunt (§. 142).

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro sit $o = x + u$ (§. 239); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314).

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab.V. Fig.95. 317. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insistat, *per hypoth.* mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), adeoque ipse rectus est (§. 143).

COROLLARIUM IV.

Tab.V. Fig.96. 318. Cum angulus in majore segmento DIF arcui DF, minori quam est semicirculus, insistat (§. 70); mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314); adeoque ipse recto minor (§. 143); consequenter acutus §. *66*).

COROLLARIUM V.

319. Non absimili ratione liquet, angulum in *minore* segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM VI.

Tab. VI. Fig.97. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239), & anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXII.

Tab. VI. Fig.98. 321. *Normam examinare, utrum exacta sit, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF, &
2. Ducantur in eo, ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum, rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest, erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 167), adeoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIX.

322. *Mensura anguli minoris segmenti* ATB *est dimidium arcus* IDB; *anguli vero majoris segmenti* BTH *dimidium arcus majoris* BGI. Tab. VI. Fig.99.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 135, 143), anguli vero BIE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 135, 143), & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 314), esse dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

323. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB, & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. VI. Fig. 100. 325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322); consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 240, 243), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

Tab. VI. Fig. 101. 327. *Inter duas lineas* AB & BE *mediam proportionalem* BD *invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C, intervallo ipsius AC, describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 78). Sed $o+x$ est itidem rectus (§. 317) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o = z$ (§. 246); consequenter $y = x$ (§. *cit.*); & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. AB = 80''', BD = 300'''; erit BE = 1125''', adeoque AB + BE = AE = 1205''' seu fere 12'. Tab. VI. Fig. 101.

COROLLARIUM II.

329. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB, ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam, resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis, ut in resolutione Problematis, erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247 *Arithm.*)

THEOREMA LXX.

332. *Si duæ chordæ* HM & LI *se mutuo secent in* K; *erit* HK : LK = KI : KM. Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315): ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

333. *Si fuerint duæ secantes* GL & GM *ex eodem puncto* G *ductæ*; *erit* GM : GL = GN : GO. Tab. VI. Fig. 97.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GML communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142); consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXII.

Tab. VI. Fig. 102. 334. *Si ex eodem puncto* A *ducantur duæ rectæ* AD *&* AB, *quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens* AD *media proportionalis inter totam secantem* AB *& ejus portionem* AC *extra circulum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 323). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 267). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 102.

CAPUT V.

De Figurarum descriptione.

THEOREMA LXXIII.

Tab. VI. Fig. 103. 335. *In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia: & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erint eadem parallelogrammum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum, *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102); consequenter, ducta diagonali PN, erit $x = o$ & $n = m$ (§. 233); adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodsi OP=NQ & ON=PQ, *per hypoth.* cum etiam sit NP = NP; erit $x = o$ & $n = m$ (§. 204); consequenter OP ipsi QN, & ON ipsi PQ parallela (§. 255); adeoque OPQN parallelogrammum (§. 102). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo, & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 98, 99, 100, 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus, & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA LXXIV.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales: anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales: anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur: & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis ON = PQ & PO = QN (§. 335). Sed PN=PN. Ergo △ NOP = △ NQP (§. 204). *Quod erat unum.* Tab. VI. Fig. 103.

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 103): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus O + N = N + Q, *per demonstrata*; erit O = Q (§. 91 *Arithm.*). Similiter quoniam Q + P = Q + N, *per demonstrata*; erit P = N (§. 91 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP, & PQ + QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

Tab. VI. Fig. 104. 338. *Super data recta* CD *Quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A, intervallo ipsius CD, fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145); consequenter o & x, item y & m semirecti (§. 241), adeoque $o + y$ & $x + m$ itidem recti. Quare figura est Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim CA = DB = CD, *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD, *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (§. 78); adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226); consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233); & ob parallelas AC & BC (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Datis duabus rectis* MI *&* IK, *Rectangulum parallelogrammum, seu Oblongum construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249). Tab. VI. Fig. 105.
2. Ex M, intervallo ML = IK, describatur arcus; & ex K, intervallo KL = IM, alius priorem intersecans in L (§. 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL, & ML = IK, *per constr.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335); consequenter I = L, & I + M, ac I + K, = duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 145); itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa Oblongum (§. 100). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

340. *Data recta* GH, *una cum angulo obliquo* G, *Rhombum construere.* Tab. VI. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 208).
2. Fiat GE = GH, & reliqua peragantur ut in Probl. 34 (§. 338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per construct.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335); consequenter G = F & G + H ac G + E = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus *ex hypothesi:* Ergo & F; consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa Rhombus est (§. 99). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 103. 341. *Datis duabus rectis* ON *&* OP, *una cum angulo intercipiendo* O, *Rhomboidem construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in Probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

THEOREMA LXXV.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales, ducanturque subtensæ* AB, BC, CD, *&c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque Polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

Ex. gr. Pentag. 180 Hexag. 180

5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 108. Quælibet figura, ex assumto in ea puncto F, in tot triangula AFB, BFC, CFD, &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD, &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos Polygoni, semper efficiunt 360° (§. 159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum Polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 111. Cum numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D, & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

3	4
540	720

COROLLARIUM I.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus Polygoni regularis (§. 106).

SCHOLION.

345. *En tibi Tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, & quantitas unius in regularibus, a Trigono usque ad Dodecagonum exhibetur* (§. 343). *Construitur columna secunda continua additione 180; tertia vero numeris in columna secunda per numerum angulorum sive laterum.*

terum divisis (§. 344). *Utimur hac Tabula tum in figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet Instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in Tabula definitur: ex. gr. si in Heptagono superet 900.*

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM II.

Tab. VI. *Fig.* 108. 346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi, 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

Tab. VI. *Fig.* 107. 347. *Dato Polygono regulari cuicunque* ABCDE *circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209), ob angulos FED & FDE duobus rectis minores, concursuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum Polygoni dimidii, *per construct.* erit $o = u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arithm.*); consequenter EF = FD (§. 253). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$, *per constr.* ED = EA (§. 106), & EF = EF; erit AF = FD (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia AF = EF, *per demonstr.* erit $m = x$ (§. 184). Sed x dimidius angulus Polygoni, *per constr.* Ergo & m (§. 87 *Arithm.*); consequenter etiam y. Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB = FE, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur FC, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos Polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116). *Q. e. d.* Tab. VI. *Fig.* 107.

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216).

PROBLEMA XL.

349. *Invenire angulum in dato Polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur Polygonum regulare ABCDE circulo inscriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE est mensura anguli quæsiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 289); angulus Polygoni A relinquitur, si arcum AB a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Quæratur angulus Pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum Pentagoni quæsitum.

THEOREMA LXXVI.

Tab. VI. Fig. 109. 350. *Quadrilateri circulo inscripti* GHIK *anguli bini oppositi* H & K, *item* G & I *conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Insistunt enim junctim sumti integro circulo; ex. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56); adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. * 351. *Circulo Quadratum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE se mutuo in centro C ad angulos rectos secantes (§. 210).
2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant intersectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.

Erit FGHI Quadratum circulo circumscriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D sunt recti (§. 338); adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§ 338), & FG = GH = HI = FI = 2 AC, *per constr.* Ergo FGIH est Quadratum (§. 98), idque circulo circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352. *Super data recta* ED *Polygonum regulare quodcunque describere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulis Polygoni (§. 344, 349). Tab. VI. Fig. 107.
2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 155), & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D describatur circuli peripheria (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 342, 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo Polygoni sigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro, radio EF, describatur circulus, qui erit circulus Polygono circumscriptus (§. 347).
3. Reliqua absolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato Polygonum regulare quodcunque inscribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59). Tab. VI. Fig. 107.
2. Construatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342, 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. *Resolutio Problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem Instrumento transportatorio utamur (§. 155): non tamen ideo contemnenda,*

nenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt EUCLIDES *(a) &* PTOLEMÆUS *(b): de qua in Analysi. Equidem & Heptagoni, Enneagoni & Hendecagoni constructiones geometricæ passim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt: sed a rigore demonstrationum abhorrent.* Joh. Carolus RENALDINUS *(c) omnium Polygonorum describendorum regulam catholicam præscribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat, Cl.* WAGNERUS, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor *ostendit (d), & nos inferius in Analysi ostendemus.*

PROBLEMA XLIV.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. *Fig.* 107. 1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. Pentagonum ABCDE, si Pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353).

2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*h* ad eandem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *h* secat.

3. Per A & B producantur radii FA & FB.

4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum Polygoni circumscripti.

(a) *Elem.* IV. Prop. 11. 16. & *Elem.* XIII. Prop. 10.

(b) *Almag.* Lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. *Joannes* REGIOMONTANUS in *Epitome* hujus *Almag.* Lib. 1. prop. 1.

(c) Lib. 2. *De Resolut. & composit. Mathem.* f. 367.

(d) In peculiari Dissertatione *Helmstadii* 1700 habita.

5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e* = F*d* = F*c* = F*a* & puncta *a, e, d, c, b* connectantur rectis *ae, ed, dc, cb*: erit *abcde* Polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.* Tab. VI. *Fig.* 107.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per construct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem, *per construct.* FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145); consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78, 304). Est vero etiam angulus F*ab* = FAB (§. 233); adeoque dimidius angulus Polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE, *per construct.* & FA = FE = FB (§. 40); erit angulus *b*F*a* = *a*Fe (§. 204). Quare, cum etiam sit F*a* = Fe *per construct.* &, ob F*ab* = F*ba* *per demonstrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*hb* commune, F*b* = F*a* (§. 252); erit *ae* = *ab* & F*ae* = F*ab* (§. 179); consequenter *a* angulus Polygoni, ex. gr. in nostro casu Pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e, d, c, b* esse angulos Polygoni circumscribendi, & *ed* = *dc* = *cb* = *ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216); erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro F*ah* = F*ag*, *per demonstrata*, & F*a* = F*a*; erit F*h* = F*g* (§. 252). Quare cum F*h* sit radius circuli *per construct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit

Tab. VI. Fig. 107. tangit (§. 304). Idem eodem modo oſtenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo eſt circumſcriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

Tab. VI. Fig. 110. 356. *Latus Hexagoni* AB *æquatur radio circuli circumſcripti* AC.

DEMONSTRATIO.

Angulus $C = 60°$ (§. 57). Ergo $A + B = 120°$ (§. 245); conſequenter, ob $AC = BC$ (§. 40), $A = B = 60°$ (§. 184). Quare △ ACB æquilaterum (§. 254); conſequenter $AB = AC$ (§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo inſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſexies applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si ſuper linea data AB Hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ACB conſtruitur (§. 198): eſt enim vertex C centrum circuli Hexagono quæſito circumſcribendi (§. 356).

PROBLEMA XLV.

Tab. VI. Fig. 111. 359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuſcunque, & tot diagonalibus quot ſunt latera demtis tribus; figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE reſolvatur, quot ſunt latera demtis tribus; non alia re opus eſt, quam ut unum triangulum ſuper altero excitetur (§. 205).

PROBLEMA XLVI.

360. *Datis omnibus lateribus figuræ, & tot angulis quot ſunt latera demtis tribus; figuram conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis. Tab. VI. Fig. 112.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155); & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155); & determinetur latus DC, &c.
4. Tandem ex E & D fiat interſectio in F, intervallo laterum EF & DF.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur, eritque æqualis quæſitæ (§. 161, 177).

Eodem modo conſtrui poſſunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non eſt.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut ſe exerceant in figuris irregularibus deſcribendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus, aſſumere debent. Quodſi contingat figuram non terminari, id indicio erit, caſum eſſe impoſſibilem; adeoque vel in angulorum, vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

PROBLEMA XLVII.

363. *Areæ cujuſdam campeſtris rectilineæ* abcde *libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc eſt, figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.* Tab. VI. Fig. 111.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VI. *Fig.* 111.

1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126).
2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta Scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB : BC = *ab* : *bc* BC:CD = *bc* : *cd*, CD : DE = *cd* : *de*, &c. Etenim ex. gr. *ab*, 6, & *bc*, 7 pedum in campo existentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta, *per constr.* Quare cum porro sit AC : AB = *ac* : *ab*, AC : AD = *ac* : *ad*, AD : AE = *ad* : *ae*, &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207); consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 113.

1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126), &
3. Exinde juxta Scalam modicam (§. 279) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* esse similem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in △△ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab* : *ac* = *a*B : *a*C *per constr.* erit angulus *abc* = *a*BC & *acb* = *a*CB, nec non *ab* : *bc* = AB : BC & *ac* : *bc* = AC : BC (§. 183). Similiter quoniam in △△ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac* : *ad* = *a*C : *a*D, atque in △△ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & *ad* : *ae* = *a*D : *a*E *per construct.* erit angulus *acd* = *a*CD & *adc* = *a*DC, nec non *ac* : *cd* = *a*C : *c*D & *ad* : *cd* = *a*D : *c*D, itemque angulus *ade* = *a*DE & *aed* = *a*ED, nec non *ad* : *de* = *a*D : DE & *ae* : *ed* = *a*E : ED (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, $acb + acd = aCB + aCD$, hoc est, $c = C$, $adc + ade = a\,DC + aDE$, hoc est, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonstrata*; figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§. 109). Porro cum sit *ac* : *bc* = *a*C : BC & *ac* : *cd* = *a*C : CD *per demonstr.* erit etiam *bc* : *cd* = BC : CD (§. 196 *Arithm.*) & cum sit *ad* : *dc* = *a*D : DC & *ad* : *de* = *a*D : DE *per demonstr.* erit denuo *dc* : *de* = DC : DE. Quamobrem, cum quoque sit *ab* : *bc* = *a*B : BC & *ae* : *ed* = *a*E : ED, *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE similes (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E defi- Tab. VI. *Fig.* 114.

Tab. VI. *Fig.* 114. defixos, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.

2. Investigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§. 126).

3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc*, &c. juxta Scalam modicam (§. 279).

4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd*, &c.

Dico *abcdeg* esse figuræ ABCDEG similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f*AB communis, estque *fa* : *fb* = *f*A : *f*B, *per constr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales sunt, atque *fa* : *ab* = *f*A : AB (§. 183). Eodem modo ostenditur esse in △△ *fga* & *f*GA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa* : *ag* = *f*A : AG, consequenter *ab* : *ag* = AB : AG (§. 196 *Arithm.*) & angulus *bag* = BAG (§. 86 *Arithm.*). Quare, cum eadem ratione demonstretur esse *g* = G, *e* = E, *d* = D, *c* = C, *b* = B, & *ag* : *ge* = AG : GE, *ge* : *ed* = GE : ED, *ed* : *dc* = ED : DC, *dc* : *cb* = DC : CB & *cb* : *ba* = CB : BA, figura *abcdeg* est majori ABCDEG similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 111. 1. Collocato Instrumento goniometrico in *a*, investigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 126).

2. Construantur juxta Scalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§. 180).

Dico ABCDE esse similem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda Problematis præsentis.

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in *f*, investigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152), & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126). Tab. VI. *Fig.* 114.

2. Construantur, ut ante, juxta Scalam modicam △△ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

Dico *abcdeg* esse similem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Problematis præsentis.

Aliter.

1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus divisa & quæ in cardine Meridiei ac Septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipsi *a* immineat, & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipsi *ab* imminente versus ortum vel occasum. Tab. VI. *Fig.* 111.

2. Pyxidis dioptræ convertantur successive ad baculos in *c*, *d*, & *e* defixos, notenturque, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis.

3. Investigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126).

4. Ducatur in charta recta LM & assumto in ea puncto A applicetur centrum Instrumenti transportatorii

&c

Tab. VI. *Fig.* 111. & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per Scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE, (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse alteri *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica semper eidem lineæ respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversis in pyxide successive immineat. Lineam istam designet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo descriptus est circulus. Quodsi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In Instrumento transportatorio initium numerandi fit in *f*, & si arcus *fg* declinationi in campo observatæ æqualis assumitur, angulus *i* idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in *f*, sive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineæ LM; consequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in Demonstratione secunda.

Aliter.

Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit instructa, sed lignea regula *fg* ita affixa, ut linea meridiana ejusdem *bd*, transiens per centrum pyxidis *c*, sit eidem parallela: Tab. XI. *Fig.* 174.

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur; quo facto, AB erit ipsi *bd* parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuspis *a*: dico esse angulum *bca* ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo, si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta *ae* designet situm acus, *bd* autem ipsi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *acb* ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum *acb* esse ipsi BAL, & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, *bd* esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi *ecd* (§. 233), consequenter ejus verticali *bca* æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum sit ML ipsi I*a* parallela, *per construct.* erunt alterni IHA & HAL æquales (§. 233); consequenter HAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter, si pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum sit *bd* ipsi EA parallela, *vi solutionis*; erit NKA = *ecd* (§. 233). Quare cum porro sit *bca* = *ecd* (§. 156); erit NKA = *bca* (§.

Tab. XI. Fig. 174. (§. 87 *Arithm.)*. Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota situm obtinet priori, quem habuerat, parallelum, estque adeo N*a* ipsi I*a* parallela; ML vero parallela ipsi I*a*, *per construct.* erit etiam ML ipsi N*a* parallela (§. 232); consequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 115. 1. Charta super mensula expansa, ex centro *o* describatur circulus.

2. In eodem desigatur stylus, cui inseratur regula cum dioptris.

3. Collineetur in singulos areæ angulos A, B, C, &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter opposita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.

4. Investigetur longitudo rectarum *o*A, *o*B, *o*C &c. (§. 126).

Tab. VII. Fig. 116. 5. Charta, a mensula remota, alteri mundæ coextendatur in tabula, & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258).

6. Idem Parallelismus applicetur ad *bb* & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi *aa* parallelam in puncto commodo O intersecet.

7. Applicetur porro successive ad rectas *cc*, *dd*, *ee*, quæ confusionis evitandæ gratia in Schemate non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ CC, &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis *o*A, *o*B, *o* C, &c. respondentium juxta Scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit. Tab. VII. Fig. 116.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. se intersecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O intersecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi *aa* occurrat in f; continuentur etiam CC & *cc*, donec ipsis *bb* & AA occurrant in g & k. Erit, ob parallelas *aa* & AA, $m = f$, &, ob parallelas *bb* & BB, $y = f$ (§. 233); adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter, ob parallelas *bb* & BB, $n = g$, &, ob parallelas *cc* & CC, $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item, ob parallelas *aa* & AA, $z = k$, &, ob parallelas *cc* & CC, $l = k$ (§. 233), adeoque $l = z$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda &, ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud litteris aliis usurpandum.*

SCHO-

SCHOLION II.

Tab. VII. Fig. 115. 365. *Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, si puncta* a & a, *item* b, c, d &c. *subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a & a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum* O: *reliqua puncta* b, c, d &c. *situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHOLION III.

366. *Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro, vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.*

PROBLEMA XLVIII.

Tab. VII. Fig. 117. 367. *Ichnographiam areæ* ABCDE *ex duabus stationibus* A & B *perficere.*

RESOLUTIO.

1. Posita mensula in A, collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D, & E; ducanturque rectæ versus eos ex *a*. Tab. VII. Fig. 117.
2. Quæratur distantia stationum AB (§. 126), & in mensulam ex Scala geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam *ba* applicata, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c*, intersecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico, Ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC = *abc*, & CAB = *cab*, *per constr.* erit AB : BC = *ab* : *bc*, & AB : AC = *ab* : *ac* (§. 267). Similiter 2°. quia EAB : *eab*, & EBA = *eba*, *per constr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA : AB = *ea* : *ab* & EB : AB = *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum sit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA : AB = *da* : *ab* & DB : AB = *db* : *ab* (§. *cit.*). 4°. DBC = *dbc*, *per constr.* &, quoniam DB : AB = *db* : *ab* (*per num.* 3), atque AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1); DB : BC = *db* : *bc* (§. 194 *Arithm.*). Ergo CDB = *cdb*, atque BCD = *bcd*, & BC : CD = *bc* : *cd*, nec non BD : CD = *bd* : *cd* (§. 183). 5°. DB : BC = *db* : *bc* (*per demonstra-*

Tab. VII. Fig. 117. *ta n.* 4.) & AB : BC = *ab : bc* (*per num.* 1). Ergo DB : AB = *db : ab* (§. 195 *Arithm.*). Est vero etiam EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2). Ergo DB : EB = *db : eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam sit DBE = *dbe*, *per construct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB : DE = *db : de* & DE : EB = *de : eb* (§. 183). 6°. BD : CD = *bd : cd* (*per num.* 4) & DB : DE = *db : de* (*per num.* 5). Ergo CD : DE = *cd : de* (§. 196 *Arithm.*). 7°. EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2) & DE : EB = *de : eb* (*per num.* 5). Ergo DE : AB = *de : ab* (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro sit EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2) erit DE : EA = *de : ea* (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb* (*per num.* 4) & BDE = *bde* (*per num.* 5); erit CDE = *cde* (§ 88 *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb* (*per num.* 2) & DEB = *deb* (*per num.* 5) erit DEA = *dea* (§. 88 *Arithm.*). Cum itaque sit EAB = *eab*, & ABC = *abc*, *per constr.* BCD = *bcd* (*per num.* 4), CDE = *cde* (*per num.* 8), & DEA = *dea* (*per num.* 9); atque praeterea AB : BC = *ab : bc* (*per num.* 1), BC : CD = *bc : cd* (*per num.* 4), CD : DE = *cd : de* (*per num.* 6), DE : EA = *de : ea* (*per num.* 7), tandemque EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2); figuræ ABCDE altera *abcde* similis est (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A investigetur quantitas angulorum EAD, DAC, & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD, & DBC (§. 152); quæraturque stationum distantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta *ab* per Scalam modicam distantiæ stationum AB convenienter determinetur (§. 279). Tab. VII. Fig. 117.
3. In *a* constituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipsis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta intersectionum *b*, *c*, *d*, *e*, *a*, rectis connectantur.

Dico *abcde* esse similem areæ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ observentur, ut in Probl. præc. ex duabus stationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE, itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur distantia stationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in Probl. præc. determinetur situs rectarum *ab*, *ac*, *ad*, &c. ac puncta intersectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit absoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonstratione penultima Problematis præcedentis dicta sunt.

PROBLEMA XLIX.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESO-

Resolutio.

Tab. VII. *Fig.* 117. 1. Mensula in A collocata, collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem designari possit.

2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex Scala minore transferatur in mensulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).

3. Mensula in B translocetur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,

4. Idem dirigatur per easdem in C, quo sicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in mensula designari possint.

5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

Demonstratio.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt, *per constr.* Figura igitur delineata est areæ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126), & quantitas tot angulorum quot sunt latera demtis tribus (§. 152). His enim datis Ichnographia *per Probl.* 46 (§. 360), vi demonstrationis præcedentis absolvetur.

Aliter.

1. Notetur in singulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ, ut in Probl. 47 (§. 363). Tab. VII. *Fig.* 118. n. 1.

2. Quæratur simul longitudo laterum (§. 126).

3. In charta designetur linea *ab*, & in eam transferatur ex Scala modica longitudo lateris AB (§. 279). n. 2.

4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejusdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipsius septentrionale septentrionem respiciat, & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monstret.

5. Charta immota, idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per Scalam modicam ipsi AE proportionalem determinare licet.

6. Quodsi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem absolvetur.

Demonstratio.

Non aliud hic demonstrandum est, quam angulum *bae*, ope pyxidis magneticæ in charta sic designatum, esse alteri BAE in campo æqualem. Superius usum pyxidis magneticæ nullis dioptris instructæ exponentes demonstravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejusdem sit huic parallela, angulum declinationis

nis

Tab. VII. *Fig.* 118. nis acus esse ipsi BAM æqualem, si ML ita ducatur, ope pyxidis, ut ejusdem lineæ meridianæ parallela existat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonstratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata, esse angulum EAL angulo declinationis acus in hoc situ æqualem. His jam datis, si latus pyxidis lineæ meridianæ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente situ, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monstret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter, si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe, rectam KI per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat, centro in *a* collocato. Est igitur $1 = \mathrm{I}$ & $6 = \mathrm{VI}$, *per construct.* Sed $1 + 7 + 6 = 180°$, & $\mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI} = 180°$ (§. 147); consequenter $1 + 7 + 6 = \mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI}$ (§. 87 *Arithm.*). Quare $7 = \mathrm{VII}$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel:

Tab. VII. *Fig.* 118. n. 2.

1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.
2. Instrumentum transportatorium Parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a*K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria Instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A. Tab. VII. *Fig.* 118.
3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex Scala modica longitudo rectæ AB in campo mensuratæ.
4. Regula Parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret Instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

$1 = \mathrm{I}$, $2 = \mathrm{II}$, $3 = \mathrm{III}$, $4 = \mathrm{IV}$ & $5 = \mathrm{V}$, *per constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum Instrumenti transportatorii refert) ipsi *a*K parallela, *per construct.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit $1 = 8$, & $\mathrm{I} = \mathrm{VIII}$ (§. 233), consequenter $8 = \mathrm{VIII}$ (§. 87 *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse $6 = \mathrm{VI}$. Quare cum sit $1 + 7 + 6 = \mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI}$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit $7 = \mathrm{VII}$ (§. 91 *Arithm.*). Porro $2 = \mathrm{II}$, *per constr.* & $8 = \mathrm{VIII}$, *per demonstr.* Ergo $8 + 2 = \mathrm{VIII} + \mathrm{II}$ (§. 88 *Arithm.*). Similiter $12 = 2$ & $\mathrm{XII} = \mathrm{II}$ (§. 233) & $3 = \mathrm{III}$, *per constr.* Quare cum sit

sit 12+9+3=XII+IX+III (§. 147 *Geom. & §.* 87 *Arithm.*); erit 9=IX (§. 91 *Arithm.*). Porro 4=IV, *per constr.* & hinc, cum sit 10=3 & X =III (§. 233), adeoque ob 3=III, *per demonstr.* 10=X (§. 87 *Arithm.*), 4+10=IV+X (§. 88 *Arithm.*). Denique 5=V, *per constr.* & 4+11 =IV+XI (§. 233 *Geom. &* §. 87 *Arithm.*). adeoque ob 4=IV, *per constr.* 11=XI (§ 91 *Arithm.*). Quare 5+11=V+XI (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint, *per constr.* figura *abcde* areæ ABCDE similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc Problema est inversum alterius, quo Ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus Problematum inmediate præcedentium intelligitur. Ex. gr. Si semicirculo, vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti, &c. in Solo designantur *per Probl.* 7 (§. 155), & latera, vel diagonales, &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimensione ac Divisione.

PROBLEMA LI.

370. *Invenire aream Quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati. Sit ex. gr. Latus Quadrati = 345

$$\begin{array}{r} 345 \\ 345 \\ \hline 1725 \\ 1380 \\ 1035 \\ \hline \end{array}$$

erit Area = 119025.

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si latus Quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & Quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in Quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus AB, & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB, habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.* Tab. VII. *Fig.* 119.

Corollarium I.

371. Si latus Quadrati fuerit 10, Area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos, &c. continet (§. 118).

Corollarium II.

372. Si latus Quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

Corollarium III.

373. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes, & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus resecentur: quæ enim sinistram versus residuæ sunt, perticis cedunt. Ex. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

Corollarium IV.

374. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). Ex. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum Quadrati lateris simpli. Et Quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

Problema LII.

Tab. VII. *Fig.* 120. 375. *Invenire aream Rectanguli* ABCD.

Resolutio.

1. Investigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC.

Factum erit area Rectanguli.

Ex. gr. Sit AB = 345

AC = 123

	1035
	690
	345
erit Area =	42435

Demonstratio.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

Corollarium I.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*)

Corollarium II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, Quadratum mediæ Rectangulo extremarum æquale est (§. 298 *Arithm.*).

Corollarium III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; Rectangulum sub extremis æquatur Rectangulo sub mediis (§. 297 *Arithm.*).

Corollarium IV.

379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit Quadratum tangentis AD Rectangulo sub secante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377). Tab. VI. *Fig.* 102.

Corollarium V.

380. Si duæ vel plures secantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt Rectangula sub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379). Tab. VI. *Fig.* 97.

Corollarium VI.

381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erunt Rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332 & 378). Tab. I. *Fig.* 14.

Corollarium VII.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per Probl. præc. vel præs.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

Theorema LXXVIII.

383. *Duo Parallelogramma* ABDC *&*

Tab. VII. *Fig.* 121. *& ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta sunt inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB = CD & EF = CD (§. 335); consequenter AB = EF (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro AE = BF (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro AC = BD & CE = DF (§. 335); erit △ ACE = △ BDF (§. 204); adeoque ABGC = FEGD (§. 91 *Arithm.*); consequenter ABDC = EFDC (§. 88 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ, *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo Parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & Triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam Parall. ACDB = Parall. ECDF (§. 384), sed △ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB & △ FCD = $\frac{1}{2}$ Parall. ECDF (§. 337). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 94 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo Triangulum CFD est dimidium Parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD, & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △ CFD = △ ACD (§. 385). Sed △ ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 337). Ergo △ CFD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, seu Parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 227). Tab. VII. *Fig.* 122.
2. Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4

```
         1 8 2 4
       1 3 6 8
       9 1 2
Erit Area = 10°6 7′ 0 4″
```

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & Triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX.

391. *Triangulum est æquale Parallelogrammo super eadem basi sed dimidiæ altitudinis; itemque Parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.* Tab. VII. *Fig.* 123.

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem

Tab. VII. Fig. 123. basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumta AD pro basi, erit CD altitudo; sumta vero DC pro basi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis, *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 91), adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 102), is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G=E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit $\triangle CGH = \triangle EHA$ (§. 252); consequenter $EGDA = \triangle ACD$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78, 91). Ergo si fiat $FB = DG$ dimidiæ altitudini; erit $DGFB = \triangle DCB$ & $AEGD = \triangle ACD$, *per cas.* 1. Ergo $AEFB = \triangle ACB$ (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Sit $DK = KB = \frac{1}{2}DB$ & $DG = GA = \frac{1}{2}DA$; erit $GK = \frac{1}{2}AB$, adeoque dimidia basis. Jam $CFKD = \triangle DCB$ & $GECD = \triangle ACD$, *per cas.* 1. Quare $EGKF = \triangle ACB$ (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. Fig. 124. 392. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 387). Tab. VIII. Fig. 125.

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area Trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Basis dimidia $\frac{1}{2}AB$ multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2}CD$. Factum erit area Trianguli (§. 391, 387).

Ex. gr. $AB = 3^{\circ}\,4'\,2''$ | $AB = 3^{\circ}\,4'\,2''$
$CD = 2\;3\;4$ | $\frac{1}{2}CD = 1\;1\;7$

1 3 6 8	2 3 9 4
1 0 2 6	3 4 2
6 8 4	3 4 2
8 0 0 2 8	$\triangle = 4\;0\;0\;1\;4$

2) ———
$\triangle ACB$, 4 0 0 1 4

$\frac{1}{2}AB = 1^{\circ}\,7'\,1''$
$CD = 2\;3\;4$

6 8 4
5 1 3
3 4 2
$\triangle = 4\;0\;0\;1\;4$

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*); consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area Trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arith.*).

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus Quadrati Parallelogrammo, vel Triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quæratur inter basin & altitudinem Parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem Trianguli media proportionalis, *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arithm.* Ita prodit latus Quadrati quæsitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375, 387); & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298 *Arithm.*); erit Quadratum istud in priori casu Parallelogrammo, in posteriori Triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

396. *In Parallelogrammis & Triangulis similibus, altitudines sunt lateribus homologis proportionales; & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 122. Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc*, triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC:AE = *ac ae* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac: cd* (§. 175). Ergo AE : CD = *ae: cd* (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonstr.* erit AC : CE = *ac : ce* (§. 267). Est vero etiam AC : CD = *ac : cd* (§. 175). Ergo CE : CD = *ce : cd* (§. 196 *Arithm.*); adeoque ED : CE = *ed : ce* (§. 193 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc & △ ACD ∽ △ acd, *per hypoth. perpendicula* AE & ae, *pariterque segmenta basium* CE & ce, *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 119, 216), *adeoque similia sunt* (§. 120). *Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24 Arithm.), *lineæ autem rectæ, utpote similes* (§. 17), *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132 Arithm.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.* Tab. VII. Fig. 122.

COROLLARIUM I.

398. Quoniam Parallelogramma & Triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388); similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur Parallelogramma & Triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA LV.

400. *Invenire aream Polygoni irregularis, ac Trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86 *Arithm.*).

Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

Ex. gr. $\frac{1}{2}$AD ≍ 43′	$\frac{1}{2}$AD ≍ 43′	$\frac{1}{2}$AC = 42′
EF ≍ 35	GC ≍ 45	BH = 30
215	215	△ABC, 1260
129	172	
△AED, 1505	△DAC, 1935	
	△AED, 1505	
	△ABC, 1260	

Area Polygoni irreg. 47°00′

Quodsi $\frac{1}{2}$AD multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per $\frac{1}{2}$ (EF + GC); prodibit area Trapezii AEDC.

Ex. gr. EF ≍ 35	$\frac{1}{2}$AD ≍ 43
GC ≍ 45	EF + GC ≍ 80
EF + GC ≍ 80	AEDC ≍ 3440
$\frac{1}{2}$(EF + GC) ≍ 40	
AD ≍ 86	
AEDC ≍ 3440	

Tab. VIII. Fig. 127. Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226, 227); consequenter Trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

Ex. gr. Sit AB 246″, CD ≍ 378″, BF ≍ 195″

erit $\frac{1}{2}$ (AB + CD) ≍	312
BF ≍	195
	1560
	2808
	312
Area Trapezii	60840

THEOREMA LXXXI.

Tab. VI. Fig. 107. 401. *Figura regularis* ABCDE *ex centro circuli circumscripti* F *in triangula æqualia atque similia resolvitur, & area ejus æquatur Triangulo, cujus basis peripheria totius Polygoni* AB+BC+CD, *&c. altitudo perpendiculum* FG *ex centro* F *in latus unum* AB *demissum. Idem valet de area circumscripti* abcde, *nisi quod altitudo sit radius* FG. Tab. IV. Fig. 107.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 106), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & similia sunt (§. 204). *Quod erat unum.*

Constituantur triangula AFB, BFC, CFD, &c. in quæ resolutum est Polygonum ABCDE, super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis A*f* (§. 249) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Erit A*f*B = AFB, B*f*C = BFC, C*f*D = CFD, &c. (§. 385); consequenter A*f*A = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 *Arithm.*) æqualis est areæ Polygoni regularis (§. 86, 87 *Arithm.*). *Quod erat secundum.* Tab. VIII. Fig. 128.

Cum recta F*g* ex centro F ad contactum *g* ducta sit radius & ad latus *ae* perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli *a*F*e* (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI. Fig. 107.

PROBLEMA LVI.

402. *Invenire aream Polygoni regularis.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Latus Polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus Hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 392, 401).

Ex.

Tab. VI. *Fig.* 107.

Ex. gr.	AB = 5°4′
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter =	135
FG =	29
	1215
	270
Area Pentagoni	39°15′

THEOREMA LXXXII.

Tab. VI. *Fig.* 111.

403. *Quadrilatera & Polygona similia* ABCDE *&* abcde *per diagonales* AC, AD *&* ac, ad *in similia triangula* ABC *&* abc, ACD *&* acd, ADE *&* ade *dividuntur, & inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE $\sim$ *abcde*, *per hypoth.* erit $o = o$, & AB : BC $= ab : bc$ (§. 175). Ergo $\triangle bac \sim \triangle BAC$, $y = y$ atque $bc : ca =$ BC : CA (§. 183). Est vero etiam $bc : cd =$ BC : CD, & $n + y = n + y$ (§. 175). Ergo $ca : cd =$ CA : CD (§. 196 *Arithm.*) & $n = n$ (§. 91 *Arith.*); consequenter $\triangle cad \sim \triangle CAD$, $cd : da =$ CD : DA, & $u = u$ (§. 183). Est vero etiam $u + s = u + s$, & $cd : de =$ CD : DE (§. 175). Ergo $s = s$ (§. 91 *Arithm.*) & $da : de =$ DA : DE (§. 196 *Arithm.*); consequenter $\triangle dea \sim \triangle DEA$ (§. 183). *Quod erat primum.*

Quoniam $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle DAC \sim \triangle dac$ & $\triangle DAE \sim \triangle dae$, *per demonstrata*; erit $\triangle ABC : \triangle abc = CA^2 : ca^2$, $\triangle DAC : \triangle dac = CA^2 : ca^2 = DA^2 : da^2$ & $\triangle DAE : \triangle dae = DA^2 : da^2$ (§. 398); consequenter $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DAC : \triangle dac$ & $\triangle DAC : \triangle dac = \triangle DAE : \triangle dae$ (§. 167 *Arith.*); adeoque etiam $\triangle DAE : \triangle dae = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. *cit.*). Sunt igitur $\triangle\triangle$ ABC, ACD, ADE, & *abc*, *acd*, *ade* inter se proportionalia. *Quod erat secundum.*

Tab. VI. *Fig.* 111.

Quoniam denique $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca = \triangle DEA : \triangle dea$ *per secundum hujus*; erit $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA : \triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. 192 *Arithm.*). Sed $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA =$ polygono ABCDE & $\triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = abcde$ (§. 86 *Arithm.*). Ergo ABCDE : $abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca$, &c. (§. 168 *Arithm.*); consequenter ABCDE : $\triangle ABC = abcde : \triangle abc$, & ABCDE : $\triangle DCA = abcde : \triangle dca$ &c. (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum Polygona regularia sint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam sibi mutuo æquiangula (§. 344); Polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia Pentagona, omnia Hexagona, &c. regularia, inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat Theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *sint similes,* per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175), *atque prætérea diagonales* AC, AD & ac, ad *ex angulis hisce æqualibus* A *&* a *ducantur;* $\triangle\triangle$ ABC *&* abc, CAD *&* cad DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119); *consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt* (§. 120); *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170 Arithm.), *immo eandem inter se rationem,*

Tab. VI. *tionem quam Polygona aut Quadrilatera habent* (§. 171 Arithm.).

Fig. 111.

THEOREMA LXXXIII.

406. *Figuræ, tam regulares quam similes irregulares, habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & *abcde*, sive regulares, sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ, sive polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : *abcde* $=$ △ ABC : △ *abc* $=$ △ ACD : △ *acd* $=$ △ ADE : △ *ade* (§. 403, 404). Sed △ ABC : △ *abc* $= AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$; △ ADC : △ *adc* $= CD^2 : cd^2$ & △ ADE : *ade* $= DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* $= AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A & a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA LXXXIV.

408. *Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut Quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 120). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 24 *Arithm.*); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arithm.*). Quamobrem Circuli inter se sunt ut Quadrata diametrorum (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum, *per demonstrata.* Ergo Figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut Quadrata diametrorum (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Resolvantur Polygona circulis inscripta ABCDE & *abcde* ex centris F & *f* in △△ AFB, BFC, CFD, & *afb*, *bfc*, *cfd*, &c. erit angulus FAB $=$ *fab* & FBA $=$ *fba*, &c. (§. 344, 347); consequenter △ AFB ∽ △ *afb* (§. 267). Eodem modo patet, esse △ BFC ∽ △ *bfc*, △ CFD ∽ △ *cfd* &c. Habemus itaque △ AFB : △ *afb* $= BF^2 : bf^2$, △ BFC : △ *bfc* $= BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* $= BF^2 : bf^2$ (§. 187 *Arithm.*); consequenter cum radii BF & *bf* sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arithm.*), Polygona similia circulo inscripta sunt ut Quadrata diametrorum (§. 260 *Arithm.*). Et idem eodem modo ostenditur de Polygonis circulo circumscriptis, cum triangula similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355).

Tab. VI. Fig. 107.

Quodsi

Quodsi jam Polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam Circuli erunt inter se ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo Circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374): adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*), & radiorum (§. 260, 259 *Arithm.*).

THEOREMA LXXXV.

410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. *Fig.* 129. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240); consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHOLION.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* KEPLERUS (*a*). *Eam exemplo ejus excitatus sub nomine* Methodi indivisibilium *magis excoluit* CAVALERIUS (*b*). *Demonstrationem indirectam dedit* ARCHIMEDES (*c*) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo sit, ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 *Arith.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur. Cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134); *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24 Arithm.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132 Arithm.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA LXXXVI.

415. *Sector circuli* ACD *æqualis est triangulo, cujus basis arcus* AD, *altitudo radius* AC. Tab. VIII. *Fig.* 133.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis (§. 410).

(*a*) *In Nova-Stereometria doliorum vinariorum* Part. I. Theor. 2. f. B. 2.

(*b*) Vide præfat. ad *Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam.* p. b. 2.

(*c*) In libello *De circuli dimensione*, Prop. I.

THEOREMA LXXXVII.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est Circulo Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria Circuli.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342). Sed chordæ sunt arcubus minores (§. 191). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcubus eisdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90 *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt, area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipsi æqualis est (§. 161); consequenter Polygonum inscriptum Circulo minus (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47); consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipsi æqualis (§. 161), hoc est, Circulus Polygono circumscripto minor est (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401, 410, 388); consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arithm.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arithm.*). Sed polygonum majus circulo per *demonstr.* Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arith.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXXXVIII.

417. *In Triangulo rectangulo* ABC, *quadratum hypothenusæ* AC *æquale est quadratis laterum* AHIB *&* BCED *simul sumtis.* Tab. VIII. Fig. 130.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipsi CF parallela (§. 258). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336) existit; hujus dimidium est (§. 391). Ex eadem ratione △ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x = o$ (§. 98, 145), adeoque $x + y = o + y$ (§. 88 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179); consequenter BCED = LCFK (§. 93 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 *Arithm.*) = ACFG (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc Theorema* PYTHAGORAS *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur, Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

COROLLARIUM I.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2°. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. *cit.*), ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & BD^2 Tab. VIII. Fig. 131.

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. *Fig.* 132. 420. Quodsi AB fuerit $= 1$, & AC $= 1$; erit CB $= \sqrt{2}$. Si porro fiat AD $=$ CB $= \sqrt{2}$; erit DB $= \sqrt{3}$. Si fiat AE $= 2$; erit BE $= \sqrt{5}$. Si fiat AF $=$ EB $= \sqrt{5}$; erit FB $= \sqrt{6}$, & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam; consequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§. 43, 295 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

421. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arithm.*); consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM IV.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*); consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 419).

PROBLEMA LVII.

Tab. VIII. *Fig.* 133. 423. *Datis chorda* AB *& radio* AC, *invenire chordam arcus dimidii* AD.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D, *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis est (§. 291); adeoque anguli ad E recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); quæ erit EC. Tab. VIII. *Fig.* 133.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Sit radius AC $= 10000$, & AB latus Hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356), & AE $= 5000$.

Quare

$AC^2 =$	100000000	$AE^2 =$	25000000
$AE^2 =$	25000000	$ED^2 =$	1795600
$CE^2 =$	75000000	$DA^2 =$	26795600
		$DA =$	5176
$CE =$	8660		
$DC =$	10000		
$DE =$	1340		

PROBLEMA LVIII.

424. *Dato latere Polygoni regularis inscripti* AB, *invenire latus circumscripti* FG. Tab. VIII. *Fig.* 134.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit AE $= \frac{1}{2}$ AB & CE : EA $=$ CD : DG (§. 268). Quare si, ob angulum rectum ad E (§. 291), EC investigetur ut in Problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE : CD $=$ EA : DG, & CE : CD $=$ EB : DF (§. 268). Cum adeo sit EA : DG $=$ EB : DF (§. 167 *Arithm.*), & EA $=$ EB, *per demon-*

Tab. VIII. Fig. 134. *demonstrata:* erit etiam DG=DF (§. 177 *Arithm.*); adeoque FG=2DG. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423); adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere, quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni, tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit ex. gr. radius circuli 1, seu (ut latera Polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1,000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000; reperietur, continua a Quadrato bisectione, latus Polygoni 1, 073, 741, 824 laterum inscripti vero proxime minus 0, 00000000058516723 170686387122; circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0, 000000 000585167231706863873784. Hinc perimeter circumscripta 6. 2831853071795864915653 7 vero proxime major; inscripta autem 6. 28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2, 0000000000000000, erit peripheria minor quam 6. 2831853071795865, major vero quam 6. 2831853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 100000000000000000 ad 314159265358979 32. Compendia calculi tradit *Ludolphus* A CEULEN (*a*).

SCHOLION I.

426. *In quadrando Circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* ARCHIMEDES (*b*) *ea fini excogitavit methodum quadrandi Circulum per Polygona regularia inscripta & circumscripta, & Polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter Polygoni inscripti reperitur $3\frac{10}{71}$; perimeter vero circumscripti $3\frac{1}{7}$. Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho A CEULEN (*c*), *qui tandem reperit, posita diametro 1, peripheriam esse minorem quam* 3. 14159265358979323846264338327950, *sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam*

(*a*) In libro *De circulo & adscriptis.* Conf. *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* lib. 6. probl. 1. p. m. 241. & seqq.

(*b*) In libello *De circuli dimensione* prop. 2.

(*c*) In *Zetematum Geometricorum Epilogismo.* Zetem. 2. p. 92.

pheriam ut 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415 : *in qua proportione*, PTOLEMÆUS, VIETA, HUGENIUS *cum* LUDOLPHO *consentiunt.* HUGENIUS (*a*) *compendiosiorem monstravit viam; sed pluribus Theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415 : 10000 (§. 272 *Arith.*) hoc est 355 quam proxime.

SCHOLION II.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus METIUS *tradit* (*b*) *a parente suo inventam & demonstratam* (*c*), *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quodsi enim numerum* 355 *septem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas; quotus cum proportione* Ludolphina *collatus ostendet eam ne quidem* $\frac{3}{10000000}$ *a vera differre.*

PROBLEMA LX.

429. *Data diametro Circuli invenire peripheriam & aream ejus; & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426, 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arithm.*)
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410, 392).

Ex. gr. Sit diameter 56 : erit

100 — 314 — 56	Periph. 17584‴
56	¼ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 175′8″4‴	Area 24°61′76″00‴

(*a*) In *Inventis de circuli magnitudine* prop. 10. p. 15. & prop. 20. p. 40.
(*b*) In *Geometria practica*, part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89.
(*c*) In libello adversus quadraturam circuli Simonis A QUERCU conscripto.

COROLLARIUM I.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero Quadratum diametri 10000 (§. 370): ergo hoc ad aream Circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area Circuli $10028\frac{1}{4}$ (§. 429). Est vero Quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{1}{4}$ hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arithm.*); consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arithm.*), quæ *Metiana* proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

432. Area igitur Circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & Quadratum diametri; vel ad 452, 355 & Quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*).

Sit ex. gr. diameter 560″, erit quadratum ejus 31° 36′ 00″. Quare

1000 — 31° 36′ 00″ — 785
785

1568000
25088
21952

24°61′76″ Area Circuli.

COROLLARIUM IV.

433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF. Tab. VIII. *Fig.* 135.

PROBLEMA LXI.

434. *Data area Circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus

 quar-

quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui est quadratum diametri (§. 430).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§ 269 *Arithm.*), quæ est diameter (§. 236 *Arithm.* & §. 370 *Geom.*)

PROBLEMA LXII.

Tab. VIII. Fig. 133. 435. *Dato radio circuli* AC, *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam; invenire aream Sectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui est semiperipheria (§. 436 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*).
2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB, & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in semiradium.

Factum exprimet aream Sectoris (§. 415, 392).

Ex. gr. Sit radius $6'$; arcus 60°.

$$100 - 314 - 600'''$$
$$6\ 00$$

Semiperiph. 1884|00

$$180 - 1884 - 60$$

$$60)\quad 3 \text{———} 1$$
$$6\ 2\ 8''' = AB$$
$$3\ 00 = \tfrac{1}{2}AC.$$

Area 18′ 8 4″|00| = ACB

PROBLEMA LXIII.

Tab. VIII. Fig. 133. 436. *Datis altitudine Segmenti* DE *& dimidia basi* EA; *invenire aream ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 328). Tab. VIII. Fig. 133.
2. Describatur circulus (§. 131), & in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC, & ope Instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Dato jam radio AC, una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, investigetur area sectoris ACB, &
5. Ex chorda AB atque altitudinis segmenti DE complemento ad radium EC, area trianguli ACB (§. 392).
6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit Segmentum ADBEA.

Ex. gr. Sit AB = $600'''$, DE = $80'''$; erit DF = $1205'''$ (§. 328), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area sectoris ADBC = $18'84''$ (§. 435). Jam EC = $522\tfrac{1}{2}'''$, AE = $300'''$. Quare $\triangle$ ACB = $156750'''$; consequenter segmentum AEBDA = $31650'''$.

COROLLARIUM.

437. Quodsi Segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA sectori BFACB addendum.

SCHOLION.

438. *Ne pro invenienda area Sectoris atque Segmenti, peripheriam investigare opus sit; arcuum gradus atque scrupula, tam prima quam secunda, istiusmodi particulis expressa in Tabula subsequente exhibere placet, qualium diameter est* 100000. *Constructio Tabulæ intelligitur ex resolutione Problematis* 61 (§. 435). *Usus talis est. Sit ex. gr. ut in casu Problematis citati, diameter* $1200'''$, *arcus* 60°. *Cum* 60 *gradibus in Tabula respondeant* 52359 *particulæ diametri; inferatur:*

100000

$$\begin{array}{r} 100000 - 52359 - 1200 \\ 1200 \\ \hline 10471800 \\ 52359 \\ \hline 628|30800 \end{array}$$

Est ergo arcus 628''', ut supra (§. cit.) *eundem reperimus.*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

PROBLEMA LXIV.

439. *Parallelogrammum* ABEC *ex dato puncto* D *in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. *Fig.* 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD, & ducatur recta DF: erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD=FE, *per const.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 252). Est vero △ ACE = △ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arithm.*); consequenter ADFC =DBEF (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXV.

440. *Parallelogrammum atque Triangulum in partes quotcunque æquales dividere.* Tab. VIII. *Fig.* 137. 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In Parallelogrammo ducantur rectæ 11, 22; in Triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226, 227). Sunt itaque in basium ratione (§. 389); consequenter, ob C1=12 =2D, *per constr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem

(§.

(§. 228), adeoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & Triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXVI.

Tab. VIII. Fig. 139. 441. *Figuram rectilineam quamcunque* ABCDE *in partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 400), & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, ex. gr. in 3.
2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia, & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia dimidia, sive sexta totius figuræ, dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

Ex. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350″ & ABC = 108750″ (§. 392); adeoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732
AID = 40212 (155 +, seu 156 fere = IM
$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.
$\frac{1}{2}$ DI = 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LO
$\frac{1}{2}$ DK = 287) 287
1127
861
2662
2583
79

SCHOLION.

442. *Si* AED *majus tertia ex. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo* AED *auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars* AEDI *per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

SCHOLION II.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK *&* DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ solidæ.

DEFINITIO I.

444. *Solidum*, sive *Corpus*, est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem, atque profunditatem.

DEFINITIO II.

Tab. VIII. Fig. 141. 445. *Angulus solidus* B est plurium quam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano constitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *Anguli solidi æquales*, qui inter se invicem positi congruunt.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus solidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non constitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum solidum constituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad solidum constituendum necessarii.

SCHOLION I.

448. *Unde etiam* Angulus solidus *definitur, quod sit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non consistentibus, ad idem tamen punctum constitutis, continetur.*

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli solidi sint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine dispositis contineri debent, ut scilicet plana angulos planos æquales continentia æqualiter ad se invicem inclinentur.

SCHOLION II.

450. *Bene nimirum* TAQUETUS *observat, de angulis solidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo ratiocinandum esse, quo de planis, qui oriuntur ex linearum ad se invicem inclinatione.*

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli solidi distingui nequeant nisi per planos, quibus continentur (§. 445), ubi plani & numero, & magnitudine æquales, & planorum eos continentium eadem fuerit inclinatio, ea coincidunt per quæ a se invicem distingui debent. Sunt ergo similes (§. 24 *Arithm.*); consequenter anguli solidi similes sunt æquales & contra (§. 449).

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§. 41, 57), adeoque solidum angulum non constituunt (§. 446). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144) minor esse debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum, totidem numero ad angulos constituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* PLATO *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam, atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO IV.

Tab. VIII. *Fig.* 140. 456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma* ABCDFEA describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis, seu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare* sive *trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257); consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur. Tab. VIII. *Fig.* 140.

COROLLARIUM II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO V.

459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur. Tab. VIII. *Fig.* 141.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230); consequenter ABFE quadratum (§. 338) ipsi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

462. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur. Tab. VIII. *Fig.* 142.

COROLLARIUM I.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 462

(§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); adeoque & æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 142. 464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257); consequenter LMNO parallelogrammum (§. 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO VII.

Tab. VIII. Fig. 143. 465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF quam punctum C in descensu describit, centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *Cylindrum* describit *rectum*.

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 144. 467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis Coni*: qui si ad circulum basim coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM, seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta, vocatur *Latus Coni*. Possumus quoque *Coni* genesin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur: *Conus* describitur *rectus*.

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela, per ultimam coni genesin erit KL : KP = LM : PQ. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

SCHOLION.

469. *Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam describentem* KM, *quæ altero sui extremo peripheriæ* NM *constanter adhæret, per punctum fixum* K *aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.*

DEFINITIO IX.

470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur: diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*. Tab. IX. Fig. 145.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 40).

DEFINITIO X.

472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D Tab. IX. Fig. 146.

 coëun-

Tab. IX. Fig. 146. coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC : Dc = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 268); adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 167 *Arithm.*); consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 207). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres, &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473); consequenter cum vi demonstrationis primæ Problematis 47 (§. 363) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum. Tab. IX. Fig. 147. 148. 149. 150.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares. Tab. XI. Fig. 151.

DEFINITIO XIII.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

Tab. XI. Fig. 175. 478. *Recta lineæ pars quædam* AB *non est in subjecto plano* DE, *pars vero* BC *in sublimi.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum

Tab. XI. *Fig.* 175. surdum (*§.* 19), rectæ lineæ quædam pars AB non potest esse in subjecto plano DE, pars vero quædam BC in sublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. XI. *Fig.* 176. 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF segmentum commune DE habere nequeunt (*§.* 478); consequenter duæ rectæ AB & CF se mutuo non intersecant nisi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

Tab. XI. *Fig.* 177. 480. Cumque pars rectæ AD esset in subjecto plano, pars vero BD in sublimi, si trianguli ABC pars ADE esset in subjecto plano, pars vero DBCE in sublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

Tab. XI. *Fig.* 178. 481. Et quoniam rectarum BE & DC se mutuo secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC; erunt eædem in eodem plano (*§.* 480). Sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem est, in quo est AC (*§.* 478). Ergo lineæ se mutuo secantes EB & DC in eodem sunt plano.

THEOREMA II.

482. *Si duo plana* ABCD *&* EFHG *se mutuo secent; erit communis sectio recta* IK. Tab. XI. *Fig.* 179.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF se mutuo non intersecant nisi in puncto I, nec rectæ DC & GH nisi in puncto K (§. 479); si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri posse patet, si sectio communis planorum ABCD & EFHG non est recta unica IK, utut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari sumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170); consequenter communis sectio esse nequit nisi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.* Tab. XI. *Fig.* 179.

THEOREMA III.

483. *Si duæ rectæ* AB *&* CD *fuerint in eodem plano; recta* EF *eas secans in* G *&* H *erit in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.* 180.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta transiens per G & H est communis sectio planorum (§. 482). Sed eadem est pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD secat, *per hypoth.* Recta igitur EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. *Si recta* IE *fuerit perpendicularis ad duas rectas* KL *&* MN *in plano* ABCD *ductas* S, *&* *se mutuo in puncto* E *secantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam* OP, *quæ per punctum* E *ducitur in eodem plano.* Tab. XI. *Fig.* 181.

DEMONSTRATIO.

Fiat ME=EN & EL=EK. Quoniam MEL=KEN (§. 156), erit ML=KN, & angulus EMO=ENP (§. 179). Quare cum etiam sit MEO=PEN (§. 156), erit MO=PN & EO=EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN, *per hypoth.* erit angulus IEM=IEN (*§.* 79); consequenter, cum sit ME=EN, *per constr.* & IE=IE, etiam IM=IN. Eodem modo osten-

Tab. XI. Fig. 181. ostenditur esse IL=IK. Quoniam itaque ML=KN, *per demonstr.*; angulus INP=IMO, adeoque, ob IN=IM & PN=OM, *per demonstr.*, IP=IO (§. 179). Est vero etiam EP=EO, *per demonstr.*, & IE=IE. Quamobrem angulus IEP=IEO (§. 204); consequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE, ad duas rectas KL & MN in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA V.

Tab. XI. Fig. 182. 487. *Si recta* IE *fuerit ad planum* ABCD *perpendicularis, & ex* E, *tanquam centro, in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ* IG, IF, *&c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG, &c. erit EF=EG (§. 40); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam FEI=GEI (§. 145). Quare cum porro sit EI=EI; erit FI=GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. XI. Fig. 181. 488. *Ex eodem puncto* E *ad planum* ABCD *nonnisi unica perpendicularis* EI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ, & per punctum E transiens in plano recta OP sit cum rectis EI & EQ in eodem plano: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

489. *Ab eodem puncto* I *in sublimi dato ad idem planum* ABCD *perpendicularis nonnisi unica* IE *demitti potest.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

490. *Linea perpendicularis* IE *est brevissima, quæ a puncto extra planum dato ad idem duci potest.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480), & angulus ad E rectus (§. 486). Est igitur IE $<$ IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

491. *Si recta* LE *tribus rectis* FE, HE, IE, *vel etiam pluribus in eodem puncto* E *concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt tres illæ rectæ* FE, HE *&* IE *vel etiam plures in eodem plano* ABCD. Tab. XI. Fig. 183.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 183. Sit enim, si fieri potest, recta EF in plano LEGK, quod secat planum ABCD, in quo sunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 482). Quoniam LE perpendiculariter insistit duabus rectis EH & EI in plano ABCD, *per hypoth.* eadem quoque ad angulos rectos insistit rectæ EG (§. 485). Sed cum LE etiam perpendicularis sit ad EF, *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§ 78); consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), rectæ FE, HE, & IE, quibus LE perpendiculariter insistit, in eodem sunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Quod si lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter insistit, cum sit tertia cum prima & secunda in eodem plano, *per demonstrata*, erit etiam quarta cum secunda & tertia in eodem plano, & ita porro. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

Tab. XI. Fig. 184. 492. *Lineæ rectæ* GE *&* HF *eidem plano* ABCD *perpendiculares sunt inter se parallelæ; & si una parallelarum* GE *&* HF *fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF & EL=EF. Cum GE perpendicularis sit ad planum ABDC, *per hypoth.* insistet ea rectis EF & EL in plano isto ductis ad angulos rectos (§. 486). Moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut ad planum semper sit recta, describet ea planum GELI, eritque LI, tum ad planum, tum ad EL perpendicularis; consequenter ipsi GE parallela (§. 256). Moveatur planum GELI circa rectam quiescentem GE, donec EL ipsi EF congruat (§. 168); cadet planum GELI in planum, in quo sunt rectæ EG & EF: quoniam itaque tam HF, *per hypoth.*, quam LI ad planum ABCD in puncto F perpendicularis, *per demonstr.*; ad idem vero punctum F nonnisi unica recta plano perpendicularis esse potest (§. 488); etiam recta LI cadet in FH; consequenter FH erit parallela ipsi GE. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Quod si reliqua ponantur ut ante; dum planum GELI incidit in planum GEFH, rectæ EG parallela LI cadet in rectam eidem parallelam FH (§. 260); consequenter cum LI sit ad planum perpendicularis, etiam FH ad idem perpendicularis erit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* EUCLIDES Planum *definit* ad planum rectum *sive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ sunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA XI.

495. *Rectæ* AB *&* EF, *quæ sunt eidem rectæ* CD *parallelæ, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelæ.* Tab. XI. Fig. 185.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 185. Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad CD perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad CD in plano parallelarum CD & EF. Jungantur puncta G & I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§. 480). Quoniam CH ad planum GHI perpendicularis (§. 484); erunt etiam AG & EI ipsi CH parallelæ *per hypoth.* ad idem planum perpendiculares (§. 492); consequenter inter se parallelæ (§. *cit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. X. Fig. 167. 496. *Si duæ rectæ* AC *&* CB *fuerint parallelæ duabus rectis* DF *&* FE, *etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CB=FE & CA=FD: quoniam CB parallela ipsi FE & CA parallela ipsi FD, *per hypothesin;* erit BE ipsi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257); consequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257). Est igitur angulus DFE=ACB (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab. XI. Fig. 186. 497. *Si recta* IK *duobus planis* ABCD *&* EFGH *fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque IK ad planum EG recta sit, *per hypoth.* ad IK parallela est (§. 492). Tab. XI. Fig. 186. Quamobrem si puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K perinde ac I rectus (§. 486), consequenter LM=IK (§. 238). Cum eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi IK parallelam eidem æqualem esse; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 490, 15) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* Planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela est* (§. 81), *si ubivis eandem ab eadem distantiam servat.*

THEOREMA XIV.

499. *Si planum* ADCB *secet duo plana parallela* EFGH *&* IKLM; *erunt sectiones* AD *&* BC *inter se parallelæ.* Tab. XI. Fig. 187.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81, 83). Cum igitur, si plana cum ipsis continuentur, totæ in iisdem sint (§. 478); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

500. *Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes* AC *&* AB *duabus aliis se mutuo tangentibus* EG *&* EF *fuerint parallelæ, etiam plana* ACDB *&* EGLF *per ipsas ducta erunt parallela.* Tab. XI. Fig. 188.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. *Fig.* 188. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495) & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis est ad AB & AC (§. 230) adeoque ad planum ABCD (§. 484, 486); consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

Tab. XI. *Fig.* 189.

THEOREMA XVI.

501. *Duæ lineæ rectæ* NR *&* OS *a planis parallelis* ABDC, EFHG, IKLM *proportionaliter secantur, ut nempe sit* PR : PN = TS : TO.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S, rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499.). Est igitur RQ : QO = RP : PN, & QR : QO = TS : TO (§. 268); consequenter RP : PN = TS : TO (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. XI. *Fig.* 182.

PROBLEMA I.

502. *Ad datum planum* ABDC *in dato puncto* E *erigere perpendicularem* EI.

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet, quod mechanice præstatur ope filorum æqualium ex dictis punctis extensorum: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487). Tab. XI. *Fig.* 182.

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti EIF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Necesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM II.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet. Tab. XI. *Fig.* 190.

THEOREMA XVII.

506. *Si recta* IK *sit ad planum* ABCD *perpendicularis; planum quodcunque, veluti* EHGF, *quod per eam ducitur, ad idem planum* ABCD *perpendiculare est.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad sectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam sit IK ad HG perpendicularis, (*per hypoth.* & §. 468) erit LM ipsi IK parallela (§. 256). Enimvero IK perpendicularis est ad planum ABCD, *per hypoth.* Ergo etiam LM (§. 492).

Est igitur planum EHGF ad planum ABCD rectum (§. 494). *Q. e. d.*

SCHOLION.

507. *Nemo non videt demonstrationem subsistere eandem, etiamsi in locum plani EFHG planum quodcunque aliud surrogetur, quod per IK ducitur.*

Tab. XI. Fig. 191.

THEOREMA XVIII.

508. *Sectio* NO *duorum planorum* EFGH *&* IKLM *ad idem tertium* ADCB *perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare, *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 502). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§. 482); sectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

Tab. IX. Fig. 151.

509. *Plani* KLGE *ad planum* ABDC *in omnibus punctis* F, f *&c. inclinatio eadem.*

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§. 212); fiatque HF=*hf* & FI=*fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256); consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h*=F*f*, itemque I*i*=F*f* (§. 257), adeoque etiam H*h* parallela ipsi I*i* (§. 495) & H*h*=I*i* (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257): erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De Solidorum Constructione.

PROBLEMA II.

Tab. VIII. Fig. 141, 142.

510. *Cubum* ADCBFEHG, *vel Parallelepipedum* IKMLNOPQ *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).
2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338, 340); pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKOP (§. 339, 341). Tab. VIII. Fig. 141, 142.

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur; ut-

Tab. VIII. *Fig.* 141, 142. ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus (§. 459); solidum vero LP parallelepipedum (§. 462).

PROBLEMA III.

511. *Prisma* ACBFDE *in plano describere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. *Fig.* 140.
1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).
3. Construantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).

Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456, 457).

PROBLEMA IV.

Tab. IX. *Fig.* 146. 512. *Pyramidem* DACB *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.
2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: seu, assumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA V.

Tab. IX. *Fig.* 152. 513. *Rete describere, ex quo Cubus construi possit.*

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249), & parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339). Tab. IX. *Fig.* 152.
3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM, & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH, & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt, *per constr.* & AI=CK=AC, *per constr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, MLNO, &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

514. *Rete describere, ex quo Parallelepipedum construi potest.* Tab. IX. *Fig.* 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI construantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedi æqualis (§. 339).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF = HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum construere licet (§. 463, 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA VII.

515. *Rete pro Prismate describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 154.

1. Construatur basis prismatis, ex. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB=BK & DE=DK.
3. Super AB, BD & DE construantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æqualis (§. 339).
4. Denique fiat super GH triangulum GIH, ipsi BKD æquale (§. 205).

Ex hoc reti prisma triangulare, nec absimili modo multangulare quodcunque construetur (§. 457).

THEOREMA XX.

Tab. IX. Fig. 155.

516. *Superficies Cylindri recti, seclusis basibus, æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine Cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectæ EG & FH inter se parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH parallelus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFHG æqualia, resolvitur, quorum communis altitudo est EG seu altitudo cylindri (§. 229), bases vero junctim sumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri (§. 389). *Q. e. d.*

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet casu tam exiguus assumitur, ut, si ejus differentia multiplicari supponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur divisa, prodeat particula in dato casu inassignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri posse patet, quod polygonum circulo inscriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum est in aliis casibus, ubi de infinite parvo sermo fuerit. Sed ex instituto ea de re dicimus in Philosophia prima.*

PROBLEMA VIII.

518. *Rete pro Cylindro describere.*

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro describantur circuli AB & CD. Tab. IX. Fig. 156.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 429).
3. Super BC altitudini cylindri æquali construatur rectangulum (§. 339), ita ut CD sit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus (§. 516).

THEOREMA XXI.

519. *Superficies Coni recti seclusa basi, æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus Coni.* Tab. IX. Fig. 157.

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur: cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467, 251). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§.415), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam diameter basis ad latus coni (§. 412 *Geom.* & §. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

521. *Rete pro Pyramide describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX Fig. 158. Sit ex. gr. construenda pyramis triangularis.

1. Radio AB describatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter se æquales.
2. Super DC construatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera basis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens est fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid facto opus sit, si basis fuerit polygonum, sive regulare, sive irregulare.*

PROBLEMA X.

523. *Rete pro Cono recto describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 159.

1. Diametro basis AB describatur circulus, & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.
2. Quæratur ad 2 AC & AB, in numeris determinatas, atque 360°, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
3. Radio CA, ex centro C describatur arcus DE, & ope Instrumenti transportatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quæratur, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. *Rete pro Tetraëdro describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 160.

1. Construatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198).
2. Super singulis ejus lateribus construantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. *cit.*)

Ex hoc reti tetraëdrum construi potest (§. 475).

COROLLARIUM.

526. Quodsi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in resolutione Problematis construantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti Octaëdrum construi potest (§. 475). Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA XII.

527. *Rete pro Icosaëdro describere.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 162.

1. Construatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198).
2. In basi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.
3. Per C agatur ipsi AB parallela CE (§. 258), & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 164. Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem existent quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20° 570′824″. Similiter cum pertica *Rhenana* sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodsi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

SCHOLION.

533. *Patet adeo, quantum divisio mensuræ in 10 partes præstet divisione in 12.*

COROLLARIUM II.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*), & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA XXIII.

535. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463, 458, 466); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87 *Arithm.*); consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

536. *Metiri superficiem ac soliditatem Parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375, 387). Tab. VIII. Fig. 142.
2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodsi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit ex. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	
Solid. 6°480′	23°04′ Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in Probl. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

Tab. X. Fig. 165. 537. *Planum diagonale* AHFD *dividit Parallelepipedum* ABDCEFG *in duo Prismata* ADCEFH *&* ADBFGH *inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad planum ACDB (§. 462), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 486); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 535). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super dupla basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem Prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur basis (§. 392, 400, 402) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium, & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 457). Tab. VIII. Fig. 140.

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

Ex. gr. Sit BC = 4° 3′ 2″, AG = 3° 5′ 7″
CD = 8° 6′ 9″.

½BC = 216″	AC = 432″
AG = 357	CD = 869
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112″	ACDE 375408
	3
CD = 869	1126224
	2 ABC 154224
694008	
462672	Superfic. 128° 04′ 48″
616896	
67° 010′ 328″ Solidit.	

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem, soliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soli-

soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis: parallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

PROBLEMA XVIII.

541. *Data diametro* AB *& altitudine Cylindri* CF; *invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

Tab. VIII. *Fig.* 143.

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies, seclusis basibus (§. 516).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex. gr. Sit $AB = 5^{0}\,6'$, $CF = 24^{0}\,6'$; erit

peripheria = 1 7°5 8 4
CF = 24°6 0 0

1 0 5 5 0 4 0 0
7 0 3 3 6
3 5 1 6 8

Sup. absque Bas. 4 3 2°5 6′6 4″|00
Dupl. Bas. 4 9 2 3 5 2

Superfic. 4 8 1°8 0′1 6″
Basis = 2 4°6 1′7 6″
CF = 2 4 6 0

1 4 7 7 0 5 6 0
9 8 4 7 0 4
4 9 2 3 5 2

Solidit. 6 0 5°5 9 2′9 6 0″

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

542. *Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt æquales.* Tab. X. *Fig.* 166.

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258), erit $IK = LM$ (§. 226); adeoque ob $CK = DM$, *per hypoth.* $CI = DL$ (§. 91 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit $\triangle CEF \sim \triangle CAB$, & $\triangle DGH \sim \triangle DAB$ (§. 268); erit $CI : CK = EF : AB$, & $DL : DM = GH : AB$ (§. 396). Sed $CI = DL$ & $CK = DM$, *per demonstr.* Ergo $EF : AB = GH : AB$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $EF = GH$ (§. 177 *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474); consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$, *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 *Arithm.*); consequenter

plana

Tab. X. *Fig.* 166. plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & disci, quantumlibet exiguæ crassitiei, in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque, ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit necesse est (§. 88 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468). Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171); eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Prisma triangulare in tres Pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. *Fig.* 167. Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498), atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457) △CFB = △BFE (§. 337). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent; ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis duci potest (§. 489); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent; consequenter æquales sunt (§. 542). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM I.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

547. Quia Conus pro pyramide infinitangula haberi potest, & Cylindrus pro prismate infinitangulo; Conus pars tertia est Cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem Pyramidis & Coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 539, 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 546. 547).

Ex. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010328‴, ut in Probl. 17 (§. 539); erit soliditas pyramidis 22336776‴. Si soliditas cylindri fuerit 605592960‴ ut in Probl. 18 (§. 541); erit soliditas coni 201864320‴.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392), atque in unam summam colligantur. Tab. IX. *Fig.* 146.

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 519), & basi, qui circulus est, eidem addita.

Tab. IX. Fig. 144. Ex. gr. Sit diameter coni $NM = 56'$; erit peripheria $17584'''$, basis $246176''$ (§. 429). Sit altitudo $KL = 246'$. Quoniam $LM = \frac{1}{2} NM = 28'$ & $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 61300$ (§. 417); erit $KM = 2475''$ (§. 269 *Arithm.*), consequenter superficies coni, seclusa basi, $2176020''$ & hinc integra $2422196''$.

PROBLEMA XX.

549. *Metiri superficiem ac soliditatem Coni truncati: datis ejus altitudine* CH *&* *diametris basium* AB *&* CD.

Tab. X. Fig. 168. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH, & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut habeatur latus AC. (§. 417).
3. Semisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit superficies coni truncati.

Sit ex. gr. $AB = 8'$, $CD = 6'$, $CH = 10'$, erit $AH = 1'$.

$100 - 314 - 8'$
8

$2512'''$ periph. maj.
$CH^2 = 100'$
$AH^2 = 1$

$AC^2 = 101$

Ergo $AC = 1005'''$ fere,

$100 - 314 - 6'$
6

$1884'''$ Periph. min.

2512 Periph. maj.
1884 min.

4396 Summa.

2198 Semisumma.
1005 AC

10990
219800

$2020'89''90'''$ Superfic. coni trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD descripta, altitudo MK, latus EC; superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO peripheriis diametris CD atque AB descriptis, æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 168. n. 1. n. 2.

II. Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad candem in cono recto perpendicularis (§. 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela CD & AB, *per hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ (§. 499); conse-

consequenter CG = HF (§. 226), & CH = FG (§. 238). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita semidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per Probl. 33. Arithm. (§. 302 *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa subducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE = 40', & hinc EG = 30'.

Periph. major	2512'''
$\frac{1}{4}$ AB	200
Basis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Periph. min.	1884'''
$\frac{1}{4}$ CD	$1\frac{1}{2}00$
	94200
	1884
Baſ. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Con. trunc.	$387266666\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius diffident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

551. *Sphæra est ad Cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.* Tab. X. *Fig.* 169.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, quadratum quidem cylindrum (§. 465), quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitiei secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est, cum sit, ob parallelismum EH & CB, *per hypoth.* EH = CB (§. 238) = CG (§. 40), atque ob CD : DA = CE : EF (§. 268) & CD = DA (§. 98), EC = EF, ut quadrata

 recta-

rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§ 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphæræ relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus triens cylindri (§. 547). Ergo sphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri est ad Sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum sphæra basin & altitudinem habens 785000 (§. 541); consequenter sphæra 1570000 : 3. (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 181, 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri esse ad sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In Demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 426.).

THEOREMA XXX.

554. *Superficies Sphæræ est quadrupla circuli radio Sphæræ descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphæræ (§. 550); superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551, 541). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208, 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata.* Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta; consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 375).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro Sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 555).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 550, 548).

Ex. gr. Sit diameter 5600''', erit

Periph. Circuli	17584''''
Diam.	5600
	10550400
	87920
Superf. sphær.	98470400''''

Superf.

Superf. Sphær.	984704''|00
Diamet.	560''
	59082240
	4923520
	551434240

551434240 ($91905706\frac{2}{3}$ Sol. Sphær.
666666666

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000'' (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000'' numerus quartus proportionalis $91905706\frac{2}{3}$ (§. 302 *Arithm.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552).

SCHOLION.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA XXII.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque Corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per Probl. 15 (§. 539). Tetraëdrum cum sit pyramis, & Octaëdrum pyramis geminata, Icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie Icosaëdri & Dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt (§. 472, 475); horum corporum soliditas habetur per Probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icosaëdro per 20 (§. 475).

PROBLEMA XXIII.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.* Tab. X. Fig. 170.

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua aut arena superfundatur, & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis ECGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per Probl. 16 (§. 536).

Sit ex. gr. AB 8', AC 5'; erit BC 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLION I.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, ex. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum, aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION II.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydrostaticas aliis*

aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendetur.

PROBLEMA XXIV.

563. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ Problematis præcedentis (§. 559).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphæra, pyramis, vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536, 539, 541, 548, 556) inveniatur: hac enim ex ista subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit ex. gr. soliditas cylindri cavi ABCD invenienda, sitque diameter totius corporis AB 56', longitudo AC 2° 4' 6'', erit soliditas cylindri inclusa cavitate 605' 592'' 960'''. Sit diameter cavitatis 500''; erit soliditas 482' 775'' 000''': quæ ex supra inventa subducta relinquit soliditatem corporis cavi 122' 817'' 960'''. Tab. X. Fig. 171.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. *Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 119). Sunt igitur & ipsa similia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis similibus anguli homologi sint æquales (§. 175), anguli vero solidi homologi ex concursu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus similibus multitudine æqualium oriantur (§. 564); in corporibus similibus anguli solidi homologi æquales sunt (§. 449).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si ex. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile *abdcehgf* (quod in Tabula non expressimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd*, & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo sit AB : *ab* = BD : *bd*, & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arithm.*); corporum similium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione existunt. Tab. X. Fig. 165.

COROLLARIUM III.

567. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98, 175). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 564).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regu-

regularibus, adeoque similibus (§. 106, 175) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

COROLLARIUM V.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 475).

THEOREMA XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 143. Tab. IX. Fig. 144. Si coni & cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arith.*). Patet vero conos & cylindros non posse distingui, nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM, atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465, 467). Axes igitur in conis & cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis, perinde ac in planis (§. 227), altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in conis & cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465, 467), adeoque patet *per demonstrata*, altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 267), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIII.

571. *Omnis Sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione Theorematis 1 Part. 1 (§. 135). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 470): omnes igitur sphæræ eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.* Tab. IX. Fig. 145.

THEOREMA XXXIV.

572. *Omnia Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536, 539, 541, 548, *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465, 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicunque *sunt in ratione composita* ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

COROLLARIUM III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 *Arithm.*).

PROBLEMA XXV.

576. *Invenire Cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem; vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, ex. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Ex ea, vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, ex. gr. triplo aut subquadruplo, extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

Ex.gr. Sit soliditas cylindri 107° 171′ 875″ reperietur latus cubi æqualis 4° 7′ 5″.

PROBLEMA XXVI.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest; invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos data.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536, 539, 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).
3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*)
4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387, 392, 402, 456, 462), quorum alteruter pro basi triangularis prismatis per 2 multiplicanda (§. 392); & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

Ex. gr. Sit soliditas alicujus corporis 3° 456′ 978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2° 4′ 6″. Reperietur basis 1° 40′ 53″ fere; diameter 134″.

THEOREMA XXXV.

578. *Corpora similia, Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides, atque Coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406, 409) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 159 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæræ sunt ut Cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. * Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumscriptum (§. 351). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470, 465). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex Theorematis 1 Part. 1. demonstratione constat (§. 135), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 175); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119, 120). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam sphæram (§. 132 *Arithm.*); consequenter sphæræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia Parallelepipeda, Prismata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 536, &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad Cubum diametri ut* 785 *ad* 1000. Tab. X. Fig. 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA XXVII.

582. *Virgulam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, ex. gr. vini, cerevisiæ, &c. in vase cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

Tab. X. *Fig.* 172. n. 1. 2.

1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensuræ qua ad fluida mensuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249).
2. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.
3. Fiat A2 = B1, erit B2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capaciorum A3, A4, A5, A6, A7 &c.
4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7, &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum Scalæ geometricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB=1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in usum constructa est Tabula sequens: Tab. X. *Fig.* 172.

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DEMONSTRATIO.

Tab. X. *Fig.* 172. Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur, habebuntur in resolutione altera diametri ipsæ (§. 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB=A1, erit ipsius B1 quadratum duplum, quadratum ipsius B2 triplum, quadratum ipsius B3 quadruplum &c. quadrati ipsius A1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A2, A3, A4 &c. diametros vasorum quæsitas. Quodsi itaque has divisiones ad diametrum vasis cylindrici applices; illico constabit, quot mensuras capiat vas cylindricum eandem cum isto basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro, ope alterius divisionis in virgula factæ, investiges quoties altitudo unius mensuræ in altitudine vasis dati contineatur, & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. *Ex. gr. Sit diameter vasis cylindrici* 8, *altitudo* 12; *erit numerus mensurarum, quas capit* 96.

SCHOLION II.

584. *Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam diametri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur.* BAYERUS (*a*) *suadet, ut altitudo nonnisi unius digiti assumatur.*

SCHOLION III.

585. *Inveniuntur autem diametri vasorum unam vel plures partes decimas mensuræ capientium, si decima vel plures decimæ partes vasis unam mensuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis* (§. 541): *etenim hac data diameter habetur per Probl.* 58 (§. 434). *Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas & plures mensuras capientium.*

SCHOLION IV.

586. *Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri pro mensuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius mensuræ* 1 *seu* 1000 *partium decimalium; erit ejus quadratum* 1000000: *cujus pars decima* 100000. *Inde extracta radix quadrata* 316 *continet partes decimales diametri unius mensuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam mensuræ partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, nempe* 200000, *radix extrahatur; prodit diameter basis duas decimas unius mensuræ capientis* 447, *& ita porro. Quodsi quadrato diametri unius mensuræ* 1000000 *adjicias partem decimam* 100000 *& ex summa extrahas radicem quadratam* 1.049; *erit ea diameter vasis, quæ capit* $1\frac{1}{10}$ *mensuræ. Ratio patet per Demonstrationem Problematis præsentis. Atque sic patet, quomodo Virgula pithometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.*

(*a*) *In der vollkommenen Visier-Kunst*, c. 25. *p.* 126.

Diametri pro mensuris integris & earum partibus decimalibus.

		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

SCHOLION V.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensura assumtus est cubus. Unde & Virgula pithometrica sic constructa* Virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.*

PROBLEMA XXVIII.

588. *Invenire soliditatem Dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi Probl. præc. (§. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB. Tab. X. Fig. 173.
2. Cum, experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 330 *Arithm.*), qui *Diameter æquata* dici solet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum, *vi demonstrationis Problem. præced.* (§. 582) numerus mensurarum, quas capit Dolium.

Sit ex. gr. AB = 8, GH = 12

erit AB + GH = 20

$\frac{1}{2}$ (AB + GH) = 10.

AC = 15

$\frac{1}{2}$(AB + GH) = 10

capac. dolii 150 mens.

SCHOLION I.

589. *Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo Dolii æqualis assumere solent.*

SCHOLION II.

590. *Tabulæ, ex quibus inter se coassatis Dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non assumenda est recta FE, sed AC, quæ habetur; si quantitas prominentiæ tabularum, una*

Tab. X. Fig. 173. *una cum ejus dimidio cui fundi craſſities æqualis ſupponitur, a recta FE utrinque ſubtrahitur. Solent autem quantitates ſubtrahendas creta notare utrinque in ipſa ſuperficie Dolii, ex. gr. in K, ſi quantitas ſubtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem Virgulam parant, in partes minutas æquales diviſam.*

SCHOLION III.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema craſſis & orbibus ligneis pariter craſſis Dolium conſtruunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION IV.

592. *Poſſemus equidem ſoliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo ſupra corpora cava metiri docuimus (§. 563): ſi enim per ſoliditatem unius menſuræ divideretur, prodiret Dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obſtat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION V.

593. *Proſtat etiam methodus, qua ſine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in* Batavia *&* *variis* Germaniæ *locis. Sed cum ſupponat, omnia Dolia eſſe inter ſe ſimilia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc eſt, ſemiſummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* KEPLERUS (*a*) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas menſorum in ſe continet.* Virga enim, *inquit*, introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum qui vincula ſunt, viminumque quibus circuli lignei ſtringuntur. Eliminat exceſſum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia menſurandi una eademque opera præſtare nulla poteſt. *Unde ad privatorum ſecuritatem fraudeſque eliminandas ſuadet*, ut lex illa Dolii conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum, magiſtratuum autoritate diligentiaque conſervetur, pœniſque & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in Doliis* Auſtriacis *obſervatur.*

SCHOLION VI.

594. *Sunt, qui aſſumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus ſoliditatem per Probl. 20 (§. 549) quærunt. Alii cum aliis corporibus geometricis id comparant.* CLAVIUS (*b*) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro fruſto ſphæroidis* Archimedeæ *habet, quoad prius conſentiente, quoad poſterius vero contradicente* KEPLERO (*c*). CLAVIO *tamen aſſentitur* OUGHTREDUS, *cumque in finem regulam a ſe inventam propoſuit* (*d*). WALLISIUS *pro fruſto fuſi parabolici habet* (*e*). *Enimvero cum methodus propoſita praxi ſatis reſpondeat, reliquæ vero quæ ab* Anglis *potiſſimum proponuntur* (*f*), *utut ex profundiori Geometria derivatæ, moleſtiores ſint, nec ex Elementis Geometriæ demonſtrari poſſint; illa contenti eſſe poſſumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ menſoriæ a* KEPLERO *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA XXIX.

595. *Conſtruere Virgulam pithometricam, qua ſine calculo capacitatem Dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum vaſa pro quibus Virga hæc paratur, eſſe debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoliditas unius menſuræ ad numerum quartum proportionalem, per Probl. 33 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam menſuram capientis (§. 581). Tab. X. Fig. 172. n. 1.

2. In-

(*a*) In *Stereometria doliorum vinariorum*, Part. 3. art. 3. f. n. 3.

(*b*) *Geom. pract.* lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.

(*c*) In *Stereometria* part. 2. fol. H. 3.

(*d*) In *Clave mathematica* c. 19. p. m. 103.

(*e*) In *Algebra* c. 81. Vol. II. Oper. f. 350.

(*f*) Vid. *The general Gauger* by Mr. DOUGHARTY p. 141 & ſeqq.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem, & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis, *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres. quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam, ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (*§. cit. & §. 260 Arithm.*). Quare si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa, & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000, &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vasorum, quæ duas, tres, quatuor, &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in Virgulam, & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac Scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in Virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præsente casu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisummæ diametrorum orbis AB & ventris GH, estque FB $= \frac{1}{2}$ (AB + GH), adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.* Tab. X. Fig. 173.

SCHOLION I.

596. *Constructioni Virgulæ itaque inservit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

SCHOLION II.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet*, *quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia Dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PROBLEMA XXX.

598. *Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus mensurarum ex. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.

Tab. IV. *Fig.* 81.

2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in Dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, ex. gr. in 200 aut plures.

Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

SCHOLION.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem Dolio istiusmodi Virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emissæ respondent, ex. gr. si integrum Dolium capiat 64 mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribitur 63.*

PROBLEMA XXXI.

600. *Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur capacitas totius Dolii *per Probl.* 28 (§. 588). Tab. X. *Fig.* 173.
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una Dolii parte altius sit, quam in altera, Virga per Problema præcedens (§. 598) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rursus extracta, notetur quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per Probl.* 33 *Arithm.* (§. 302) inveniendum.

Tab. X. Fig. 173. 5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, notetur que eorum numerus, quæ ipſi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i.*

Ex. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 menſurarum.

Fiat : 160 — 58 — 120 42
40) 4 3 3 ~~17~~ (43$\frac{1}{4}$
174 ~~44~~

Ponamus partibus 43$\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in Scala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus 25$\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt.

SCHOLION.

601. *Si Dolia omnia eſſent ſimilia per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in Dolio non pleno: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori geometrico ſatisfaciens & praxi reſpondens. Quam enim* KEPLERUS *dedit* (a), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (b): *ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* BAYERUS (c) *&* DOUGHARTY (d) *tradunt.*

(a) In *Stereometria Doliorum*, f. O. 2. b.
(b) *In dem Auszuge der uhralten Meſſe-Kunſt* ARCHIMEDIS §. 88. f. 95.
(c) In *Conometria Mauritiana* c. 9. p. 102. & ſeqq.
(d) *The General Gauger* p. 164. & ſeqq.

Finis Elementorum Geometriæ.

ELEMENTA

ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

MOMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe Stellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, Eclipſium tam ſolarium quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei, & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi mixta ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, ex. gr. Iridis phænomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejuſdem

 uſus

uſus ex his ipſis etiam Elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: In Elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tyronibus; nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum Theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.

Fig: Geom: Tab: I.

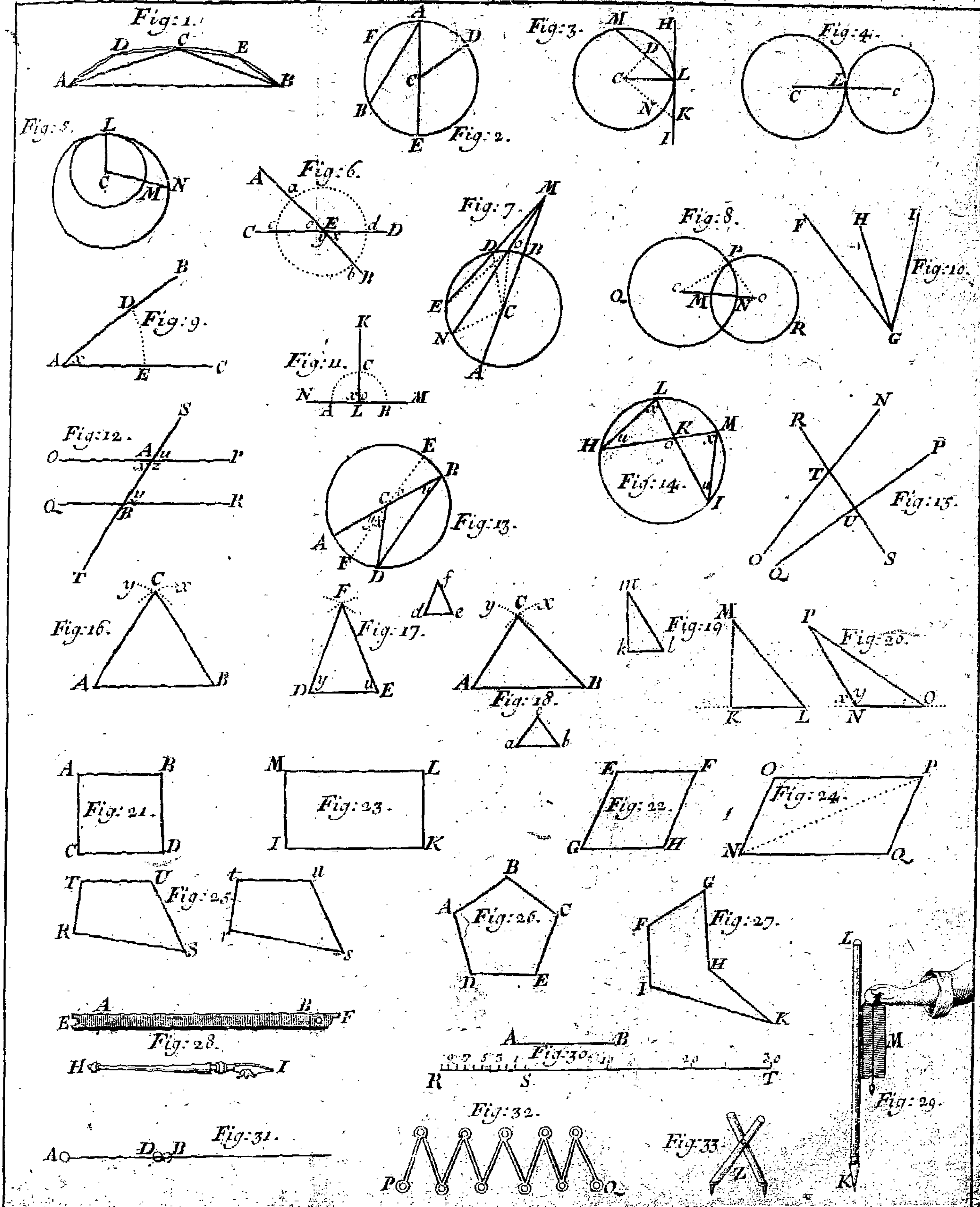


Fig: Geom: Tab: II.

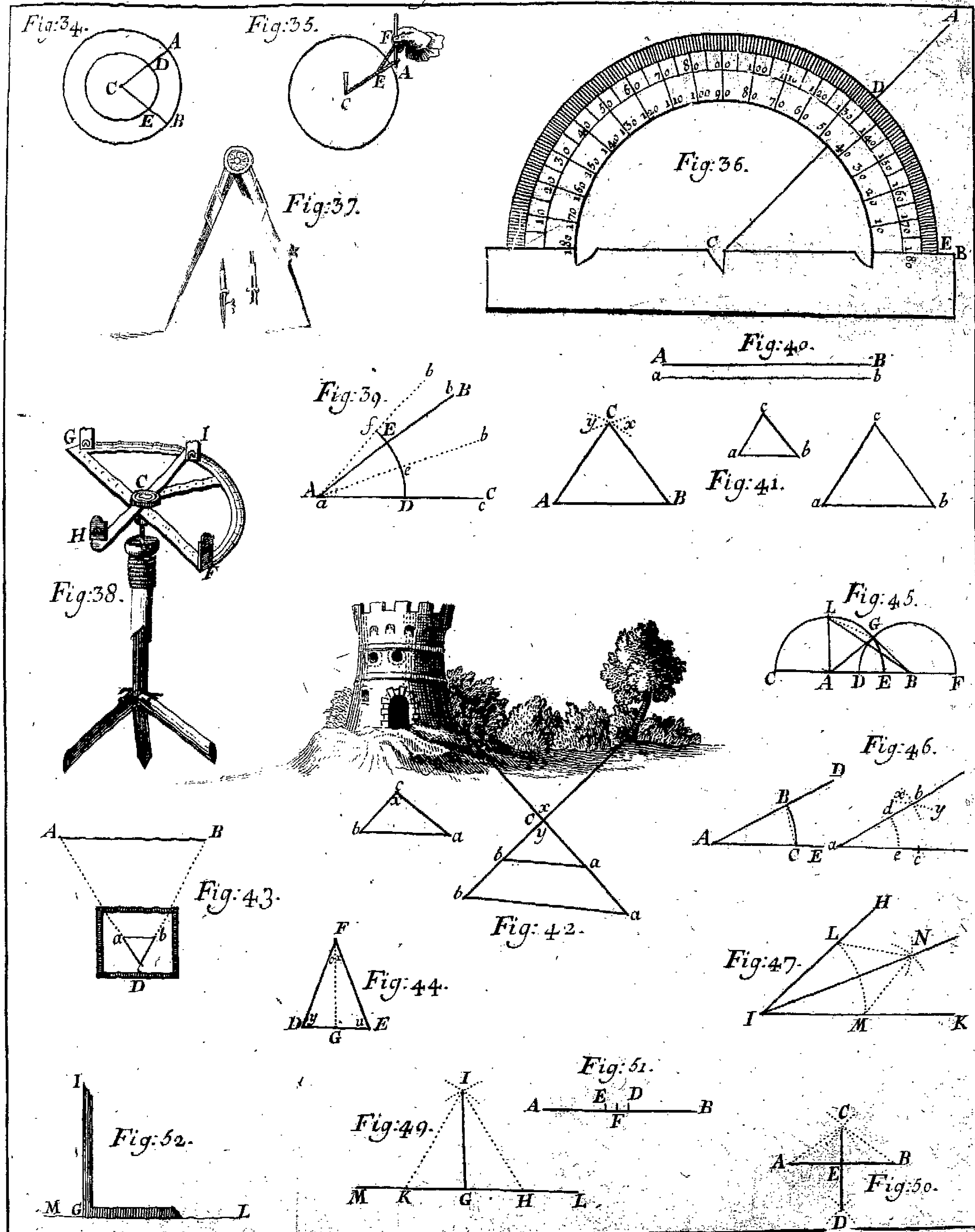


Fig. Geom. Tab. III.

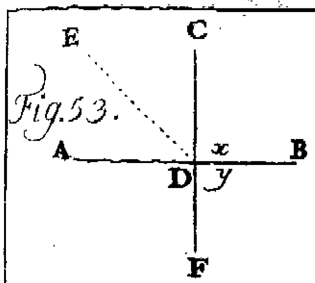
Fig. 53.


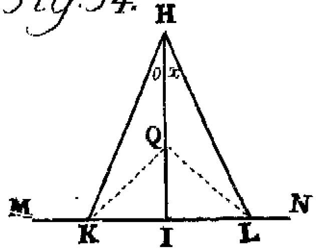
Fig. 54.


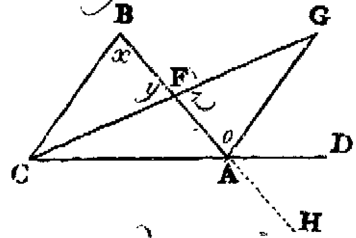
Fig. 55.


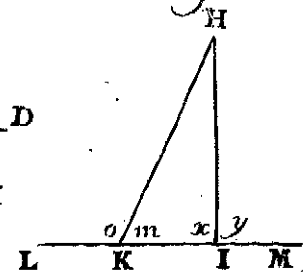
Fig. 56.


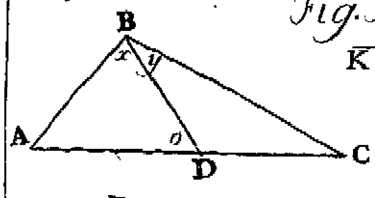
Fig. 57.


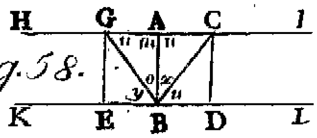
Fig. 58.


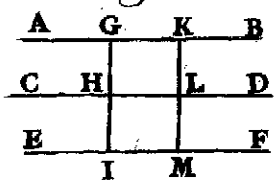
Fig. 59.


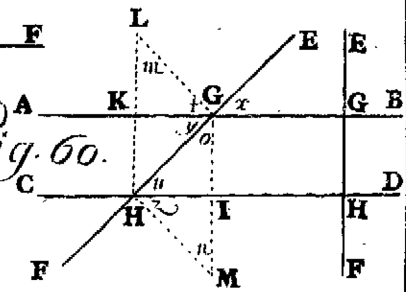
Fig. 60.


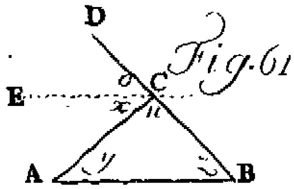
Fig. 61.


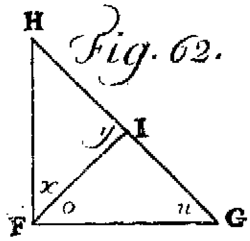
Fig. 62.


Fig. 63.

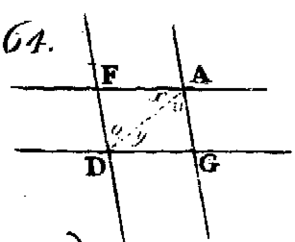

Fig. 64.


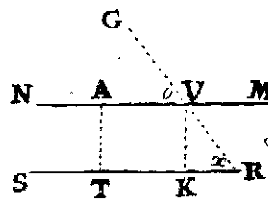
Fig. 65.


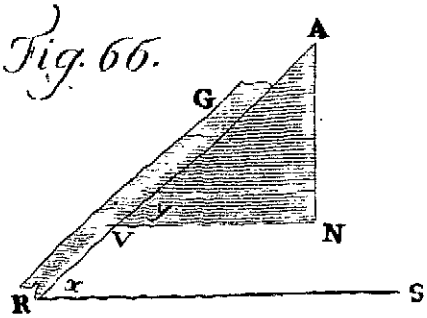
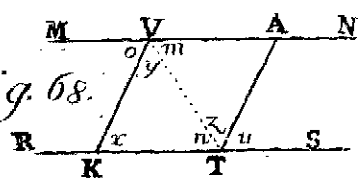
Fig. 66.


Fig. 67.


Fig. 68.


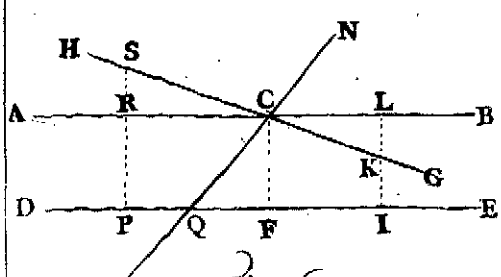


Fig. 69.

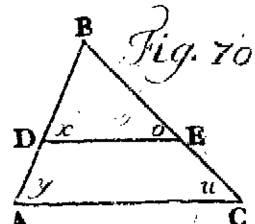
Fig. 70.


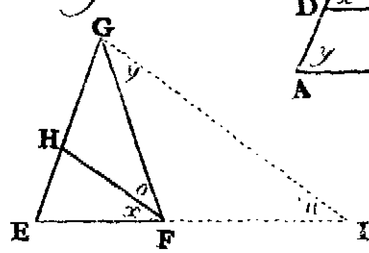
Fig. 71.


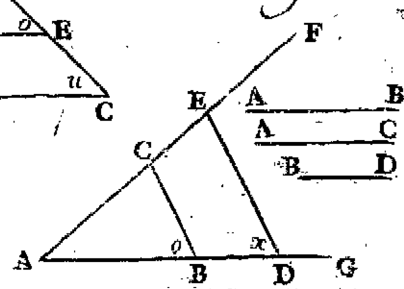
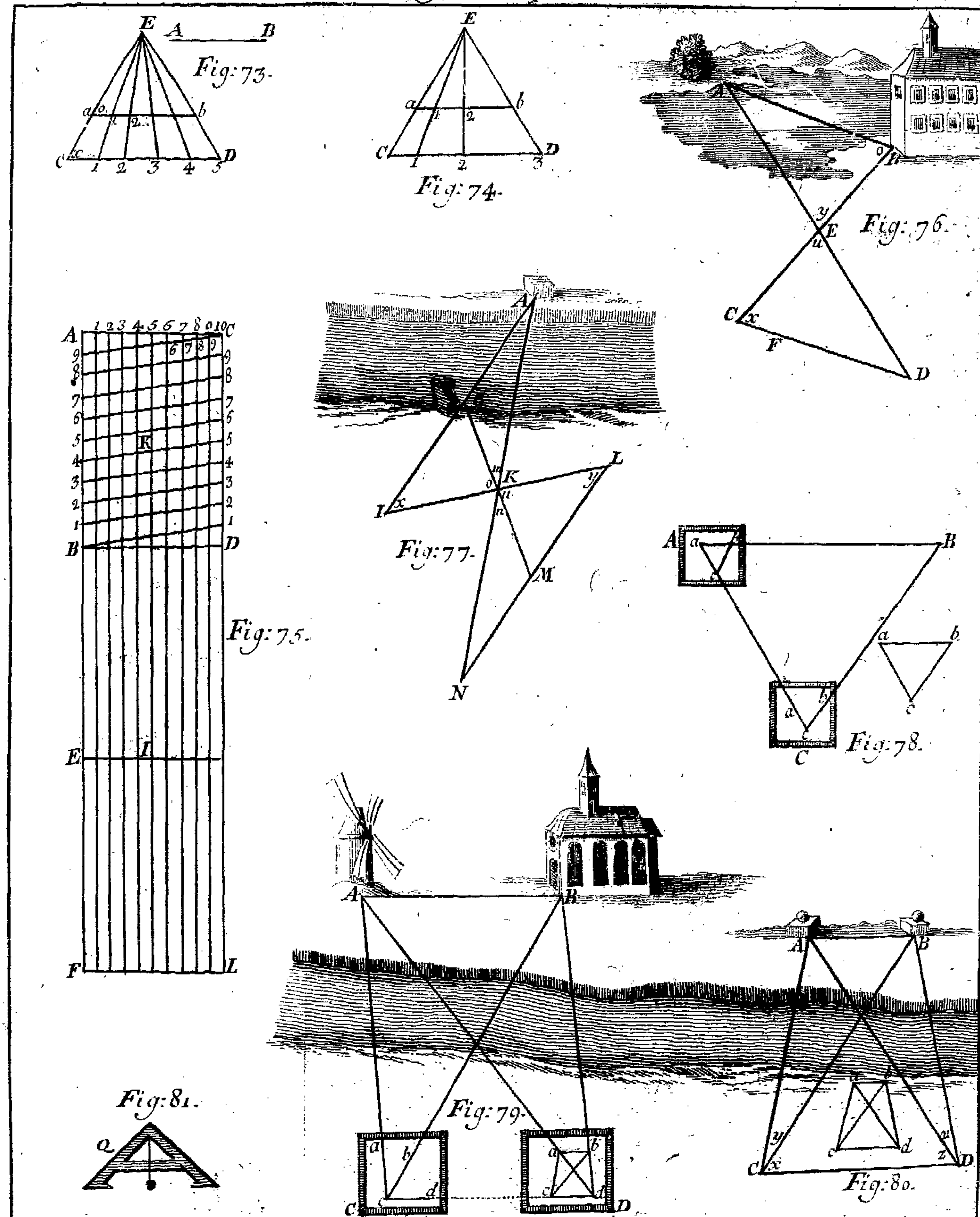
Fig. 72.


Fig: Geom: Tab: IV.



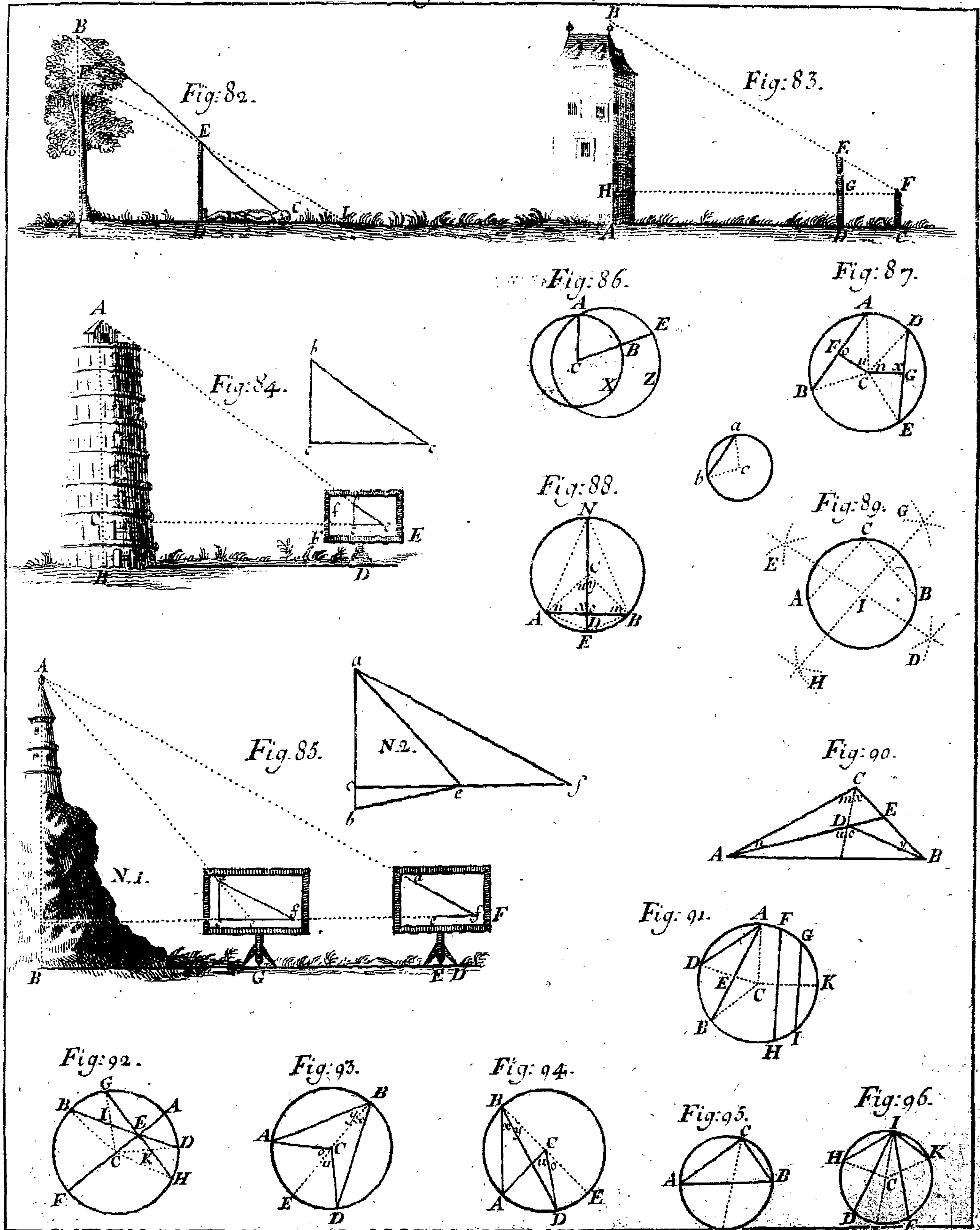


Fig: 82.
Fig: 83.
Fig: 84.
Fig. 85.
N.1.
N.2.
Fig: 86.
Fig: 87.
Fig: 88.
Fig: 89.
Fig: 90.
Fig: 91.
Fig: 92.
Fig: 93.
Fig: 94.
Fig: 95.
Fig: 96.

Fig. Geom. Tab. VI

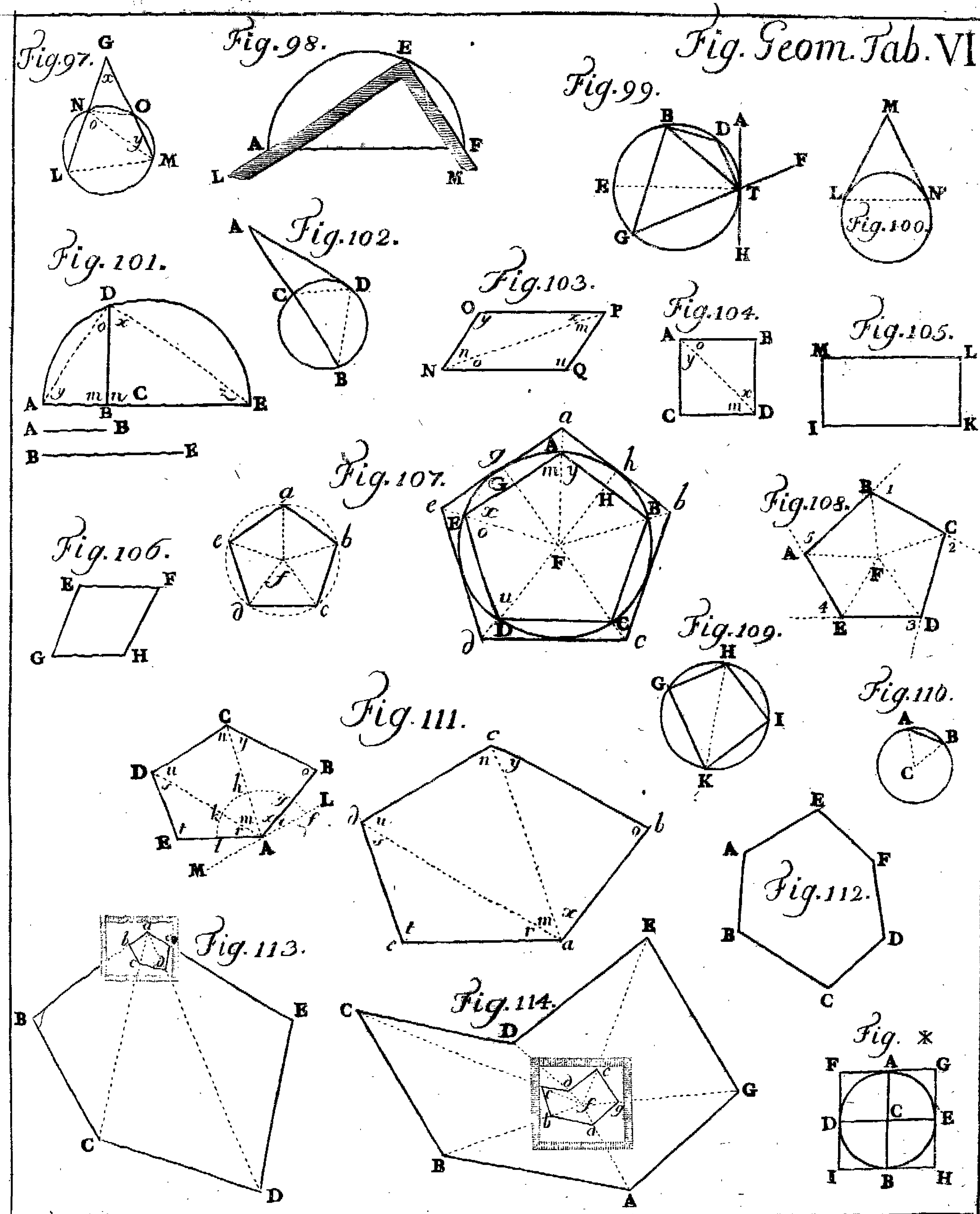


Fig: 115.

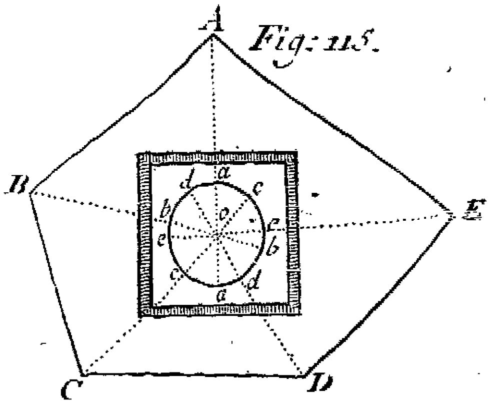


Fig: 116.

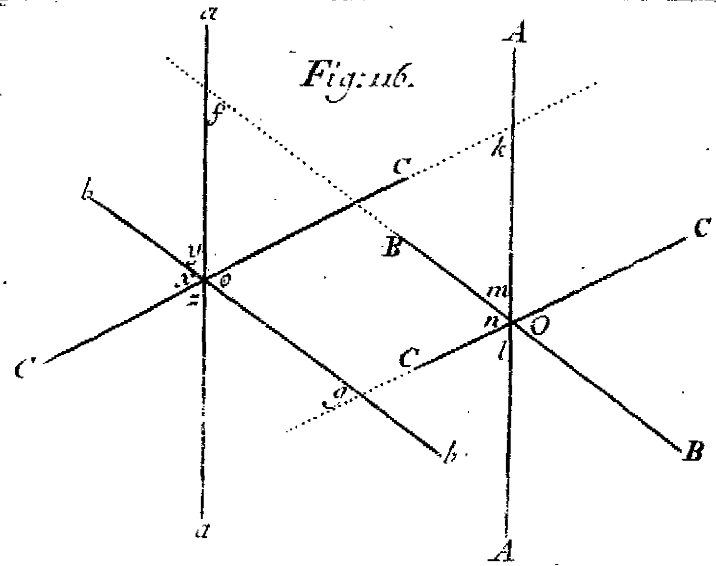
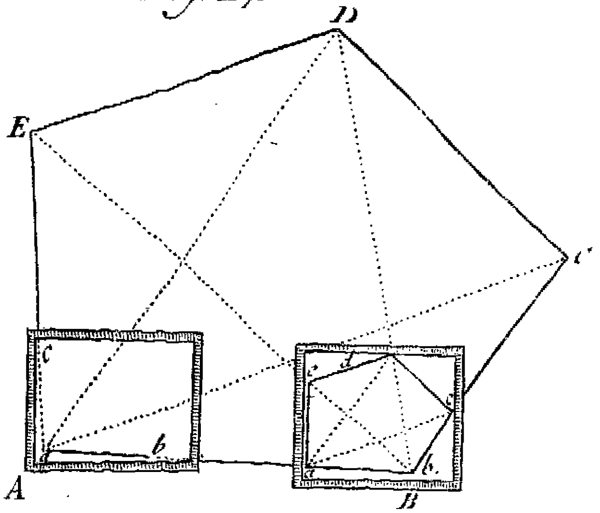


Fig: 117.



Pyxis magnetica.

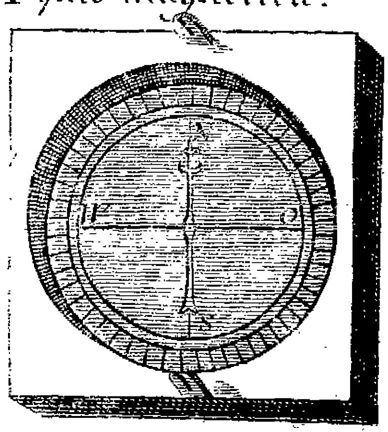


Fig: 122.

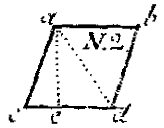


Fig: 120.

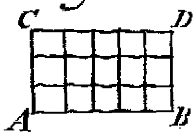


Fig: 122.

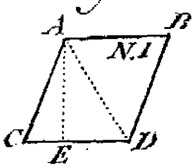


Fig: 119.

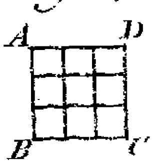


Fig: 121.

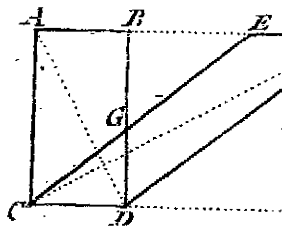


Fig: 118.

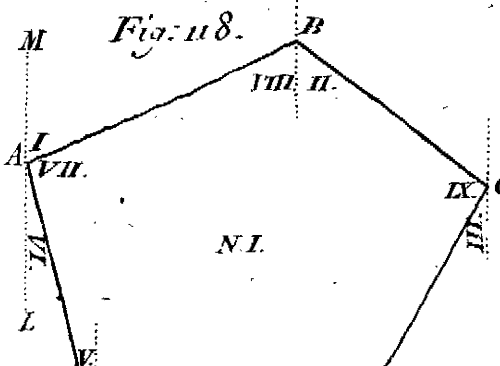


Fig: 118.

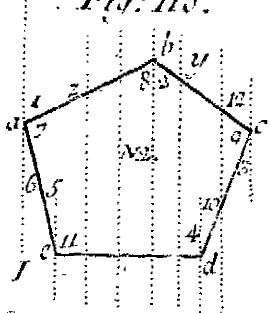
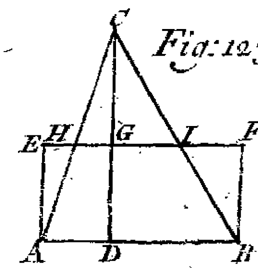


Fig: 123.



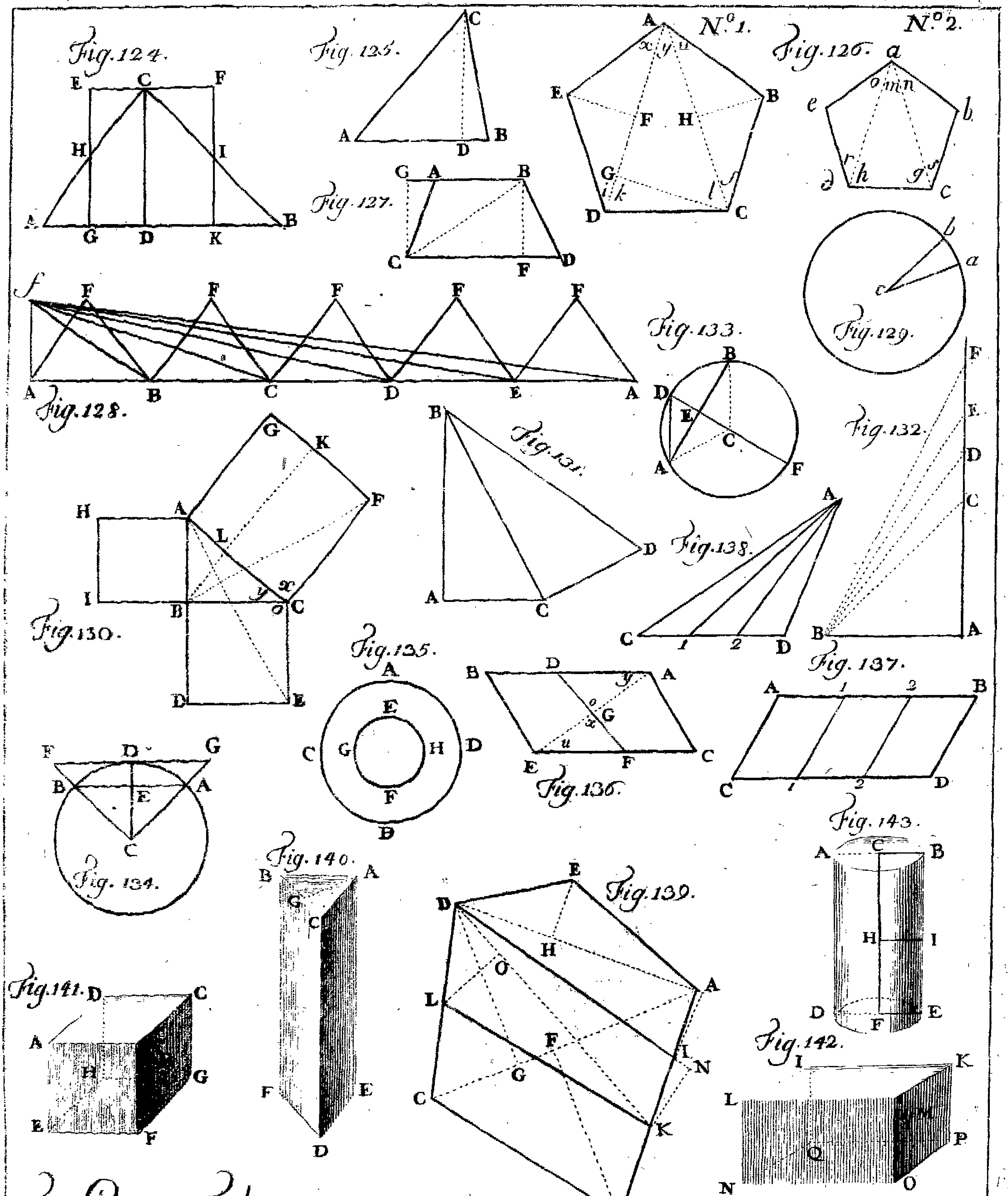


Fig. Geom. Tab. VIII.

Fig. Geom. Tab. IX.

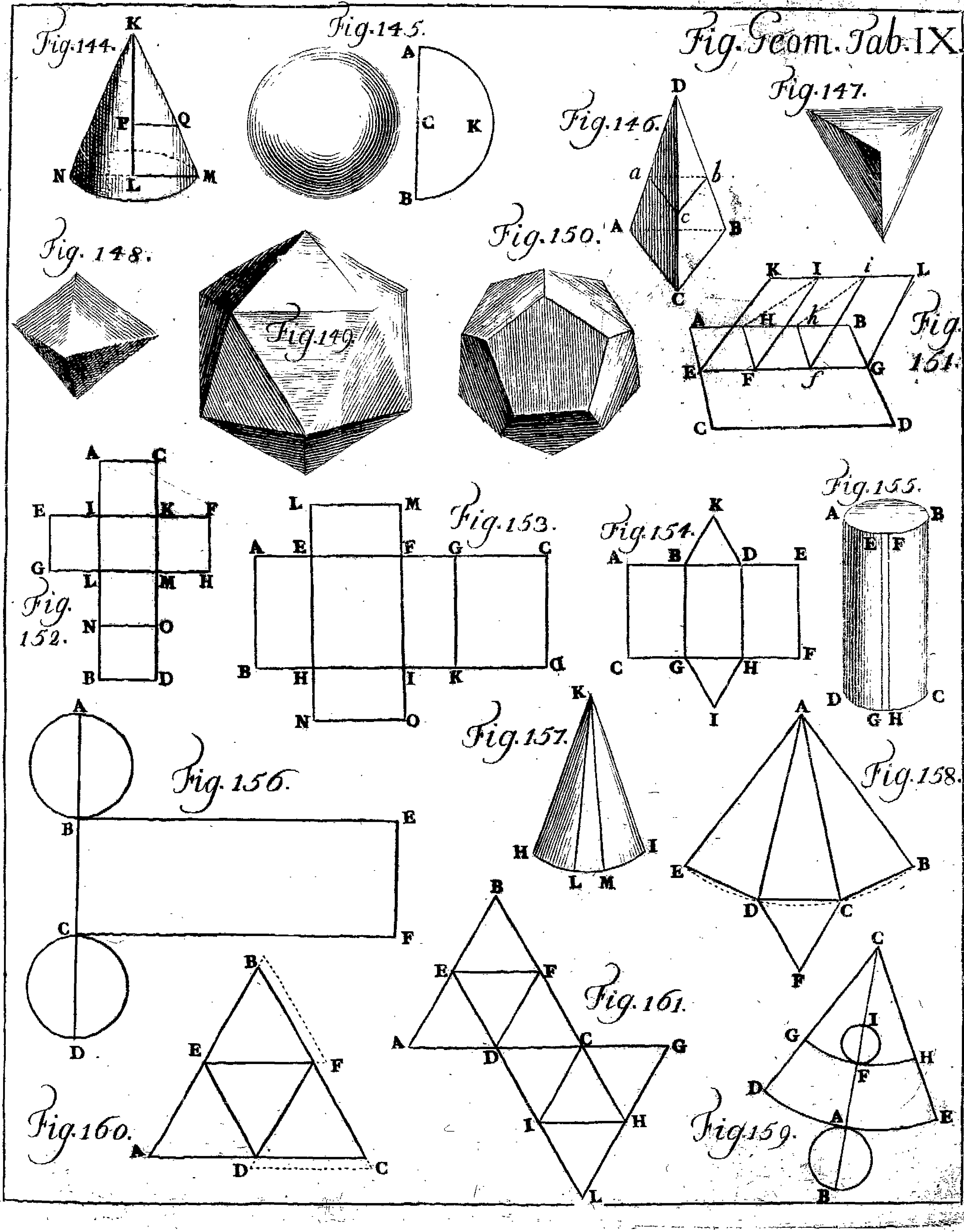


Fig. Geom. Tab. X

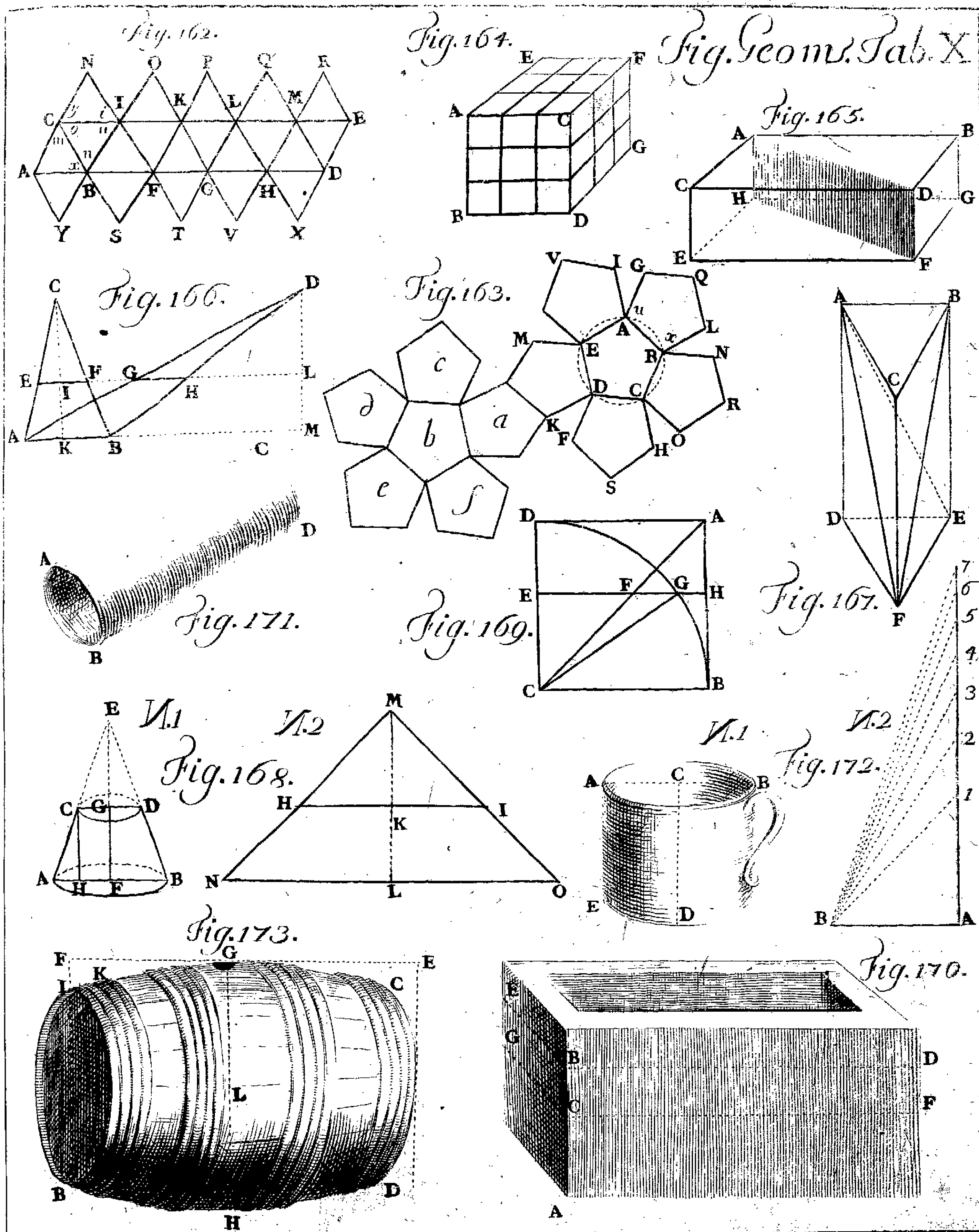


Fig. Geom. Tab. XI.

Fig. 174.

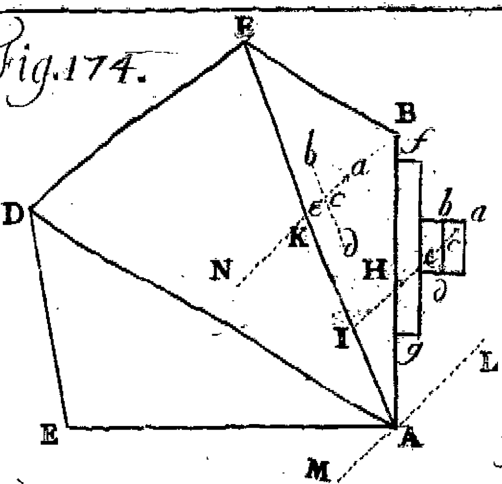


Fig. 175.

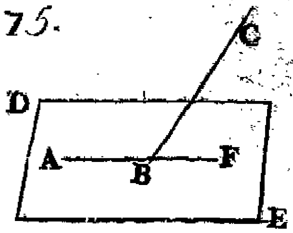


Fig. 176.

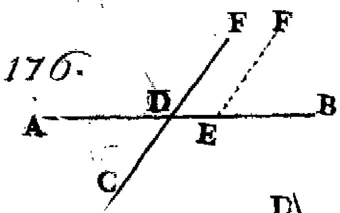


Fig. 177.

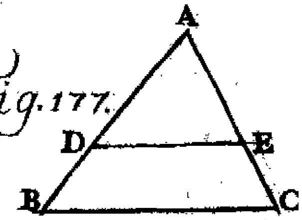


Fig. 178.

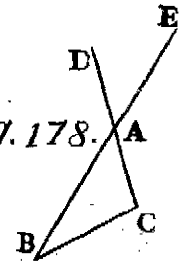


Fig. 179.

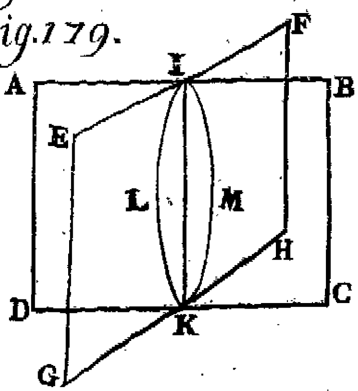


Fig. 180.

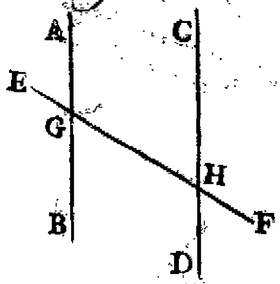


Fig. 181.

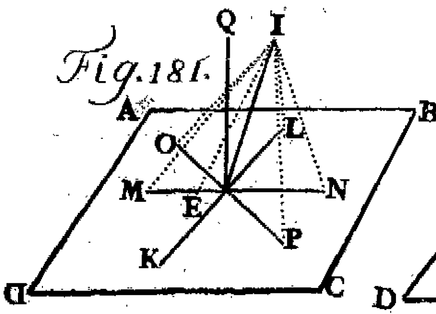


Fig. 182.

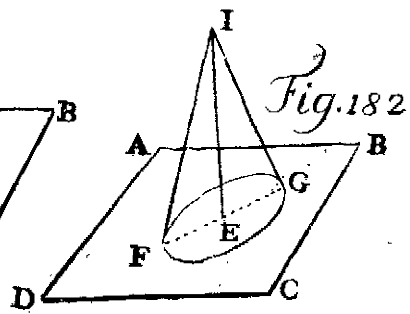


Fig. 183.

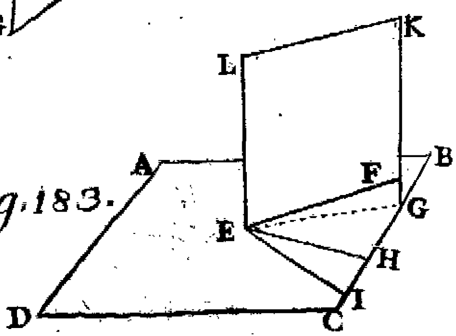


Fig. 184.

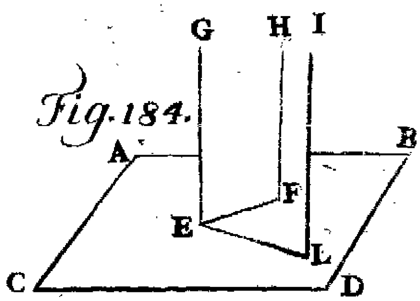


Fig. 186.

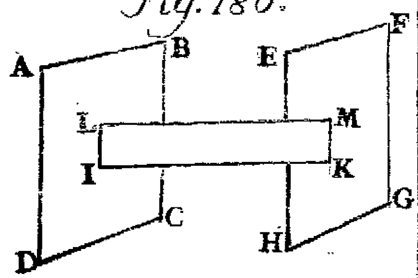
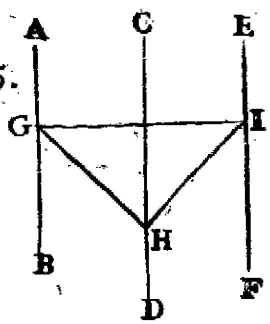


Fig. 185.



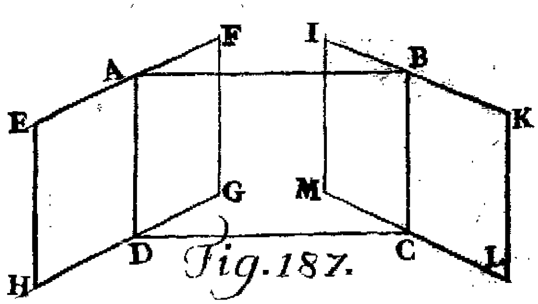


Fig. 187.

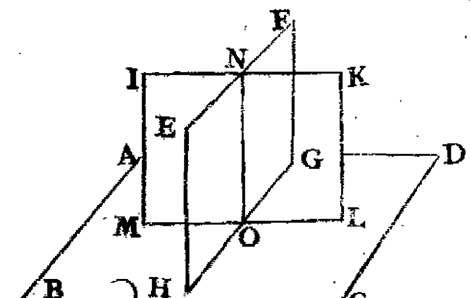


Fig. 191.

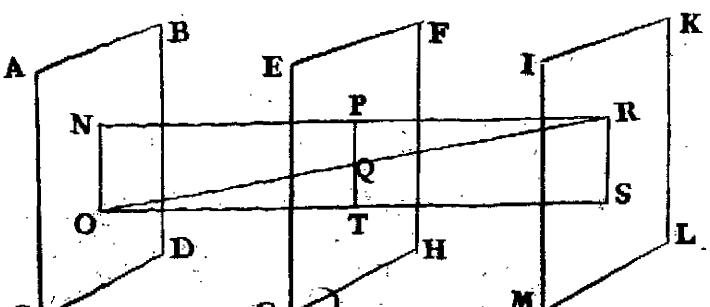


Fig. 189.

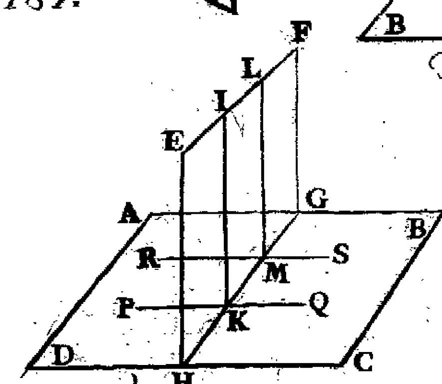


Fig. 190.

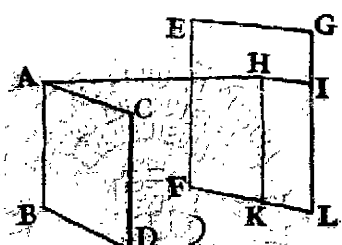


Fig. 188.

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium, quam artificialium.

DEFINITIO I.

Tab. I. Fig. 1. 1. *Trigonometria plana* est Scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI est chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* est radius HC, seu sinus quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 291 *Geom.*): consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57 *Geom.*); quadrans vero HE mensura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD etiam sinus rectus & ED sinus versus est angulorum ACE & ACI; sinus vero totus est sinus anguli recti. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eundem habent sinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtusorum sinus iidem sunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DEFINITIO III.

7. *Tangens* arcus EA est portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejusdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis est (§. 308 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Est etiam FE tangens, & FC secans anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tangens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG sinus arcus AH dicitur cosinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes*, atque *Secantes complementi*.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quanitas sinuum, tangentium, atque secantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* PTOLEMÆI Almagesto *discimus, Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in analysi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis seu sinibus primum usi sunt, quantum constat,* Saraceni. Johannes REGIOMONTANUS *primum radio cum Veteribus tribuit 60 gradus, & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate, ac ideo hypothesin præsentem in Trigonometriam introduxit. In Tabulis sinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen Tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ Problemata absque illarum ope solvi possint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus Hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 104, 342 *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 356 *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 41 *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato sinu* AD; *invenire cosinum* AG. Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2) ad HC, & AG sinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipsi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), adeoque △ AGC rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC sint ad EC perpendiculares (§. 3); erit GC = AD (§. 226 *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum cosinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*); prodibit cosinus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000; reperitur AG 8660254, sinus 60°.

PRO-

PROBLEMA II.

Tab. I. Fig. 2. **17.** *Dato sinu* AD *arcus* AE; *invenire sinum arcus dimidii* $\frac{1}{2}$ AE.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 423 *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl. præc. reperietur sinus arcus $\frac{1}{2}$ AE, seu sinus $15^\circ = 2588190$.

PROBLEMA III.

Tab. I. Fig. 3. **18.** *Dato sinu* DG *arcus* DF; *invenire sinum* DE *arcus dupli* DB.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & BDE communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 267 *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§. 302 *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA IV.

Tab. I. Fig. 4. **19.** *Datis sinibus* FG & DE *arcuum* FA & DA, *quorum differentia* DF 45′ *major non est; invenire sinum quemcunque intermedium* IL.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam FD arcuum quorum sinus dantur, differentiam IF arcus AI cujus sinus quæritur atque arcus AF sinui dato minori respondentis, & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§. 3). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 *Geom.*); erit HE = FG (§. 226 *Geom.*); adeoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§. 64 *Arithm.*) Unde ob parallelas IK & DH, *per demonstrata*; FD : FI = DH : IK (§. 268 *Geom.*). *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 4.

PROBLEMA V.

20. *Datis sinibus* BD & FE *duorum arcuum quorumcunque* AB & AF; *invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem* $\frac{1}{2}$ BF. Tab. I. Fig. 5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur cosinus BI & FH (§. 16).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter se parallelæ, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), consequenter FH = KI & BD = EK (§. 226 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§. 230, 78 *Geom.*) Quamobrem FK differentia sinuum

Tab.I. Fig.5. ſinuum BD & FE, BK vero differentia coſinuum FH & BI, atque FKB triangulum rectangulum (§.91 *Geom.*). Ergo cum ſit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§.417 *Geom.*); reperietur chorda BF, ſi ex ſumma quadratorum differentiæ ſinuum FK & coſinuum BK radix quadrata extrahitur (§.246 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

21. *Invenire ſinum* 45 *graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab.I. Fig.2. Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§.143 *Geom.*), adeoque △ cognomine rectangulum (§.91 *Geom.*), conſequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§.417 *Geom.*) $= 2\,HC^2$ (§.40, 374 *Geom.*). Quare cum HC ſinus totus (§.2) ſit 10000000 (§.14); ſi ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§.269 *Arithm.*); prodibit chorda HI (§.246 *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 ſinus 45° deſideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analyſi docebimus, quomodo ex dato radio latus Pentagoni regularis, hoc eſt, chorda* 72° (§.342 Geom.), *conſequenter ſinus* 36° (§.2) *inveniatur.*

PROBLEMA VII.

Tab.I. Fig.4. 23. *Dato ſinu unius minuti ſeu* 60″ FG; *invenire ſinum unius vel aliquot ſecundorum* MN.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF ſunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi poteſt citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus ſinus exprimimus, aſſignabilem, hoc eſt, arcus AM & AF ſinibus eorum proportionales aſſumere licet. Quare cum MN ſit ipſi FG parallela (§.3) erit AF : FG = AM : MN (§.268 *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§.302 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.* Tab.I. Fig.4.

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, ſi opus foret, inveniri poſſet ſinus aliquot ſcrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA VIII.

25. *Datis ſinibus* 30 (§.15), 15 (§.17), 45 (§.21) & 36 *graduum* (§.22); *Canonem omnium Sinuum conſtruere, nonniſi unico minuto, aut denis ſecundis, immo unico ſecundo inter ſe differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex ſinu 36 graduum inveniatur ſinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§.17); ſinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§.16): porro ſinus 27°, 13° 30′, 6° 45′; 40° 30′, 20° 15′; 42° 45′ (§.17): inde ſinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§.16): ulterius ſinus 31° 30′, 15° 45′; 38° 15′; 24° 45′ (§.17): hinc ſinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′, (§.16): denique ſinus 29° 15′ (§.17) & ejus coſinus 60° 45′ (§.16).
2. Ex ſinu 45° inveniantur ſinus 22° 30′ & 11° 15′ (§.17), ſinus 67° 30′ & 78° 45′ (§.16), ſinus denique 33° 45′ (§.17) & 56° 15′ (§.16).
3. Ex ſinu 30° & ſinu 54° inveniatur ſinus 12° (§.20).
4. Ex ſinu 12° inveniantur ſinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§.17), ſinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§.16): por-

porro sinus 39°, 19° 30′, 9° 45′; 42°, 21°, 10° 30′, 5° 15′; 43° 30′, 21° 45′; 44° 15′ (§. 17): ulterius sinus 51°, 70° 30′, 80° 15′, 48°, 69°, 79° 30′, 84° 45′, 46° 30′, 68° 15′, 45° 45′, (§. 16): inde sinus 25° 30′, 12° 45; 35° 15′; 24°; 34° 30′, 17° 15′; 39° 45′; 23° 15′ (§. 17): hinc sinus 64° 30′, 77° 15′, 54° 45′, 66°, 55° 30′, 72° 45′, 50° 15′, 66° 45′ (§. 16): hinc porro sinus 32° 15′; 33°, 16° 30′, 8° 15′; 27° 45′ (§. 17): inde ulterius sinus 57° 45′, 57°, 73° 30′, 81° 45′, 62° 15′ (§. 16): porro sinus 28° 30′, 14° 15′; 36° 45′ (§. 17) & horum cosinus 61° 30′, 75° 45′, 53° 45′ (§. 16): denique sinus 30° 45′ (§. 17) & ejus cosinus 59° 15′ (§. 16).

5. Ex sinu 15° inveniantur sinus 7° 30′ & 3° 45′ (§. 17): hinc sinus 75°, 82° 30′, 86° 15′ (§. 16): inde 37° 30′, 18° 45′, 41° 15′ (§. 17) & horum cosinus 52° 30′, 71° 15′, 48° 45′ (§. 16): denique sinus 26° 15′ (§. 17) & ejus cosinus 63° 45′ (§. 16).

6. Quodsi sinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate sibi mutuo succedentes 45′ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam cum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0°45′	21	15°45′	41	30°45′	61	45°45′	81	60°45′	101	75°45′
2	1·30	22	16·30	42	31·30	62	46·30	82	61·30	102	76·30
3	2·15	23	17·15	43	32·15	63	47·15	83	62·15	103	77·15
4	3· 0	24	18· 0	44	33· 0	64	48· 0	84	63· 0	104	78· 0
5	3·45	25	18·45	45	33·45	65	48·45	85	63·45	105	78·45
6	4·30	26	19·30	46	34·30	66	49·30	86	64·30	106	79·30
7	5·15	27	20·15	47	35·15	67	50·15	87	65·15	107	80·15
8	6· 0	28	21· 0	48	36· 0	68	51· 0	88	66· 0	108	81· 0
9	6·45	29	21·45	49	36·45	69	51·45	89	66·45	109	81·45
10	7·30	30	22·30	50	37·30	70	52·30	90	67·30	110	82·30
11	8·15	31	23·15	51	38·15	71	53·15	91	68·15	111	83·15
12	9· 0	32	24· 0	52	39· 0	72	54· 0	92	69· 0	112	84· 0
13	9·45	33	24·45	53	39·45	73	54·45	93	69·45	113	84·45
14	10·30	34	25·30	54	40·30	74	55·30	94	70·30	114	85·30
15	11·15	35	26·15	55	41·15	75	56·15	95	71·15	115	86·15
16	12· 0	36	27· 0	56	42· 0	76	57· 0	96	72· 0	116	87· 0
17	12·45	37	27·45	57	42·45	77	57·45	97	72·45	117	87·45
18	13·30	38	28·30	58	43·30	78	58·30	98	73·30	118	88·30
19	14·15	39	29·15	59	44·15	79	59·15	99	74·15	119	89·15
20	15· 0	40	30· 0	60	45· 0	80	60· 0	100	75· 0	120	90· 0

Inveniantur ergo sinus intermedii per Probl. 4. (§. 19).

7. Denique sinus scrupulorum secundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per Probl. præc. (§. 23).

Ita Canon sinuum erit constructus. *Q. e. f.*

PROBLEMA IX.

Tab. I. Fig. 2. 26. *Dato sinu* AD *arcus* AE, *invenire tangentem* EF *& secantem* FC *ejusdem arcus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3, 8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut cosinus DC ad sinum AD, ita sinus totus ad tangentem EF: item ut cosinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 302 *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Constructo igitur Canone sinuum* (§. 25), *haud difficilis est constructio Canonis tangentium atque secantium. Uterque junctim sumtus Canon triangulorum naturalis dici solet, quia triangulorum analysi inservit. Equidem passim apud Autores Theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi sinus facilius inveniuntur, quam exposita hactenus methodo.* URSINUS (a) *præsertim docet, quomodo ex sinu Canonis omnium primi, e. gr. unius secundi, per solam quasi additionem & subtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum constructus sit; sufficit utcunque ostendisse, quomodo construi potuerit.*

(a) *Trigon.* lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA X.

28. *Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 10000000000 constructi. Multantur nempe sinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cum adeo sinus sint numeri 10 ut plurimum notis constantes, in canone autem logarithmorum qui prostat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non ascendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per Probl.* 37 *Arithm.* (§. 349). Utendum vero est Canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus sinus 23°, qui apud PITISCUM 3907311284. Resectis versus sinistram quinque notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4. 5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9. 5918768. Differentia tabularis est 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui si addatur logarithmo 9. 5918768, prodit logarithmus quæsitus 9. 5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XI.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo sinus & cosinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur	Log. ſin. 23° =	9.5918780
	Log. ſin. tot. =	1 00000000
	a ſumma =	195918780
ſubtrahatur	Log. coſ. =	99640261
relinquitur	Log. tang. =	96278519

PROBLEMA XII.

30. *Invenire logarithmum ſecantis arcus cujuſcunque; dato ſinu complementi ejuſdem.*

1. Logarithmus ſinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo ſubtrahatur ſinus complementi datus. Reſiduus fiet logarithmus ſecantis (§. 26 *Trigon.* & 359 *Arithm.*).

Ex. gr. Quærendus eſt logarithmus ſecantis arcum 23°. Calculi typus talis eſt:

Log. ſin. tot. =	100000000
Ejus duplum =	200000000
Log. ſin. compl. =	99640261
Log. ſecant. 23° =	10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes NEPERUS, *qui primus logarithmos in* Trigonometriam *introduxit, ſinus totius logarithmum facit* o. *Hinc creſcunt logarithmi ſinuum, ſinibus decreſcentibus, & tangentium atque ſecantium ſinu toto majorum logarithmi ſunt defectivi, ſeu nihilo mires.* NEPERUS *logarithmos coſinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales, KEPLERUS *etiam* Meſologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT II.

De Analyſi Triangulorum.

THEOREMA II.

Tab.I. *Fig.* 2. 32. *Tangens* 45° EF *æquatur radio* EC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°. *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*); conſequenter angulus F 45° (§. 241 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tab.I. *Fig.* 1. 33. *In omni triangulo* ABC *latera ſunt ut ſinus oppoſitorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inſcriptibile ſit (§. 297 *Geom.*); Tab.I. *Fig.* 1. erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*); conſequenter latera dimidia ſinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii ſunt menſuræ angulorum oppoſitorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti B; ita latus BC ad ſinum anguli ſibi oppoſiti A, ita etiam AB ad ſinum anguli ſibi oppoſiti C. *Q. e. d.*

 SCHO-

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.*

THEOREMA IV.

Tab.I. Fig.8. 35. *In triangulo obtusangulo* AGC *est ut latus angulo obtuso* G *oppositum* AC *ad sinum anguli acuti* AGE *eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens* GA *ad sinum anguli eidem oppositi* C.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam GC perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§.78, 91 *Geom.*). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 201 *Arithm.*); consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem oppositi C, sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

Tab.I. Fig.1. 36. *Datis duobus angulis* A & C, *una cum latere uni eorum* C *opposito* AB; *invenire latus alteri* A *oppositum* BC.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum AB;
Ita sinus anguli alterius A
ad latus quæsitum BC. Tab.I. *Fig.* 1.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC, *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359).

Ex. gr. Sit C = $48^\circ\ 35'$, A = $57^\circ\ 28'$, AB = $74'$. Calculus talis erit:

Log. sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. sin. A	9.9258681
Sum. log. AB & sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent $83'$. Cum vero logarithmus in Tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi $83'$ fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post $830''$ denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus $831''$. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post $8310'''$, & ei quam proxime respondere deprehendes $8319'''$. Immo si Canon major ad manus sit, ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post $83190''''$ evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC $8^\circ\ 3'\ 1''\ 9'''\ 2''''$ (§. 355 *Arithm.*).

SCHOLION.

37. *Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA XIV.

38. *Datis duobus lateribus* AB & BC, *una cum angulo* C *uni eorum opposito; invenire angulos reliquos* A & B.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C;

Ita

Tab.I. *Fig.* 1. Ita latus alterum BC
ad ſinum anguli quæſiti ſibi oppoſiti A.

Invenietur adeo logarithmus ſinus anguli A utendo logarithmis *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359.)

II. Quodſi latus AG vel AB dato angulo C oppoſitum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæſito, quæſitus angulus & obtuſus eſſe poteſt G, & acutus B (§. 234 *Geom.*); adeoque conſtare debet, utrum triangulum datum ſit obtuſangulum, an acutangulum. In caſu poſteriori ſatisfacit numerus graduum, qui ſinui reperto reſpondet; in priori pro angulo obtuſo ſumitur ejus complementum ad 180° (§. 35). Tab.I. *Fig.* 8.

III. Quodſi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtuſus, & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus, in ſolutione pro ſinu obtuſi anguli AGC ſumitur deinceps poſiti acuti AGE ſinus (§. 35).

Tab.I. *Fig.* 1. Ex. gr. Sit AB = 94', BC = 69', C = 72° 15'.

Log. AB	1. 9731279
Log. ſin. C	9. 9788175
Log. BC	1. 8388491
Sum. Log. ſin. C & BC	11. 8176666
Log. ſin. A.	9. 8445387,

cui in Canone proxime reſpondent 44° 21'. Quodſi Canon major non fuerit ad manus, & præter ſcrupula prima etiam ſecunda deſiderentur, *vi Probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento	98445387	ſubtrahe
Tabul. prox. min.	98445018	
& notetur Differ. I.	369	
Simil. ex prox. maj.	98446310	ſubduc
prox. min.	98445018	
& notetur Diff. II.	1292	

Tab.I. *Fig.* 1.

Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30   30

646) 11070 (17
646
4610
4522
88

Eſt ergo angulus A = 44° 21' 17''
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 179 59 60

erit B = 63° 23' 43''

Similiter dentur in triangulo rectangulo, præter rectum A, hypothenuſa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49' AC 36'. Calculus talis erit: Tab.I. *Fig.* 6.

Log. BC	1. 6901961
Log. ſin. tot.	10. 0000000
Log. AC	1. 5563025
Log. ſin. B	9. 8661064, cui in

Canone proxime reſpondent 47° 16'.
Ergo C = 42° 44' (§. 241 *Geom.*).

Quodſi AG = 349'', AC = 382'', angulus A = 57° 25'; erit Tab.I. *Fig.* 8.

Log. AG	2. 5428254
Log. ſin. C	9. 9256261
Log. AC	2. 5820634
Sum. Log. ſin. C & AC	12. 50716895
Log. ſin. G	9. 9648641,

cui in Canone proxime reſpondent 67° 15'. Eſt igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15': quem ſi ſubtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuſo AGC 112° 45'.

Tab.I. Fig.8. Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG= 179″ & AC 223″: Pro acuto C inferatur (§. 35).

Log. AC	2.3483049
Log. sin. AGE	9.4049009
Log. AG	2.2528530
Sum. Log. sin. G & AG	11.6577539
Log. sin. C	9.3094490

cui in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

LEMMA.

39. *Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arithm.*): ergo summa ex minore bis sumta & differentia, consequenter semisumma ex minore & semidifferentia. Quare si a semisumma semidifferentia subtrahatur, minor quantitas relinquitur (§. *cit. Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi vero semisummæ semidifferentia addatur, aggregatum erit compositum ex quantitate minore & differentia (§. 61 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonstr. Quod erat alterum.*

PROBLEMA XV.

Tab.I. Fig.6. 40. *Datis duobus lateribus* BA & AC, *cum angulo intercepto* A; *invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7, 8) Inferatur ergo:

ut crus unum AB Tab.I. Fig.6.
ad alterum AC;
Ita sinus totus
ad tangentem anguli B.

Ex. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	1.8976271
Log. AC	1.7323938
Log. sin. tot.	10.0000000

Log. tang. B, 9.8347667, cui in Canone respondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (§. 241 *Geom.*).

II. Si angulus A fuerit obliquus; Tab.I. Fig.7.

1. Inferatur:
ut summa laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem;
Ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B
ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a semisumma subtrahatur, residuus fiet angulus minor B.

Ex. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179°	60′
AC 58	AC 58	A	108	24
Sum. 133	Diff. 17	B + C	71	36
		$\frac{1}{2}$(B + C)	35	48

Log. (AB + AC) ---	2.1238516
Log. (AB − AC) ---	1.2304489
Log. tang. $\frac{1}{2}$(B + C)	9.8580694
Summa Logg.	11.0885183

Log. Tang. $\frac{1}{2}$(C − B), 8.9646667, cui in Tabulis proxime respondent 5° 16′.

$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′	$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′
$\frac{1}{2}$(C − B) = 5 16	$\frac{1}{2}$(C − B) = 5 16
C = 41° 4′	B = 30° 32

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab.I. *Fig.*7. Crure majore dato AB, ex vertice anguli dati A deſcribatur circulus (§. 131 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob AE = AB = AD (§. 40 *Geom.*), CE ſumma laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 *Geom.*); erit EBD ſemicirculus (§. 135 *Geom.*); conſequenter angulus EBD rectus (§. 317 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 *Geom.*). Quare ſi BD ſumatur pro ſinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7, 8). Eſt vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*), & inde ob $u = \frac{1}{2}o$ (§. 313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x + y)$. Ergo EB tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§. 39). Sumto itaque DB denuo pro radio, ſi deſcribatur arcus DG (§. 131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7, 8), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y, *per demonſtr.* Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti, *per demonſtr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque BED & FDE æquales (§. 233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*): erit CE : EB = CD : DF (§. 267 *Geom.*), conſequenter & CE : CD = EB : DF (§. 173 *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæſitorum ſemidifferentia, reliqua in reſolutione manifeſta ſunt, per Lemma præcedens (§. 39). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

41. *Datis tribus lateribus* AB, BC, *&* CA; *invenire angulos* A, B *&* C. Tab.I. *Fig.*8.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, deſcribatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit ob AD = AB (§. 40 *Geom.*) CD ſumma crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 *Geom.*);
   ut baſis BC
   ad ſummam crurum CD;
   Ita differentia crurum CF
   ad ſegmentum baſis CG.
2. Inventum adeo ſegmentum CG (§. 302 *Arithm.*) ſi ſubtrahatur a baſi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 *Geom.*), erit BE = EG = $\frac{1}{2}$GB (§. 291 *Geom.*). Datis adeo, in triangulo rectangulo AEB, lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 38). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36′, AB = 45′, BC = 40′:

erit AC = 45′		AC = 45′
AB = 36		AB = 36
AC + AB = 81		FC = 9

Log. BC	= 1.6020600
Log. AC + AB	= 1.9084850
Log. FC	= 0.9542425
Logg. ſumma	= 2.8627275
Log. CG	= 1.2606675

cui

cui in Tabulis quam proxime respondent 18′ 2″ 3‴ (§. 355 *Arithm.*).

BC = 4000‴ EG = 1089‴
CG = 1822 CG = 1822

BG = 2178 CE = 2911

BE = 1089

Log. AB	= 3.5563025
Log. sin. tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 3.0370279
Log. sin. EAB	= 9.4807254,

cui in Tabulis quam proxime respondent 17° 36′, adeoque angulus ABE 72° 24′ (§. 241 *Geom.*).

Log. AC	= 3.6532125
Log. sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422

Log. sin. EAC = 9.8108297, cui in Tabulis quam proxime respondent 40° 18′. Ergo ACE 49° 42′ (§. 241 *Geom.*), & CAB 57° 54′ (§. 86 *Arithm.*).

CAPUT III.

De usu Trigonometriæ planæ in Geometria practica.

PROBLEMA XVII.

42. *Construere Instrumentum transportatorium rectilineum; hoc est Scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi Canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2° 30′, 5°, 7° 30′, 10°, 12° 30′ &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$ gr. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in Tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 249 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel par- Tab. I. Fig. 9.

Tab.I. *Fig.9.* partes quartas &c. indicare debent subtensæ.

3. Per singula divisionum puncta agantur rectæ ipsi AD parallelæ (§.258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo semper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35°, &c. respondentes ex Scala geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 277 *Geom.*): in linea vero superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodsi Scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde ac si particulæ in Scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto a reliquis separata, vel si major fuerit, ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur; ex. gr. loco 258. 8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5 Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25, &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter crescant; erit *c* 1 subtensa arcus 1°, *d* 2 subtensa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

43. Quia subtensa 60° est radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem investigaturus intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui est mensura ipsius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad Scalam applicet; quæ, si ex. gr. ex *d* in 42 pertingat, ostendit angulum esse 42°. Tab.I. *Fig.9.*

COROLLARIUM II.

44. Angulus datæ quantitatis construetur, si radio B60 describatur, ex centro B, arcus CF, & subtensa gradus dati, ex. gr. 23, in Scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC mensura anguli B (§. 57 *Geom.*); adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 59 *Geom.*). Tab.I. *Fig.10.*

SCHOLION.

45. *Hujus Instrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XVIII.

46. *Circulo Polygonum regulare inscribere & circumscribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Assumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere supponitur, inde excerpatur sinus ejus arcus, qui prodit peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde est) semiperipheria, hoc est 180°, per numerum laterum polygoni divisa. Illius enim duplum est chorda arcus dupli (§. 2), adeoque latus AB polygoni circulo inscribendi (§. 342 *Geom.*). Tab.I. *Fig.11.*

2. Quodsi radius circuli, cui ex. gr. pentagonum inscribendum, detur juxta certam aliquam mensuram ex. gr. 345''; latus polygoni in eadem men-

mensura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

$$10000 - 1176 - 3450'''$$

```
          3450
   ___________
        58800
       4704
      3528
   ___________
   4057|200  (4° 0' 5'' 7''' lat.
   1   ø|000    Pentag.
```

3. Dato radio, describatur circulus, & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri potest (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo inscripto simile circumscribetur (§. 355 *Geom.*).

SCHOLION.

47. *Ne molesta sit rationis lateris Polygoni ad radium ex Canone sinuum investigatio, in Tabula hic exhibemus latera Polygonorum istiusmodi particulis expressa, qualium radius habet* 10000000. *In praxi tot notæ versus dextram resecantur, quot per circumstantias singulares superfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA XIX.

Tab. I. Fig. 11.

48. *Super data recta* AB *Polygonum regulare describere: & dato Polygono regulari* ABCDE *Circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut ratione lateris ad radium ex Tabula præcedente assumta quæratur radius in ea mensura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, Polygonum describi potest (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii, ex A & B super latere Polygoni uno fiat intersectio in L; habebitur centrum L circumscribendi circuli (§. 37 *Geom.*). Tab. I. Fig. 11.

PROBLEMA XX.

49. *Datis sinu verso* AB *& sinu* BC, *in mensura communi, non in particulis radii decimalibus; invenire arcum* FAC *in gradibus.* Tab. I. Fig. 12.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quæratur ex his datis semidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC, præter rectum B (§. 3), lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 59 *Geom.*), cujus duplus est arcus FC (§. 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

50. *Hujus Problematis usus est in inveniendo segmento circuli* (§. 436 Geom.).

PROBLEMA XXI.

51. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& angulis* o *&* y; *invenire diagonales.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. In △ ABE, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo *o*; invenitur primum angulus A (§. 38); dein diagonalis BE (§. 36).

2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.* Tab. I. *Fig.* 13.

PROBLEMA XXII.

52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus* AB *&* BC, *una cum diagonalibus* BE *&* BD, *atque angulis* o, x *&* y; *invenire latera reliqua* CD, DE *&* EA.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE, cum angulo intercepto *o*, invenitur primum angulus *u* (§. 40), & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& tot angulis quot sunt latera demtis tribus*, C *&* D; *invenire diagonales* BD *&* BE.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD, cum angulo intercepto C, investigetur angulus *m* (§. 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE, cum angulo intercepto *n*; eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIV.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latere* AB, *una cum angulis* o, x, y, e, u *&* n; *invenire diagonales* AC, AD, BD *&* BE, *una cum lateribus* BC *&* AE. Tab. II. *Fig.* 22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis *o* & B $(=e+u+n)$, una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$, una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. *cit.*).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A $(=o+x+y)$ & *e*, una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum Ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 Geom.); *horum Problematum in Planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA XXV.

56. *Metiri distantiam duorum locorum* BC, *ex eodem tertio* A *accessorum.* Tab. I. *Fig.* 14.

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumpto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 126 *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 40), & hinc porro distantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 14 57. *Exempla non addimus, cum Problemata, quibus triangula in hac Trigonometriæ applicatione solvuntur, jam in superioribus fuerint exemplis illustrata. Ut tamen de commoda stationis electione A judicari possit, quædam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ sunt latera trianguli resolvendi BAC satis accurate in campo metiri licet* (§.126 Geom.): *sed in metiendo angulo facile aliquot scrupulis primis vel in excessu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non potest quin distantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis dispiciendum.*

THEOREMA V.

Tab. II. Fig. 15. 58. *Si error aliquot scrupulorum in quantitate anguli* A *admittatur, laterum vero* BA *&* AC *magnitudo fuerit accurata; erit arculi* CD *errorem* CAD *metientis quantitas, ad* DE *differentiam distantiæ veræ* BC *ab erronea per calculum producta* BD; *ut sinus totus, ad sinum anguli* BCA, *qui lateri* AB *opponitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem, *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A, intervallo AC tanquam radio, arcus CD, qui per punctum D, ob AC=AD (§.40 *Geom.*), necessario transit. Quoniam angulus CAD nonnisi aliquot scrupulorum est, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§.57 *Geom.*), pro recta haberi, &, si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§.435 *Geom.*). Describatur similiter ex centro B, intervallo BC, arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque, ob BC=BE (§.40 *Geom.*), ED differentia inter distantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED sunt recti (§.309 *Geom.*); consequenter BCE=ACD (§.145 *Geom.*), atque adeo BCA=ECD (§.91 *Arithm.*). Est vero ut sinus totus ad CD, ita sinus anguli ECD sive BCA, *per demonstr.* ad ED (§.33): ergo etiam ut sinus totus ad sinum anguli BCA, ita CD ad ED (§.173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 15.

COROLLARIUM I.

59. Eodem ergo manente errore CD in Angulo A metiendo admisso, error in distantia admissus ED major est, si angulus BCA major fuerit; minor autem, si hic quoque minor fuerit (§.205, 206 *Arith.*).

COROLLARIUM II.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§.59): quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§.240 *Geom.*) & latus AC > AB (§.189 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

61. Cum angulus BAD major sit angulo BMD (§.188 *Geom.*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§.59).

SCHOLION.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere semidiametrum Instrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC respondere regulam mobilem* (§.152 Geom.).

COROLLARIUM IV.

63. Quoniam error ED in distantia definienda admissus major est, si quantitas arcus CD major fuerit (§.58), quantitas autem

Tab. II. *Fig.* 15. autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admisso, si latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorem præstare remotiori.

SCHOLION.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiscendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur; per theoriam vero accurate determinantur.*

PROBLEMA XXVI.

Tab. I. *Fig.* 15. 65. *Invenire distantiam duorum locorum* AC, *quorum unus* A *tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 152 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 36). *Q. e. f.*

THEOREMA VI.

Tab. II. *Fig.* 23. 66. *Si in distantia* AB *ex duobus angulis* A & ACB, *una cum latere* AC, *investiganda, nonnisi in angulo uno* ACB *metiendo aberretur; arcus* BE, *qui errorem in angulo* BCD *admisso metitur, erit ad* BD *differentiam inter distantiam veram* AB & *erroneam* AD, *ut sinus anguli tertii* o *distantiæ stationum* AC *oppositi ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB; consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsente casu productam in D. Describatur ergo, ex centro C, radio CB, arcus BE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque nonnisi paucorum minutorum sit, *ex hypothesi*, pro recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 *Geom.*), erunt anguli o & u (§. 147 *Geom.*), itemque u & x æquales recto (§. 241 *Geom.*); consequenter $o + u = x + u$ (§. 145 *Geom.*), atque ideo $o = x$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus anguli x (sive o, *per demonstr.*) ad arcum BE; ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli o ad sinum totum (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. II. *Fig.* 23.

COROLLARIUM I.

67. Cum sinus anguli o majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arithm.*); eodem errore in metiendo angulo ACB admisso, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus o major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero o evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

Tab.II. Fig.23. 69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præsenti casu, ac si angulus *o* esset valde acutus. Quodsi autem angulum *o* in electione stationum obtusum desideres, tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficiant necesse est.

COROLLARIUM IV.

70. Si angulus *o* fuerit rectus, arcus BE cum ipsa BD coincidit, atque adeo errori in distantia admisso æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

COROLLARIUM V.

71. Errore adeo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus *o* fuerit rectus.

THEOREMA VII.

72. *Si in dimetienda distantia locorum* AB, *ex duobus angulis* A *&* C *& uno latere* AC, *error etiam in altero angulo metiendo* A *admittatur, præter eum qui in angulo* C *committitur; erit errorem in angulo* A *commissum metiens arcus* DI, *distantia uno errore implicita* AD *tanquam radio descriptus, ad errorem inde in distantia productum* IH, *ut sinus anguli tertii* o *quantitate erroris primi* m *diminuti ad ejus cosinum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore *m* & *k* admisso. Tab.II. Fig.23. Jam, distantia uno errore implicita AD tanquam radio, describatur arcus DI mensura erroris *k* (§.57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 *Geom.*); consequenter anguli DIH & ADI recti (§.78 *Geom.*), cumque arcus DI sit paucorum minutorum (§. 59 *Geom.*) pro recta haberi potest. Hinc porro ut in Demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Est vero ut sinus anguli *y* ad DI, ita sinus anguli *z* ad IH (§. 33). Ergo DI ad IH ut sinus anguli *y* ad sinum anguli *z* (§.173 *Arithm.*), sive cosinum anguli *y* (§. 241 *Geom.* & §. 11. *Trig.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus, ob rationem paulo ante dictam.

PROBLEMA XXVII.

74. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum* AB. Tab.II. Fig.17.

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§.152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 *Geom.*).
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§.126 *Geom.*).

3. Sum-

3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 245 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.

Tab.II. *Fig.*17.

4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§.36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§.36).

PROBLEMA XXVIII.

Tab.II. *Fig.*18. 75. *Invenire altitudinem accessibilem* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa, Instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§.227 *Geom.*).
3. Cum adeo C sit rectus (§.78 *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA VIII.

Tab.II. *Fig.*19. 76. *Si in quantitate anguli* A *investiganda aberretur, erit altitudo vera* BD *ad falsam* BC, *ut tangens anguli veri* DAB *ad tangentem anguli erronei* CAB.

DEMONSTRATIO.

Assumto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§.7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet Demonstratio; si angulus erroneus sit minor vero.

COROLLARIUM I.

77. Quoniam, posita eadem quantitate anguli veri atque erronei, eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§.76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM II.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum, seu recto vel minuto proximorum, minorem rationem inter se habent quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium teste; si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLION.

79. *Sit ex.gr. angulus verus BAD 30°, AB 67′: erit altitudo vera 3° 8′ 6″. Ponamus assumi angulum erroneum BAC 31°: is producet altitudinem erroneam BC 4° 0′ 2″ (§. 36). Sit in distantia minore BE angulus DEB recto proximus 86°, & assumatur per errorem angulus 87°: reperietur altitudo erronea 5° 1′ 6″, quæ erroneam supra inventam excedit 1° 1′ 4″.*

COROLLARIUM III.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§.188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEOREMA IX.

Tab.II. Fig.20. 81. *Si Instrumentum in* A *non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli* BAD *versus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli* EAB *ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri* CAB *ad tangentem erronei* CAD *vel* CAE.

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§.7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB, ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD, ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§.196 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Idem eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB a situ horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

82. *Eadem ergo hic locum habent Corollaria, quæ modo Theorematì præcedenti subjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ* AC, *quam* AB *commissum.*

PROBLEMA XXIX.

83. *Metiri altitudinem inaccessam* AB. Tab.II. Fig.21.

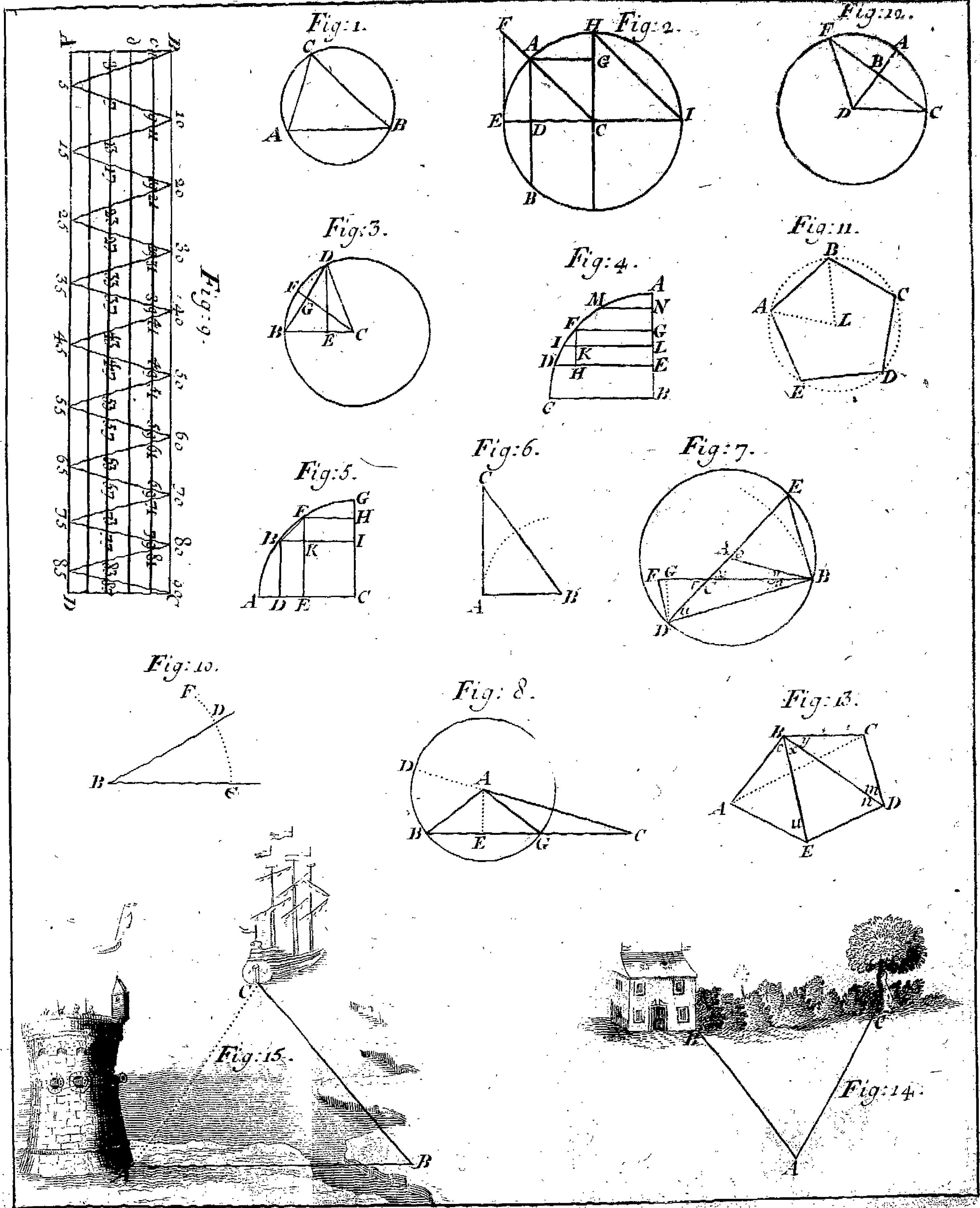
RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*), tanto intervallo DF distantes, ut angulus FAD non sit nimis exiguus, nec altera statio G nimis vicina altitudini AB (§. 78, 80).
2. Investigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque distantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD, ex datis angulo D *per observationem*, & angulo AFD (§. 239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36); dein, ex notis in triangulo ACF, præter rectum C, angulo F & latere AF, latus AC, itemque CF (§. 36); tandem, ex cognitis in triangulo FCB, præter rectum C, angulo CFB & latere CF, latus CB (§. 36).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæsita AB (§. 86 *Arithm.*).

Finis Trigonometriæ planæ.

ELEMENTA

Fig: Trigonometr. Tab: I.



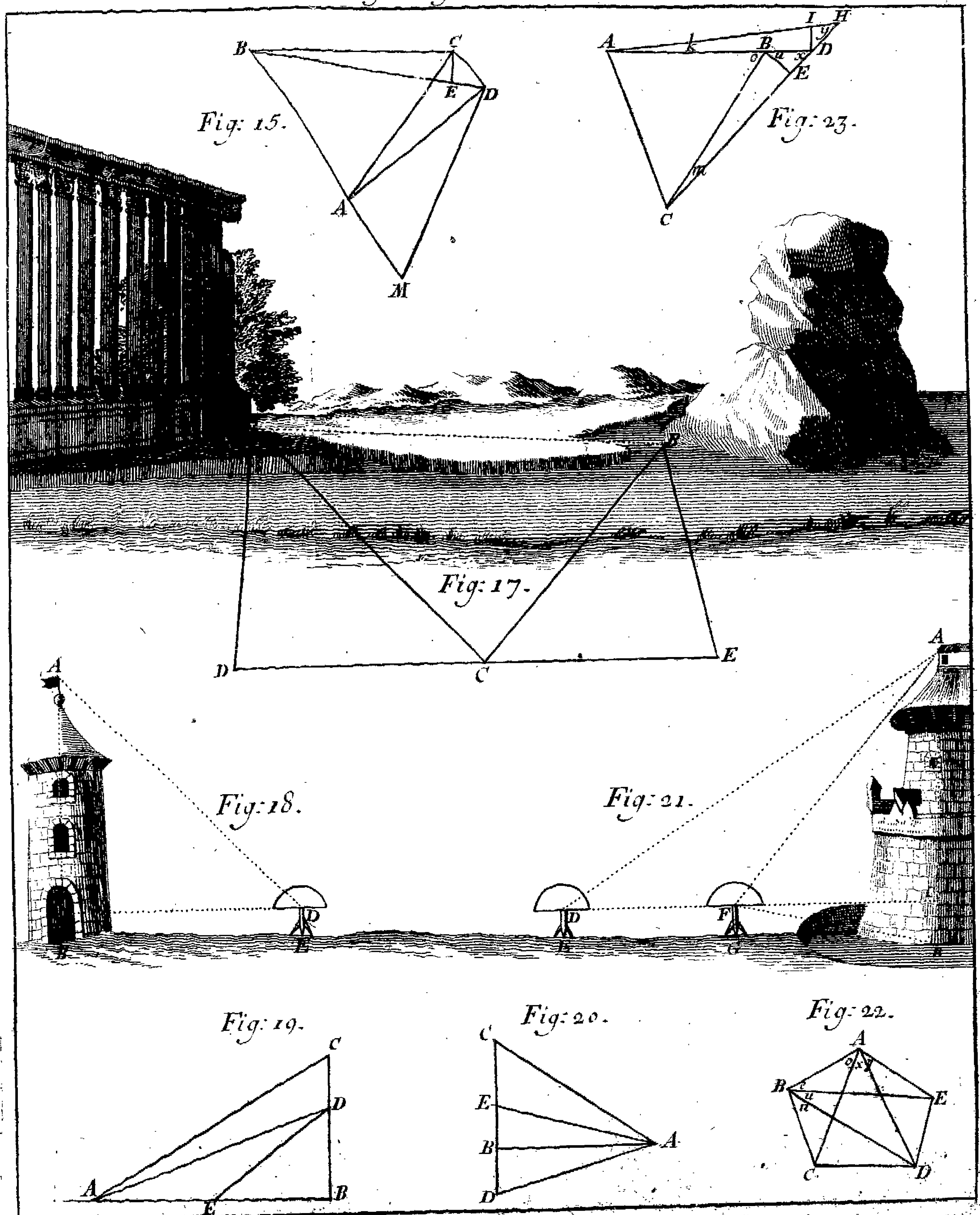


Fig: 15.
B
C
E
D
A
M
Fig: 23.
A
k
B
I
H
y
o
u
x
D
E
m
C
Fig: 17.
B
D
C
E
A
Fig: 18.
D
E
B
Fig: 21.
A
D
F
G
Fig: 19.
C
D
A
E
B
Fig: 20.
C
E
B
A
D
Fig: 22.
A
B
E
C
D

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.
PRÆFATIO.

APICEM totius Eruditionis humanæ conscendimus Analysin tradituri: est enim Ars, per calculum quantitatum generalem, proprio marte inveniendi veritates in Mathesi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expositis instructus, & Analysi adjutus, multa inveniet, quæ ex aliorum scriptis non sine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectissima est studiorum nostrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet, eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analysi, Artis ratiocinandi perfectissima occurrere exempla. Notiones enim signis expressæ imaginationi præsentia sistunt, quæ alias ultra ejus sphæram ascenderent: longa ratiociniorum series, quibus non sine multa attentione ac circumspectione notionum nexus detegitur, in Artem signorum combinatoriam convertitur, constanter eandem & principiis paucis ac manifestis superstructam. Illud autem prorsus mirabile existit, ope Analyseos unica sæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonstrandas volumina integra non caperent. Hinc, unius lineæ intuitu, integras fere disciplinas, paucorum minutorum ſpatio, addiſcere licet, quibus, juxta communem methodum comprehendendis, anni complures vix ſufficerent. Solidam ergo in Matheſi eruditionem conſecuturus Analyſi ſtudeat opus eſt. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla eſt), quam novitate rei deterritus a præſtantiſſimo ſtudiorum genere arceatur; Arithmeticam ſpecioſam familiarem ſibi reddat, neglectis ſub initium regularum rationibus, ſicubi difficultatem faceſſant, & exemplis numericis in locum earundem ſubſtitutis. Ubi ad exempla algebraïca pervenerit, non inutile judicamus, ut Tyrones data per numeros variis modis explicent, & idem Problema in caſibus ſpecialibus aliquoties ſolvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adſueſcant & ejus rationes ſimplices perſpiciant. Neque vero putandum eſt, integram Analyſin jamdum eſſe inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc ſubſidia deeſſe poſterorum induſtria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam Analyſin non omnia eruuntur, inprimis ſi a linearum & ſuperficierum ſitu pendent. Quamobrem LEIBNITIUS, Vir in omni eruditione ſummus, pro ea, quæ ipſi eſt, ingenii perſpicacitate novam quandam *Analyſin ſitus* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum ſitus* appellat) ſuperſtructam, a calculo magnitudinum, quibus in noſtra Analyſi utimur, toto cœlo differentis. Immo, qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad ſolvenda Problemata cum cura adhibuerit, pluribus regulis inveniendi artem ipſe locupletabit. Ceterum, quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari, ſtudio prætermiſſa, ea per Analyſin eruimus, ex Geometria quoque ſublimiori inveſtigantes, quæ præ reliquis ſcitu neceſſaria.

ELEMEN-

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

PARS PRIMA,
ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

SECTIO PRIMA,
DE ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT PRIMUM.
De Arithmetica Rationalium.

DEFINITIO I.

1. ANALYSIS *mathematica* est Methodus resolvendi Problemata mathematica.

DEFINITIO II.

2. *Arithmetica speciosa* est, quæ computum quantitatum seu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa*.

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum signa sint literæ alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæsitarum postremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION I.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui repræsententur per diversas notiones; eædem quoque tanquam distinctæ repræsentandæ sunt imaginationi per signa diversa.*

SCHOLION II.

5. *Nos* CARTESIUM *sequimur in* Geometria. *Angli nonnulli, exemplo* HARRIOTI *in* Artis Analyticæ praxi, *incognitas quantitates vocalibus; cognitas consonantibus designant.* VIETA *hujus Logisticæ inventor usus est literis majoribus; qui eam primus perfecit* HARRIOTUS *&* *ipsum secutus* CARTESIUS *literas minores substituerunt.*

SCHOLION III.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ *&* $-5a$ *eandem esse rationem, quæ est inter positivas* $+3a$ *&* $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. Ex. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent* (§. 389 Geom.) *& in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates; licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter* 1 *&* -1, *atque inter* -1 *&* 1 *rationem eandem esse sibi persuadent* (§. 24).

THEOREMA I.

26. *Quantitas qualibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (*§.3 Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (*§.13 Arithm.*). Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

27. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur, ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
4. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§.8).

$$\begin{array}{lllll} 4a + 2b - 2c - 5d - g & \qquad & a - b \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g & & c \\ \hline 9a \quad\;\; + 4c - 3d - 4g & & a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§.26); erit $a + a + a + a = 4a$; consequenter $4a + 5a = 9a$ (*§. 96 Arithm.*). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$, *per demonstr.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (*§.91 Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§.21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonstr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§.21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum,* b *grossum,* c *nummum; habebimus*

$$\begin{array}{l} 7a - 9b + 5c = 7\text{ th.} - 9\text{ gr.} + 5\text{ num.} \\ 3a + 5b - 9c = 3 \quad\; + 5 \quad\; - 9 \\ \hline 10a - 4b - 4c = 10\text{ th.} - 4\text{ gr.} - 4\text{ num.} \end{array}$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 *thalerorum deficiunt* 9 *grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad* 4 *reducitur. Quoniam vero non* 5 *grossi integri, sed demtis* 9 *nummis, summæ adjiciendi; summa* 10 th. $-$ 4 gr. *excedit genuinam* 9 *nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in nume-*

numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo Inventore detecta.

THEOREMA II.

29. *In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit subtrahenda ex $a+b$; differentiam esse debere $a+b-c-d$, adeoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex *hypoth.* 3 (§.8) patet. Sed si $c-d$ subtrahenda ex $a+b$, & integrum c subtrahitur; quantitas major subducta quam fieri debebat. Ergo quod plus justo subtractum est d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

30. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent, & minor e majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) absolvitur.
2. Si vero major e minori subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum vero +, si signo — gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus quantitatis, ex qua subtractio facta est.
4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$\begin{array}{l} 8a - 5c + 9d = 8\text{th.} - 5\text{gr.} + 9\text{ num.} \\ 6a - 8c - 7d = 6 - 8 - 7 \\ \hline 2a + 3c + 16d = 2\text{th.} + 3\text{gr.} + 16\text{num.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ d-e+f \\ \hline a+b-c-d+e-f \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+d \\ c-e-g \\ \hline a+d-c+e+g \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eædem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 35, 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§. 27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 29). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§. 27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per Theor. 2 (§. 29).

Aliter.

1. Signa quantitatis subtrahendæ mutentur in contraria (§. 29): quo facto
2. Additio fiat (§. 27), seu quæ se mutuo destruunt deleantur.

Ex. gr.

Ex.gr. Si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ subtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$ fiat (§. 29) $- 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) residuum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, se mutuo destruunt (§. 21).

SCHOLION.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint (§. 23), heterogeneæ autem nec addi* (§. 61 Arithm.), *nec a se invicem subtrahi possint* (§. 64 Arithm.), *privativæ tamen positivis addantur & ab iis subtrahantur. Enim vero rem curatius perpendens animadvertes, proprie loquendo privativam nunquam addi positivæ, nec ab eadem subtrahi: sed in additione subtrahi, quod plus justo fuerat additum* (§. 27); *in subtractione addi, quod plus justo fuerat subductum* (§. 30).

THEOREMA III.

32. *Si quantitas positiva per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit positiva.*

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 *Arithm.*). Sed uterque factor est positivus, *per hypoth.* Ergo & factum positivum esse debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum est $+ab$, *per demonstr.* Ergo si $+ab$ dividitur per $+a$, quotus erit $+b$; si per $+b$, quotus $+a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

33. *Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est hac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipsi addere (§. 67 *Arithm.*). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ *per demonstr.* Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arithm.*): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 *Arithm.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum, & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (§. 230 *Geom.*) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela, fo- Tab. I. Fig. 1.

re

Tab.I. Fig. 1. re GHBD & BHIF, consequenter AEIH rectangula. Sit ergo AE $= c$, GD $= d$: erit EC $= a - c$, CG $= b - d$, atque hinc ACDB $= ab$, AEIH $= bc - dc$ & HGDB $= ad$ (§. 375 *Geom.* & §. 33 *Analys.*). Quodsi areas rectangulorum AI, & HD subtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc est, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30). Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ esse $+ cd$. *Quod erat unum.*

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arithm.*). Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus adeo qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), utique quantitas positiva esse debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

35. *Possunt etiam Theorema 3 & 4 ope rectanguli demonstrari.*

THEOREMA VI.

36. *Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur; quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties sibimetipsi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero privativa sit defectus alicujus quantitatis (§. 19); proprie loquendo positiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut subtrahatur, quod plus justo fuit additum: id quod ita demonstramus.

Sint LMON & PMOQ rectangula, & in iis NO $= a$, MO $= b$, QO $= c$, erit NQ $= a - c$, area PQOM $= bc$, LNOM $= ab$, (§ 375 *Geom.*), consequenter LNQP $= b(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.* Tab.I. Fig. 2.

Factum ex $-c$ in $-d$ est $+ cd$ (§. 34). Ergo si $+cd$ dividis per $-c$, quotus esse debet $-d$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

37. *In multiplicatione ac divisione eadem signa efficiunt* $+$, *diversa* $-$.

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint positivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque casu positiva (§. 32, 34): si vero altera privativa, altera positiva; quantitas prodit privativa (33, 36). Ergo eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$. *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

38. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas in se invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arithm.*), nisi quod notetur regula: *eadem signa faciunt* $+$, *diversa* $-$ (§. 37).

$$\begin{array}{rrrr} & a & +c & \\ & b & +d & \\ \hline & +ad & +cd & \\ ab & +bc & & \\ \hline ab & +ad & +bc & +cd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & a & +b & -d \\ & & a & -b & -d \\ \hline & & -ad & -bd & +dd \\ & -ab & -bb & +bd & \\ aa & +ab & -ad & & \\ \hline aa & * & -bb-2ad & * & +dd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 10 = & 8 & +4 & -2 \\ & & 2 = & 8 & -4 & -2 \\ \hline & & & -16 & -8 & +4 \\ & & -32 & -16 & +8 & \\ & 64 & +32 & -16 & & \\ \hline 20 = & 64 & * & -48 & * & +4 \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{rrr} 8 = & 10 & -2 \\ 7 = & 10 & -3 \\ \hline & -30 & +6 \\ 100 & -20 & \\ \hline \end{array}$$

$$56 = 100 - 50 + 6 = 50 + 6$$

SCHOLION.

39. *Exemplum posterius demonstrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantiæ factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repræsentari solitæ; quod relinquitur, factis ex distantiis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summæ adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.*

PROBLEMA IV.

40. *Quantitates compositas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 210 *Arithm.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: *eadem signa faciunt* +, *diversa* — (§. 37).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8).

Ex. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{rrrrr} a-b-d) & aa-bb-2ad+dd & (a+b-d & & \\ & aa-ab-ad & & & \\ \hline & +ab-bb-ad+dd & & & \\ & +ab-bb-bd & & & \\ \hline & -ad+bd+dd & & & \\ & -ad+bd+dd & & & \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 & & & \end{array}$$

PROBLEMA V.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236, 237 *Arithm.*).

Ex. gr. sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 235 *Arithm.*). Ergo summa $\frac{ad+bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 30).

PROBLEMA VI.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239, 243 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

Corollarium I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§.242 *Arithm.*).

Corollarium II.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum esse per divisorem, & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

Problema VII.

45. *Quantitatem quamcunque per divisorem compositum dividere, utut divisionem exactam non admittat.*

Resolutio.

Divisio instituatur ut in Arithmetica communi (§.117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifestet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur; observata subtractionis, itemque multiplicationis ac divisionis lege de signorum mutatione (§.29, 37).

Ex. gr. Si quantitas dividenda b, dividens $a+c$, erit:

$$
\begin{array}{l}
a+c)\ b\ \left(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4}\ \text{\&c. in infin.}\right. \\
\quad\ \ b + \frac{bc}{a} \\
\hline
\quad - \frac{bc}{a} \\
\quad - \frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2} \\
\hline
\quad\quad + \frac{bc^2}{a^2} \\
\quad\quad + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3} \\
\hline
\quad\quad\quad - \frac{bc^3}{a^3}\ \text{\&c. in infin.}
\end{array}
$$

Nimirum si b per a dividitur, quotus est $\frac{b}{a}$ (§.8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a+c$ est $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§.43), hoc est, $b + \frac{bc}{a}$ (§.223 *Arithm.*): quod ex dividenda b subductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§.30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§.44). Factum ergo ex $a+c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc est, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43, 37), seu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.231 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ subtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 30). Unde patet quomodo divisio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipsa divisionis ratio insinuat, quotum constare ex infinita terminorum serie, quorum numeratores sunt potentiæ ipsius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipsius a, quarum exponentes

nentes æquantur numero ordinis terminorum. Ex. gr. in termino tertio potentia ipsius c in numeratore secunda est, potentia vero ipsius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM I.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, substituto valore hoc in quoto, prodit $1 = c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $1 : (1 + c) = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

47. Quodsi termini in quoto continuo decrescant, series dat quotum vero quantumlibet propinquum. Ex. gr. si $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his substitutis in serie generali, aut divisione ut in exemplo universali instituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam seriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, sed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in sexto; denuo peccabitur in defectu, sed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem constantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per series infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ series progressiones geometricæ decrescentes, ita quidem ut numerator semper sit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis resolvendæ.*

COROLLARIUM III.

49. Si termini in quoto continuo crescunt, series a quoto tanto magis discedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, nisi terminetur, ultimumque residuum sub signo suo adjiciatur. Ex. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 superat $\frac{1}{3}$ excessu $\frac{2}{3}$; termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$; termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$; & ita porro. Ponamus seriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter si sit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares, $= 0$, deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1; consequenter excessus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus seriem universalem (§.46) terminari in $-c^3$: erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = (1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4) : (1 + c)$ (§.235 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§.21).

SCHOLION I.

50. *Tyrones hoc Problema cum suis Corollariis sub initium prætermittere possunt, donec inferius ad illud provocetur.*

SCHOLION II.

51. *Quoniam si* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ *in seriem resolvitur, quotus a fractione proposita, quantumlibet continuatus, continuo differt* $\frac{1}{2}$ (§.49), *resolutio in præsenti casu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commisit* Guido GRANDUS *in Tractatu* De quadratura circuli & hyperbolæ, *Cor.* 3, *Prop.* 7, *Part.* 1, *p.m.* 29, *ubi infert, ob* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. *in infinitum* $= 0$, *summam infinitarum nullitatum esse* $\frac{1}{2}$. *Nec veritatem attigisse liquet* LEIBNITIUM *in* Actis Eruditorum *Tom.* 5, Supplement. *p.*264, *& seqq.*

DEFINITIO IV.

52. *Series*, quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur *convergentes*: quæ ab eodem continuo recedunt, *divergentes*.

COROL-

COROLLARIUM I.

53. Ergo series fractionum continuo decrescentium (§. 47, 48) sunt convergentes: ceteræ vero, quarum termini continuo crescunt (§. 49), divergentes.

PROBLEMA VIII.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, summa est exponens facti.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & y^m & y^m & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r} & x^{n+s} \end{array}$$

II. In divisione exponens dignitatis dividentis subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti

$$x^4\overset{x^7}{\Big(}x^3 \qquad y^n\overset{y^{m+n}}{\Big(}y^m \qquad a^r x^s\overset{a^m x^n}{\Big(}a^{m-r}x^{n-s}$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progressione arithmetica (§. 251, 333 *Arithm.*), dignitates in geometrica (§. 250, 332 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum logarithmis recte habentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates se mutuo multiplicantes, est exponens facti (§. 337 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates se mutuo dividentes, est exponens quoti (§. 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

55. *Progressiones istæ hæ sunt:*

$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54). *Sed* $x : x = 1$ (§. 69 Arithm.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arithm.).

PROBLEMA IX.

56. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere; aut ex eadem dati similiter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data, intuitu ejus ad quam evehenda, radix est (§. 246 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum existunt, *per demonstr. in Probl. præc.* (§. 54): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (341 *Arithm.*).

Ex. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n est x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 est y^6.

II. Non absimili modo liquet, exponentem radicis haberi, si exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 341 *Arithm.*).

Ex. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3: radix n ex x^{mn} est x^m: radix n ex x^m est $x^{m:n}$.

COROLLARIUM.

57. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 341 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales ad expressionem rationalem reduci possunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analysi commodi afferat hæc reductio ex capite subsequente elucescet. Etenim si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt: quemadmodum primi docuerunt* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA X.

59. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 57), diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 57).

Ex. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arithm.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57); seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. *Quodsi quis ægre admiserit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope elicuimus, per Algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebimus.*

PROBLEMA XI.

61. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 57), & $x^{m:m} = x$ (§. 56.), erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

Ex. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorem expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160 *Arithm.*).

Ex. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$, hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION I.

63. *Istud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire solet.*

COROL-

Corollarium II.

64. Per præsens adeo Problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

Corollarium III.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

Scholion II.

66. *Quodsi quæsiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne; & quænam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentiæ a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an $\sqrt[4]{368}$ sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum 368 in suos divisores, reperiet tentando*

2	184
4	92
8	46
16	23

nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam secundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 est divisor quæsitus, consequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

Problema XII.

67. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera subtrahere.*

Resolutio.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 61) fuerint commensurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur; ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 62); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis tum in additione:

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\ \hline 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \end{array}$$

summa; hoc est $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$ seu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in subtractione

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\ \hline 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \end{array}$$

different. hoc est $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$ seu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{28900}$

Demonstratio.

Omnia manifesta sunt ex demonstratione Probl. 1 & 2, (§. 27, 30).

Problema XIII.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

Reso-

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates sub signo radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur signum idem radicale cum suo exponente. Quodsi radicales quantitates fuerint diversæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

Ex. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compositis

$$\begin{array}{rr}
\sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\
\sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\
\hline
-\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\
3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\
\hline
3-2=1 & 2\sqrt{6}+5
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\
5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} \\
\hline
+21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} \\
35\sqrt{24} - 100 \\
\hline
35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-100 \\
\text{hoc est } 70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\
\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\
\hline
+16+8+32 \\
+4+2+8 \\
8+4+16 \\
\hline
98
\end{array}$$

Similiter in divisione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compositis,

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3})\ \sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2 \\
\quad \sqrt{15} \\
\hline
\quad -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\
\quad -\sqrt{6} \\
\hline
\quad +\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\
\quad\quad 2\sqrt{3} \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}$$

SCHOLION I.

69. *Interdum etiam divisio locum habet, si divisor compositus est. Sed cum rarissimus sit ejus usus & ea divisione ignorata maxime præclaros in Analysi progressus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi superfluum judicamus. Docet ipsam* OZANAMUS *in* Novis Elementis Algebræ (*a*).

SCHOLION II.

70. *Ceterum ex tradito hactenus calculo liquet, si quantitatem duplici signo radicali affici contingat, ex. gr. si fuerit* $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem sub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. Ex. gr.*

$$\begin{array}{l}
\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}\ (\S.\ 61) \\
\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})} \\
\hline
\sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})} \\
\qquad\qquad = \sqrt{(50\sqrt{3})} \\
\qquad\qquad = \sqrt{\sqrt{7500}}.
\end{array}$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{ll}
3+\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}} \\
\sqrt{\sqrt{2}} & \sqrt{(5\sqrt{5})} \\
3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & 5+\sqrt{(5\sqrt{10})} \\
\text{hoc est } \sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & \text{seu } 5+\sqrt{\sqrt{250}} \\
\text{seu } \sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{(3+\sqrt{2})} & \sqrt{(3+\sqrt{2})} \\
\sqrt{(5-\sqrt{3})} & \sqrt{(3-\sqrt{2})} \\
\hline
-3\sqrt{3}-\sqrt{6} & -3\sqrt{2}-2 \\
15+5\sqrt{2} & 9+3\sqrt{2} \\
\hline
\sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})} & \sqrt{7}
\end{array}$$

Dicuntur istiusmodi Radices, *qualis est* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$, universales.

(*a*) *Nouveaux Elémens* d'*Algebre*, Lib. I. Probl. 4. & seqq. p. 7. & seqq.

SCHO-

SCHOLION III.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum* (*§.* 246 Arithm. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8}=3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2}=5\sqrt{-2}=\sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8}=\sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ, in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum* $-$: *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.*

Ex. gr.

$$\begin{array}{c} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} \\ \sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline +4+2 \\ -8-4 \\ \hline -6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2}=-2$, & $+1.-1=-1$. *Ergo* $-1.-2=+2$

$$\begin{array}{l} \quad 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ \quad 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline \quad -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ -45+6\sqrt{-15} \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

CAPUT III.

De usu Calculi litteralis in inveniendis Theorematis.

PROBLEMA XIV.

72. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 *Arithm.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par sit $=2c$. Erit

$$\begin{array}{c} 2a \\ 2c \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2a \\ 2c \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2a \\ 2c \\ \hline \end{array}$$

Summa $2a+2c$ Diff. $2a-2c$ Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia, atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

PROBLEMA XV.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par sit $2a$ (§. 72 *Arith*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arithm.*). Erit

$$\begin{array}{c} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 2a+2c+1 \text{ Summa:} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 2c+1-2a \text{ Diff.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema. Si parem impari addas, aut unum ex altero ſubtrahas; ibi aggregatum, hic differentia eſt numerus impar. Si vero numerus par & impar ſe mutuo multiplicent, factum eſt numerus par.

PROBLEMA XVI.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, ſi impar impari addatur, aut unus ex altero ſubtrahatur, aut ſi impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{rl} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a+2b+2 & \text{Summa.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a-2b & \text{Differ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \end{array} \ \text{Factum.}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo ſubtrahitur; ibi ſumma, hic differentia eſt numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum eſt numerus impar.

PROBLEMA XVII.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, ſi meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, &c. erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque eſt numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem par $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot ſcilicet ſunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, multitudine pari, eſt numerus par.

Sint numeri impares, ut ante, $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$, &c. numerus eorundem impar $2m+1$. Erit ſumma $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, ſi numero impares fuerint, numerus eſt impar.

SCHOLION.

76. *Notetur in his Problematibus denominandi artificium, quod conſiſtit in analytica expreſſione numeri paris & imparis, quæ eorum definitiones repræſentat.*

PROBLEMA XVIII.

77. *Invenire, qualis ſit numerus per quem impar parem metitur.*

Quodſi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.* & 73 *Anal.*), adeoque $(2a+1)\,2b = 4ab+2b$. Eſt igitur $(4ab+2b) : (2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM I.

78. Patet ſimul, numerum, qui metitur parem per imparem, eſſe parem.

COROLLARIUM II.

79. Et quoniam $(2ab+b) : (2a+1) = b$; liquet porro, ſi impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PRO-

PROBLEMA XIX.

80. *Invenire, qualis sit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodsi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§. 74 *Arith.* & §. 74 *Anal.*), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ seu $4ab+2a+2b+1$. Est igitur $(4ab+2\,ab+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA XX.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $=n$, erit altera $n+1$: quadratum majoris n^2+2n+1 (§. 246
minoris n^2 *Arithm.*)

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, est numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis, seu summa radicum.

COROLLARIUM I.

82. Facillime ergo construuntur Tabulæ numerorum quadratorum, pro radicibus in serie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & consequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat consequens.

COROLLARIUM II.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: si $n=2$, erit $2n+1=5$: si $n=3$, erit $2n+1=7$: si $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione nascuntur numeri quadrati.

Radic.	Num. impar.	Num. Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA XXI.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit
Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§. 248
minor n^3 *Arithm.*).

Differentia $3n^2+3n+1$, hoc est, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, est aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia	$n+2$
erit cubus	$n^3+6n^2+12n+8$
præced.	n^3+3n^2+3n+1
Differ.	$3n^2+9n+7$
Differ. præc.	$3n^2+3n+1$
Differ. 2.	$6n+6$

 Theo-

Theorema 2. Differentia secunda trium cuborum in serie naturali est aggregatum ex sextuplo radicis primæ & senario, seu factum ex radice secunda in senarium.

Quod si jam $n=1$, erit $6n+6=6+6=12$; si $n=2$, erit $6n+6=12+6=18$: si $n=3$, $6n+6=18+6=24$: si $n=4$, $6n+6=24+6=30$, &c.

Theorema 3. Differentiæ secundæ cuborum in serie naturali progredientium est progressio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum Canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur Canon numerorum cubicorum, per Theorema primum; nondum constructo, per tertium, quemadmodum ex sequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. 1.	Diff. 2.
1	1		
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30
		91	
6	216		36
		127	
7	343		42
		169	
8	512		48
		217	
9	729		54
		271	
10	1000		

PROBLEMA XXII.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit summa $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{ccc} Q+q & Q+q & Q+q \\ Q & q & Q-q \\ \hline Q^2+Qq & Qq+q^2 & -Qq-q^2 \\ & & Q^2+Qq \\ \hline & & Q^2 \quad -q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum quantitatum (ex. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipsius $Q+q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA XXIII.

88. *Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$; consequenter $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ergo si addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§.261 *Arith.*); erit summa $2a^2 + 2b^2$, hoc est, summa quadratorum partium inæqualium æqualis est duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA XXIV.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod divisum.*

Sint partes Q & q: erit totum $Q+q$, hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$. Quodsi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius, una cum quadrato partis unius, æquale est rectangulo ex duplo ejusdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodsi $2Q+q$ in seipsum ducas; prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius, una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in se invicem.

PROBLEMA XXV.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales divisi atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviso in partem unam æquatur quadrato ejusdem partis, atque rectangulo ex eadem in summam duarum reliquarum.

PROBLEMA XXVI.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque divisa & insecta altera.*

Sint partes lineæ sectæ a, b, c, &c. erit linea secta $= a+b+c$, &c. Sit porro linea insecta $= d$: erit $(a+b+c$, &c.$)\ d = ad + bd + cd$, &c.

Theorema. Si linea recta fuerit in partes quotcunque divisa & præterea alia insecta, erit rectangulum sub iis comprehensum æquale rectangulis sub insecta & singulis sectæ partibus contentis.

PROBLEMA XXVII.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviso in partes singulas.*

Sit totum $= a + b$, erit $(a+b)a = a^2 + ab$ & $(a+b)b = ab + b^2$. Ergo summa $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arithm.*),

Theorema. Si recta secta sit utcunque, erunt rectangula sub tota & partibus comprehensa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA XXVIII.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales diviso & adjecto in adjectum.*

Sit totum in duas partes æquales divisum $= 2a$ & adjectum $= c$; erit compositum $= 2a + c$; consequenter $(2a+c)c = 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum sub toto & adjecto in adjectum, una cum quadrato partis dimidiæ, est æquale quadrato compositi ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA XXIX.

95. *Invenire Theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

 Sit

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in se ipsam, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c. (§. 250 *Arithm.*): ceu videre est ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex Tabulæ hujus consideratione manifestum est, terminos potentiarum componi ex quibusdam factis litteralibus, & numeris præfixis, quos *Uncias* cum OUGHTREDO (*a*) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, si fiant duæ progressiones geometricæ, quarum prima a potentia desiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate desinat, altera vero ab unitate incipiat & in desiderata potentia partis secundæ radicis desinat, atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur. Ex. gr. quærenda potentia sexta: scribe

$a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$. Series I.
$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Series II.

erunt $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia sexta ipsius $a+b$.

Apparet denique, uncias reperiri, si exponentes potentiarum secundæ seriei seu ipsius b sub exponentibus potestatum primæ seriei seu ipsius a scribantur, & nota prima ex serie superiore sumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem subit unciæ termini secundi potestatis; similiter factum ex nota prima in secundam ex serie superiore sumatur pro numeratore, factum ex prima in secundam ex serie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. Ex. gr. pro potentia sexta erit:

6. 5.

(*a*) *Clavis Mathematica*, c. 12. §. 6. p. m. 38.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc $\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſecundi potentiæ ſextæ; $\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3}=\frac{120}{6}=20$, uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſexti; $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$, uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodſi vero regulam pro potentia indeterminata deſideres, non alia re opus eſt, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$$\begin{array}{llllll} a^m, & a^{m-1}, & a^{m-2}, & a^{m-3}, & a^{m-4}, & a^{m-5} \\ 1, & b, & b^2, & b^3, & b^4, & b^5, \&c. \end{array}$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$, &c. quæ ſunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes ſint:

$$\frac{m.}{1.}\ \frac{m-1.}{2}\ \frac{m-2.}{3.}\ \frac{m-3.}{4.}\ \frac{m-4.}{5.}\ \frac{m-5.}{6}\quad \&c.$$

erit $\frac{m}{1}$, uncia termini ſecundi potentiæ;
$\frac{m.m-1}{1.2}$, uncia tertii;
$\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$, uncia quarti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, uncia quinti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, uncia ſexti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$, uncia ſeptimi &c.

Quare ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati;

$$\begin{aligned}
&a^m \\
&+\tfrac{m}{1}a^{m-1}b \\
&+\tfrac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 \\
&+\tfrac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 \\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4 \\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{m-5}b^5 \\
&+\tfrac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^6
\end{aligned}$$

&c. in infinitum

Quoniam vero $a^{m-1}=a^m:a$; $a^{m-2}=a^m:a^2$; $a^{m-3}=a^m:a^3$; $a^{m-4}=a^m:a^4$; $a^{m-5}=a^m:a^5$; &c. in infinit. (§. 54) his valoribus ſubſtitutis (§. 15 *Arithm.*) formula in ſequentem degenerat:

$$\begin{aligned}
&a^m \\
&+\frac{m.a^m b}{1.a} \\
&+\frac{m.m-1.a^m b^2}{1.\ 2.\ a^2} \\
&+\frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.\ 2.\ 3.\ a^3} \\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ a^4} \\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ a^5} \\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^m b^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ a^6}
\end{aligned}$$

&c. in infinitum.

Quodſi jam porro cum viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO (a) ponamus $a=P$ & $b:a=Q$; erit $a^m=P^m$; $b^2:a^2=Q^2$; $b^3:a^3=Q^3$; $b^4:a^4=Q^4$; $b^5:a^5=Q^5$ &c.

(a) In Epiſtola A. 1676 ad LEIBNITIUM data, apud WALLISIUM, Operum Vol. III. f. 622.

&c. consequenter his valoribus substitutis formula:

$$P^m$$
$$+\frac{m}{1}P^mQ$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\quad 2.}P^mQ^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\quad 2.\quad 3}P^mQ^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}.P^mQ^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur porro $P^m = A$; erit $\frac{m}{1}P^mQ = \frac{m}{1}AQ$.

Sit $\frac{m}{1}P^mQ = B$: erit $\frac{m.m-1}{1.\quad 2}P^mQ^2 = \frac{m-1}{2}BQ$.

Sit $\frac{m-1}{2}BQ = C$; erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.\quad 2.\quad 3}P^mQ^3 = \frac{m-2}{3}CQ$.

Sit $\frac{m-2}{3}CQ = D$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\quad 2.\quad 3}\frac{m-3}{4}P^mQ^4 = \frac{m-3}{4}DQ$

Sit $\frac{m-3}{4}DQ = E$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\quad 2.\quad 3}\frac{m-3.m-4}{4.\quad 5}P^mQ^5 = \frac{m-4}{5}EQ$

Sit $\frac{m-4}{5}EQ = F$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\quad 2.\quad 3}\frac{m-3.m-4.m-5}{4.\quad 5.\quad 6}P^mQ^6 = \frac{m-5}{6}FQ$

&c. in infinitum.

Habetur ergo tandem

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5} + EQ\frac{m-5}{6}FQ \text{ \&c in infinit.}$$

SCHOLION I.

96. *Equidem hoc Theorema nonnisi per inductionem eruimus, quæ inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum hæc inductio fundetur in observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendo tuto adhibetur; etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.*

SCHOLION II.

97. *Ut vero Theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis* 18 *seu* 10 + 8: *erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8:10 = \frac{4}{5}$, *consequenter*

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$
$$mAQ = 4.\,10000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{160000}{5} = 32000 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\,32000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{6}{5}.\,32000 = 6.6400 = 38400 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\,38400.\tfrac{4}{5} = \tfrac{8}{15}.\,38400 \quad \tfrac{307200}{15} = 20480 = D$$
$$\frac{m-3}{4}DQ = \tfrac{1}{4}.\,20480.\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.\,20480 = \tfrac{20480}{5} = 4096 = E$$
$$\frac{m-4}{5}EQ = 0.\,4096.\tfrac{4}{5} = 0.$$

10000	= A
32000	= B
38400	= C
20480	= D
4096	= E
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 *in duas quascunque partes alias, ex. gr. in* 6 & 12 *secetur: quo in casu erit* $P = 6$ & $Q = 12:6 = 2$, *consequenter*

$$P^m = 6^4 = 1296 = A$$
$$mAQ = 4.\,1296.\,2 = 8.\,1296 = 10368 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\,10368.\,2 = 3.\,10368 = 31104 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\,31104.\,2 = \tfrac{4}{3}.\,31104 = \tfrac{124416}{3} = 41472 = D$$

m — 3

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}.41472.2 = \frac{2}{4}.41472 = \frac{41472}{2} = 20736 = E$

$\frac{m-4}{5}EQ = 0.20736.2 = 0.$

1296 = A	
10368 = B	
31104 = C	
41472 = D	
20736 = E	
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Patet adeo seriem terminari, si m *explicetur per numerum determinatum.*

Corollarium I.

98. Si m explicetur per numerum fractum, series $P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem Theorema extractioni radicis inservit. Ex.gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = x^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

$$P^m = a^{2:2} = a = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{1}{2}a. - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}. - \frac{x^2}{2a}. - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1-2}{4}.\frac{x^4}{2a^3} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3}. - \frac{x^4}{8a^3}. - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1-4}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{3}{6}.\frac{x^6}{8a^5} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4}. - \frac{x^6}{16a^5}. - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1-6}{8}.\frac{x^8}{16a^7} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5}. - \frac{5x^8}{128a^7}. - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1-8}{10}.\frac{5x^{10}}{128a^9} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}, \text{ \&c. in inf.}$$

Est adeo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$, &c. in infin.

Scholion III.

99. *Si cui molestus evadit fractionum calculus, is cum* Newtono *in formula generali substituat pro* m *exponentem fractum* m : n, *formulam sequentem obtenturus:*

$$(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ$$

&c. *Hac vero formula ubi utetur, quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *assumet* 1.

Scholion IV.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$ *&c. quam in dato casu determinet, numero pro* m *substituto. Ex. gr. Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana; erit* m = 4: *unde habetur* $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, *& juxta hoc Theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 269, 282 Arithm.). *inquisivimus. Nimirum, cum præter* a^4 *seu quadratoquadratum partis primæ radicis, quatuor auferri debeant facta; resecentur versus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum:*

$$\begin{array}{r|l}
10 & 4976\,(18 \\
1 & \\
\hline
\cancel{9} & \cancel{4976} \\
4a^3 = & 4\,.\,.\,. \\
4a^3b = 3 & 2\,.\,.\,. \\
6a^2b^2 = 3 & 84\,.\,. \\
4ab^3 = 2 & 048\,. \\
b^4 = & 4096 \\
\hline
 & \cancel{94976} \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
4a^3 = & 4 \\
b = & 8 \\
\hline
4a^3b = & 32 \\
b^2 = & 64 \\
a^2 = & 1 \\
\hline
a^2b^2 = & 64 \\
 & 6 \\
\hline
6a^2b^2 = & 384 \\
b^3 = & 512 \\
4a = & 4 \\
\hline
4ab^3 = & 2048
\end{array}$$

Si radix plures quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.). *Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit* = P, *& residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum* = Q, m = 1, *&* n *exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope Theorematis in Schol. præc. obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens.*

Ex. gr. Quæratur $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1, *& residuum hoc ex 2 subducto* = 1; *erit* P = 1, Q = 1. *Præterea* m = 1, *&* n = 2. Hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \text{ \&c.}$$

Eſt ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \text{\&c.} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c. in infinitum.

Ubi series fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt{2}$ *sit diagonalis quadrati, posito ejus latere* = 1 (§. 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope veræ ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt. Ex. gr. si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2}$, *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ [$= 3 : 2$] *justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *seu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ [$= 11 : 8$] *justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra* $\frac{1}{16}$ *existente: & ita porro.*

COROLLARIUM II.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi poteſt, ſumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inſervit.

Ex. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, ex. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ &c. $c = a$ & $d + g = b$: erit $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3 (d + g) + 6c^2 (d + g)^2 + 4c (d + g)^3 + (d + g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $ma^{m-1} b = 4c^3 (d + g)$, $\frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 = 6c^2 (d + g)^2$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.} a^{m-3} b^3 = 4c (d + g)^3$,

m.

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\, a^{m-4}b^4 = (d+g)^4.$$

Est vero, vi ejusdem Theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$; $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$; $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM III.

102. Quare si infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a substituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Est enim

$$\begin{array}{lrl}
b^2 = & b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2cdy^5 + d^2y^6 & \&c. \\
& + 2bdy^4 + 2bey^5 + 2cey^6 & \&c. \\
& + 2bfy^6 & \&c. \\
b^3 = & b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 & \&c. \\
& + 3b^2dy^5 + 6bcdy^6 & \&c. \\
& + 3b^2ey^6 & \&c. \\
b^4 = & + b^4y^4 + 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6 & \&c. \\
& + 4b^3dy^6 & \&c. \\
b^5 = & + b^5y^5 + 5b^4cy^6 & \&c. \\
b^6 = & + b^6y^6 & \&c.
\end{array}$$

Hos ergo valores si in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3$ &c. substituas, & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipsius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$\begin{array}{l}
a^m \\
+ a^{m-1}by \\
+ \left.\begin{array}{l} \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}c \end{array}\right\} y^2 \\
+ \left.\begin{array}{l} \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bc \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}d \end{array}\right\} y^3 \\
+ \left.\begin{array}{l} \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4 \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2c \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}c^2 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bd \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}e \end{array}\right\} y^4 \\
+ \left.\begin{array}{l} \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{m-5}b^5 \\ + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 1}a^{m-4}b^3c \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2d \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}bc^2 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}cd \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}be \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}f \end{array}\right\} y^5
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^6 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 1}a^{m-5}b^4c \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 1.\ 2}a^{m-4}b^2c^2 \\
+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 1}a^{m-4}b^3d \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{m-3}c^3 \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 1.\ 1}a^{m-3}bcd \\
+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2e \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}d^2 \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}ce \\
+\frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bf \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}g
\end{array}\right\} y^6$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM IV.

103. Eodem modo patet, si infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in serie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos esse per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipsius y sint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION V.

104. *Constat adeo idem Theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem desideratam evehendo sufficere. Tyrones illud sub initium studii analytici prætermittant, donec inferius in Analysi infinitorum eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad potestatem determinatam facile evehitur per formulas speciales superius allatas. Ex. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem secundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *erit*

$$\begin{array}{l}
h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4 \\
\qquad\qquad + 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad + 2hlx^5 + 2ilx^6 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2hmx^6 \text{ \&c.}
\end{array}$$

(§. 265 Arithm.). *Nimirum primo sumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$, *& quæritur ejus potentia desiderata, veluti hic secunda. Deinde* $hx + ix^2$, *habentur pro termino uno,* kx^3 *pro altero, atque sic denuo per formulam binomii determinatur potentia desiderata, veluti hic secunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *sumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero, & ita porro. Quæ eadem series invenitur, si in generali* (§. 102) *fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. *Est enim:*

$$a^m y^m = h^2x^2$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,b\,y^{m+1} = 2hix^2$$

$$\frac{m.\ m-1}{1.\ \ 2}a^{m-2}\,b^2\,y^{m+2} = \tfrac{2}{2}h^0i^2x^4 = i^2x^4.$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,c\,y^{m+2} = 2hkx^4 \text{ \&c.}$$

SCHOLION VI.

105. *Ceterum notetur artificium, quo casus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA XXIX.

106. *Determinare summam termini primi & ultimi in progressione arithmetica.*

Sit

Sit terminus primus a, differentia terminorum sive crescentium, sive decrescentium, d; erit (§. 333 *Arithm.*).

$$\begin{array}{cccccc} a, a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d, & a\pm 5d, \\ a\pm 4d & & a\pm 2d & & a \\ \hline 2a\pm 5d, & & 2a\pm 5d, & & 2a\pm 5d, \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{cccc} a, a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d \\ a\pm 3d & 2 & & a \\ \hline 2a\pm 4d & 2a\pm 4d & & 2a\pm 4d \end{array}$$

Theorema. In progressione arithmetica tam crescente, quam decrescente, summa termini primi & ultimi æqualis est summæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidistantium, aut medii duplo, si numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Ex. gr.} & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21 \\ & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & & 24 = & 24 = & 24 = & 24 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

107. Habetur ergo summa progressionis arithmeticæ, si summa termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM II.

108. Quodsi adeo sit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arith.*), consequenter summa progressionis $\frac{1}{2}n\,(2a + (n-1)\,d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d, & numero terminorum n, invenitur summa progressionis, si facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in semidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejusdem. Ex. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, erit summa $= 21 + \frac{49-7}{2}.\ 3 = 21 + \frac{42}{2}.\ 3 = 21 + 21.\ 3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent Tyrones regulas ex symbolis eruturi, ab initio gradatim esse progrediendum, exprimendo nempe sigillatim quodlibet symbolum per rem denotatam & quamlibet operationem signis repræsentatam per nomina convenientia. Ex. gr. in* an *est* a *terminus primus &* n *numerus terminorum*, ex hypoth. *Sed* an *est factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *substituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n² *est quadratum ipsius* n (§. 254 Arithm.). *Sed* n *est numerus terminorum: ergo* n² *quadratum numeri terminorum. Signum — indicat subtractionem* (§. 8). *Quare* n²—n *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* ½ (n²—n) *semidifferentia ista. Porro* d *est differentia terminorum*, ex hypoth. *adeoque* ½ (n²—n) d *factum ex illa semidifferentia in differentiam terminorum. Denique signum + indicat facta hactenus explicata esse addenda. Hac quidem syllabizatione opus habent, qui sine mora symbolicas expressiones quantitatum sibi familiares reddere gestiunt.*

COROLLARIUM III.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc est, sit series numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c. erit summa $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21).

§. 21). Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione; consequenter differentias numerorum quadratorum esse numeros impares: id quod supra alia ratione fuit demonstratum (§. 83).

COROLLARIUM IV.

111. *Sit* $a = n = \frac{1}{2} d$, erit summa $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet adeo cubus resolvitur in progressionem arithmeticam, cujus terminus primus, semidifferentia & numerus terminorum sunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION.

112. *Patet modus ex formulis algebraïcis eruendi Theoremata specialia, qui continetur sub Problemate logico de specierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

DEFINITIO IV.

113. *Denominator* rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM I.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 210 *Arithm.*). Unde si terminus minor a, denominator m; erit major ma; si terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arithm.*) Immo quoniam $\frac{a}{m} = a . \frac{1}{m}$ (§. 43); si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quacunque designat.

COROLLARIUM II.

115. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 133 *Arithm.*); ejus denominator idem est cum exponente (§. 136 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arithm.* & §. 114 *Analys.*): hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

SCHOLION.

117. *Exponens & denominator rationis Autoribus voces synonymæ sunt. Aliter vero Veteres, aliter Recentiores exponentem definiunt. Nos Veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 136), *tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonstrandum utilis. Etenim si rationis* 2 : 3 *exponens dicatur* $\frac{2}{3}$; *inde intelligitur antecedentem terminum esse æqualem duabus tertiis consequentis, adeoque pro mensura, qua utrumque metimur, assumi tertiam consequentis partem. Hinc vero clarius cognoscitur rationis hujus natura, quam si cum Recentioribus nonnullis dicas exponentem esse* $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in consequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem constituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 115), *quod nomen etiam in casu posteriori suggerat* (§. 147 Arithm.) *& demonstrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem assumimus.*

PROBLEMA XXX.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progressio (§. 332 *Arithm.* & §. 114 *Analys.*).

$$\begin{array}{ccccccc} a, & ma, & m^2a, & m^3a, & m^4a, & m^5a, & m^6a \\ m^6a & m^5a & m^4a & m^3a, & m^2a & & a \\ \hline m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2 \end{array}$$

Theorema. In progressione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidistantium, itemque medii quadrato, si numerus terminorum impar.

Ex. gr.
$$\begin{array}{cccccc} 3, & 6, & 12, & 24, & 48, & 96 \\ & & & 12 & 6 & 3 \\ \hline & & & 288 = & 288 = & 288 \end{array}$$

PROBLEMA XXXI.

119. *Determinare quotum ex divisione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi, $m^{n-1}a - a$. Hæc si dividatur per $m - 1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$m - 1)\; m^{n-1}a - a \;(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a, \text{ \&c.}$$
$$\underline{m^{n-1}a - 1m^{n-2}a}$$
$$+ m^{n-2}a - a$$
$$\underline{+ m^{n-2}a - m^{n-3}a}$$
$$+ m^{n-3}a - a$$
$$\underline{+ m^{n-3}a - m^{n-4}a}$$
$$+ m^{n-4}a - a$$
$$\underline{+ m^{n-4}a - m^{n-5}a}$$
$$+ m^{n-5}a - a$$
$$\underline{+ m^{n-5}a - m^{n-6}a}$$
$$+ m^{n-6}a - a, \text{ \&c.}$$

Quodsi n determinetur, ex. gr. per 7, erit $n - 7 = 0$; consequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque divisio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Et cum sit $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+ a$ (§. 174, 169 *Arithm.*); patet porro

Theorema 2. In progressione geometrica est ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad summam omnium terminorum excepto maximo.

COROL-

COROLLARIUM I.

120. Quodsi ergo quoto ex divisione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; summa totius progressionis habetur.

COROLLARIUM II.

121. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, adeoque summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ (§. 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 21); consequenter si eadem summa dicatur s, $m - 1 : m^n - 1 = a : s$, (§. 302 *Arithm.*). Est adeo terminus primus (seu minimus) progressionis ad ejus summam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit ex. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit summa $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM III.

122. Quoniam si terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa $(m^n a - a) : (m - 1)$ (§.121): erit differentia inter terminum ultimum & summam $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ & differentia inter primum & summam $\frac{m^n a - a}{m - 1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m - 1}$ (§.235 *Arithm.*) $= \frac{m^n a - ma}{m - 1}$. Est ergo differentia prior ad posteriorem ut $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ ad $(m^n a - ma) : (m - 1)$, hoc est, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (§. 178 *Arithm.*), hoc est, ut 1 ad m (§. 181 *Arithm.*), seu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

123. Quare si differentia inter terminum primum & summam dividatur per differentiam inter summam & terminum ultimum; quotus est denominator (§. 69 *Arithm.*).

PROBLEMA XXXII.

124. *Investigare rationum symptomata.*

Non alia re opus est, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114), & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes sint æquales, nec ne (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $a : ma$, multiplicando per c, c: $ac : mac = a : ma$

II. $a : ma$, dividendo per c, c: $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$, $b : mb$, subtrahendo: $a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$, $b : mb$, addendo: $a + b : ma + mb = a : ma = b : mb$.

Sit porro $a : ma = b : mb$

erit alternatim $a : b = ma : mb$

inverse $ma : a = mb : b$

conversim $a + ma : a = b + mb : b$

composite $a + ma : ma = b + mb : mb$

divisim $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item: $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : mac = b : mbc$

$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

$ac : ma = bc : mb$

$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

$ac : mac = b : mb$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

$ac : mac = bd : mbd$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mad$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb$.

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducantur per regulas fractionum, rationum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1} a - a : m^{n-2} a + m^{n-3} a + m^{n-4} a$ &c. $+ a$ (*Th.* 2. §. 119); sit vero $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.* 1); erit $ma - a : a = m^{n-1} a - a : m^{n-2} a + m^{n-3} a + m^{n-4} a$ &c. $+ a$, hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum, ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA XXXIII.

126. *Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus; & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in se non possit dividi nisi per unitatem solam (§. 75 *Arithm.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium:

$$1, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, \text{\&c.}$$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 332 *Arith.*); per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte, nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, &c. non posse dividi nisi per m, patet (§ 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§. 254 *Arithm.*); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. **Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est; maximum nullus alius metitur, præter eos qui sunt in serie; consequenter nec primus alius, nisi secundus, seu ab unitate proximus.**

Et quoniam, in omni casu numerorm ab unitate continue proportionalium, termini ultra secundum sunt potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 332, 250 *Arithm.*); igitur in genere patet

Theorema 2. **In serie numerorum ab unitate continue proportionalium, minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui est in serie.**

Cum terminus compositus exacte dividi possit per numerum alium præter unitatem (§. 76 *Arith.*); exprimetur idem per mn. Quare si in progressione geometrica ab unitate incipiente terminus secundus sit mn; erit series

$$1, mn, m^2n^2, m^3n^3, m^4n^4, m^5n^5, m^6n^6, \&c.$$

atque adeo patet numeros primos m & n, qui metiuntur secundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque serie exponens termini secundi est 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. consequenter exponens in loco impari est numerus par, in loco pari est impar, & quidem in loco quarto, seu a secundo tertio, exponens est ternarius, & duobus locis intermissis sequitur continuo numerus per ternarium divisibilis, seu quem ternarius metitur. Similiter in loco septimo, seu a secundo sexto, exponens senarius est, & quinque locis intermissis continuo sequitur exponens quem senarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione nascantur. Hisce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, secundus (unitate seclusa) quadratus erit, & uno intermisso omnes: tertius autem cubus est, & duobus intermissis omnes: sextus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermissis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, secundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuscunque gradus, erunt series

$$1, m^2, m^4, m^6, m^8, m^{10}, m^{12} \&c.$$
$$1, m^3, m^6, m^7, m^{12}, m^{15}, m^{18} \&c.$$
$$1, m^n, m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n} \&c.$$

Quoniam in qualibet serie termini continuo prodeunt multiplicatione per secundum, exponens secundi continuo additur exponenti termini cujuscunque dati, ut prodeat proxime sequens (§. 54); consequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi, per secundi quoque termini exponentem dividi possunt; consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5. Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum, terminus secundus, seu ab unitate primus, est quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; si idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHO-

SCHOLION.

127. *Patet adeo, per calculum literalem facillime symptomata rationum & progressionum geometricarum ab unitate incipientium, vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA XXXIV.

128. *Invenire rationem superficierum atque corporum in Geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, bases sint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375, 387 *Geom.*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc est, ut b ad c (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque-alta basium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium basium sunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*). Est ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc est, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 3. Quadratum diametri est ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint bases parallelogrammorum & triangulorum similium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375, 387, 392 *Geom.*), hoc est, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula similia sunt ut quadrata basium; seu (quia quodlibet latus pro basi assumi potest (§. 113 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint bases parallelepipedorum, prismatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora ista ut ac ad bc (§. 536, 539, 541, 548 *Geom.*), hoc est, ut a ad b (§. 181 *Arithm.*). Eodem modo c assumi potest pro basi communi, ita ut a & b sint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides & coni ejusdem altitudinis basium rationem habent; eandem vero basin habentes sunt in ratione altitudinum.

Non absimili modo alia hujus generis Theoremata investigantur.

PROBLEMA XXXV.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc est, ordo earum variari possit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut scribi possit ab, aut ba; patet esse numerum variationum $2 = 2.1$.

Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

$c\ a\ b$
$a\ c\ b$
$a\ b\ c$

$c\ b\ a$
$b\ c\ a$
$b\ a\ c$

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3.2.1 = 6$.

Quodsi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combinari

nari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6.4 = 4.3.2.1 = 24$.

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum $24.5 = 5.4.3.2.1$.

Quare ſi numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5$ &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab*, *abb*, *bba*, quatuor *cbab*, *bcab*, *babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo $1 = (2.1):(2.1)$, in ſecundo $3 = (3.2.1):(2.1)$, in tertio $12 = (4.3.2.1):(2.1)$. Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque: unde numerus omnium variationum $60 = (5.4.3.2.1):(2.1)$. Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit n; fore omnium variationum numerum $(n. n-1. n-2. n-3. n-4$ &c$):(2.1)$.

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, adeoque numerus variationum $4 = (4.3.2.1):(3.2.1)$. Quinta ſi accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum $(5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Eodem modo, ſi ſexta aſſumatur, reperietur numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Unde colligitur, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5$ &c.$):(3.2.1)$.

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodſi vero quinta accedat, variationes ſunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum eſt $5 = (5.4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Si ſexta aſſumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes ſex pariet; adeoque numerus variationum $30 = (6.5.4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Unde conſtat, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5.$ &c.$):(4.3.2.1)$.

Ex his formulis ſpecialibus colligitur generalis. Nempe ſi n denuo ſit quantitatum numerus, m numerus qui indicat quoties eadem quantitas occurrit: erit $(n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5. n-6. n-7. n-8. n-9$ &c.$):(m. m-1. m-2. m-3. m-4. m-5. m-6$ &c.). Nimirum ſeries continuanda, donec continua unitatis ſubtractio ex n & m relinquat 0.

Eodem modo ulterius progredi licet; tandemque reperietur, ſi numerus quantitatum fuerit n, numeri qui indicant quoties earum aliquæ repetuntur, ſint l, m, r &c. formula univerſaliſſima $(n. n-1. n-2. n-3. n-4. n-5. n-6$ &c.$):(l. l-1. l-2. l-3. l-4$ &c. $m. m-1. m-2. m-3.$ &c. $r. r-1. r-2. r-3. r-4. r-5$ &c.). Ex. gr. ſit $n=6, l=3, m=3, r=0$; erit numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1.3.2.1) = (6.5.4):(3.2) = 5.4 = 20$.

SCHO-

SCHOLION I.

130. *Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quæratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 6, 227, 020, 800.*

SCHOLION II.

131. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis possibilia. Ex. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes possibiles.*

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt adeo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SECTIO SECUNDA.

DE ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

De Algebra ad Problemata arithmetica, eaque determinata, applicata.

DEFINITIO V.

132. A*Lgebra* est methodus resolvendi Problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales; ex. gr. $2 . 3 = 2 + 4$. STIFELIUS (*a*) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

(*a*) In *Arithmet. integra* lib. 3. c. 1. p. 228. b.

DEFINITIO VII.

134. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. Ex. gr. si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

DEFINITIO VIII.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus; ex. gr. $x = 3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus; ex. gr. $x = -5$; *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

137. Si valor ipsius x fuerit radix quantitatis negativæ, ex. gr. $\sqrt{-5}$; *Radix imaginaria* appellatur (§. 71).

DEFINITIO XI.

138. *Æquatio* dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis; ex. gr. si $x = (a+b):2$.

DEFINITIO XII.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLION.

140. *In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA XXXVI.

141. *Problema datum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur; & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *Problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso Problemate contineantur, per Theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88, 91, 93, 94, 255, 256 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radicis ex æquatione quadratica additturi.*

PROBLEMA XXXVII.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens est esse $x = \sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x \mp ax = \mp b^2$; tum x assumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus I.

$$x^2 + ax = b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \qquad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

Casus

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

vel $x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} > \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 136), atque adeo solus valor $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§. 135).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \& \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$\& \; x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus; consequenter radix vera (§. 135). Habet adeo in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet esse $(\tfrac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \tfrac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XXXVIII.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia, cum tertia & quarta, numerum integrum unitate superat.*

Sit numerus quæsitus x, erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

hoc est $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\tfrac{26}{24}x = x + 1$

$$\text{24 mult.}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$24x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}$$

$$2x = 24$$

$$\text{2 div.}$$

$$x = 12$$

Examen. $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$

PROBLEMA XXXIX.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ, qualescunque & quotcunque, simul sumtæ ipsum superant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæsitus x, partes aliquotæ $\tfrac{a}{b}x$, $\tfrac{c}{d}x$, $\tfrac{e}{g}x$, &c. Erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{a}{b}x + \tfrac{c}{d}x + \tfrac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h.e. $\dfrac{(adg + bgc + bde)x}{bdg} = f + x$ (§. 235 *Arith.*)

$$(adg + bgc + bde)\,x = fdbg + bdgx$$

$$bdgx \qquad bdgx \text{ subt.}$$

$$(adg + bgc + bde - bdg)x = fbdg$$

$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

seu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$.

Æquatio ultima hanc suppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus.

Ex.

Ex. gr. Sit $a:b = \frac{1}{2}; c:d = \frac{1}{3}, e:g = \frac{1}{4}, f = 1$; erit $x = 24:(12 + 8 + 6 - 24) = 24:2 = 12$.

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA XL.

146. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ &, $\sqrt[s]{y^r}$, quemadmodum supra (§.59). Fiat

$$\begin{array}{ll} \sqrt[m]{x^n} = t & \sqrt[s]{y^r} = v \\ \hline x^n = t^m & y^r = v^s \\ \hline x^{sn} = t^{ms} & y^{rm} = v^{sm} \\ \hline \sqrt[ms]{x^{sn}} = t & \sqrt[ms]{y^{rm}} = v \end{array}$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[s]{y^r} = \sqrt[ms]{y^{rm}}$, ut supra (§. *cit.*); quo ipso patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad eandem denominationem, si iidem fuerint fractiones diversæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti possumus in aliis casibus similibus. Ita multiplicationem ac divisionem fractorum atque irrationalium eadem methodo investigare licet.*

PROBLEMA XLI.

148. *Datis summa duarum quantitatum, & earundem facto; invenire numeros.*

Sit summa $= a$ Semidiffer. $= x$

Fact. $= b$; erit quant. maj. $= \frac{1}{2}a + x$

min. $= \frac{1}{2}a - x$ (§.6).

Ergo per conditionem Probl.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4}aa - xx = b & (\text{§}.38). \\ \quad xx \quad xx & \text{add.} \\ \hline \frac{1}{4}aa = b + xx & \\ b \qquad b & \text{Subtr.} \\ \hline \frac{1}{4}aa - b = xx & \\ \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x & \end{array}$$

Regula 1. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem.

Sit ex. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæsiti 8 & 6. Nam $8.6 = 48$, & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ est dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio secunda hoc continet

Theorema: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale est rectangulo inæqualium, una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet adeo, quod sæpius casu in Theoremata incidamus, dum Problemata algebraice resolvimus; qualia subinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermittemus.*

PROBLEMA XLII.

151. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum, & differentia earundem; invenire quantitatem utramque.*

Sit

Sit summa $=a$ Quantit. maj. $=y$
differentia $=b$ min. $=x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$x^m \quad x^m \text{ ſubt.} \qquad x^m \quad x^m \text{ add.}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§.87 *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$+ x^m \quad + x^m \text{ add.}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$b \quad b \quad \text{ſubt.}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$\text{(2 div.)}$$
$$(a-b):2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m=2$, $a=97$, $b=65$: erit $x=\sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y=\sqrt{(b+x^2)} = \sqrt{(65+16)} = \sqrt{81} = 9$.

Examen: $y^2 + x^2 = 81 + 16 = 97$ &
$y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima reſolvitur in hanc analogiam,

$a - b : x^m = 2 : 1$ (§.299 *Arithm.*).

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema. Exceſſus ſummæ duarum dignitatum ſimilium ſupra differentiam earundem, eſt ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XLIII.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus, una cum itinere diurno alterius ipſum dato tempore ſequentis; invenire tempus, quo illum hic aſſequetur.*

Sit iter diurnum primi $=a$
ſecundi $=b$
tempus datum $=c$
tempus quæſ. $=x$,

erit iter intra tempus datum a primo confectum $=ac$; quod vero idem intra quæſitum emenſus eſt $=ax$: iter poſterioris intra tempus quæſitum reperietur $=bx$ (§.302 *Arithm.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$ac + ax = bx$$
$$ax \quad ax \text{ ſubtr. quia } bx > ax$$
$$ac = bx - ax$$
$$b-a \text{ div.}$$
$$ac:(b-a) = x$$

Sit $a=6$, $b=8$, $6=4$: erit $x = 24:2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi eſt 6, ſecundi 8; via primi eſt $6.16=96$, ſecundi $8.12=96$

Æquatio penultima in hanc analogiam reſolvitur (§. 299 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ ſequens ſuppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum inſequitur, tempore aliquo elapſo, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, eſt ad viam primi quem alter inſequitur, ut tempus ab itinere primi uſque ad initium itineris ſecundi elapſum ad tempus quo alter ipſum aſſequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio Problematis reſolutionem non ingrediatur, Problema univerſalius de mobilibus quibuſcunque concipi poſſe.*

PROBLEMA XLIV.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris, una cum tempore ab initio itineris elapſo; invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum aſſequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapsum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$.

Erit, per conditionem Problematis, ut in Probl. præced.

$$ab + ac = cx \quad c \text{ div.}$$
$$(ab + ac) : c = x$$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA XLV.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet; invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
secundi $= c$
tempus occursus $= x$,

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via quam alter eodem tempore emetitur $= cx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a \quad b + c \text{ div.}$$
$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt solutu, quam abstracta; quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex Theorematibus arithmeticis facile eruitur; in illis autem ex circumstantiis Problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiæ occurrunt, Tyrones non statim eas pervident, quæ æquationem suppeditant. Discant igitur consultius esse ut Problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque notent velim, facilius Problemata specialia ad abstracta, seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari; quia ista conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiæ speciales, quæ ad solutionem nil conferunt, minime comparent. Ex. gr. Problema præsens in abstracto istiusmodi est.* Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter Problema (§. 152) in abstracto tale est:* Datis tribus quantitatibus, invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam æquale sit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur Theorematum usus non statim in oculos occurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addisci prohibent ea quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos occurrit.*

PROBLEMA XLVI.

157. *Data summa duarum quantitatum, & differentia quadratorum; invenire quantitates.*

Sit summa quantitatum $= a$
differentia quadratorum $= b$
Semidiff. quantitatum $= y$

erit quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).

Qua-

Quare

$$\begin{array}{rl} \text{quadratum maj.} & \tfrac{1}{4}a^2 + ay + y^2 \\ \text{min.} & \tfrac{1}{4}a^2 - ay + y^2 \\ \hline \end{array}$$

differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit.

$2a$ div. ——————— Probl.

$$y = b : 2a$$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA XLVII.

158. *Data summa duarum quantitatum, una cum summa quadratorum; invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$

Summa quadratorum $= b$

Semidiff. quantitatum $= y$

$$\left.\begin{array}{r} \text{erit major} = \tfrac{1}{2}a + y \\ \text{minor} = \tfrac{1}{2}a - y \end{array}\right\} (\text{§. } 6.)$$

Quare

$$\begin{array}{rl} \text{quadrat. maj.} & \tfrac{1}{4}a^2 + ay + y^2 \\ \text{minoris} & \tfrac{1}{4}a^2 - ay + y^2 \\ \hline \text{summa} & \tfrac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b \\ & \tfrac{1}{2}a^2 \qquad \tfrac{1}{2}a^2 \ \text{Subtr.} \\ \hline & 2y^2 = b - \tfrac{1}{2}a^2 \\ \hline & \qquad\qquad 2 \text{ div.} \\ & y^2 = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2 \\ \hline & \qquad\qquad \text{Ext. Rad.} \\ & y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2)} \end{array}$$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XLVIII.

159. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit aequale numero dato.*

Sit factum unum $= a$

alterum $= b$

numerus unus $= x$

alter $= y$

erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{ll} x\sqrt{y} = a & y\sqrt{x} = b \\ \hline \qquad\quad \text{Quad.} & \qquad\quad \text{Quad.} \\ x^2 y = a^2 & y^2 x = b^2 \\ \hline \qquad\quad y \text{ div.} & \qquad\quad y^2 \text{ div.} \\ x^2 = a^2 : y & x = b^2 : y^2 \\ & \hline \qquad\quad \text{Quad.} \\ & x^2 = b^4 : y^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 : y = b^4 : y^4 \\ \hline \qquad\qquad y^4 \text{ mult.} \\ a^2 y^3 = b^4 \\ \hline \qquad\qquad a^2 \text{ div.} \\ y^3 = b^4 : a^2 \\ \hline y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)} \end{array}$$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9\sqrt{4} = 2.9 = 18$, & $4\sqrt{9} = 4.3 = 12$.

PROBLEMA XLIX.

160. *Invenire duos numeros, quorum factum aequale est numero dato, quadratum vero summae ad quadratum differentiae habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ Summa $= 2x$

ratio $= b : c$ different. $= 2y$

erit major $= x + y$

minor $= x - y$

Ergo, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{ll} xx - yy = a & b : c = 4x^2 : 4y^2 \ (\text{§. } 297 \\ \quad\ \ yy \quad yy \text{ add.} & 4cx^2 = 4by^2 \quad \textit{Arithm.}). \\ \hline & \hline \qquad (4c \text{ div.} \\ xx = a + yy & x^2 = by^2 : c \end{array}$$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a + y^2 = by^2 : c$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; c \text{ mult.}$$
$$ac + cy^2 = by^2$$
$$cy^2 \quad cy^2 \text{ ſubtr.}$$
$$ac = by^2 - cy^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b - c \text{ div.}$$
$$ac : (b - c) = y^2$$
$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$$

Sit $a = 96, b:c = 25:1$. Erit $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25-1)} = \sqrt{4} = 2$, & $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$, conſequenter numerus major $x + y = 10 + 2 = 12$, & minor $x - y = 10 - 2 = 8$.

Examen. $12. 8 = 96$ & $100 : 4 = 25 : 1$.

PROBLEMA L.

161. *Dato pretio unius menſuræ vini; invenire quantitatem aquæ commiſcendæ, ut una menſura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$.

Cum aquæ pretium nullum ſit; erit $1 + x : 1 = a : b$; conſequenter

$$b + bx = a \quad (\text{§. 297 } Arithm.).$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b \text{ ſubtr.}$$
$$bx = a - b$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; b \text{ div.}$$
$$x = (a - b) : b = a : b - 1$$

Sit $a = 16$, $b = 10$: erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretioſiori aqua commiſcenda, ut viliori pretio conſtet; quantitas aquæ commiſcendæ eſt ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a - b : b$.

Examen. Etenim ſi integra menſura veneat 10 groſſis, tres ipſius quintæ veneunt 6 groſſis (§. 302 *Arithm.*); quos ſi addas pretio unius menſuræ, quod eſt 10 groſſorum, prodibunt 16 groſſi pretium unius menſuræ vini generoſioris.

PROBLEMA LI.

162. *Dato pretio vini generoſi & pretio vilioris; determinare quantitatem vini vilioris generoſo commiſcendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius menſuræ vini
generoſi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas unius menſuræ $= 1$
quantitas vilioris commiſcendi $= x$
erit pretium ejus $= bx$
quantitas generoſi commiſcendi $= 1 - x$
erit ejus pretium $= a - ax$

Quare, per conditionem Probl.

$$a - ax + bx = c$$
$$ax \qquad ax \text{ add. ob } ax > bx$$
$$a + bx = c + ax$$
$$bx \qquad bx \text{ ſubt.}$$
$$a = c + ax - bx$$
$$c \quad c \qquad \text{ſubt.}$$
$$a - c = ax - bx$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; a - b \text{ div.}$$
$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ generoſi $= 5\frac{1}{3}$, adeoque menſuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 12$.

PRO-

PROBLEMA LII.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa, & differentia quadratorum sint inter se æqualia.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$
$$\qquad\qquad\qquad y \qquad y \text{ subt.}$$
$$x = xy - y$$
$$\text{———— } x-1 \text{ div.}$$
$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus in æquatione sinisteriore substituatur, habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x-1}$$
$$\text{———— } x^2 - 2x + 1$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$
$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$
$$x^3 \qquad x^3 \qquad \text{subtr.}$$
$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$
$$\text{———— } x^2 \text{ div.}$$
$$x^2 - 3x = -1$$
$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4} \qquad (\S.\ 143)$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{3}{2} - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; sed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y: quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$, & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA LIII.

164. *Datis, in progressione arithmetica, termino primo & ultimo, atque differentia terminorum; invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
summa $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$
$$d \qquad\qquad d \text{ add.}$$
$$b + d = a + dx$$
$$a \qquad a \qquad \text{subt.}$$
$$b + d - a = dx$$
$$\text{———— } (d \text{ div.}$$
$$(b + d - a) : d = x$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur, habebimus

$y = \frac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d$.

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$, & $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA LIV.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum, & summa progressionis arithmeticæ; invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+y) = c \qquad a + dx - d = y$

2 mult.

$ax + xy = 2c$

$ax \qquad ax$ Subtr.

$xy = 2c - ax$

x div.

$y = (2c - ax) : x$

Ergo (§. 87 *Arithm.*)

$(2c - ax) : x = a + dx - d$

x mult.

$2c - ax = ax + dx^2 - dx$

$ax \qquad ax$ add.

$2c = dx^2 + 2ax - dx$

d div.

$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a-d}{d}x$

hoc est, si fiat $(2a - d) : d = m$

$2c : d = x^2 + mx$

$\frac{1}{4}m^2 \qquad \frac{1}{4}m^2$ add.

$\frac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = x + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m \qquad \frac{1}{2}m$ subt.

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \frac{1}{2}m = x$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$: erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$; consequenter $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA LV.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticæ; invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
summa $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a+b) = c \qquad a + xy - y = b$

2

$x(a+b) = 2c \qquad xy - y = b - a$

$x = 2c : (a+b) \qquad y = \frac{b-a}{x-1}$

$x - 1 = \frac{2c}{a+b} - 1 \qquad = \frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b}$

$= \frac{2c-a-b}{a+b}$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$: erit $x = 114 : 19 = 6$, & $y = (19.15) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Theorema. In progressione arithmetica, est ut differentia summæ ex termino primo & ultimo a duplo summæ progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA LVI.

167. *Datis differentia & numero terminorum, una cum summa progressionis arithmeticæ; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
summa $= c$
term. primus $= x$
ultimus $= y$
erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*).

$\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}ny = c \qquad x + nd - d = y$

h. c. $nx + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}nd = c$ $\quad \frac{1}{2}n$ div.

$2x + nd - d = 2c : n$ $\quad nd - d$ subt.

$2x = 2c : n - nd + d$ $\quad 2$ div.

$x = c : n - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$

Sit

Sit $n=6$, $d=3$, $c=57$: erit $x=9\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}-9=2$, & $y=2+18-3=17$.

PROBLEMA LVII.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo, & summa progressionis arithmeticæ; invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$$\frac{1}{2}y(b+x)=c \qquad b=x+dy-d$$

$$\overline{}\; 2$$

$$y(b+x)=2c \qquad b+d-x=dy$$

$$y=2c:(b+x) \qquad (b+d-x):d=y$$

Quamobrem (§. 87 *Arithm.*)

$$2c:(b+x)=(b+d-x):d$$

$$\overline{}\; d \text{ mult.}$$

$$2cd:(b+x)=b+d-x$$

$$\overline{}\; b+x \text{ mul.}$$

$$2cd=b^2+bd-bx+bx+dx-x^2$$

$$x^2-dx=b^2+bd-2cd$$

$$\frac{1}{4}d^2 \qquad\qquad \frac{1}{4}d^2 \,(\S.143).$$

$$x^2-dx+\frac{1}{4}d^2=\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd$$

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}d-x \end{array}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$$

$$x=\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}.$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$, erit $\frac{1}{2}d-x$ quantitas positiva, adeoque $x=\frac{1}{2}d-\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$: si vero $\frac{1}{2}d < x$, quantitas $\frac{1}{2}d-x$ æquivalet privativo, sed $x-\frac{1}{2}d$ positivo; adeoque $x=\frac{1}{2}d+\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$.

Sit $b=17$, $d=3$, $c=57$: erit $x=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}+289+51-342)}=\frac{3}{2}+\sqrt{(2\frac{1}{4}-2)}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$, & $y=(17+3-2):3=\frac{18}{3}=6$.

PROBLEMA LVIII.

169. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum; invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
summa $= c$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 107 & per condit. Probl.)

$$\frac{1}{2}n(x+y)=c \qquad xy=a$$

$$\overline{\phantom{\frac{1}{2}n(x+y)=c}}\; \tfrac{1}{2}n \qquad \overline{}\; x \text{ div.}$$

$$x+y=2c:n \qquad y=a:x$$

h. e. $x+\frac{a}{x}=\frac{2c}{n}$

$$\overline{\phantom{x+\frac{a}{x}=\frac{2c}{n}}}\; x \text{ mult.}$$

$$x^2+a=2cx:n$$

$$x^2-2cx:n=-a$$

$$+c^2:n^2+c^2:n^2 \text{ add.}$$

$$x^2-2cx:n+c^2:n^2=c^2:n^2-a$$

$$\left.\begin{array}{l} x-c:n \\ c:n-x \end{array}\right\} = \sqrt{(c^2:n^2-a)}$$

$$x=\frac{c}{n}\pm\sqrt{(c^2:n^2-a)}$$

Signum $+$ valet pro termino ultimo; signum autem $-$ pro primo.

Sit $c=57$, $n=6$, $a=34$: erit $x=\frac{57}{6}-\sqrt{(\frac{3249}{36}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{(90\frac{1}{4}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{56\frac{1}{4}}=9\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{225}{4}}=9\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=2$, & $y=9\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}=17$.

PROBLEMA LIX.

170. *Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
erit dignitas ejus $= n^m$
terminus prim. progr. $= 1$
differenti term. $= 2$.
Sit num. term. $= x$
erit summa progress. $= x^2$ (§. 108).

Ergo, per conditionem Probl.

$$\frac{x^2 = n^m}{x = n^{m:2}} \text{ Ext. Rad.}$$

Patet adeo, Problema non esse possibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

Ex. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA LX.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quos numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$, & numerus terminorum est n *per hypoth.* erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108); consequenter, per conditionem Problematis,

$$\frac{nx + n^2 - n = n^m}{x + n - 1 = n^{m-1}} \; n \text{ div.}$$
$$\frac{n - 1 \qquad n - 1 \text{ subtr.}}{x = n^{m-1} - n + 1}$$

Patet adeo Problema esse possibile in omni casu.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut supra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$; erit $x = 9 - 2 = 7$, adeoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate ostendimus ad captum Tyronum, quomodo potentiæ cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in* Miscellaneis Berolinensibus p. 327. & seqq.

PROBLEMA LXI.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales; dato facto ex quadrato tertii in primum, una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$
tertius $= m^2 x$ (§. 114).

Quare, per conditionem Problematis,

$$\frac{a = m^4 x^3}{a : m^4 = x^3} \; m^4 \text{ div.}$$
$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit

Sit ex. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Æquatio 1ª resolvitur in hanc analogiam $1 : m^4 = x^3 : a$ (§.299. *Arithm.*)

Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata $1 : m$ (§.159 *Arithm.*); sequens enascitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA LXII.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

$$\begin{aligned} \text{Sit numerus datus} &= a \\ \text{denominator} &= b \\ \text{pars prima} &= x \\ \text{erit secunda} &= bx \\ \text{tertia} &= b^2x \ (\S.114) \end{aligned}$$

&, per conditionem Problematis,

$$b^2x + bx + x = a$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \ b^2 + b + 1 \text{ div.}$$

$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$.

PROBLEMA LXIII.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.*

$$\begin{aligned} \text{Sit numerus datus} &= a \\ \text{denominator} &= m \\ \text{terminus primus} &= x \\ \text{erit secundus} &= mx \\ \text{tertius} &= m^2x \\ \text{quartus} &= m^3x \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Ergo, per conditionem Problematis,

$$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \text{ \&c.} = a$$

$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.})$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini sint numero sex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 est series proportionalium quæsita.

PROBLEMA LXIV.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

$$\begin{aligned} \text{Sit primus datorum} &= a \\ \text{ultimus} &= b \\ \text{mediorum primus} &= x \\ \text{numerus mediorum} &= m \end{aligned}$$

erit, per conditionem Problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3}, \text{ \&c. } \frac{x^m}{a^{m-1}},\ b$$

consequenter (§. 118)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \ a^{m-1} \text{ m.}$$

$$x^{m+1} = a^m b$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \text{ Ext. Rad.}$$

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$; erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$; consequenter termini intermedii sunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus esse debet Tabula dignitatum superiorum pro digitis singulis, qualis extat pro quadratis & cubis* (§. 257 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

178. Quodsi numerus, qui exprimit terminum desideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare, si pro x substituatur valor modo inventus $\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)} b^{1:(m+1)}$; prodibit numerus quæsitus $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{n-1}$ $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)}$ $= a^{(m-n+1):(m+1)} b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant, ex. gr. inter* 1 *&* 243 *quatuor medii proportionales continue, & quæratur eorum secundus: erit* $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, *adeoque* $(m - n + 1):(m + 1) = \frac{3}{5}$, $n:(m + 1) = \frac{2}{5}$, *consequenter numerus quæsitus* $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA LXV.

180. *Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii, in proportione sive continua, sive discreta, una cum denominatore rationis; invenire terminos singulos.*

Sit summa prima $= a$
secunda $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$,
erit quartus $= a - x$
secundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare, per conditionem Problematis,

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc

$$ax - x^2 = mbx - m^2x^2 \quad x \text{ div.}$$

$$a - x = mb - m^2x$$

$$m^2x - x = mb - a$$

$$\quad m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13):(4 - 1) = 9:3 = 3$.

PROBLEMA LXVI.

* 180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & secundi æquetur numero dato, & differentia secundi atque tertii æqualis sit itidem numero dato.*

Sit differ. prima $= a$
differ. secunda $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Per conditionem Problematis,

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + \ \ ax \qquad x^2 + \ ax \qquad \text{subt.}$$

$$bx = ax + a^2$$

$$bx - ax = a^2$$

$$\quad (b - a) \text{ div.}$$

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam resolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, sequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & secundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & secundi a differentia secundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA LXVII.

181. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo, atque terminorum numero; invenire denominatorem rationis.*

Sit

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$
Erit (§. 121)

$$b = x^{n-1}\, a$$
$$\overline{\phantom{b = x^{n-1} a}}\ a \text{ div.}$$
$$b : a = x^{n-1}$$
$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x.$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit $x = \sqrt[5]{(486 : 2)} = \sqrt[5]{243} = 3$.

PROBLEMA LXVIII.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero, & summa progressionis geometricæ; invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
summa progress. $= c$
terminus primus $= x$
erit ultimus $= m^{n-1} x$
consequenter (§. 121)

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$
$$\overline{}\ m - 1$$
$$mc - c = m^n x - x$$
$$\overline{}\ m^n - 1$$
$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$: erit $x = 2 . 728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum, ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA LXIX.

183. *Datis, in progressione geometrica, termino primo & ultimo, una cum denominatore rationis; invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la, logarithmus ipsius $m = lm$, & logarithmus ipsius $b = lb$,

$$xlm - lm + la = lb \text{ (§. 341, 337 } Arith.\text{)}$$
$$\overline{}$$
$$xlm = lb - la + lm$$
$$\overline{}\ lm \text{ div.}$$
$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit

$$lb = 2.6866363$$
$$la = 0.3010300$$
$$\overline{lb - la = 2.3856063}$$

$$\begin{array}{rl} & 3\ 1\ 1 \\ lb - la = & \cancel{2}\cancel{3}8\cancel{5}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{6}3\ (5 \\ lm = & \cancel{4}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}3\ \ \ 1 \\ & \overline{6 = x} \end{array}$$

PROBLEMA LXX.

184. *Datis summa progressionis geometricæ, termino primo, atque ultimo; invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit summa $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$$c = (by - a) : (y - 1) \qquad b = y^{x-1} a$$
$$\overline{cy - c = by - a}$$
$$\overline{cy - by = c - a}$$
$$\overline{}\ c - b$$
$$y = (c - a) : (c - b)$$

 Æqua-

Æquatio altera, adhibitis logarithmis, in ſequentem degenerat (§. 341, 337 *Arithm.*).

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly$$

ly div.

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodſi ſubſtituatur valor ipſius ly paulo ante inventus, qui eſt, $l(c-a) - l(c-b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c-a) - l(c-b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c-a) = 2.8609366$	$c = 728$
$l(c-b) = 2.3838154$	$a = 2$
Differ. $= 4771212$	$c - a = 726$

$$\begin{array}{r} 23856063 \\ 4771212 \end{array} \left(\begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$6 = x$$

PROBLEMA LXXI.

185. *Datis, in progreſſione geometrica, facto ex primo in ultimum, numero terminorum, & denominatore rationis; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numerus termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit, per conditiones Problematis,

$$xy = f \qquad m^{n-1} x = y$$

x div.

$$y = f : x$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$f : x = m^{n-1} x$$

x mult.

$$f = m^{n-1} x^2$$

m^{n-1} div.

$$f : m^{n-1} = x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$: erit $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

DEFINITIO XIII.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *Harmonice proportionales*, ſi, in priore caſu, differentia primi & ſecundi fuerit ad differentiam ſecundi atque tertii, ut primus ad tertium; in caſu poſteriore, differentia primi & ſecundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum:

Ex. gr. 10, 16 & 40 ſunt in proportione harmonica: eſt enim $6 : 24 = 10 : 40$.

Si termini proportionales in caſu priore continuentur; oritur *Progreſſio Harmonica*.

PROBLEMA LXXII.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
ſecunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 186)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \text{ (§. 297 Arith.)}$$

$$2ax - bx = ab$$

$(2a - b)$ div.

$$x = ab : (2a - b)$$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde ſequens enaſcitur

Theo-

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. Ex. gr. si $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12.24 : (24 - 24) = 12.24 : 0$. Sed non licet 12.24 seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 186): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

189. Quodsi ex tribus proportionalibus $6, 8, 12$, terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8.12 : (16 - 12) = 8.12 : 4 = 8.3 = 24$.

COROLLARIUM III.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat, & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. Ex. gr. si $a = 10$, $b = 12$, erit tertius $12.10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12.15 : (24 - 15) = 20$; quintus $15.20 : (30 - 20) = 30$; sextus $20.30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2.30$ (§. 188).

PROBLEMA LXXIII.

191. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= x$
tertia $= b$

erit $x - a : b - x = a : b$ (§. 186)

$bx - ab = ab - ax$ (§. 297 *Arithm.*)

$ax + bx = 2ab$

$a + b$ div.

$x = 2ab : (a + b)$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit summa primi & ultimi ad primi duplum, ut ultimus ad medium.

PROBLEMA LXXIV.

192. *Datis tribus quantitatibus; invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 186)

$b - a : x - c = a : x$

$bx - ax = ax - ac$ (§. 297 *Arithm.*)

$ac = 2ax - bx$

$(2a - b)$ div.

$ac : (2a - b) = x$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

193. *Proportio Contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad diffe-

differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum.

Ex. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2:1 = 6:3$.

PROBLEMA LXXV.

194. *Datis duabus quantitatibus; invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arithm.)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \quad \text{add.} \quad (\text{§. 143})$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b, \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

Ex. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

PROBLEMA LXXVI.

195. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arithm.)$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$a + b$ div.

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

Ex. gr. sit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa duorum quadratorum dividitur per summam radicum, quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

196. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem aequalis.

COROLLARIUM I.

197. Si in progressione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108), $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum aequalis.

COROLLARIUM II.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim
progressio 2, 4, 6, 8, 10, &c.
erunt pronici 2, 6, 12, 20, 30, &c.

PROBLEMA LXXVII.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$
erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{4} \quad (\text{§. 143})$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\frac{4a+1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a+1)} - \tfrac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas, & radix unitate mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4 \cdot 72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PRO-

PROBLEMA LXXVIII.

200. *Invenire summam Quadratorum & Cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.*

$$\begin{array}{ll} \text{Sit } 0+1+1+1+1+1 \text{ \&c.} = \int n^0 \\ 0+1+2+3+4+5 \text{ \&c.} = \int n^1 \\ 0+1+4+9+16+25 \text{ \&c.} = \int n^2 \\ 0+1+8+27+64+125 \text{ \&c.} = \int n^3 \\ \text{\&c. \&c.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1+1+1 \text{ \&c.} = \int(n+1)^0 \\ 1+2+3+4+5+6 \text{ \&c.} = \int(n+1)^1 \\ 1+4+9+16+25+36 \text{ \&c.} = \int(n+1)^2 \\ 1+8+27+64+125+216 \text{ \&c.} = \int(n+1)^3 \\ \text{\&c. \&c.} \end{array}$$

Nimirum $\int n^0$ denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $\int(n+1)^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia 0 est exponens unitatis (§. 55). Sed n repræsentat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo, si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $\int(n+1)^0 - \int n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter $\int n^1$ denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis, & n quemlibet ejus terminum: $\int(n+1)^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicum, seu dignitatis primæ (§. *cit.*). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus, erit $\int(n+1)^1 - \int n^1 = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$, $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ &c. & in genere $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 81)

$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$
$$\int(n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

hoc est, ob $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ *per* (*dem.*

$$(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

2 div.

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^0 - \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$, $\frac{1}{2}\int n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1$ summa omnium radicum ab 0 usque ad $5 = 18 - 3 = 15$. Similiter, sit $n = 3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1 = 6$.

Est porro

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \text{ (§. 84)}$$
$$\int(n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$
$$\int(n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

h. e. ob $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ *per de-* (*monst.*

$$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

3 div.

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \tfrac{1}{3}\int n^0 - \tfrac{1}{3} = \int n^2$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$, adeoque $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Similiter sit $n = 3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$, $\int n = 6$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$, adeoque $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$
$$\int(n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$$
$$\int(n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

h. e. ob $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ *per demonst.*

$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

4

$$\tfrac{1}{4}(n+1)^4 - \tfrac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \tfrac{1}{4}\int n^0 - \tfrac{1}{4} = \int n^3.$$

Sit ex. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$, $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$, adeoque $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHO-

SCHOLION I.

201. *Quod in summationibus, quibus in resolutione Problematis usi sumus, semper addenda sit unitas, exempla singularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$ *erit:*

$$\int n^0 = 0+1+1+1+1$$
$$\int n^1 = 0+1+2+3+4$$
$$\int n^2 = 0+1+4+9+16$$
$$\int(n+1)^2 = 1+4+9+16+25$$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *sit 25, &* $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum 24; patet, ad conservandam æqualitatem, addendam esse unitatem.*

SCHOLION II.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium Quadrata & Cubos summare documus, altiores quoque dignitates summantur. Sed cum potentiæ in infinitum assurgant, ideo Problema generale pro casibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA LXXIX.

203. *Summare Potentias quascunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m + \frac{m+1.\,m}{1.\,2} n^{m-1} + \frac{m+1.\,m.\,m-1}{1.\,2.\,3} n^{m-2} + \frac{m+1.\,m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.\,4} n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1.\,m}{1.\,2}\int n^{m-1} + \frac{m+1.\,m.\,m-1}{1.\,2.\,3}\int n^{m-2} + \frac{m+1.\,m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.\,4}\int n^{m-3} \text{ \&c. in inf.} + 1.$$

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.\,m}{1.\,2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.\,m.\,m-1}{1.\,2.\,3.}\int n^{m-2} - \frac{m+1.\,m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.\,4}\int n^{m-3}$ &c. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$.

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 200): Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.\,m}{1.\,2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.\,m.\,m-1}{1.\,2.\,3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.\,m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.\,4}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $- 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$: consequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.\,2}\int n^{m-1} - \frac{m.\,m-1}{1.\,2.\,3}\int n^{m-2} - \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.\,4}\int n^{m-3}$ &c. in infinit. $- \frac{1}{m+1}$.

Ex. gr. sit $m = 3$, erit $m+1 = 4$, $m-1 = 2$, $m-2 = 1$, $m-3 = 0$, adeoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§. 200).

SCHOLION.

204. *Theorema generale terminis quidem constat infinitis; in casibus tamen specialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evanescunt, quando numerus ab* m *subtrahendus sit ipsi* m *æqualis: quemadmodum ex allato exemplo speciali apparet. Ita vero summationem Potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum Tyronum. Semper tamen utendum est termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$: *cujus ratio ante allata* (§. 201).

COROLLARIUM.

205. Cum summatio Potentiarum superiorum a summatione omnium inferiorum pendeat; si in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus substituantur, prodibunt formulæ per solum n summas Potentiarum determinantes, non præsuppositis summationibus anterioribus: Ex. gr.

$\int n^0 = n$. (§. 200)

$2\int n^1 = (n+1)^2 \quad \int n^0 - 1$ (§. 200).

$$
\begin{aligned}
&= nn + 2n + 1 \\
&\quad\;\; - n \\
&\quad\;\; - 1 \\
&= nn + n
\end{aligned}
$$

Hinc $\int n^1 = (nn+n) : 2$.

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 200)

$$
\begin{aligned}
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&\quad - \tfrac{3}{2} n^2 - \tfrac{3}{2} n \\
&\quad - n \\
&\quad - 1 \\
&= n^3 + \tfrac{3}{2} n^2 + \tfrac{1}{2} n
\end{aligned}
$$

Hinc $\int n^2 = (n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n) : 3 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$.

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 200)

$$
\begin{aligned}
&= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
&\quad - 2n^3 - 3n^2 - n \\
&\quad - 2n^2 - 2n \\
&\quad - n \\
&\quad - 1 \\
&= n^4 + 2n^3 + n^2
\end{aligned}
$$

Hinc $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$.

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$

$$
\begin{aligned}
&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \\
&\quad - \tfrac{10}{4} n^4 - \tfrac{20}{4} n^3 - \tfrac{10}{4} n^2 \\
&\quad - \tfrac{20}{6} n^3 - \tfrac{30}{6} n^2 - \tfrac{10}{6} n \\
&\quad - \tfrac{5}{2} n^2 - \tfrac{5}{2} n \\
&\quad - n \\
&\quad - 1 \\
&= n^5 + \tfrac{5}{2} n^4 + \tfrac{10}{6} n^3 - \tfrac{1}{6} n \\
&= (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 6
\end{aligned}
$$

Hinc $\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$

&c. &c. &c.

DEFINITIO XVI.

206. *Numeri Polygoni* ſunt ſummæ progreſſionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in ſpecie *Triangulares*, ſi differentia terminorum fuerit 1; *Quadrati*, ſi 2; *Pentagoni*, ſi 3; *Hexagoni*, ſi 4; *Heptagoni*, ſi 5; *Octogoni*, ſi 6 &c.

Progr. Arithm.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
Num. Triang.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36
Progr. Arithm.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15
Num. Quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64
Progr. Arithm.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22
Num. Pentag.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92
Progr. Arithm.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29
Num. Hexag.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120

SCHOLION.

207. *Numeri Polygoni nomina ſortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus reſpondentia diſponi poſſunt. Ex. gr. Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus reſpondentia diſponuntur in triangulum: & idem tenendum eſt de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO XVII.

208. *Latus numeri Polygoni* eſt numerus terminorum progreſſionis arithmeticæ, qui ſummantur. *Numerus* vero *angulorum* eſt, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus Polygonus nomen ſuum ſortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. conſequenter differentiam terminorum, qui ſumantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA LXXX.

210. *Dato latere numeri Polygoni, & numero angulorum; invenire numerum Polygonum.*

Sit latus $= n$

numerus angulorum $= a$

terminus primus progreſſionis $= 1$ (§. 206).

differentia terminorum $= a - 2$ (§. 209).

terminus ultimus $1 + (a-2)(n-1)$

primus 1 (§. 333 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2 + (a-2)(n-1)$

hoc eſt $4 + na - 2n - a$

dimid. term. num. $\frac{1}{2} n$

Num. Polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§.206,107)

$= (n^2a - 2n^2 - an + 4n) : 2$

$= (n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$

Theorema. Numerus Polygonus est semidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum, & ex ipso latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

COROLLARIUM I.

211. Sit $n = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$

&c. &c.

COROLLARIUM II.

212. Quoniam numerus Polygonus (§.210). $(n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$, erit summa seriei cujuscunque numerorum polygonorum $((a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1) : 2$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ sunt numeri constantes, qui in casu speciali sunt determinati, non summantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2 + 3n}{2}$ (§.205). Ergo summa polygonorum $((a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)) : 12 = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = ((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ unde porro Theoremata specialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe summa triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$

pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$

hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$

heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$

octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$ &c. &c.

Est enim pro triangularibus $a = 3$, pro pentagonis $a = 5$, pro hexagonis $a = 6$, pro heptagonis $a = 7$, pro octogonis $a = 8$, &c. (§.208).

PROBLEMA LXXXI.

213. *Dato numero Polygono, & numero angulorum; invenire latus.*

Sit numerus Polygonus $= p$, latus $= x$

numerus angulorum $= a$

erit differentia terminor. $= a - 2$ (§.209)

terminus primus $= 1$ (§.206)

adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$

hoc est $3 + ax - 2x - a$ (§.333

terminus primus 1 *Arithm.*)

summa pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$

dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus Polygon. $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$ (§.107).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$

$$\frac{ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p}{a-2}$$

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc est, si fiat $(a-4) : (a-2) = m$

$$x^2 - mx = 2p : (a-2)$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}m \\ m - \frac{1}{2}x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

hoc est, substituto valore ipsius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left(\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4}\right)}$$

$$\frac{a - 4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}}{2a-4}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a-4}$$

obti-

obtinet nimirum signum $+$, quia radix major est quam $a - 4$

Sit ex. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{(8p + 1)}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{(24p + 1)}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{(32p + 4)}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptag. $\frac{3 + \sqrt{(40p + 9)}}{10}$

&c. &c.

DEFINITIO XVIII.

214. Summæ numerorum Polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progressionibus arithmeticis ipsi Polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ Pyramidalium primorum *Pyramidales secundi*: summæ Pyramidalium secundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, si ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, si ex pentagonis oriuntur &c.

Ex. gr. Num. triang.	$= 1, 3, 6, 10, 15, 21$
Pyram. triang. pr.	$= 1, 4, 10, 20, 35, 56$
secundi	$= 1, 5, 15, 35, 70, 126$
tertii	$= 1, 6, 21, 56, 126, 252$
&c.	&c.

COROLLARIUM.

215. Cum igitur summare docuerimus numeros Polygonos (§. 212), evidens jam est, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ exprimit numeros pyramidales primos, *vi* §. *cit.*

PROBLEMA LXXXII.

216. *Invenire summam numerorum Pyramidalium superioris ordinis cujuscunque, seu dato quolibet inferiore proxime superiorem.*

Non alia re opus est, quam ut juxta methodum superius traditam (§. 200) numeri Pyramidales proxime inferioris ordinis summentur: ita enim habentur eorum summæ. Quare cum numerus Pyramidalis primi ordinis sit $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ (§. 215): erit summa Pyramidalium primi ordinis $((a-2) \int n^3 + 3\int n^2 - (a-5)\int n^1) : 6$. Sed $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$, $\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$, $\int n^1 = (n^2 + n) : 2$, (§. 205). Ergo summa Pyramidalium primi ordinis, seu numerus Pyramidalis secundi ordinis $= ((a-2)(n^4 + 2n^3 + n^2) + 2(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-5)(2n^2 + 2n)) : 24 = (an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an - 2n^4 + 14n^2 + 12n) : 24 = ((a-2)n^4 + 2an^3 - (a+14)n^2) - (2a+12)n) : 24$.

Sit ex. gr. $a = 3$, hoc est quæratur summa Pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$. Quoniam vero summa inventa generalis exprimit numerum quemcunque Pyramidalem secundi ordinis (§. 214); si ea porro eundem in modum summetur, prodibit summa Pyramidalium secundi ordinis, seu numerus Pyramidalis ordinis tertii (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quousque libet.

COROLLARIUM I.

217. Cum summa unitatum sit n, summa laterum $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot \overline{n+1}}{1 \cdot 2}$ (§. 205), summa triangularium $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (§. 215), summa Pyramidalium primi

ordinis $\frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n.\,n+1}{1\;.\;2}\,\frac{n+2.\,n+3.}{3\;.\;4}$ (§. 216) &c. evidens eſt lex, qua numeri Pyramidales ex triangularibus orti in infinitum ſummentur. Nimirum numerus fractionum in ſe invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in ſerie naturali numerorum, ſed terminus primus progreſſionis eſt latus numeri figurati, denominatores ſunt numerorum naturalium progreſſio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus Pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0.\,n+1.\,n+2.}{1\;.\;2\;.\;3\;.}\,\frac{n+3.\,n+4.\,n+5.\;\&c.}{4\;.\;5\;.\;6\;\&c.}$ in infinit.

COROLLARIUM II.

218. Hinc apparet, quales numeri ſint unciæ Potentiarum (§. 95).

PROBLEMA LXXXIII.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante quot earum invicem combinari debeant; invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ a & b nonniſi unam combinationem ab admittunt. Trium combinationes ſunt tres, nempe ab, ac, bc; quatuor vero ſex ab, ac, ad, bc, bd, cd; quinque decem ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1, 3, 6, 10, &c. hoc eſt, eſſe numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q, erit latus numeri combinationum $q-1$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-1.\,q+0.}{1\;.\;2}$ (§. 217).

Si quantitates tres invicem combinandæ & numero itidem tres fuerint, erit combinatio tantum unica abc. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor abc, abd, acd, bcd; ſi quinta, decem abc, abd, abe, acd, ace, ade, bce, bde, cde; ſi ſexta, viginti, & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1, 4, 10, 20 &c. hoc eſt, ſunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, ſeu exponente unitate mulctato. Hinc ſi numerus quantitatum datarum fuerit q, erit latus $q-2$; adeoque numerus combinationum $\frac{q-2.\,q-1.\,q+0.}{1\;.\;2\;.\;3}$ (§. 217.)

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares ſecundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus unitatibus, ſeu exponente unitate mulctato. Quare ſi numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3.\,q-2.\,q-1.\,q+0}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}$ (§. 217.)

Hinc facile abſtrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in caſu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1.\,q-n+2.\,q-n+3.\,q-n+4.\,q-n+5.}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}$ &c. donec numerus addendus ſit ipſi n æqualis.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $= 6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1} \cdot \frac{6-4+2}{2} \cdot \frac{6-4+3}{3} \cdot \frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3}{1} \cdot \frac{6-2}{2} \cdot \frac{6-1}{3} \cdot \frac{6+0}{4} = \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} = 15$.

COROLLARIUM.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1.\,q+0}{1\,.\,2}$, $\frac{q-2.\,q-1.\,q+0}{1\,.\,2\,.\,3}$, $\frac{q-3.\,q-2.\,q-1.\,q+0}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum possibilium erit $\frac{q.\,q-1}{1.\,2} + \frac{q.\,q-1.\,q-2}{1.\,2.\,3} + \frac{q.\,q-1.\,q-2.\,q-3}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{q.\,q-1.\,q-2.\,q-3.\,q-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$ &c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem q evecti, mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo *per Probl.* 29. (§. *cit.*) sit vero $1+1=2$; erit $2^q - q - 1$ numerus omnium combinationum possibilium. Ex. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum possibilium $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$.

SCHOLION.

221. *Uncias prodire debere, pro binomio* $1+1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b; *patet exinde, quod uncia partium* a *&* b *sit* 1, *atque adeo ut facta litteralia ex* a *&* b, *ita unciæ ex* 1 *&* 1 *in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum*:

$$
\begin{array}{lllll}
 & 1 & +1 & & \textit{Unc. Rad.} \\
 & 1 & +1 & & \\
\hline
 & +1 & +1 & & \\
1 & +1 & & & \\
\hline
1 & +2 & +1 & & \textit{Unc. Quadr.} \\
 & 1 & +1 & & \textit{Unc. Rad.} \\
\hline
 & +1 & +2 & +1 & \\
1 & +2 & +1 & & \\
\hline
1 & +3 & +3 & +1 & \textit{Unc. Cubi.}
\end{array}
$$

&c. &c.

PROBLEMA LXXXIV.

222. *Dato numero quantitatum; invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatæ ac permutatæ subire possunt.*

Sint quantitates duæ a & b, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum quælibet etiam cum seipsa combinari possit, istis addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est, $2+2=4$.

Quodsi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe ab, ac, bc, & ba, ca, cb (§. 129): quibus si addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa, aa, bb, cc; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor, & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum seipsa 4, adeoque numerum variationum 16. Si manente exponente, quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25, &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27 = 3^3$, nempe aaa, aab, aba, baa, aac, aca, caa, abb, bab, bba, abc, bac, bca, acb, cab, cba, acc, cac, cca, bbb, bbc, cbb, bcb, bcc, cbc, ccb, ccc.

Nec absimili modo constabit, si quantitates fuerint quatuor & exponens 3; fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, si fuerit quantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodsi ita progredi libuerit, reperietur tandem, si quantitatum numerus fuerit n, & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare si antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum possibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n subtractus relinquat 1, quia initium sit a quantitatibus singulis semel positis.

Cum adeo numerus omnium variationum possibilium sit progressio geometrica, cujus terminus primus seu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arithm.* & 113 *Analys.*); erit is $= (n^{n+1} - n):(n - 1)$, (§. 122).

Sit ex. gr. $n = 4$; erit numerus variationum possibilium $(4^5 - 4):(4 - 1) = 1020:3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum possibilium $(24^{25} - 24):(24 - 1) = 3200965864440681898677795534825060 0:23 = 139172428888725299942512849340 2200$. Tot ergo modis 24 literæ inter se componi possunt.

CAPUT II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

PROBLEMA LXXXV.

223. *Invenire duos numeros, quorum summa, una cum facto eorundem, æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis

$$xy + x + y = a$$
$$\overline{\hspace{6em}}\ y \text{ sub.}$$
$$xy + x = a - y$$
$$\overline{\hspace{6em}}\ y + 1 \text{ div.}$$
$$x = (a - y):(y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2):(2 + 1) = 28:3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2):(2 + 1) = 18:3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19 - 4):(4 + 1) = 15:5 = 3$.

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$
$$\overline{\hspace{8em}}\ y^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + 2x = y^2 + a$$
$$1 \qquad\qquad 1 \ (\text{§. } 143)$$
$$\overline{x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1}$$
$$\overline{\hspace{8em}} \text{ Ext. Rad.}$$
$$x + 1 = \sqrt{(y^2 + a + 1)}$$
$$\overline{\hspace{8em}} \text{ sub.}$$
$$x = \sqrt{(y^2 + a + 1)} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi possit, $a + 1$ esse debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum est y^2.

Ex. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 19 + 1)} - 1 = \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1)} - 1 = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$, & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVI.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, tertius $= z$, quartus $= t$; erit, per conditiones Problematis,

$$y + x = z \quad \text{(y sub.)} \qquad x - y = t \quad \text{(y add.)}$$
$$x = z - y \qquad\qquad x = t + y$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$t + y = z - y \quad \text{(y add.)}$$
$$t + 2y = z \quad \text{(t sub.)}$$
$$2y = z - t \quad \text{(2 div.)}$$
$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72, 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$, & $x = (8 + 2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter sit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5 + 1) : 2 = 3$, & $y = (5 - 1) : 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVII.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit, per conditionem Problematis,

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$
$$mx + x = 1 + n + (n + 1)y - (1 + m)$$
$$x = (1 + n + (n + 1)y - 1 - m) : (m + 1)$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y, & $1 + m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x: posse autem non modo y, sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit ex. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotæ ipsius n, 1 & 2, ipsius m autem 1: consequenter $x = 2 + 1 + (2 + 1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$; consequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire duos numeros, quorum summa æquetur quadrato minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit, per conditionem Problematis,

$$x + y = y^2 \quad \text{(y sub.)}$$
$$x = y^2 - y = (y - 1)y$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2 . 3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4 . 5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8 . 9 = 72$.

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$x^2 +$

$$x^2 + y^2 = y^3$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; y^2 \text{ subt.}$$
$$x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1)$$
$$x = y\sqrt{(y-1)}$$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

Ex. gr. Sit $y = 5$, erit $x = 5\sqrt{(5-1)} = 5\sqrt{4} = 5 . 2 = 10$. Sit $y = 17$, erit $x = 17\sqrt{(17-1)} = 17\sqrt{16} = 17 . 4 = 68$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum æquale sit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum secundi æquatur.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, radix cubica $= v$; erit, per conditiones Problematis,

$$v = xy^2 \qquad xy = v^3$$
$$\underline{\qquad} \; y^2 \text{ div.} \qquad \underline{\qquad} \; y \text{ div.}$$
$$v : y^2 = x \qquad x = v^3 : y$$
$$v : y^2 = v^3 : y$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; y^2 \text{ mult.}$$
$$v = yv^3$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; v \text{ div.}$$
$$1 = yv^2$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; v^2 \text{ div.}$$
$$1 : v^2 = y$$

Ergo $x = v^3 : (1 : v^2) = v^5$

Sit $v = 2$; erit $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Sit $v = 3$; erit $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire duos numeros quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $= x + y$, alter $= x - y$: erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \; \text{subt.}$$
$$4xy = v^2$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; (4y \text{ div.}$$
$$x = v^2 : 4y$$

Patet adeo, pro y assumendum esse numerum per cujus quadruplum dividi potest quadratum aliquod.

Sit ex. gr. $v^2 = 16$, $y = 1$: erit $x = 16 : 4 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 1 = 5$ & $x - y = 4 - 1 = 3$. Sit $v^2 = 36$, $y = 3$: erit $x = 36 : 12 = 3$. Ergo $x + y = 6$ & $x - y = 0$. Sit $v^2 = 36$, $y = 9$: erit $x = 36 : 36 = 1$. Ergo $x + y = 10$ & $x - y = 8$.

PROBLEMA XCII.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $= a$, minoris $= b$. Sit porro latus quadrati unius ex quæsitis minus quam a, adeoque $a - z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y - b$. Enimvero, ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz - b$. Quare per conditionem Problematis.

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; a^2 + b^2 \text{ sub.}$$
$$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; z \text{ div.}$$
$$z + y^2 z - 2a - 2by = 0$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; 2a + 2by \text{ add.}$$
$$y^2 z + z = 2a + 2by$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; (y^2 + 1 \text{ div.}$$
$$z = (2a + 2by) : (y^2 + 1)$$

Sit ex. gr. $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$: erit $z = (6 + 8) : (4 + 1) = 14 : 5 = 2\frac{4}{5}$. Ergo $a - z = 3 - 2\frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$ & $yz - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

SCHOLION.

231. *Dum quadratorum quæsitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates* a *&* b *in-*

ingredi debent, ut in utroque æquationis membro sit $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius,* y *multiplicari debet per* z, *ut sublato utrinque* $a^2 + b^2$ *residuum sit divisibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimensionem, sicque æquatio in terminis rationalibus est reducibilis.*

PROBLEMA XCIII.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem Problematis.

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 &= d && y^2 \text{ sub.} \\ 2xy &= d - y^2 && 2y \text{ div.} \\ x &= (d - y^2) : 2y \end{aligned}$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit ex. gr. $d = 10$, $y = 3$: erit $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$: erit $x = (11 - 1) : 2 = 10 : 2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$: erit $x = (48 - 16) : 8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA XCIV.

233. *Numerum datum dividere, in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo $= xy - a$: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{aligned} aa - y^2 &= aa - 2axy + x^2y^2 && a^2 \text{ sub.} \\ -y^2 &= -2axy + x^2y^2 && y \text{ div.} \\ -y &= -2ax + x^2y && y + 2ax \text{ add.} \\ 2ax &= x^2y + y && x^2 + 1 \text{ div.} \\ 2ax : (x^2 + 1) &= y \end{aligned}$$

Sit ex. gr. $2a = 10$, $x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$. Ergo $a + y = 8$, $a - y = 2$.

PROBLEMA XCV.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum major $= x$, minor $= y$: erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{aligned} x + y &= a && y \text{ sub.} \qquad & x - y &= v^2 && y \text{ add.} \\ x &= a - y && & x &= v^2 + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - y &= v^2 + y && y \text{ add.} \\ a &= v^2 + 2y && v^2 \text{ subt.} \\ a - v^2 &= 2y && 2 \text{ div.} \\ (a - v^2) : 2 &= y \end{aligned}$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit ex. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$, & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur summæ numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{aligned} x^2 + y &= x^2 + 2xy + y^2 && x^2 \text{ sub.} \\ y &= 2xy + y^2 && y \text{ div.} \\ 1 &= 2x + y && y \text{ subt.} \\ 1 - y &= 2x && 2 \text{ div.} \\ (1 - y) : 2 &= x \end{aligned}$$

Numeri adeo quæsiti unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y=\frac{1}{2}$; erit $x=(1-\frac{1}{2}):2=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Sit $y=\frac{1}{3}$; erit $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$. Sit $y=\frac{1}{4}$; erit $x=(1-\frac{1}{4}):2=\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$, ratio data $=a:b$; erit, per conditionem Problematis,

$$x-y:x^2-y^2=a:b$$

hoc est

$$1:x+y=a:b \quad (\S.124).$$

$$\begin{aligned} &ax+ay=b && a\text{ div.}\\ &x+y=b:a && y\text{ sub.}\\ &x=b:a-y \end{aligned}$$

Sit $b:a=9$, $y=4$; erit $x=5$. Vel sit $y=3$; erit $x=6$.

PROBLEMA XCVIII.

237. *Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $=a$, alter $=b$, quæsitus $=x$, erit, per conditiones Problematis,

$$ax=y^2 \quad a\text{ div.} \qquad bx=v^2 \quad b\text{ div.}$$

$$x=y^2:a \qquad x=v^2:b$$

$$\begin{aligned} &y^2:a=v^2:b && a\text{ mult.}\\ &y^2=av^2:b && \text{ext. Rad.}\\ &y=v\sqrt{(a:b)} \end{aligned}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a:b$ quadratum esse debet.

Sit $a=32$, $b=8$; erit $\sqrt{(a:b)}=2$. Sit porro $v=5$, erit $y=10$, consequenter $x=\frac{25}{8}$.

PROBLEMA XCIX.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus $=x$, alter $=y$; erit

$$\begin{aligned} &x^2+y=\sqrt{(x+y)} && \text{quadr.}\\ &x^4+2yx^2+y^2=x+y && x^4+y\text{ subt.}\\ &2x^2y-y+y^2=x-x^4 \end{aligned}$$

h. e.

$$\begin{aligned} &yy+(2x^2-1)y=x-x^4\\ &(x^2-\tfrac{1}{2})^2 \qquad x^4-x^2+\tfrac{1}{4} && \text{ad.}\\ &y^2+(2x^2-1)y+(x^2-\tfrac{1}{2})^2=x-x^2+\tfrac{1}{4} && \text{ext. Rad.}\\ &y+x^2-\tfrac{1}{2}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{4}-x^2)} && x^2-\tfrac{1}{2}\text{ subt.}\\ &y=\sqrt{(x+\tfrac{1}{4}-x^2)}+\tfrac{1}{2}-x^2 \end{aligned}$$

Quodsi numerus rationalis desideratur; $\frac{1}{4}+x-x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus, ob rationes in Schol. Probl. 92 (§.231) allatas, $=zx-\frac{1}{2}$: erit

$$\begin{aligned} &z^2x^2-zx+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}+x-x^2 && \tfrac{1}{4}\text{ sub.}\\ &z^2x^2-zx=x-x^2 && x\text{ div.}\\ &z^2x-z=1-x && x+z\text{ add.}\\ &z^2x+x=1+z && z^2+1\text{ div.}\\ &x=(1+z):(z^2+1) \end{aligned}$$

Sit $z=2$, erit $x=(1+2):(4+1)=\frac{3}{5}$, consequenter $y=\frac{1}{2}-\frac{9}{25}+\sqrt{(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{9}{25})}$ $=\dfrac{25-18}{50}+\sqrt{\dfrac{(60+25-36)}{100}}=\frac{7}{50}$ $+\sqrt{(49:100)}=\frac{7}{50}+\frac{7}{10}=\dfrac{7+35}{50}=\frac{42}{50}=\frac{21}{25}$.

PRO-

PROBLEMA C.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, si unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque sit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $=x^2$, alter $=y^2$, erit factum $=x^2y^2$. Quare $x^2y^2+x^2$ & $x^2y^2+y^2$ sunt numeri quadrati; consequenter & y^2+1 & x^2+1 sunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z-y$; secundi $t-x$: erit

$$y^2+1=z^2-2zy+y^2 \qquad y^2 \text{ subt.}$$
$$1=z^2-2zy \qquad 2zy-1 \text{ add.}$$
$$2zy=z^2-1 \qquad 2z \text{ div.}$$
$$y=(z^2-1):2z$$

$$x^2+1=t^2-2tx+x^2 \qquad x^2 \text{ subt.}$$
$$1=t^2-2tx \qquad 2tx-1 \text{ add.}$$
$$2tx=t^2-1 \qquad 2t \text{ div.}$$
$$x=(t^2-1):2t$$

Sit $z=2$, $t=3$; erit $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ & $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$. Sit $z=3$, $t=4$; erit $y=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ & $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

PROBLEMA CI.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut summa addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $=x^2$, alter $=y^2$: erit $x^2y^2+x^2+y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2y^2+x^2=x^2(y^2+1)$: fiat primum y^2+1 æquale quadrato, cujus latus $t-y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipsius y dimensionem, cum valor rationalis desideretur, nempe

$$t^2-2ty+y^2=y^2+1 \qquad y^2 \text{ sub.}$$
$$t^2-2ty=1 \qquad 2ty-1 \text{ add.}$$
$$t^2-1=2ty \qquad 2t \text{ div.}$$
$$(t^2-1):2t=y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2+1)}=t-y=t-(t^2-1):2t=(t^2+1):2t=v$; erit $x^2y^2+x^2+y^2=v^2x^2+y^2$. Atque adeo Problema præsens reductum est ad casum similem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2x^2+y^2$ æquale esse debet, latus $=z-vx$, erit

$$v^2x^2+y^2=z^2-2zvx+v^2x^2 \qquad v^2x^2 \text{ s.}$$
$$y^2=z^2-2zvx \qquad 2zvx-y^2 \text{ add.}$$
$$2zvx=z^2-y^2 \qquad 2zv \text{ div.}$$
$$x=(z^2-y^2):2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari possunt.

Sit ex. gr. $z=2$, $t=3$; erit $y=(9-1):6=8:6=\frac{4}{3}$, & hinc $v=t-y=3-\frac{4}{3}=\frac{9-4}{3}=\frac{5}{3}$, consequenter $x=(4-\frac{16}{9}):\frac{4.5}{3}=\frac{36-16}{9}:\frac{20}{3}=\frac{20}{9}:\frac{20}{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

PROBLEMA CII.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit summa numerorum quæsitorum $=2x$, differentia $=2y$, erit major $x+y$, minor $x-y$ (§. 6). Sit latus quadrati ipsi $3x^2+y^2$ æqualis $=t+y$:

erit,

erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ \underline{x^2 \qquad - y^2} \\ 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2 \\ \hline 3x^2 = t^2 + 2ty \\ \hline 3x^2 - t^2 = 2ty \\ \hline (3x^2 - t^2) : 2t = y \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ y^2 \text{ sub.} \\ t^2 \text{ sub.} \\ 2t \text{ div.} \end{array}$$

Sit $x = 4$, $t = 6$, erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA CIII.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæsiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui isti junctim sumti æquantur, $vx - y$: erit

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2 & y^2 \text{ sub.} \\ \hline x^2 = v^2x^2 - 2vxy & x \text{ div.} \\ \hline x = v^2x - 2vy & 2vy - x \text{ add.} \\ \hline 2vy = v^2x - x & v^2 - 1 \text{ div.} \\ \hline 2vy : (v^2 - 1) = x & \end{array}$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA CIV.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit, per conditionem Problematis; xy^3, consequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$\begin{array}{ll} xy = z^2 & y \text{ div.} \\ \hline x = z^2 : y & \end{array}$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit ex. gr. $z = 6$, $y = 3$: erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA CV.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$, erit $xy^3 + x^2y^2$, consequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$\begin{array}{ll} xy + x^2 = y^2v^2 - 2xyv + x^2 & x^2 \text{ sub.} \\ \hline xy = y^2v^2 - 2xyv & y \text{ div.} \\ \hline x = yv^2 - 2xv & 2xv \text{ add.} \\ \hline 2xv + x = yv^2 & 2v + 1 \text{ div.} \\ \hline x = yv^2 : (2v + 1) & \end{array}$$

Sit ex. gr. $y = 6$, $v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$.

Sit $y = 15$, $v = 2$: erit $x = 15 . 4 : (4 + 1) = 15 . 4 : 5 = 3 . 4 = 12$.

PROBLEMA CVI.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{ll} xy - y = v^3 & x - 1 \text{ div.} \\ \hline y = v^3 : (x - 1) & \end{array}$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

Ex. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA CVII.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{ll} yx^2 = z^3x^3 : v^3 & x^2 \text{ div.} \\ \hline y = z^3x : v^3 & v^3 \text{ mult.} \\ \hline yv^3 = z^3x & z^3 \text{ div.} \\ \hline yv^3 : z^3 = x & \end{array}$$

Sit

Si adeo numeri integri desiderantur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit ex. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16.\ 27 : 8 = 2.\ 27 = 54$.

PROBLEMA CVIII.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum aequale sit cubo radice sua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$; pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ aequatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2$$

x div.

$$y^3x^2 - 3y^2x + 2y = a - x$$

$x - 2y$ add.

$$y^3x^2 - 3y^2x + x = a - 2y.$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3x^2}{8} - \frac{3a^2x}{4} + x = 0$$

8 mult.

$$a^3x^2 - 6a^2x + 8x = 0$$

x div.

$$a^3x - 6a^2 + 8 = 0$$

$6a^2 - 8$ add.

$$a^3x = 6a^2 - 8$$

a div.

$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, si numeri rationales desiderentur, Problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA CIX.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis aequalem.*

Sit numerus quaesitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu factores resolvi possit: erunt partes aliquotae $1, y, y^2, y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & x, yx, y^2x, y^3x, &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c} + x + yx + y^2x + y^3x \text{ \&c.} = y^n x.$$

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx - y^2x - y^3x \text{ \&c.}$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in casu contingat, nisi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus, necesse est ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. in omni casu sit numerus primus; consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus est numerus primus (§. *cit.*), & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum praecedunt. Quare Problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

Theorema 1. Si numerorum ſeries in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum ſumma ſit numerus primus; ſumma in maximum multiplicatā faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum ſerie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus eſt numerus primus; numerus iſte primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In ſerie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.

$4-1=3$, $8-1=7$, $32-1=31$, $128-1=127$, $2048-1=2047$ &c. ſunt numeri primi. Ergo $2.3=6$; $4.7=28$; $31.16=496$; $127.64=8128$; $2047.1024=2096128$; &c. &c. ſunt numeri perfecti.

SCHOLION.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima ſolvit* DIOPHANTUS, *difficiliora ſunt determinatis, niſi ſimplicia fuerint. Unde Tyrones ſub initium ea prætermittere poſſunt, quæ difficultatem creant, ad ſequentia pedem promoventes. Non tamen prorſus negligenda ſunt, cum maximus eorum ſæpe ſit uſus in Problematibus Geometriæ ſublimioris ſolvendis. Ceterum Ars reſolvendi Problemata indeterminata numerica* Analyſis Diophantea *appellari ſolet.*

CAPUT III.

De Algebra ad Geometriam elementarem applicata.

PROBLEMA CX.

250. *PRoblema geometricum algebraice reſolvere:*

RESOLUTIO.

1. Obſerventur ea omnia, quæ in Probl. 36 (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rariſſime ad æquationem eodem modo in Problematis geometricis perveniatur, quo in numericis uſi ſumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda ſunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in ſchemate depictarum relationes, nullo habito diſcrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur; ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, ſeu quibus datis, aliæ una dentur, ſive per triangula ſimilia (§. 175 *Geom.*), ſive per rectangula (§. 417 *Geom.*), ſive per alia (quod tamen raro fieri ſolet) Theoremata.

γ) Ut igitur triangula ſimilia & rectangula obtineas, ſæpius producendæ ſunt lineæ, donec vel directe vel indirecte datis fiant æquales, vel alias ſecent; ſæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ; ſæpius puncta quædam connectenda; ſæpius anguli

anguli datis æquales construendi; quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt Theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156, 183, 201, 207, 233, 267, 268, 269, 329 *Geom.*)

♪) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes; ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; suffecerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.*

PROBLEMA CXI.

252. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a+b)(a-b)$, (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b - bcc}{ad}$. Invenitur *per casum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique, *per casum* 1, $i = \frac{hc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i. *Brevius.* Fiat $a : a + c = a - c : g$, *per casum* 3, & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, *per cas.* 1, quæ erit x.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur, ut in casu præcedente, $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg : a} = \frac{(a+d)b}{f + cg : a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$; consequenter $x = \frac{(a+d)b}{f+h}$. Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a-d)}{h+c}$; consequenter $h + c : a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum ABC, cujus crus AB $= a$, BC $= b$, (§. 180 *Geom.*); erit AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC $= m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$. Tab. I. *Fig.* 3.

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super AB $= a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$. Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB $= \sqrt{(a^2}$ Tab. I. *Fig.* 4.

$\sqrt{(a^2 - b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur CB $= m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab.I. *Fig.5.* 10. Sit $x = \frac{a^2b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$: erit $x = \frac{a^2 + cd}{h + c}$. Quæratur inter AC $= c$ & CB $= d$ media proportionalis CD $= \sqrt{cd}$, (§. 327 *Geom.*). Fiat CE $= a$; erit DE $= \sqrt{(a^2 + cd)}$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{h + c}$; consequenter $h + c : m = m : x$.

PROBLEMA CXII.

253. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 143); ipsas quoque, *per Probl. præced.* (§. 252) construere licet.

Tab.I. *Fig.5.* Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 299 *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter AC $= a$ & CB $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 . ax = . b^2$; erit $x = . \frac{1}{2}a . \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 . b^2)}$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 + b^2)}$, vel $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, itemque ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Tab.I. *Fig.3.* Utrumque vero jam docuimus in Problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sed *Fig.4.* si super AB $= \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, ut in Problemate præcedente demonstratum.

SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construi possint, quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhæreamus. Hac enim ratione in constructiones parum commodas sæpe incideremus, cum singulares Problematis specialis circumstantiæ multo concinniorem meditanti insinuent. Immo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui constructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hæc est, quod in algebraica solutione Problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis; cum tamen ex Veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.*

PROBLEMA CXIII.

255. *Data perimetro* AB + BC + CA, *& area trianguli rectanguli; invenire hypothenusam.* Tab.I. *Fig.3.*

Sit AB + BC + CA $= a$, AC $= x$, area $= b^2$, erit BC + BA $= a - x$.

Jam cum sit AC^2 = AB^2 + BC^2 (§. 417 *Geom.*) & AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 — 2AB. BC (§. 261 *Arithm.*): erit AC^2 = (AB + BC)^2 — 2AB.BC (§. 87 *Arithm.*). Est vero AC$^2 = x^2$ & (AB + BC)$^2 = a^2 - 2ax + x^2$, 2AB. BC $= 4b^2$ (§. 392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$
$$2ax = a^2 - 4b^2$$
$$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodsi triangulum construi debet, dicatur altitudo BD, hoc est perpendiculum in hypothenusam AC demissum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*).

$$\frac{1}{2}xy = b^2$$
$$y = b^2 : \frac{1}{2}x$$

Constructio. Erigatur ad BD $= a$ perpendicularis AB $= 2b$, fiatque BC $= b$ & quæratur Tab. XII. *Fig.* 113.

Tab. XII. *Fig.* 113. ratur (§.271 *Geom.*) quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Fiat CB $= \frac{1}{2}a$, & CI = BH; erit BI $= \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad BO $= \frac{1}{2}x$, & BE = BG $= b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare, si super BI describatur semicirculus, & ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§.185 *Arith.*). habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

S C H O L I O N.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§.118 Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æquale.*

P R O B L E M A CXIV.

Tab.I. *Fig.*3. 257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB, *&* BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $= a^2$ BC $= x$

AB $= y$

erit AC $= y^2 : x$

Ergo

(§.417 *Geom.*)   (§.392 *Geom.*)

$y^4 : x^2 = y^2 + x^2$ $\frac{1}{2}xy = a^2$

$\overline{\qquad\qquad} \; x^2$ $\overline{\qquad\qquad}$

$y^4 = x^4 + x^2y^2$ $xy = 2a^2$ Tab.I. *Fig.*3.

$y^4 = \dfrac{16a^8}{y^4} + 4a^4$

$\overline{\qquad\qquad} \; x = 2a^2 : y$

$\overline{\qquad\qquad} \; y^4$

$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4$ $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y^4$

$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8$ $x^2y^2 = 4a^4$

$\quad + 4a^8 \;\; + \;\; 4a^8$

$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$

$\left.\begin{matrix} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{matrix}\right\} = 2a^4\sqrt{5}$

$y^4 = 2a^4 + 2a^4\sqrt{5} = a^4(2 + 2\sqrt{5})$

$y = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4\sqrt{5}$, radix $2a^4 - y^4$ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, adeoque $y^4 = 16a^8 : x^4$, & hinc ob $y^4 = x^2y^2 + x^4$ porro

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$

$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$

$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = 2a^4 + x^4$$

$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$

$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Constructio. Jungantur AB $= a$ & AC $= 2a$ ad angulos rectos, erit BC $= a\sqrt{5}$. Fiat BD = AB, erit DC $= a\sqrt{5} - a$. Fiat porro CE = CD, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit CN $= \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis CH $= a$ & CG = CN, descriptoque semicirculo super HG; erit CI $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$. Tab. XII. *Fig.* 114.

Tab. XII. Fig. 114. Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\sqrt{5}$; erit, descripto super AK semicirculo, $CL = \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Fiat porro $CO = CL$; erit descripto super HO semicirculo $CM = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat $CF = CI$; ducta FM erit CMF triangulum quæsitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, $BC = x$, erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, adeoque (§.417 *Geom.*):

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \qquad x^2 \text{ div.}$$
$$y^4 = y^2 + 1 \qquad y^2 \text{ subt.}$$
$$y^4 - y^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \qquad \text{add.}$$
$$y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} y^2 - \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} - y^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet adeo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA CXV.

Tab. I. Fig. 6. 258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in* C, *hoc est, ut sit* AB : AC = AC : CB.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$a : x = x : a - x$$
$$x^2 = a^2 - ax \quad (\text{§.297 } \textit{Arithm.}). \qquad ax \text{ add.}$$
$$x^2 + ax = a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2 \qquad \text{Ext. Rad.}$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Constructio. 1°. Jungantur $AB = a$ & $BD = \tfrac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Tab. I. Fig. 6. 2°. Fiat $DF = \tfrac{1}{2}a$ & $AF = AC$; erit $AC = x$.

Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Tab. I. Fig. 7. Nimirum radio $AC = \tfrac{1}{2}a$ describatur circulus, & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat $BF = BE$; recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE.BD = ax + x^2$; consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§.379 *Geom.*).

PROBLEMA CXVI.

Tab. I. Fig. 8. 259. *Rectam datam* AC, *utcunque divisam in* B, *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD : DC = DC : BD.

Sit $AB = a$, $BD = x$,
$BC = b$, erit $DC = b - x$,
$AD = a + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a + x : b - x = b - x : x$$
$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2 \qquad x^2 - 2bx \text{ subtr.}$$
$$ax + 2bx = b^2 \qquad a + 2b, \text{ div.}$$
$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam
$a + 2b : b = b : x$ (§.272 *Geom.*).

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§.190 *Arithm.*)

$a + b : b = b - x : x$ (§.173 *Arithm.*)

$a + 2b : b = b : x$ (§.190 *Arith.*).

PRO-

PROBLEMA CXVII.

Tab. I. Fig. 8. 260. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : BA.

Sit CB $= a$, DB $= x$,
BA $= b$, erit DA $= b + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a : x = b + x : b$$

$$ab = bx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \text{ add. } (\S.\ 143).$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab = \tfrac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} = \tfrac{1}{2}b + x$$

$\tfrac{1}{2}b$ subtr.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b = x$$

Tab. I. Fig. 9. *Constructio.* Inter EG $= b$ & GE $= a$ quaeratur media proportionalis HG, quae erit $= \sqrt{ab}$. Fiat GI $= \tfrac{1}{2}b$, & ducatur HI; erit HI $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)}$. Fiat denique KI = GI: erit KH $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + ab)}$, si inter $\tfrac{1}{4}b + a$ & b quaeratur media proportionalis (§. 327, 330 *Geom.*).

Tab. I. Fig. 4. Item, quia $\tfrac{1}{4}bb + ab$ est differentia quadratorum $\tfrac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2; super AB $= \tfrac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= a$; erit CB $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + ab)}$, (§. 317, 417 *Geom.*).

DEFINITIO XIX.

261. Si quatuor fuerint *lineae* proportionales, extremae mediis, mediae extremis *reciprocae* dicuntur.

PROBLEMA CXVIII.

Tab. I. Fig. 10. 262. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut partes* AC & CB *sint duabus datis* DE & FG *reciprocae.*

Sit AB $= a$, AC $= x$,
DE $= b$, CB $= a - x$.
FG $= c$,

Ergo (§. 261).

$$x : b = c : a - x$$

$$ax - x^2 = cb$$

mut. sig.

$$-cb = x^2 - ax$$

$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add. } (\S.143).$$

$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - cb)} \left(\begin{array}{l} = \tfrac{1}{2}a - x \\ = x - \tfrac{1}{2}a \end{array} \right.$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$$

Constructio. Quaeratur inter HI $= b$ & IK $= c$ media proportionalis MI $= \sqrt{cb}$ Tab. I. Fig. 11. (§. 327 *Geom.*). Radio IL $= \tfrac{1}{2}a$ describatur arcus, & ducatur PM ipsi IK parallela (§. 258 *Geom.*); erit NM $= x$ & MP $= a - x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO, erit NO = OP (§. 291 *Geom.*) & OL = MI $= \sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed NL = LI (§. 40 *Geom.*) $= \tfrac{1}{2}a$. Ergo NO $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 417 *Geom.*); consequenter, ob MO = IL (§. 238 *Geom.*) $= \tfrac{1}{2}a$, MN $= \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)} = x$, & PM $= \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)} = a - x$.

COROLLARIUM.

263. Construere ergo aequationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$, idem est, ac datis duabus rectis c & b, vel si $c = b$, eidem rectae b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA CXIX.

264. *Datis duabus rectis* DE & FG Tab. I. *reciprocas invenire, quarum differentia* Fig. 10. *sit datae rectae* AC *aequalis.*

Sit DE $= a$, reciproca minor
FG $= b$, $= x$,
AC $= c$, erit major $= c + x$.

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc \qquad \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{4}cc + ab = \tfrac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} = \tfrac{1}{2}c + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} - \tfrac{1}{2}c = x$$

Tab.I. Fig. 5. *Constructio.* Quæratur inter AC $= b$ & CB $= a$ media proportionalis DC. Fiat CE $= \tfrac{1}{2}c$; erit DE $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)}$. Unde si subtrahitur $\tfrac{1}{2}c =$ EF, relinquitur DF $= x$.

Tab.I. Fig. 12. Alia magis ingeniosa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C, radio arbitrario, majori tamen quam $\tfrac{1}{2}c$ & $\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ $= c$ & IP $= a - b$. Prolongetur PI in O, donec PO $= b$. Tandem per O describatur circulus priori concentricus: erit HI $= x$. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI $=$ LQ & LH $=$ LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM $=$ IH (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse NI $=$ PO $= b$. Ergo NI. IO $= ab$; consequenter $ab =$ HI. IM $=$ HI. ($c +$ HI) (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam $ab = x(c + x)$. Ergo HI $= x$.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$; consequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Constructio. Eadem est, quæ precedens. Sed hic MI $= x$, ita enim HI $=$ QM $= x - c$, consequenter NI. NO $= ab$ & HI. IM $= x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$, idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA CXX.

266. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut rectangulum sub tota* AB *&* *segmento minore* AC *æquale sit rectangulo sub majore* CB *&* *differentia utriusque* CB — AC. Tab.I. Fig. 10.

Sit AB $= a$, AC $= x$,

erit CB $= a - x$,

CB — AC $= a - 2x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$-a^2 = -4ax + 2x^2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$

$$+a^2 \qquad + a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Constructio. Quæratur inter $\tfrac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam, per conditionem Problematis,

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit $a : a - 2x = a - x : x$ (§. 299 *Arithm.*)

$$2a - 2x : a = a : a - x$$

$$a - x : \tfrac{1}{2}a = a : a - x$$

$$\tfrac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

SCHOLION.

267. *His resolutionibus per analogias, & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more Veterum mediteris demonstrationes.*

PRO-

PROBLEMA CXXI.

Tab.I. Fig.13. n. 1. 268. *Dato radio circuli* ED; *invenire latus Trigoni regularis ipsi inscribendi* AB.

Ducatur latus Hexagoni EB, & sit BD=BE (§. 356 *Geom.*) $=a$, AB$=x$; erit BF$=\frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE =BD, *per demonstr.* BF=BF: erit EF =FD (§. 235 *Geom.*) $=\frac{1}{2}a$. Quare (§. 417 *Geom.*) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et si fiat $a=1$, erit $=x\sqrt{3}$.

Tab.I. Fig.13. n. 2. *Constructio.* Concinnior hæc est: Super diametro AB construatur triangulum æquilaterum AFB, & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB sit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & FB $=2a$, CB $=a$; erit FC $=\sqrt{3aa}$ (§. 417 *Geom.*) $=x$.

Theorema. Quadratum lateris Trigoni est ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM I.

269. Si, dato latere Trigoni regularis b, inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y=\sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM II.

270. Quoniam dimidium latus Trigoni regularis est sinus 60° (§. 2 *Trigon.*), per Problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus Problematis solutio usum potius respicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim constructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Est enim diameter* $AB = 2a$. *Quare si fiat* $AD = a$, Tab.I. *ducaturque* DB, *cum angulus ad* D *rectus sit* Fig.13. (§. 317 Geom.), *adeoque* $AB^2 - AD^2 =$ n. 2. DB^2 (§. 417 Geom.) *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$.

PROBLEMA CXXII.

272. *Dato radio circuli* AE; *invenire latus Octogoni regularis circulo inscribendi.* Tab.I. Fig.17.

Sit AE$=r$, AF$=y$; erit latus quadrati AB$=\sqrt{2r^2}$ (§. 21 *Trig.*) & AG $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum AEF$=45°$ (§. 342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§. 291 *Geom.*); erit quoque EAG$=45°$ (§. 241 *Geom.*); consequenter EG=AG (§. 253 *Geom.*) $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG$=r-\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod si fiat $r=1$; erit $y=\sqrt{(2-\sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus Octogoni sit sinus 22° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipsum Problema invenitur sinus 22° 30′.

PROBLEMA CXXIII.

274. *Dato latere Octogoni* AF; *invenire radium circuli circumscribendi* AE. Tab.I. Fig.17.

Tab.I. Fig.17. Sit $AF = b$, $AE = y$, erit (§. 272)

$$b^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4}$$
$$\sqrt{2y^4} = 2y^2 - b^2$$
$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \tfrac{1}{2}b^4$$
$$\tfrac{1}{2}b^4 \qquad\qquad \tfrac{1}{2}b^4 \text{ (§. 261}$$
$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4 \quad \textit{Arith.})$$
$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2 - b^2$$
$$b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2$$
$$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Est igitur $b : y = y : b + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$
conseq. $\tfrac{1}{2}b : y = y : 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Hinc elicitur sequens geometrica

Constructio. Super latere Octogoni $AB = b$ describatur semicirculus, & ex centro C erigatur perpendicularis indefinita CF, erit recta $DB = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 417 *Geom*). Fiat $AE = 2b + 2b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE; erit $AF = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$, (§. 330 *Geom.*); consequenter radius circuli Octogono circumscribendi: quod adeo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B. Tab. XII. Fig. 115.

PROBLEMA CXXIV.

Tab.I. Fig.14. 275. *Dato radio circuli* AC; *invenire latus Decagoni regularis inscribendi* AB.

Quoniam AB est $\tfrac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus $ACB = 36°$ (§. 57, 59 *Geom.*); consequenter, ob $AC = BC$ (§. 40 *Geom.*), $ABC = CAB = 72°$ (§. 248 *Geom.*); adeoque $DAC = 108$ (§. 149 *Geom.*). Fiat $AD = AC$, erit $ADC = ACD = 36°$ (§. 248 *Geom.*); consequenter $DCB = 72°$.

Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc $BD : BC = BC : AB$ (§. 267 *Geom.*). Tab.I. Fig.14.

Sit jam $AC = BC = a$, $AB = x$; erit $BD = a + x$; consequenter *per demonstrata*,

$$a + x : a = a : x$$
$$ax + x^2 = a^2$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 258). Vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a + x$ & x (§. 265).

Theorema. Latus Decagoni regularis circulo inscripti est pars major radii media & extrema ratione secti. Tab.I. Fig.15.

Constructio. Quoniam $x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$ (§. 258); radio a describatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis $IE = a$. Fiat $EF = \tfrac{1}{2}a$: erit $FI = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Quare si ex F, radio IF, describatur arcus KI, erit $KE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$.

SCHOLION.

276. *Hanc ipsam constructionem tradit* PTOLEMÆUS *in suo* Almagesto.

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per Problema præsens sinus 18° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA CXXV.

278. *Dato latere Decagoni regularis circulo inscribendi* AB; *invenire radium* AC. Tab.I. Fig.14

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $BD = a + x$, & *per demonstrata in Probl. præc.*

$a +$

$$a+x : x = x : a$$
$$ax + a^2 = x^2$$
$$a^2 = x^2 - ax$$
$$\tfrac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = x - \tfrac{1}{2}a, \text{ ob } x > \tfrac{1}{2}a \ (\S. 275).$$
$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = x.$$

Tab.I. Fig.16. *Constructio.* Construatur triangulum rectangulum MLN, in quo ML $= a$ & MN $= \frac{1}{2}a$: erit LN $= \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§.417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec NO $=$ LN; erit MO $= x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.

Aliter.

$$a + x : x = x : a$$
$$a : x = x - a : a$$

Quærendæ adeo sunt ipsi a reciprocæ x & $x - a$.

PROBLEMA CXXVI.

Tab.I. Fig.17. 279. *Dato radio circuli* AE *& latere Decagoni* AF; *invenire latus Pentagoni* AB.

Sit AE $= a$, AB $= x$,
AF $= b$, AG $= \frac{1}{2}x$, (§.291 *Geom.*)
GE $= \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$
FG $= a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$
Quare (§.417 *Geom.*)

$$b^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} + a^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$
$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = 2a^2 - b^2$$
$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$
$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$$
$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$
$$4b^2 - b^4 : a^2 = x^2$$

Est vero $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 275)

$$b^2 = \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$b^4 = \tfrac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

Ergo

$$x^2 = \tfrac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - (\tfrac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}) : a^2$$
$$= \tfrac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{14}{4}a^2 + 3a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= \tfrac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a^2 + b^2.$$

Constructio: Quæratur latus Decagoni EK (§. 275); erit KI latus Pentagoni. Tab.I. Fig.15.

Theorema. Latus Pentagoni regularis potest latera Hexagoni & Decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

SCHOLION.

280. *Eandem prorsus constructionem dedit* PTOLEMÆUS.

COROLLARIUM.

281. Per præsens adeo Problema inveniri potest sinus 36° (§. 2 *Trigon.*).

PROBLEMA CXXVII.

282. *Datis summa crurum Trianguli rectanguli* AB+BC, *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenusam* AC *demisso; invenire latera.* Tab.I. Fig.3.

Sit AB+BC $= a$, BD $= b$, AB$-$BC $= y$, AC $= x$; erit AB $= \frac{1}{2}(a+y)$, BC $= \frac{1}{2}(a-y)$; consequenter

(§. 417 *Geom.*)	(§. 330 *Geom.*)
$x^2 = \frac{1}{2}(aa+yy)$	BA : BD = AC : BC
	$\frac{1}{2}(a+y) : b = x : \frac{1}{2}(a-y)$
$2x^2 = aa + yy$	$\frac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$
$2x^2 - a^2 = y^2$	$a^2 - y^2 = 4bx$
	$a^2 - 4bx = y^2$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$
$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$
$$x^2 + 2bx = a^2$$
$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$
$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

Constructio nihil difficultatis habet. Quodsi enim triangulum construi debet, ad AB $= a$ excitetur in A perpendicularis AC $= b$ (§. 249 *Geom.*), erit BC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Quare si fiat CD $=$ AC, erit DB $= \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam porro BE $=$ BD, &, descripto super EB semicirculo ex C, ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quæsitum. Tab. XII. *Fig.* 116.

PROBLEMA CXXVIII.

Tab. I. *Fig.* 18. 283. *Datis, pro triangulo rectangulo* BAC, *hypothenusa* BC *& differentia crurum* DC; *invenire crura.*

Sit BC $= c$, DC $= f$, $\frac{1}{2}$(AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \frac{1}{2}f$, AB $= x - \frac{1}{2}f$ (§. 6); consequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$
$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)}$$

Constructio. Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF $=$ FE $= \frac{1}{2}c$, erit AE $= \sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE describatur semicirculus, ob AF $=$ FE, transiturus per F, & in eo applicetur EG $= \frac{1}{2}f$; erit AG $= x$; consequenter si fiat GD $=$ GC $=$ GE, crus majus AC, minus AB $=$ AD.

PROBLEMA CXXIX.

Tab. I. *Fig.* 19. 284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quæ producta transeat per datum punctum* H *tangentis* HI.

Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 379 *Geom.*). Tab. I. *Fig.* 19.

$$y^2 + my = n^2$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$
$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$
$$y + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)} - \tfrac{1}{2}m$$

Constructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis MI $= \frac{1}{2}m$; erit HM $= \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$. Fiat NM $=$ MI $= \frac{1}{2}m$; erit HN $= y$. Quare si ex centro H, radio HN, describatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK sit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA CXXX.

285. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum summa æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc dd, quæsita yy & $dd - yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : bb = cc : dd - yy$$
$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$
$$y^4 - ddy^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - bbcc$$
$$\tfrac{1}{2}dd - y^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}dd - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)})}$$

Constructio. Quæratur ad AB $= d$, AC $= b$, & BD $= c$ quarta proportionalis CE $= bc : d$. Describatur semicirculus super CF $= \frac{1}{2}d$, & in eo applicetur CG $=$ CE; erit FG $= \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$. Fiat HC $= d$ & CI $= \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$; erit media proportionalis CK $= y$. Denique super CH $= d$ describatur semicirculus, & in eo applicetur CL $=$ CK, erit LH $= \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quæsiti. Tab. I. *Fig.* 20.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

286. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæsita yy & $hh+yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : ff = gg : hh + yy$$

$$y^4 + hhyy = ffgg$$
$$\tfrac{1}{4}h^4 \qquad \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^4 + hhyy + \tfrac{1}{4}h^4 = ffgg + \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^2 + \tfrac{1}{2}hh = \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)})}$$

Constructio. Eadem fere, quæ Problematis præcedentis.

PROBLEMA CXXXII.

Tab.II. Fig.21. n.1. 287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH; *invenire altitudinem* ML.

Sit HL $= c$, LI $= d$, HI $= g$, HM $= z$, erit MI $= g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipsius MI^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex Elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2gz$ est differentia inter zz & $gg - 2gz + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI. Tab.II. Fig.21. n.1.

PROBLEMA CXXXIII.

289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.* Tab.II. Fig.21. n.1. & 2.

Sit HI $= f$, LM $= e$, NP $= m$, QO $= n$, basis trianguli quæsiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§. 396 *Geom.*)

$$m : n = y : z$$

$$mz = ny$$

(§. 392 *Geom.*)

$$fe = zy$$

$$fe : y = z$$

$$mfe : y = mz$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = mfe : n$$

$$y = \sqrt{(mfe : n)}$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit RS $= me : n$. Quæratur inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= \sqrt{(mfe : n)}$, super qua, ob angulos N & P datos, triangulum TSV construi potest (§. 264 *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y \qquad fe = zy$

Fiat $n : m = e : r \qquad f : z = y : e$ (§. 299 *Arithm.*)

erit $z : y = e : r$ (§. 167 *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 194 *Arithm.*).

Est ergo y media proportionalis inter f & r, seu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA CXXXIV.

Tab.II. Fig.22. 290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *sit aequalis lineae datae.*

Ducatur diagonalis CB & in E constituatur angulus CEF = CBG (§. 208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatae in F occurrat.

Sit $AB = b$, $CB = c$, $EG = d$, $BG = z$, $CF = y$: erit $BF = y - c$. $BG : GE = AB : EC$ (§. 268 *Geom.*). Unde reperitur $EC = bd : z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per construct.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) $CB : BG = CE : EF$. Unde reperitur $EF = zbd : cz = bd : c$. Porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99, 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arithm.*); consequenter CBG = EBF (§. 88 *Arithm.*) = CEF (§. 87 *Arithm.*). Ergo, ob angulum communem F (§ 267 *Geom.*),

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3 y = bbdd$$

$$y^2 - cy = bbdd : cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

Ex aequatione prima statim liquet, inveniendas esse ipsi $bd : c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem haec elicitur

Constructio. Fiat BM = EG = d, & ducatur LM ipsi AC parallela; erit $LM = bd : c$ (§. 268 *Geom.*). Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit $ON = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$ (§. 417 *Geom.*). Translata ergo ON ex N in F; erit $CF = y$. Denique cum $EF = bd : c = LM$; ex puncto F, intervallo EF, determinetur punctum E. Quod si jam ex C ducatur recta per E occurrens ipsi AB continuatae in G, erit EG aequalis lineae datae. Tab.II. Fig.22.

PROBLEMA CXXXV.

291. *A dato puncto* E *ducere rectam, quae circulum datum tangat.* Tab.I. Fig.23.

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque $EG = a$, $GC = b$, $ED = x$; erit $EF = a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*)

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea describatur semicirculus CDE, ducanturque chordae CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Est vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$: ergo $DE = \sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA CXXXVI.

292. *Examinare regulam* Renaldinianam, *Polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi.* Tab.II. Fig.24.

Regula *Caroli* RENALDINI (*a*) haec est. Dividatur diameter AB in tot partes aequales, in quot peripheria dividi debet. Super AB construatur triangulum aequilaterum AFB. Ex F per secundum divisionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipsius mente BG latus Polygoni.

Fal-

(*a*) De Resolutione & Compositione Mathematica lib. 2. f. 367.

Tab.II. *Fig.* 24. Falsitatem Regulæ una instantia ostendisse sufficit.

Sit BG latus Octogoni, & fiat $BH = BG$; erit HG latus Quadrati. Sit porro $CB = 1$, $EG = x$; erit $CD = \frac{1}{2}$, per Regulam RENALDINI, $FC = \sqrt{3}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam angulus ad C rectus (*§.* 184 *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) $FC : CD = EG : DE$, hoc est, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc $CE = \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 417 *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13}$$

$$\tfrac{3}{13\cdot 13} \qquad \tfrac{3}{13\cdot 13} \quad \text{add.}$$

$$\tfrac{3}{13\cdot 13} + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13} + \tfrac{3}{13\cdot 13} = \tfrac{120}{13\cdot 13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3} + x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120}.$$

$$x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

$$= \tfrac{2}{13}\sqrt{30} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo semilatus Quadrati, si vera esset Regula RENALDINI, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diversum a *Renaldiniano* esse extractio radicis probat. Fallit ergo regula RENALDINI in Octogono, adeoque non universalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorsus modo ostenditur, quod etiam fallat in aliis Polygonis.*

PROBLEMA CXXXVII.

294. *Data diagonali Pentagoni regularis* AD; *invenire latus Pentagoni* AE.

Sit $AE = x$, $AD = a$. Quoniam anguli AEC mensura est arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipsius EFA semisumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc est, arcus AE (§. 342 *Geom.*), est vero $AB = AE$ (§. *cit. Geom.*); erit $AEF = AFE$ (§. 142 *Geom.*), consequenter $AF = AE$ (§. 253 *Geom.*) $= x$, adeoque $FD = a - x$. Porro anguli AED mensura est $AB + \frac{1}{2}BC$ (§. 314 *Geom.*) & ipsius EFD mensura itidem $AB + \frac{1}{2}BC$ (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*) Tab.II. *Fig.* 25.

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Est adeo x pars major ipsius a media & extrema ratione sectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Quod si $AD = x$, $ED = a$, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA CXXXVIII.

296. *Invenire circulum superficiei Cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria Cylindri $= p$; altitudo a; erit superficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*).

Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*)

$$px^2 : 2r = ap \quad 2r \text{ mult.}$$
$$px^2 = 2rap \quad p \text{ div.}$$
$$x^2 = 2ar$$
$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies Cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem Cylindri.

PROBLEMA CXXXIX.

297. *Invenire Cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo Cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 425 *Geom.*), consequenter (§. 516 *Geom.*).

$$pyx : r = \tfrac{1}{2} pr \quad r$$
$$pyx = \tfrac{1}{2} pr^2 \quad p$$
$$yx = \tfrac{1}{2} r^2 \quad y$$
$$x = r^2 : 2y$$

Est adeo Problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA CXL.

298. *Data diametro Sphæræ & altitudine Cylindri ipsi æqualis; invenire diametrum Cylindri.*

Sit diameter Sphæræ $= d$, altitudo Cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $b : c$; erit soliditas Sphæræ $cd^3 : 6b$ (§. 556 *Geom.*), & soliditas Cylindri $= acx^2 : 4b$ (§. 541 *Geom.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$
$$4d^3 = 6ax^2$$
$$2d^3 : 3a = x^2$$
$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri Sphæræ est ad quadratum diametri Cylindri ipsi æqualis, ut tripla Cylindri altitudo ad diametrum Sphæræ duplam.

PROBLEMA CXLI.

299. *Data diametro Sphæræ AB; invenire latus Tetraëdri ipsi inscribendi AD.* Tab.II. Fig.26.

Sit diameter Sphæræ $AB = a$, latus Tetraëdri $AD = x$, erit CD radius circuli, cui unum e triangulis Tetraëdri inscribi potest $= \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}$ (§. 269). Sit $AC = y$, erit $CB = a - y$; consequenter (§. 327 *Geom.*)

$$AC : CD = CD : CB$$
$$y : \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} : a - y$$
$$ay - y^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$

(§. 417 *Geom.*)

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$x^2 = y^2 + \tfrac{1}{3}x^2$$
$$\tfrac{2}{3}x^2 = y^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = y$$

$$ay - \tfrac{2}{3}x^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$ay = x^2$$
$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = x^2$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = x$$

Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris Tetraëdri est ad quadratum diametri Sphæræ, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROL-

COROLLARIUM I.

300. Est ergo latus Tetraëdri ad diametrum Sphæræ, cui inscribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$, erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo Tetraëdrum sphæræ inscribi, si diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque $AC = \frac{2}{3}AB$.

PROBLEMA CXLII.

Tab.II. Fig.28. 302. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Cubi seu Hexaëdri ipsi inscribendi* FG.

Sit diameter Sphæræ, quæ diagonali Cubi FH æquatur, $= a$, latus Cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$, & $FH^2 = 3x^2$; consequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$

Theorema. Quadratum lateris Hexaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subtripla.

COROLLARIUM I.

303. Est ergo latus Hexaëdri ad diametrum Sphæræ cui inscribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$; consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 304. Sit in diametro Sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$, & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{9}a^2}$; consequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, seu latus Hexaëdri.

PROBLEMA CXLIII.

Tab.II. Fig.29. 305. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Octaëdri inscripti* ML.

Sit $LM = x$, diameter Sphæræ circumscriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem subtendit (§. 342, 475 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{2}{4}bb \text{ seu } \tfrac{1}{2}bb = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema. Quadratum lateris Octaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subdupla.

COROLLARIUM I.

306. Est ergo latus Octaëdri ML ad diametrum Sphæræ circumscriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$; adeoque huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

307. Si ex centro Sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, adeoque latus Octaëdri inscribendi; id quod in ipso calculo supposuimus, in futuros tamen usus sigillatim enunciandum. Tab.II. Fig.27.

PROBLEMA CXLIV.

308. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Dodecaëdri* AB. Tab.II. Fig.30.

Quoniam puncta A, C, F, H sunt in Sphæra: planum per ea transiens est circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a Dodecaëdro demonstrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter se æquantur (§. 475, 106 *Geom.*); AC = CF = HF = HA (§. 179 *Geom.*) adeoque AHFC Quadratum (§. 342 & 98 *Geom.*). Jam cum Pentagona 12 in 36 triangula resolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonnisi 6 subtendat; omnia ista triangula a sex quadratis subtendantur necesse est; consequenter diagonalis AC est lateri Hexaëdri sive Cubi eidem Sphæræ inscripti æqualis (§. 460 *Geom.*).

Sit latus Dodecaëdri $AB = x$, diameter Sphæræ $= d$, erit $AC = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), consequenter

Tab.II. *Fig.* 30.

$$AC : AB = AB : AC - AB$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \quad (\text{§}.294).$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}d^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x.$

Æquatio altera hoc ſuppeditat

Theorema. Quadratum diametri Sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris Dodecaëdri & Hexaëdri eidem inſcriptorum in triplum latus Dodecaëdri.

COROLLARIUM I.

309. Si diameter Sphæræ fuerit 1, erit latus Dodecaëdri inſcripti $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; conſequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad $3 - \sqrt{5}$. Eſt ergo diameter Sphæræ lateri Dodecaëdri inſcripti tum in ſe, tum potentia incommenſurabilis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. *Fig.* 27. 310. Latus Dodecaëdri eſt portio major BG lateris Hexaëdri DB eidem Sphæræ inſcripti media & extrema ratione ſecti in G (§. 258).

PROBLEMA CXLV.

Tab.II. *Fig.* 31. 311. *Data diametro Sphæræ* HM; *invenire latus Icoſaëdri inſcripti.*

Sit ABCDEA circulus ſubtendens angulum ſolidum Icoſaëdri H; erit latus Icoſaëdri æquale lateri Pentagoni AB huic circulo inſcripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inſcriptum Decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui iſti parallelus & ab eo diſtat intervallo radii CG; erit DN = DC (§. 279). Quodſi ergo anguli Pentagonorum lineis tranſverſis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo ſuperiore, quinque ab inferiore ſubtenduntur. Tab.II. *Fig.* 31.

Sit HM = b, HC = x, GC = y. Quoniam GC eſt latus Hexagoni; erit HG latus Decagoni (§. 279) adeoque $= \sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, (§. 275). Habemus ergo

$$2HG + BC = HM \qquad HC^2 = HG^2 + GE^2$$

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b \qquad x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$

$$\text{h. e. } 2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$$

$$5y^2 = b^2 \qquad x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2 \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$

$$\text{seu } \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

Constructio. Fiat AH = AB = b, erit EH = $\sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob EH : AH = EK : IK, hoc eſt, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \dfrac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) IK = $b : \sqrt{5}$. Eſt ergo IK radius circuli, cui Pentagonum Icoſaëdri inſcribitur. Porro EI $= b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*) & hinc AI $= \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK $= \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*). Tab.II. *Fig.* 27.

COROLLARIUM I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri Sphæræ eſt in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum ſolidum Icoſaëdri ſubtendentis.

COROLLARIUM II.

313. Liquet etiam, latus Icoſaëdri diametro Sphæræ circumſcriptæ tum in ſe, tum potentia incommenſurabile eſſe.

SCHO-

SCHOLION I.

314. *Si diameter Sphæræ fuerit* 100000 *erit* (§. 299, 305, 302, 311, 308) *latus Tetraëdri inscripti* 81649, *Octaëdri* 70710, *Hexaëdri* 57736, *Icosaëdri* 52573, *Dodecaëdri* 35682 (a).

SCHOLION II.

315. *Cum ex diametro Sphæræ corporibus regularibus circumscriptæ invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum Quadrato & Cubo diametri Sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam prætermittendam esse judicamus.*

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam planam applicata.

PROBLEMA CXLVI.

316. *Datis basi* HI *trianguli cujuscunque & angulis ad basin* H *&* I; *invenire altitudinem.*

Tab. II. Fig. 21. n. 1. Sit HI $= a$, LM $= x$, sinus anguli MIL $= s$, ejus cosinus $= c$; sinus anguli LHM $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $s : x = c :$ MI & $p : x = q :$ HM. Unde reperitur MI $= cx : s$ & HM $= qx : p$ (§. 302 *Arithm.*). Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$cx : s + qx : p = a \quad \overline{}\; sp$$
$$pcx + sqx = asp \quad \overline{}\; pc + sq$$
$$x = asp : (pc + sq).$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML, ut summa rectangulorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in cosinum alterius se habet ad rectangulum ex sinibus angulorum ad basin.

(a) HERIGONIUS *Curs. Mathem.* Tom. I. p. 779.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, seu cotangentes datorum H & I. Sint sinus totus $= t$, cotangentes $= m$ & n, LM $= x$, HI $= a$; erit $t : m = x :$ HM, & $t : n = x :$ MI (§. 40 *Trigon.*); consequenter HM $= mx : t$, MI $= nx : t$, adeoque (§. 87 *Arithm.*). Tab. II. Fig. 21. n. 1.

$$a = (mx + nx) : t \quad \overline{}\; t$$
$$at = mx + nx \quad \overline{}\; m + n$$
$$at : (m + n) = x$$

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA CXLVII.

317. *Datis summa crurum* HL + LI, *una cum angulis ad basin* H *&* I; *invenire crura* HL *&* LI.

Sit HL + LI $= a$, sinus H $= m$, sinus I $= n$, HL $= x$, erit IL $= a - x$. Quare (§. 33 *Trigon.*).

Tab.II. *Fig.*21. n. 1.

$$x : n = a - x : m$$
$$mx = na - nx$$
$$mx + nx = na$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; m+n \text{ div.}$$
$$x = na : (m+n)$$
$$a - x = (ma+na-na):(m+n) = ma:(m+n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI est ad crus unum HL ut summa sinuum angulorum ad basin H & I ad sinum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA CXLVIII.

318. *Datis angulis ad basin* H *&* I, *una cum segmento baseos uno* HM; *invenire segmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$; sinus anguli H $= m$, ejus cosinus $= n$; sinus anguli I $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§.33 *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro, *vi* § *cit.* $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§.81 *Arithm.*),

$$px : q = am : n$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; nq$$
$$pnx = amq$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; pn$$
$$x = amq : pn$$

Est adeo $pn : mq = a : x$.

Theorema. Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in cosinum anguli I.

PROBLEMA CXLIX.

Tab.I. *Fig.*3. 319. *Datis area trianguli rectanguli* ABC, *una cum angulo* C; *invenire crura* AB *&* BC.

Sit area $= b^2$ BC $= x$

Sinus totus $= r$, erit BA $= 2b^2 : x$ (§.394 *Geom.*)

Tangens anguli C $= t$

Tab.I. *Fig.*3. Quare (§. 40 *Trigon.*)

$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$
$$x^2 : 2b^2 = r : t$$
$$x^2 = 2rb^2 : t$$
$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

Tab.II. *Fig.*32. *Constructio*: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu assumto, erit DE $= r$ & FE $= t$ (§.7 *Trigon.*). Fiat DG = FE, DH $= b$, & agatur ipsi EG parallela HI: erit DI $= br : t$ (§.271 *Geom.*). Fiat MI $= 2b$ & quæratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quæ erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN = LI, ducaturque NO ipsi MK parallela, erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, consequenter KOI, triangulum quæsitum.

Tab. XII. *Fig.* 117. *Aliter.* Sit EDA angulus datus. Fiat DA $= 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit simul DA $= r$ & AE $= t$ (§.7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum, & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit AG $= \frac{2br}{t}$ (§.327 *Geom.*). Fiat AH = AG, & AI $= \frac{1}{2}$ AD $= b$, erit, descripto super IH semicirculo, AL $= \sqrt{\frac{2b^2 r}{t}}$. Fiat denique AB = AL, & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quæsitum.

PROBLEMA CL.

Tab. III. *Fig.*33. 320. *Data subtensa arcus* AB *quadrante minoris, una cum radio circuli* CE; *invenire subtensam* CB *arcus compositi ex arcu* AB *& ejus complemento dimidio ad semicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF = AB, ducanturque rec-

Tab. III. Fig. 33. rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), & ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*) $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam, ob CE = EB (§. 40 *Geom.*) $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$; consequenter CF : CB = CB : CE (§. 267 *Geom.*). Sit jam AB $= a$, CE $= r$, CB $= x$; erit CF $= a + 2r$; consequenter

$$a + 2r : x = x : r$$
$$ar + 2r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM I.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*); consequenter BD subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus AB $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM II.

322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem subtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM III.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320, 321), hoc est, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA CLI.

Tab. II. Fig. 34. 324. *Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC, *una cum diagonali* EC; *invenire diagonalem* AB.

Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $= d$, EC $= f$, AB $= y$. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc est, $f : d = b :$ BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*), & AEF = CEB (§. 88 *Arithm.*); erit EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF ($ac : f$) (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arithm.*).

$$(bd + ac) : f = y$$
$$bd + ac = fy$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA CLII.

325. *Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & cosinus angulorum multiplorum.*

Sit angulus quicunque A, fiat AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV: erit A = ADB (§. 184 *Geom.*), EBD = A + ADB (§. 239 *Geom.*) = 2A, *per demonstr.* Eodem modo ostenditur, esse FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHK A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodsi AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC cosinus anguli simpli A; ED sinus, BE cosinus anguli dupli; FG sinus, DG cosinus anguli tripli, &c. (§. 2, 11 *Trigon.*). Tab. III. Fig. 35.

Sit AB $= r$, BC $= b$, AC $= a$, erit, ob angulum A utrique △△ BAC

& EAD communem, & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*):

AB : BC = AD : DE

$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$

AB : AC = AD : AE

$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$

Ergo BE = AE — AB = $2a^2 : r - r = (2a^2 - r^2) : r$. Est vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo BE = $(2a^2 - a^2 - b^2) : r = (a^2 - b^2) : r$ & AF = AE + EF = $(3a^2 - b^2) : r$.

AB : BC = AF : FG (§. 268 *Geom.*)

$r : b = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3ab^2 - b^3}{r^2}$

AB : AC = AF : AG

$r : a = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$

Ergo DG = AG − AD = $(3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a = (3a^3 - ab^2 - 2ar^2) : r^2 =$ (substituto valore ipsius $r^2 = a^2 + b^2$), $(a^3 - 3ab^2) : r^2$; consequenter AH = AG + GH = $(4a^3 - 4ab^2) : r^2$

AB : BC = AH : HI

$r : b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3 b - 4ab^3}{r^3}$

AB : AC = AH : AI

$r : a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4 - 4a^2 b^2}{r^3}$

Quia FA = $(3a^2 - b^2) : r = (3a^2 - b^2) r^2 : r^3 = (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2 b^2 - b^4) : r^3$ ideo erit FI = AI − AF = $(a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorsus modo reperitur

KL = $(5a^4 b - 10a^2 b^3 + b^5) : r^4$

& HK = $(a^5 - 10a^3 b^2 + 5ab^4) : r^4$;

MN = $(6a^5 b - 20a^3 b^3 + 6ab^5) : r^5$

& LN = $(a^6 - 15a^4 b^2 + 15a^2 b^4 - b^6) : r^5$;

PO = $(7a^6 b - 35a^4 b^3 + 21a^2 b^5 - b^7) : r^6$

& QR = $(a^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6) : r^6$

Si itaque radius seu sinus totus = r, erit sinus anguli

simpli b

dupli $2ba : r$

tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$

quadrupli $(4ba^3 - 4b^3 a) : r^3$

quintupli $(5ba^4 - 10b^3 a^2 + b^5) : r^4$

sextupli $(6ba^5 - 20b^3 a^3 + 6b^5 a) : r^5$

septupli $(7ba^6 - 35b^3 a^4 + 21b^5 a^2 - b^7) : r^6$

&c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{m}{1 . r^{m-1}} b a^{m-1} - \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3 . r^{m-1}} b^3 a^{m-3} + \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . r^{m-1}} b^5 a^{m-5} - \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4 . m-5 . m-6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . r^{m-1}} b^7 a^{m-7} \&c.$$

Similiter si sinus totus = r, erit cosinus anguli

simpli a

dupli $(a^2 - b^2) : r$

tripli $(a^3 - 3ab^2) : r^2$

quadrupli $(a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) : r^3$

quintupli $(a^5 - 10a^3 b^2 + 5ab^4) : r^4$

sextupli $(a^6 - 15a^4 b^2 + 15a^2 b^4 - b^6) : r^5$

septupli $(a^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6) : r^6$

&c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio, quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad

eam

eam dignitatem evecti, cujus exponens est idem cum exponente multipli anguli desiderati, signis + & — alternantibus (§. 95). Erit ergo formula generalis in casu indefinito

$$\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}} b^2 a^{m-2}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}} b^4 a^{m-4}$$

$$- \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}} b^6 a^{m-6} +$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4\,m-5.m-6\,m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8.\;r^{m-1}} b^8 a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16 *Trig.*) & ipsius b^2 potentiæ sunt etiam rationales; substituto hoc valore, sive in formula generali, sive in specialibus, prodit cosinus anguli multipli per solum cosinum simpli & radium determinatus. Ita reperietur cosinus anguli

dupli, $\frac{a^2-b^2}{r} = \frac{a^2-r^2+a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli, $\frac{a^3-3ar^2+3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4-6a^2r^2+6a^4+r^4-2a^2r^2+a^4}{r^3}$

$$= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$$

quint. $\frac{a^5-10a^3r^2+10a^5+5ar^4-10a^3r^2+5a^4}{r^4}$

$$= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a.$$

Similiter ex sinuum formula excluditur cosinus, si valor ipsius $a = \sqrt{(r^2-b^2)}$ substituitur: quamvis ea non sit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM

326. Cum sinus sit chordæ dimidium (§. 2 *Trigon.*), si chorda arcus simpli dicatur b, & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per easdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per easdem formulas arcus per datum numerum multiplicari potest.

PROBLEMA CLIII.

327. *Data tangente arcus simpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum sit ut cosinus $\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}} b^2 a^{m-2}$ + &c. ad sin. $\frac{m}{r^{m-1}} b a^{m-1} - \frac{m\,m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}} b^3 a^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26 *Trigon.*); erit tangens (assumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus cosinuum A, B, C, D, E, pro coëfficientibus sinuum P, Q, R, S, T, excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rrb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}} \text{ \&c.}$$

Sit tangens anguli simpli t, erit (§. *cit. Trigon.*) $a:b = r:t$, consequenter $a = br:t$. Quodsi hic valor in locum ipsius a substituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^mr^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^mr^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^mr^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^mr^{m-6}}{t^{m-7}}}{\frac{b^mr^m}{t^m} - \frac{Ab^mr^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^mr^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^mr^{m-6}}{t^{m-6}}} \text{ \&c.}$$

Quodsi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^mt - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6} \text{ \&c.}$$

Substitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit

$$\left(\frac{m}{1} r^m t - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} r^{m-2} t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} r^{m-4} t^5 - \frac{m.m-1\,m-2.m-3\,m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7} r^{m-6} t^7 \text{\&c.}\right)$$

$:\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.2} r^{m-2} t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3} r^{m-4} t^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6} r^{m-6} t^6 \text{ \&c.}\right)$

Apparet adeo, si binomium ex radio & tangente $r+t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, sed per radium multiplicatis & utrobique signis $+$ atque $-$ alternantibus.

PROBLEMA CLIV.

328. *Data secante arcus simpli, invenire secantem multipli.*

Quoniam secans est tertia proportionalis ad cosinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) assumtis pro coëfficientibus cosinus (excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. secans indeterminata.

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6} \text{ \&c.}}$$

Est vero $r:b = f:t$ (*§. cit. Trig.*): unde eruitur $r = bf:t$. Hoc valore in formula secantis substituto, mutatur ea in sequentem:

$$\frac{rb^m f^m}{a^m t^m - Ab^2a^{m-2}t^m + Bb^4a^{m-4}t^m \text{ \&c.}}$$

Porro $a:b = r:t$ (*§. cit. Trigon.*), adeoque $a = br:t$. Substituto itaque valore ipsius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m f^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2} t^2 + Bb^m r^{m-4} t^4 \text{ \&c.}}$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m, determinabitur valor secantis indefinitæ ex tangente & secante anguli simpli

$$\frac{f^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 - Cr^{m-7}t^6 \text{ \&c.}}$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Æquationibus altioribus.

PROBLEMA CLV.

329. *Explicare naturam æquationum.*

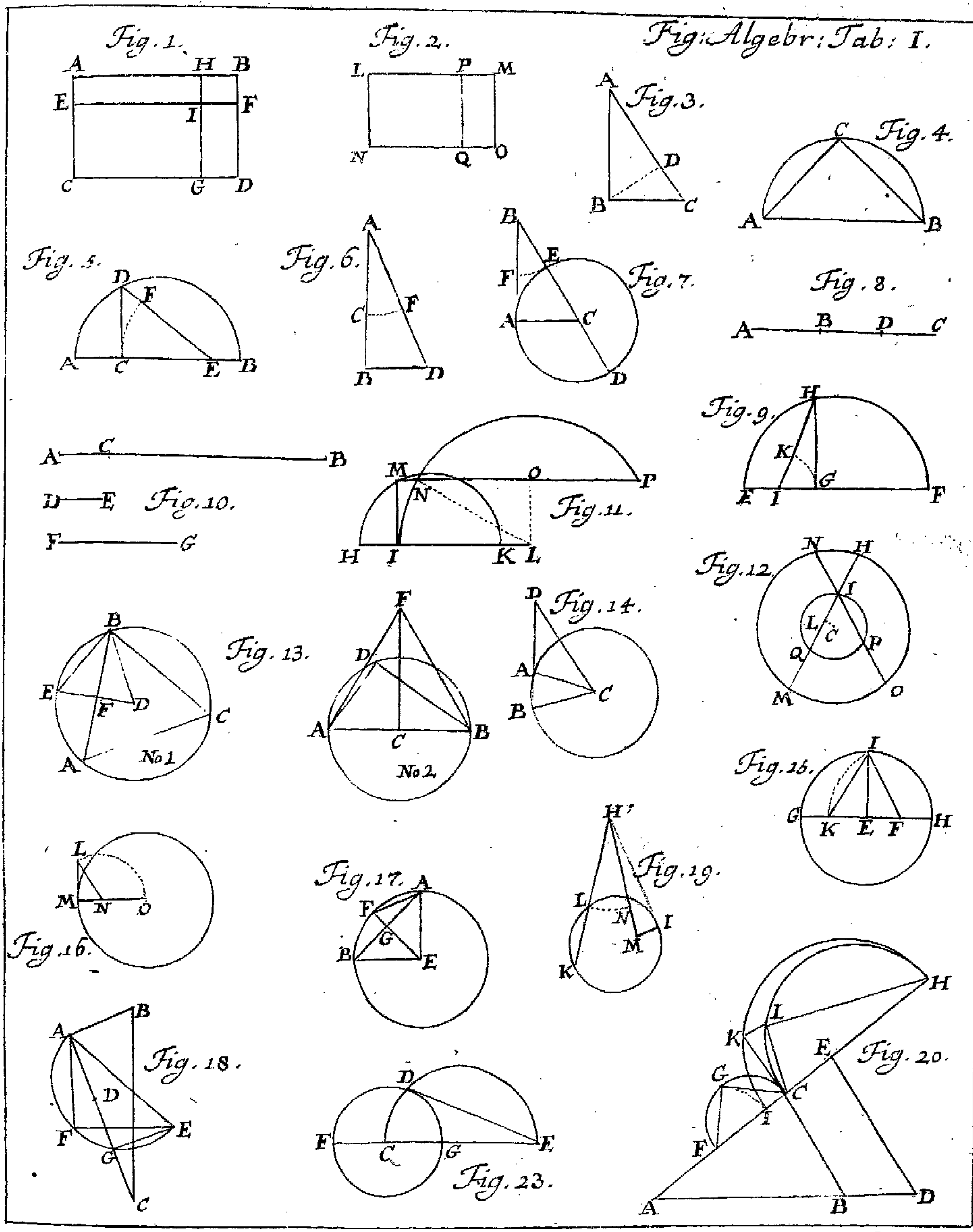
1. Assumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit; formenturque inde simplices æquationes, sed nihilo æquales.
2. Æquationes simplices in se invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum consideratio earum proprietates manifestabit.

Sit	$x = 2$	$x = a$
	$x = -3$	$x = -b$
	$x = 4$	$x = c$
erit	$x - 2 = 0$. I	$x - a = 0$
	$x + 3 = 0$. II	$x + b = 0$
	$x - 4 = 0$. III	$x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II, & factum denuo per æquationem III.

$x-2$

Fig: Algebr: Tab: I.



Figur: Algebr: Tab: II.

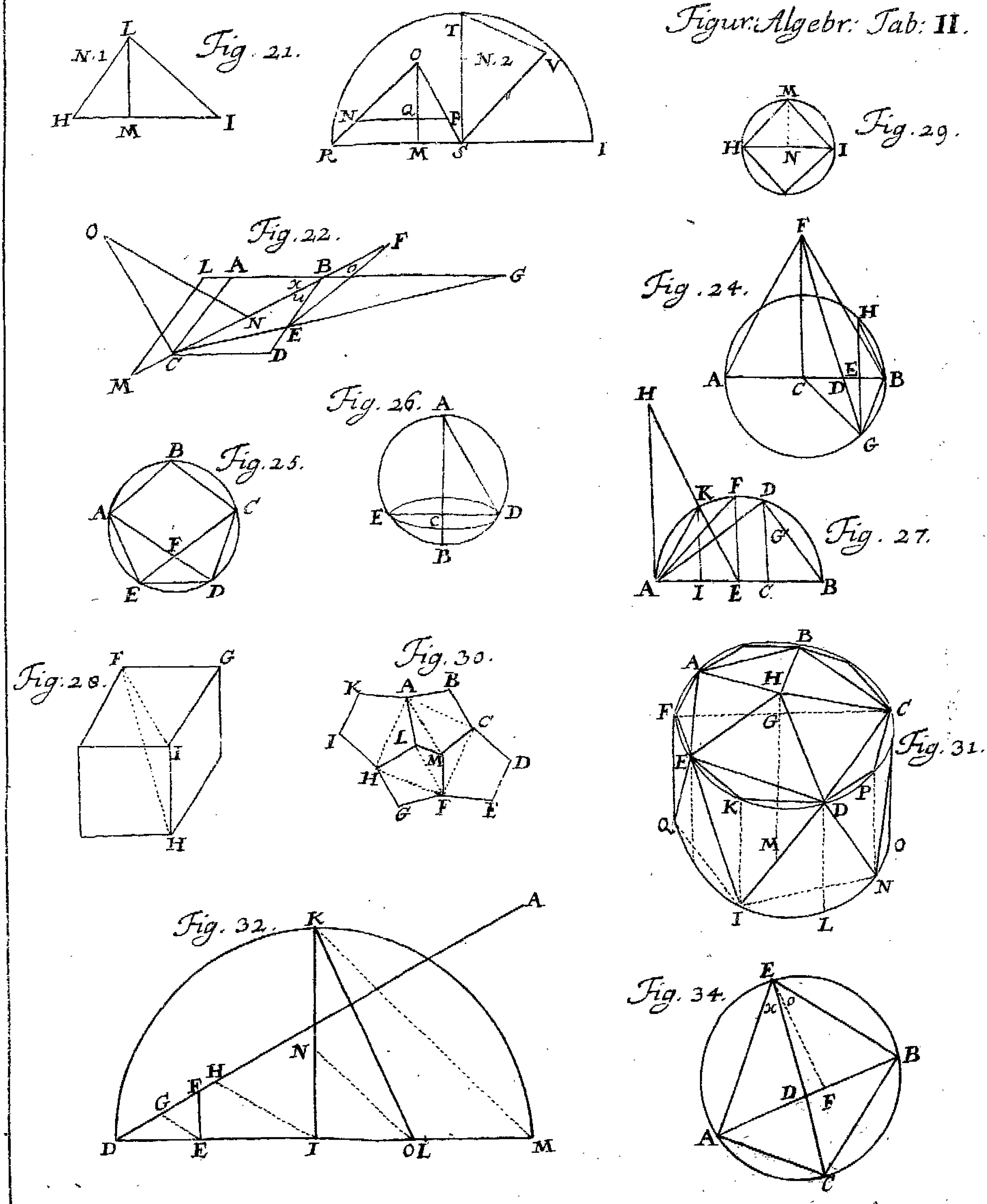


Fig: Algebr: Tab. III.

Fig. 33.

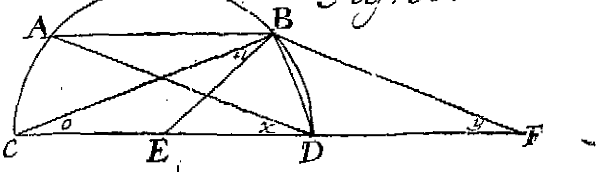


Fig. 36.

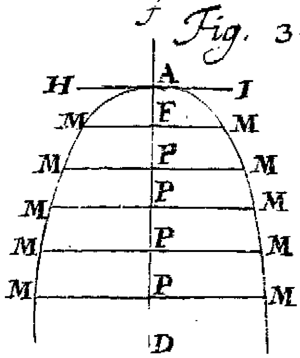


Fig. 35.

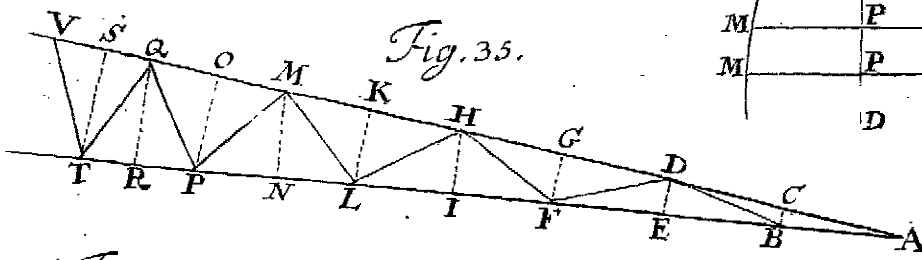


Fig. 38.

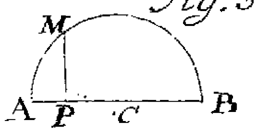


Fig 37.

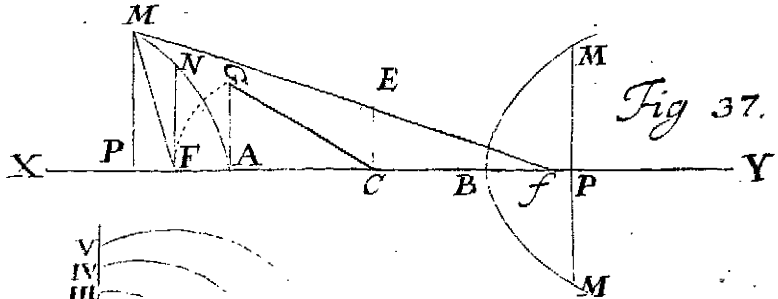


Fig. 40.

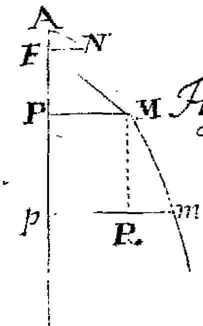


Fig. 39.

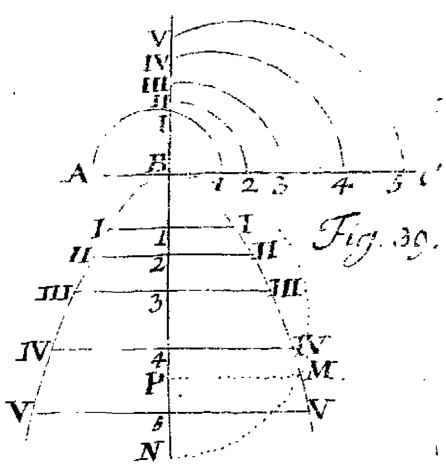


Fig. 44.

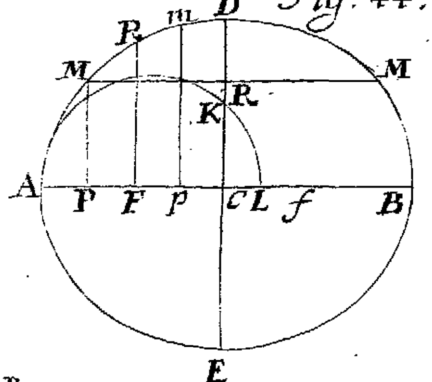


Fig. 42.

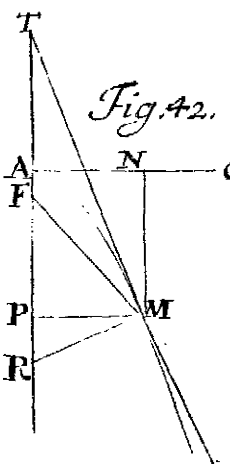


Fig. 41.

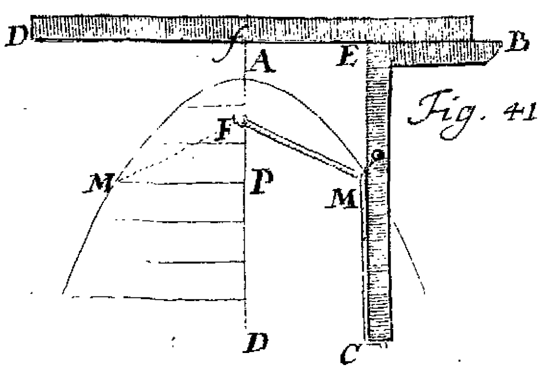


Fig 43

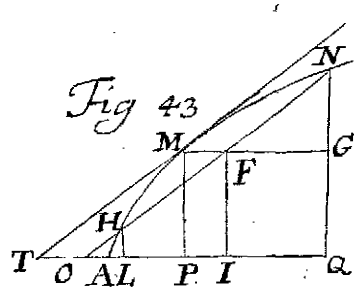


Fig:45.

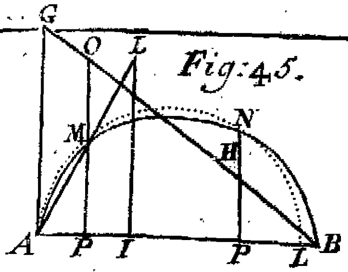


Fig:46.

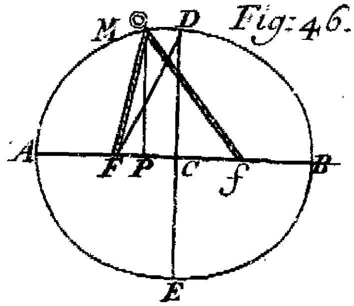


Fig:47.

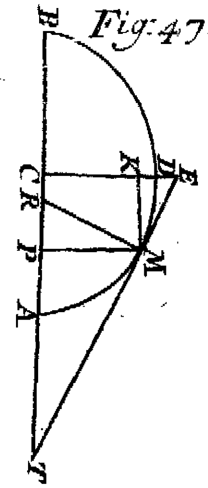


Fig:49.

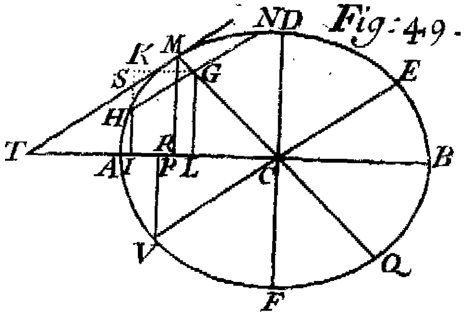


Fig:48.

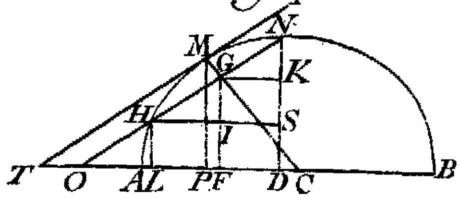


Fig:50.

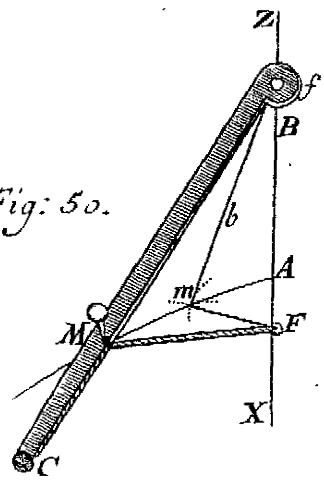


Fig:51.

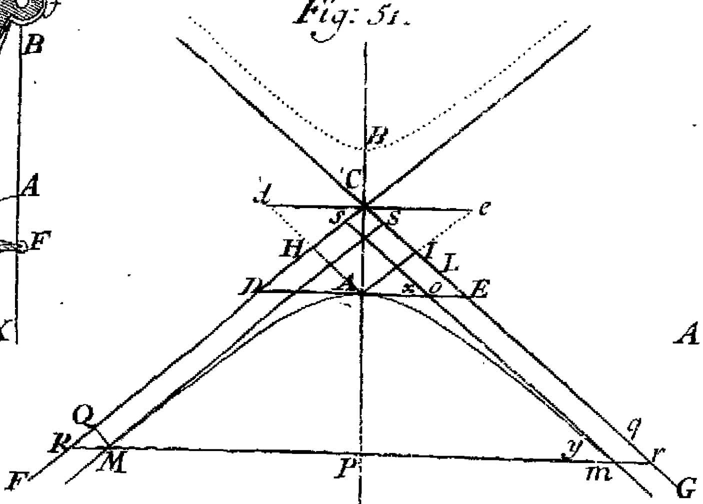


Fig:57.

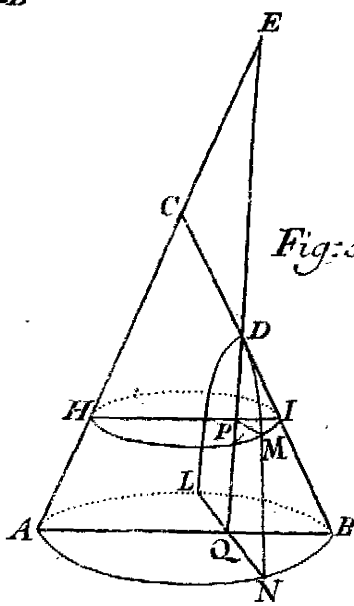


Fig:59.

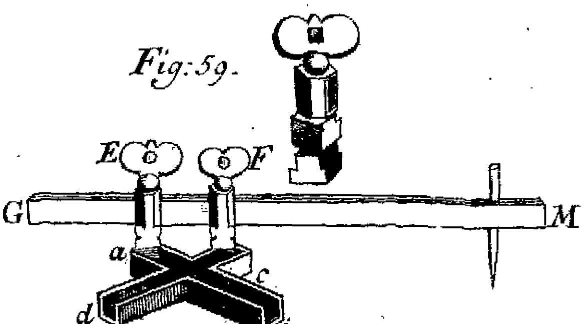
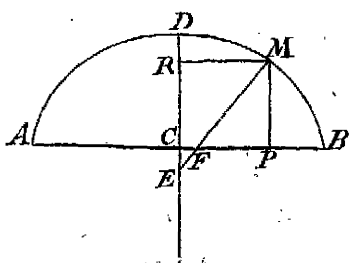


Fig:58.



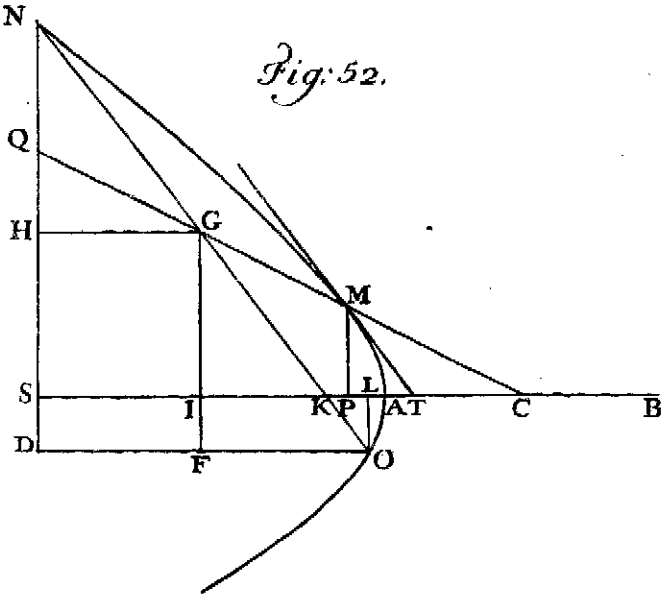


Fig: 52.

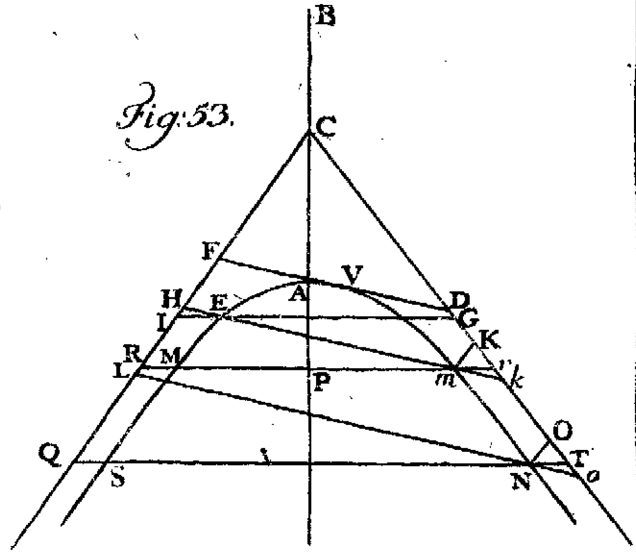


Fig: 53.

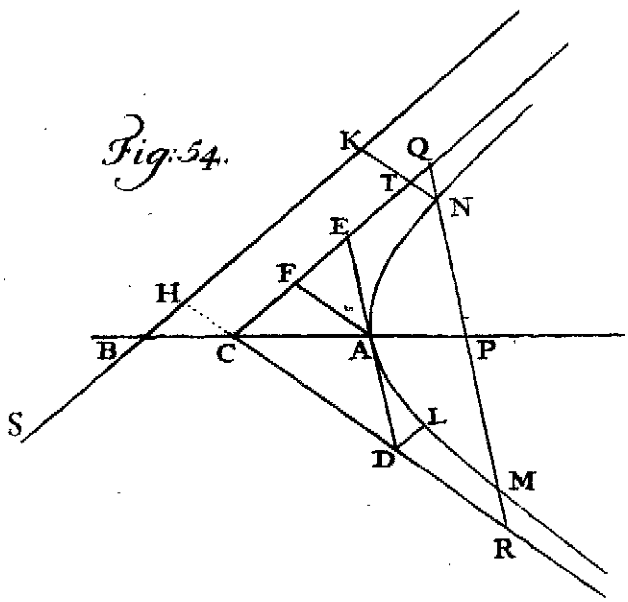


Fig: 54.

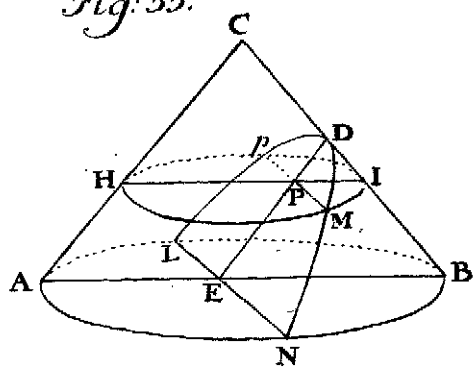


Fig: 55.

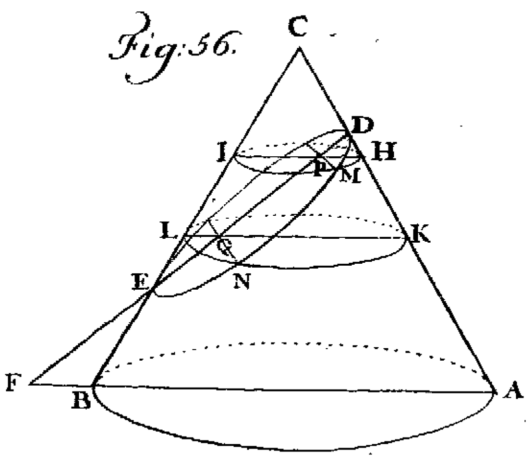


Fig: 56.

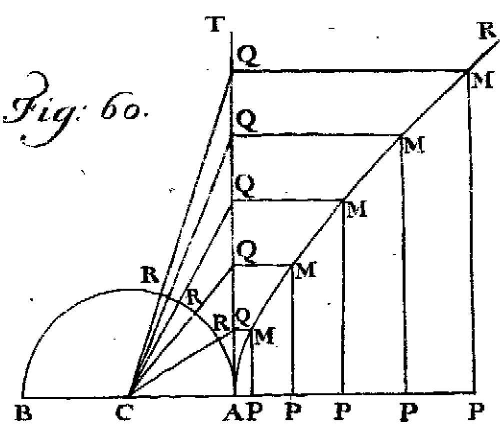


Fig: 60.

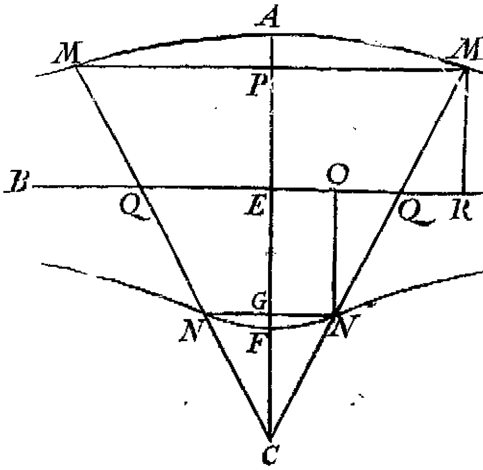


Fig: 61.

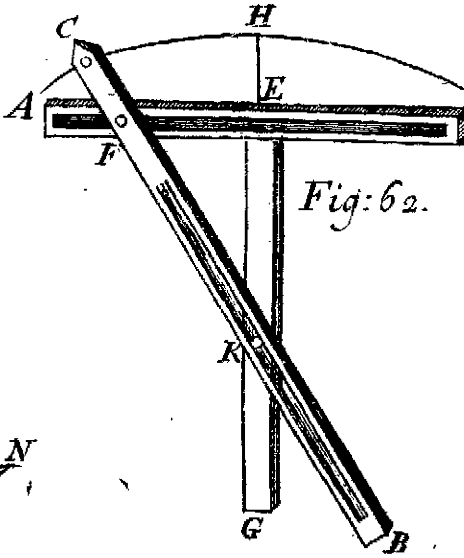
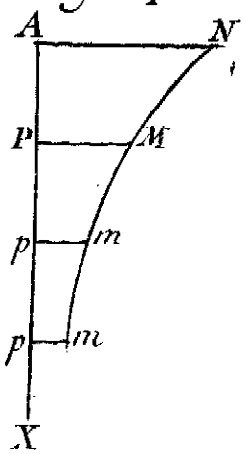


Fig: 62.

Fig: 64.



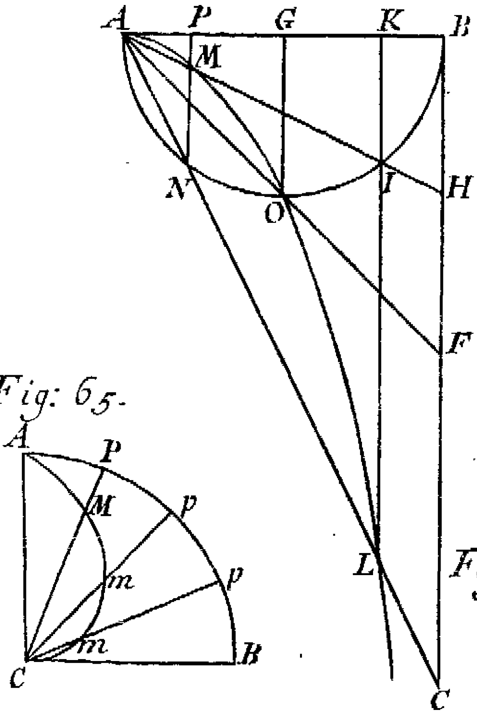


Fig: 63.

Fig: 65.

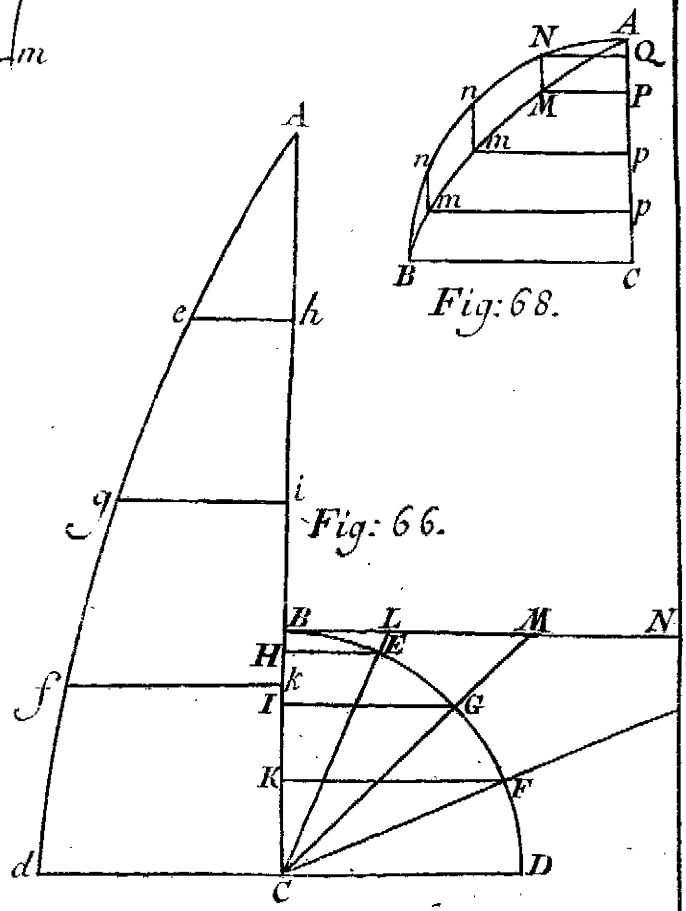


Fig: 68.

Fig: 66.

Fig: 67.

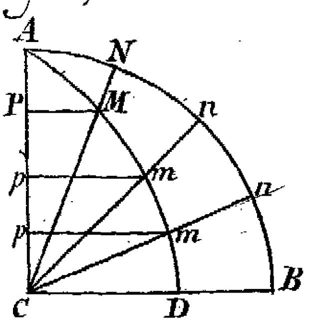


Fig. 69.

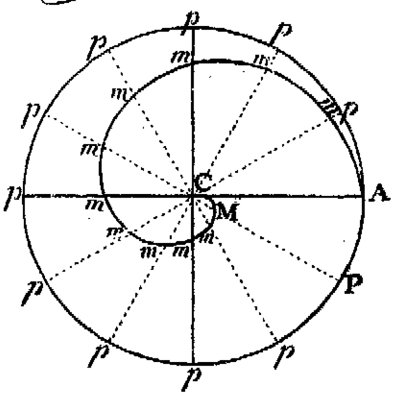


Fig. 70.

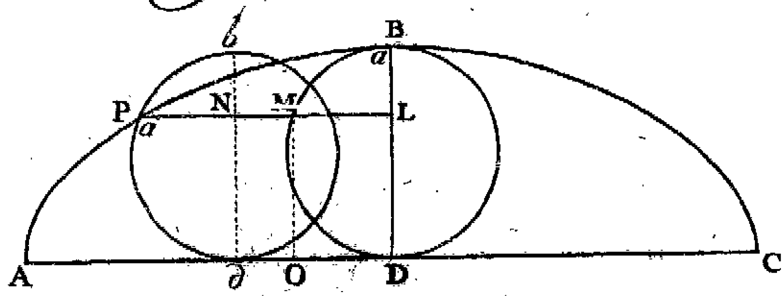


Fig. 71.

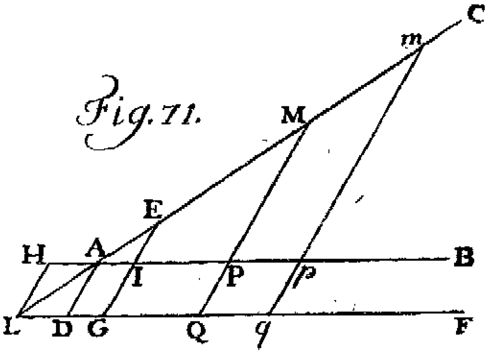


Fig. 72.

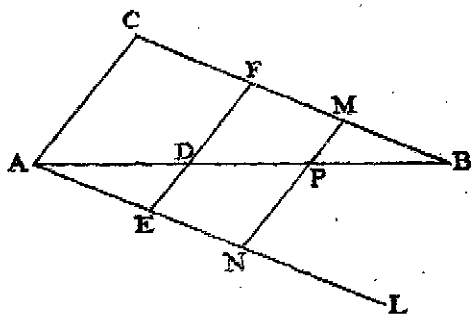


Fig. 73.

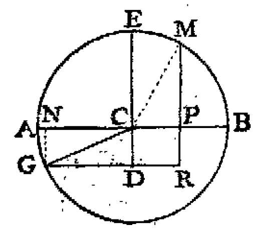


Fig. 74.

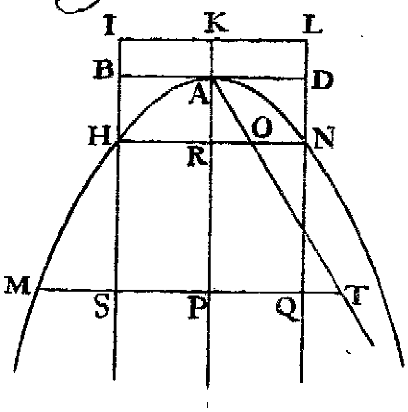


Fig. 75.

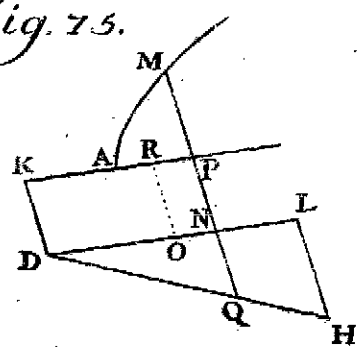


Fig. 76.

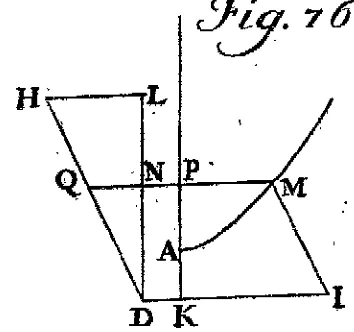


Fig. 77.

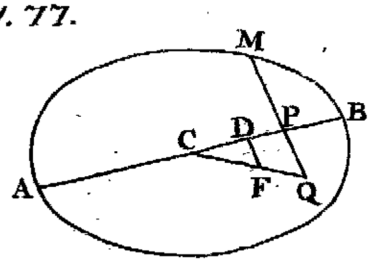


Fig. 78.

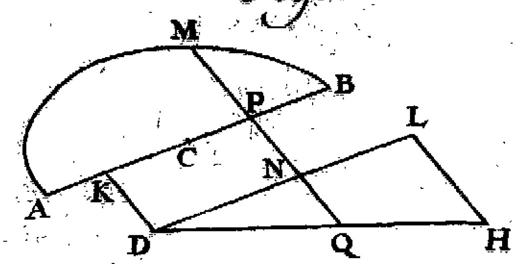


Fig. Algebr. Tab. VIII

Fig. 79.

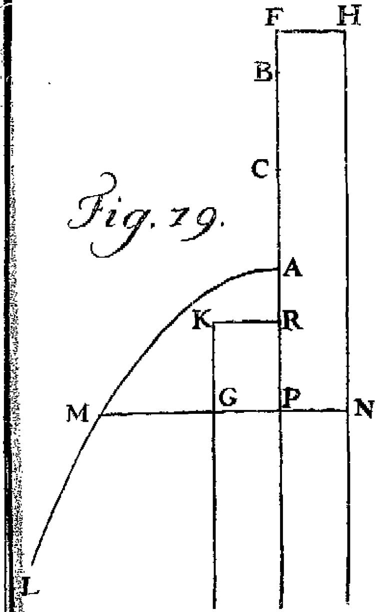


Fig. 80.

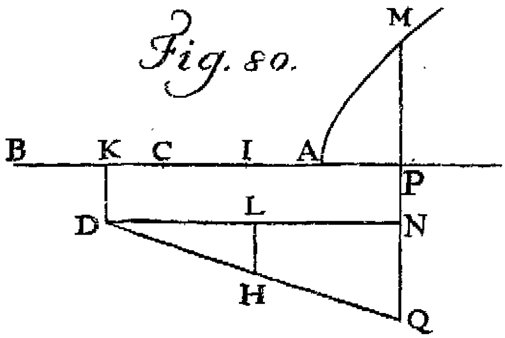


Fig. 81.

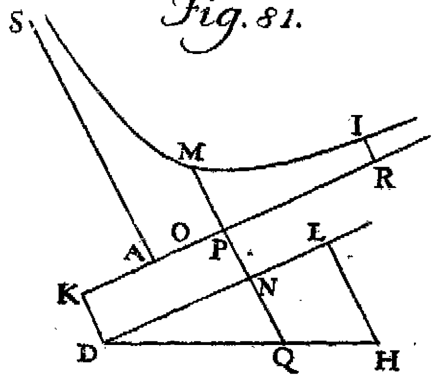


Fig. 82.

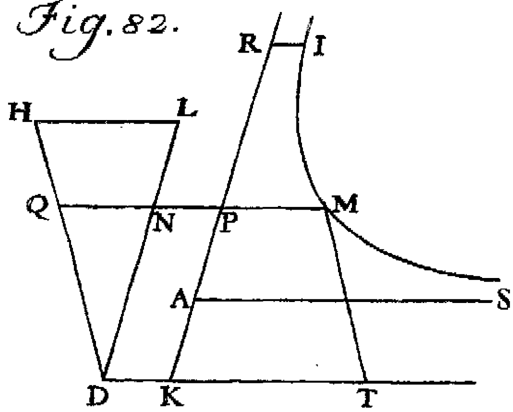


Fig. 83.

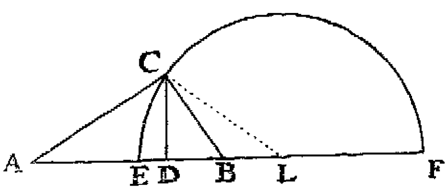


Fig. 84.

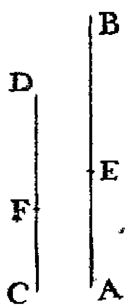


Fig. 85.

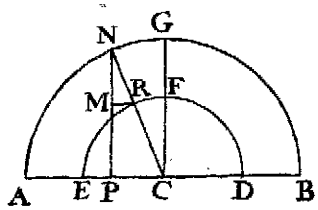


Fig. 86.

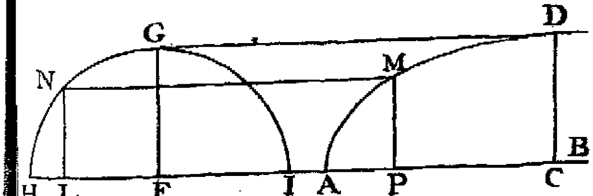


Fig. 87.

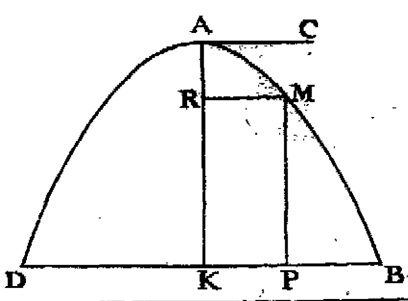


Fig. 88.

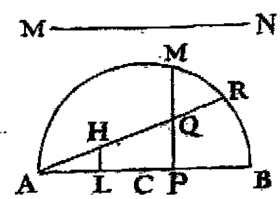


Fig: 89.

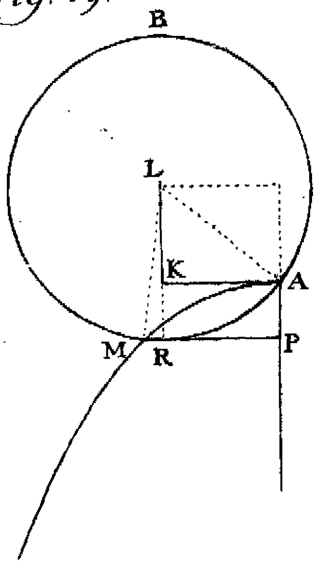


Fig: 90.

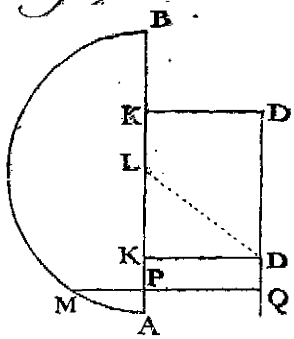


Fig: 91.

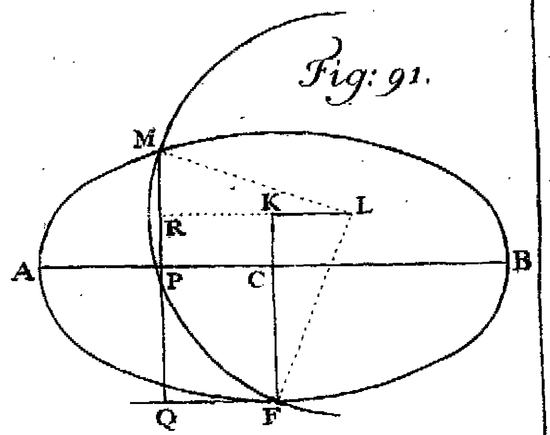


Fig: 92.

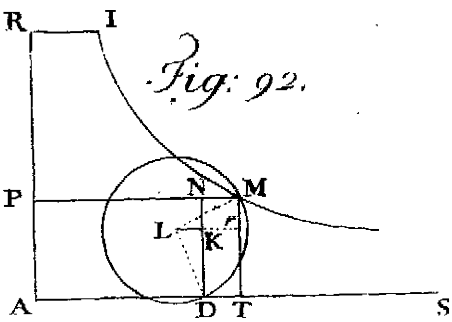


Fig: 93.

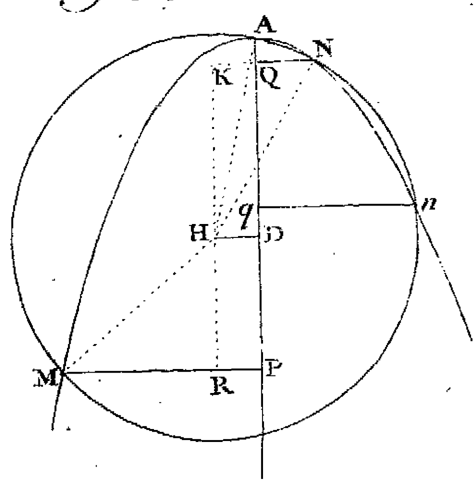


Fig: 94.

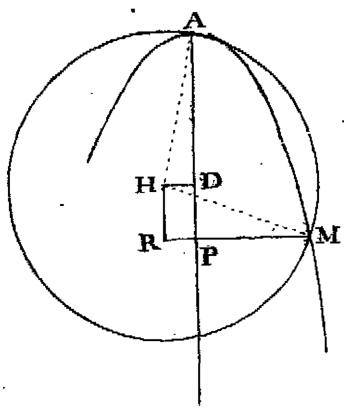


Fig: 95.

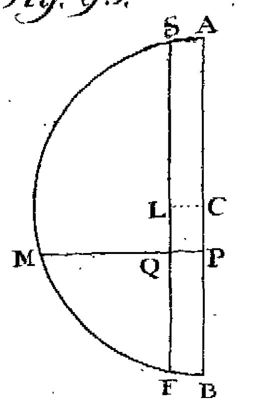


Fig: 96.

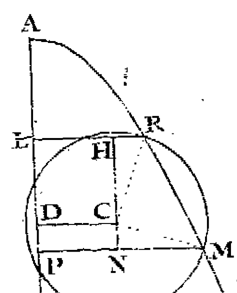


Fig: 97.

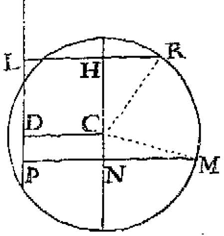


Fig: 98.

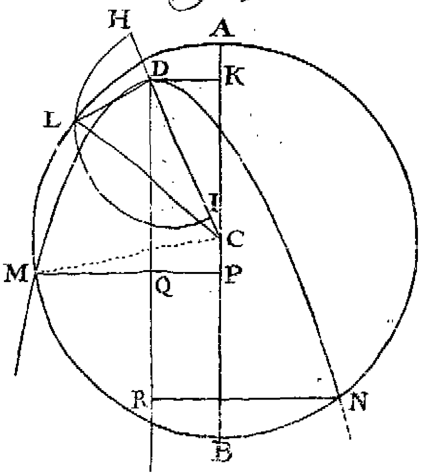


Fig: 99.

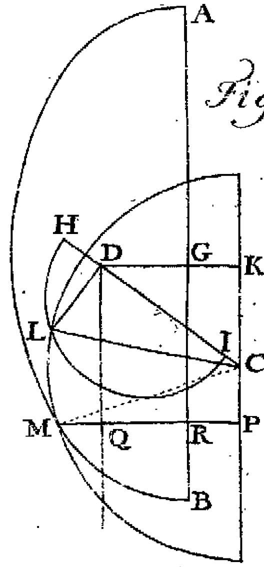


Fig: 100.

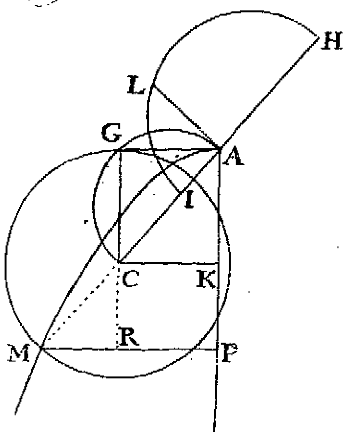


Fig: 101.

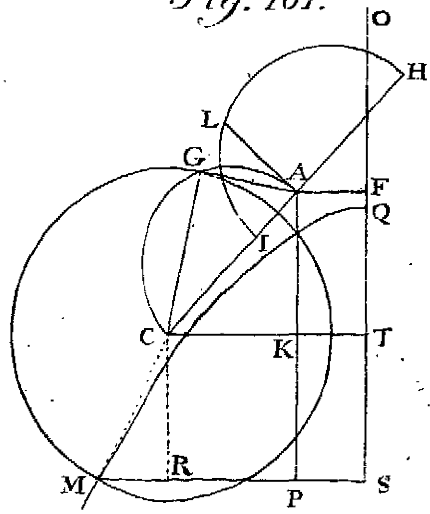


Fig: 102.

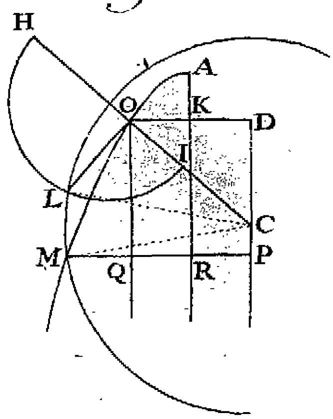


Fig: 103.

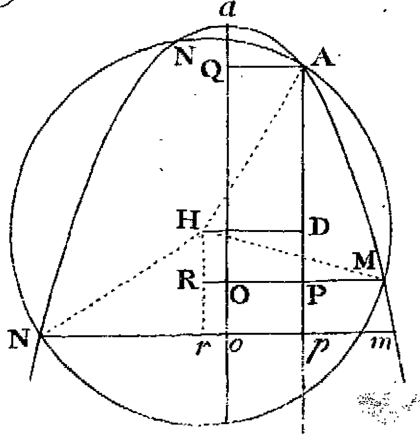


Fig: 104.

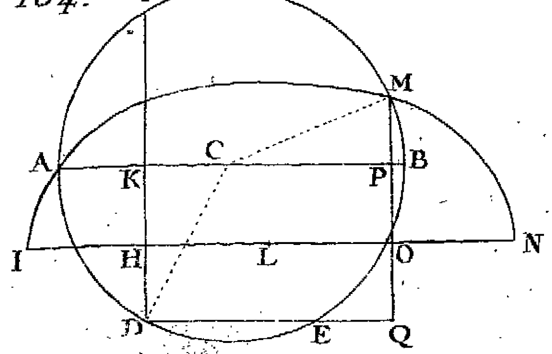


Fig: 105.

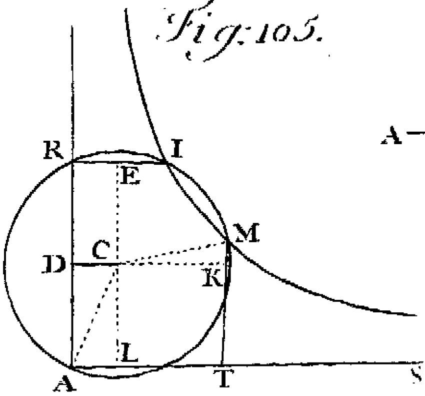


Fig: 106.

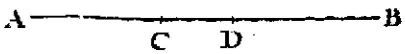


Fig: 107.

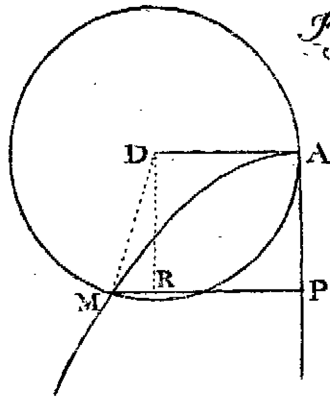


Fig: 108.

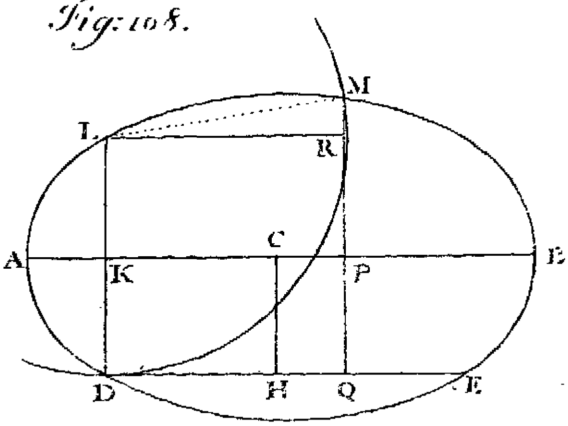


Fig: 109.

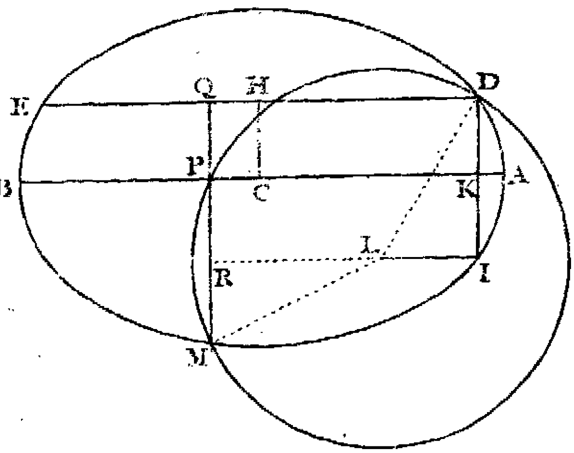


Fig: 110.

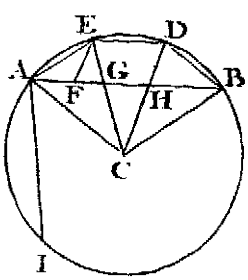


Fig: 111.

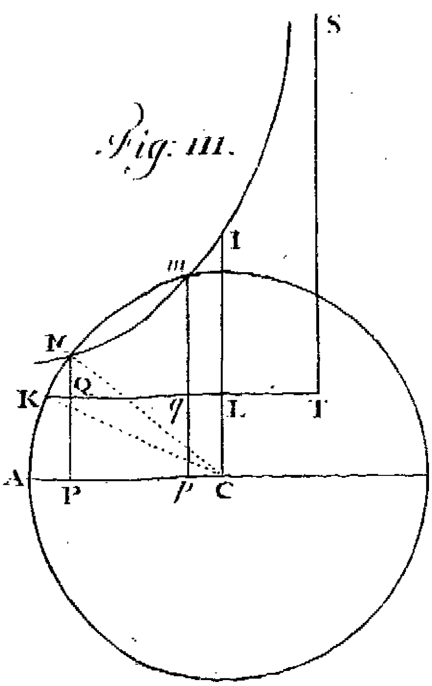


Fig: 112.

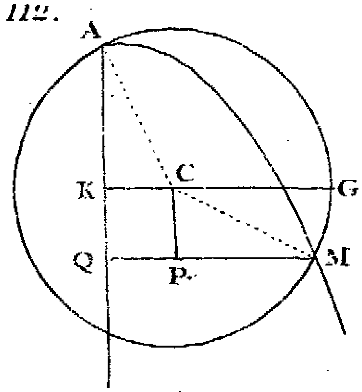


Fig. 113.

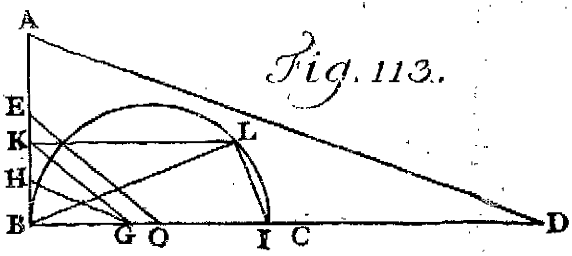


Fig. 115.

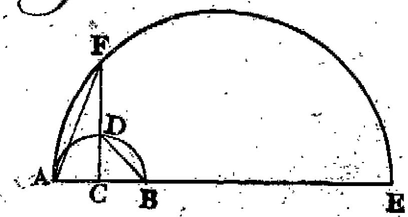


Fig. 114.

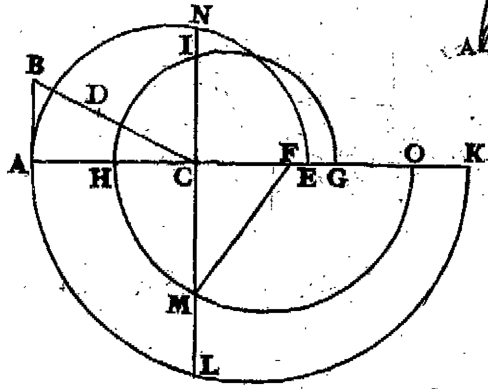


Fig. 116.

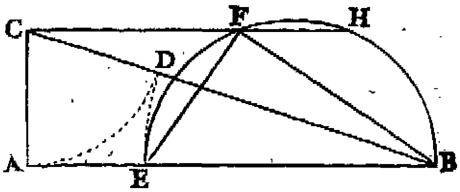


Fig. 118.

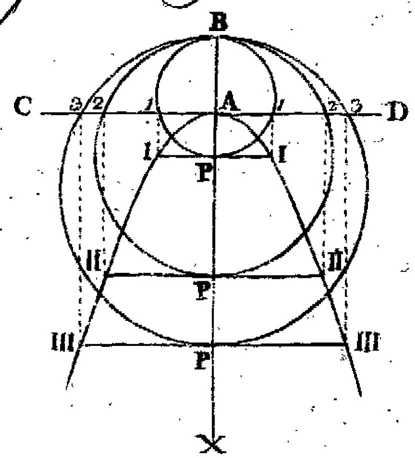


Fig. 117.

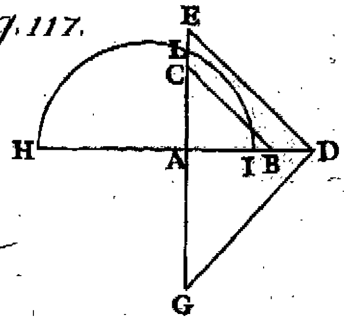


Fig. 119.

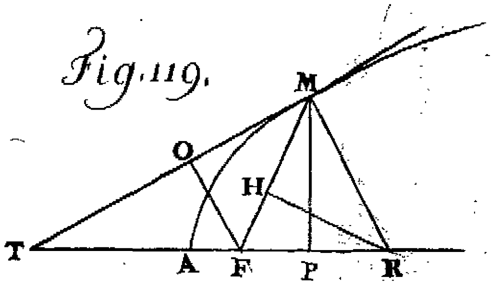


Fig. 121.

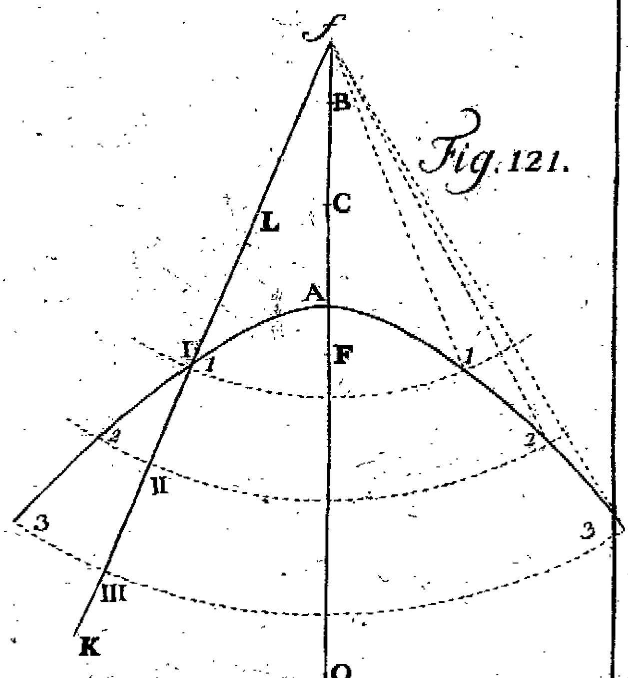


Fig. 120.

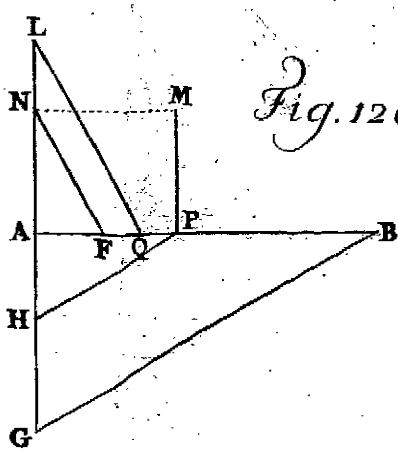


Fig. 122.

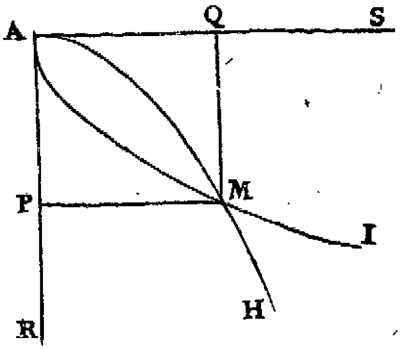


Fig. 123.

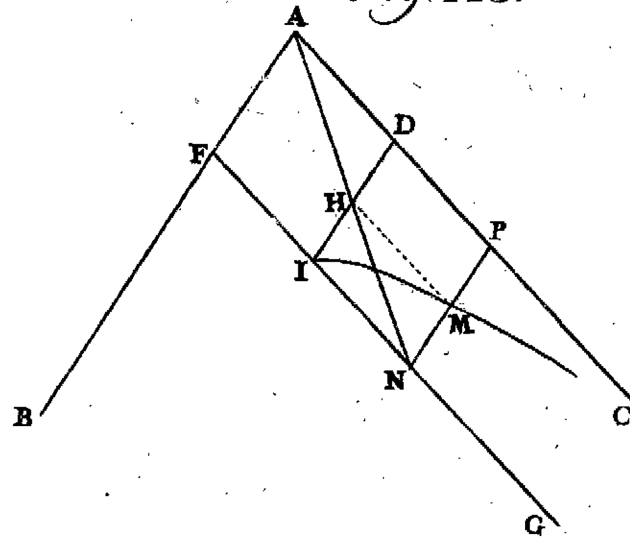


Fig. 124.

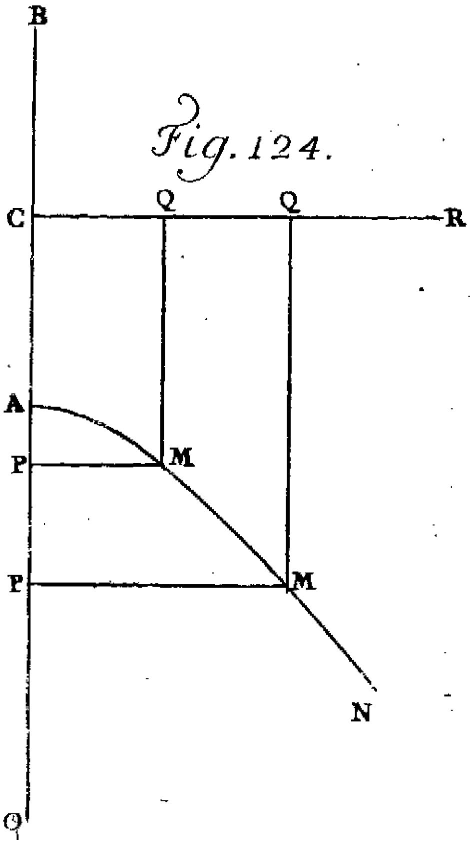


Fig. 125.

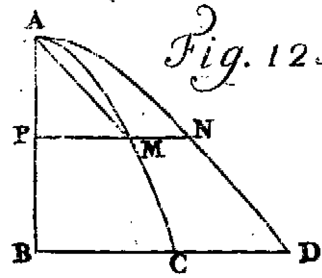


Fig 126

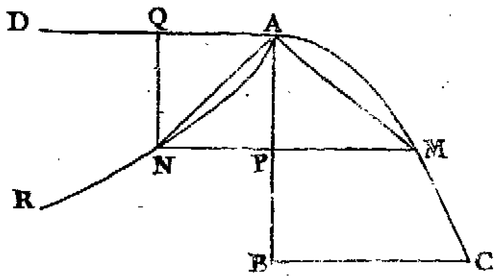
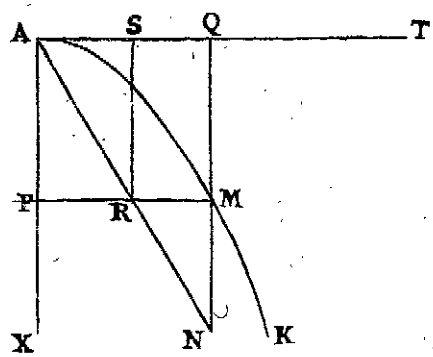


Fig. 127.



$$\begin{array}{r}
x - 2 = 0 \\
x + 3 = 0 \\
\hline
+ 3x - 6 \\
x^2 - 2x \quad\quad \\
\hline
x^2 + x - 6 = 0 \\
x - 4 = 0 \\
\hline
- 4x^2 - 4x + 24 \\
x^3 + x^2 - 6x \quad\quad\quad \\
\hline
x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x - a = 0 \\
x + b = 0 \\
\hline
x^2 + bx - ab = 0 \\
- ax \quad\quad \\
\hline
x - c = 0 \\
\hline
x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\
+ bx^2 + acx \quad \\
- ax^2 - abx \quad
\end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad superiores gradus evehi possunt) sequentia observabit.

1. *Quantitatem cognitam secundi termini esse summam radicum, sed signo contrario affectarum; quantitatem cognitam tertii esse summam productorum ex singulis binis; quantitatem cognitam quarti esse summam productorum ex singulis ternis &c terminum denique ultimum esse factum omnium radicum.* Ex gr. in æquatione quadratica termini secundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero sunt $+ 2$ & $- 3$. Similiter in cubica quantitas cognita secundi termini $- 3 = + 3 - 4 - 2$. Radices sunt $- 3$, $+ 4$ & $+ 2$. Quantitas cognita termini tertii in æquatione cubica $- 10 = - 6 + 8 - 12$. Radices sunt, $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$. In eadem terminus ultimus $+ 24 = 2 . 3 . 4$.
2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimensiones, seu exponens unitates.* Ex. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimensiones: radices duæ sunt $+ 2$ & $- 3$. In æquatione cubica x^3 tres habet dimensiones, radices tres sunt $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$.
3. *In qualibet æquatione tot esse radices veras, quot sunt signorum permutationes; tot esse falsas, quot eorundem successiones.* Ex. gr. in æquatione quadratica $+ x^2 + x - 6 = 0$, una est signorum successio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+ 2$, alteram falsam $- 3$. In æquatione cubica $+ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ sunt signorum permutationes $+ -$ & $- +$; una successio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+ 2$ & $+ 4$, unam falsam $- 3$.

SCHOLION I.

330. *Theoremata duo priora ex ipsa æquationum genesi haud difficulter demonstrantur: tertium vero, quod* HARRIOTUS *per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit.*

SCHOLION II.

331. *Ceterum non est, quod miremur, unam æquationem multas habere posse radices. Unius enim ejusdemque Problematis varii esse possunt casus & in singulis casibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis supra habuimus (§. 269, 262). Quoniam tamen casus quidam interdum impossibiles sunt; radices quoque impossibiles esse debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falsas & falsæ in veras, si signa terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falsam; sed si scribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ sunt signorum successiones $+ +$ & $- -$, una vero permutatio $+ -$; adeoque æquatio duas radices falsas, veram unam habet.

PROBLEMA CLVI.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda est æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

Fiat $x + 3 = y$

erit $x = y - 3$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 &= -6y^2 + 36y - 54 \\ +13x &= \quad +13y - 39 \\ -10 &= \quad -10 \\ \hline 0 &= y^3 - 15y^2 + 76y - 130 \end{aligned}$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

Fiat $y - 2 = x$

erit $y = x + 2$

$$y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ -15y^2 &= -15x^2 - 60x - 60 \\ +76y &= \quad +76x + 152 \\ -130 &= \quad -130 \\ \hline 0 &= x^3 - 9x^2 + 28x - 30 \end{aligned}$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

COROLLARIUM I.

334. Quodsi radicem augeas quantitate radice falsa maxima majore, radices falsæ evadunt veræ; & contra si radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falsæ. Si enim $y = -4$, & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra si $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falsas mutentur.

COROLLARIUM II.

335. Dum radices veræ augentur, falsæ minuuntur. Nam si $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $= 4 - 5 = -1$. Similiter si fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $= -5 - 2 = -7$.

PROBLEMA CLVII.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit ex. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

Fiat $ax = y$

erit $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 : a^3 \\ +px^2 &= +py^2 : a^2 \\ +qx &= +qy : a \\ -r &= -r \end{aligned}$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$$

$$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$!

COROLLARIUM I.

337. Hinc manifestum est, æquationem datam tantum multiplicari debere per progressionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas per quam radix multiplicari jubetur. Sit ex. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$\begin{array}{ccccc} x^4 + & 4x^3 - & 19x^2 - & 106x - & 120 = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline y^4 + & 8y^3 - & 76y^2 - & 848y - & 1920 = 0 \end{array}$$

En

En æquationem, in qua $y = 2x$!

Similiter sit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$\begin{array}{l} x^3 * - 3x + 1 = 0 \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline y^3 * - 27y + 27 = 0 \end{array}$$

En æquationem, in qua $y = 3x$!

SCHOLION.

338. *Stellula repleri solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA CLVIII.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

Fiat $x : a = y$

erit $x = ay$

$$x^2 = a^2y^2$$
$$x^3 = a^3y^3$$
$$-px^2 = -a^2py^2$$
$$+qx = +aqy$$
$$-r = -r$$
$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$
$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a$!

COROLLARIUM.

340. Apparet adeo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit ex. gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$\begin{array}{l} x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \\ \hline y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$\begin{array}{l} x^3 * - 36x - 54 = 0 \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline y^3 * - 4y - 2 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA CLIX.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e. gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit $x = y - 1$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = \quad -23y + 23$$
$$-70 = \quad -70$$
$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

342. *Idem Problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices veræ in falsas mutentur (§. 334) consultius est, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA CLX.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2.

Fiat

Fiat $x + t = y$

erit $x = y - t$

$x^2 = y^2 - 2ty + t^2$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3 \\ \mp px^2 &= \mp py^2 \pm 2pty \mp pt^2 \\ - qx &= \quad - qy + qt \\ + r &= \quad + r \end{aligned}$$

Ut secundus terminus tollatur, si fuerit $-px^2$ fieri debet,

$$-3t - p = 0$$

Unde erit $-3t = p$

$$t = -\tfrac{1}{3}p$$

Quodsi fuerit $+px^2$, erit

$$-3t + p = 0$$

$$-3t = -p$$

$$t = +\tfrac{1}{3}p$$

Et in genere, si fuerit $x^m \mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$, erit

$$x^m = y^m - mty^{m-1} \text{ \&c.}$$
$$\mp px^{m-1} = \mp py^{m-1} \text{ \&c.}$$

consequenter in casu primo

$$-mt - p = 0$$

$$-mt = p$$

$$t = -p : m$$

in casu autem altero

$$-mt + p = 0$$

$$-mt = -p$$

$$t = p : m$$

Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secundi termini per exponentem primi divisa.

Sit ex. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus secundus terminus.

Fiat $x - 8 : 3 = y$

erit $x = y + 8 : 3$

$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 8y^2 + 64y : 3 + 512 : 27 \\ -8x^2 &= -8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9 \\ -x &= \quad - y - 8 : 3 \\ 8 &= \quad + 8 \end{aligned}$$

$$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8 : 3$.

COROLLARIUM I.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Si ex. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Fiat $x - 4 = y$

erit $x = y + 4$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 8y + 16 \\ -8x &= -8y - 32 \\ +15 &= \quad +15 \end{aligned}$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM II.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 * - px - r = 0$$
$$x^3 * + px - r = 0$$
$$x^3 * - px + r = 0$$

PRO-

PROBLEMA CLXI.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3 \\ -4x^2 &= -4y^2 + 8my - 4m^2 \\ +4x &= \qquad + 4y - 4m \\ -6 &= \qquad -6 \end{aligned}$$

Quoniam æquatio sinistra dextræ æqualis; si tertius terminus deficere debet, talis assumendus est valor ipsius m, ut sit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$

$$\frac{16}{9} \qquad \frac{16}{9}$$

$$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 2y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{8}{27} \\ -4x^2 &= -4y^2 - \tfrac{16}{3}y - \tfrac{16}{9} \\ +4x &= \qquad + 4y + \tfrac{8}{3} \\ -6 &= \qquad -6 \end{aligned}$$

$$y^3 - 2y^2 * - 130 : 27 = 0.$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque casibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA CLXII.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, si secundus deficiat.*

Pro quantitate incognita substituendus est terminus ultimus per y divisus.

Sit ex. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $-3x$. Operatio talis erit

$$x^3 = \frac{1}{y^3}$$

$$-3x = -\frac{3}{y}$$

$$+1 = +1$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PROBLEMA CLXIII.

349. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \tfrac{67}{3}y - \tfrac{880}{27} = 0$$

$$1 \quad 3 \qquad 9 \qquad 27$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$

$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA CLXIV.

350. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri potest per multiplicationem: interdum per divisionem radicis. Neutra tamen regula universalis est.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipsam; si vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis sub signo radicali tollendæ positæ, aut in genere per radicem ejusdem gradus, quæ tolli debet, sed ex quantitate sub signo radicali tollendæ posita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumstantiæ singulares aliud suadent.

Exempla.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$
$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = a\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$
$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Divisio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} \; * \; - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1. \quad \sqrt{3}. \quad 3. \quad 3\sqrt{3}$$
$$y^3 - 3y^2 \; * \; - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt{3}$

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$
$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\tfrac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2}$$
$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$

Quodsi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$
$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : \sqrt{2}$.

PROBLEMA CLXV.

351. *Invenire utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne; &, si quas habet, quænam eæ sint.*

Cum æquationis terminus ultimus sit factum omnium radicum (§. 329), resolvatur is in suos factores, & hi successive substituantur pro x in æquatione data: in quibus enim casibus numeri positivi & negativi se mutuo destruunt, in iis factor substitutus est valor ipsius x.

Sit ex. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ -6x &= -12 \\ +8 &= +8 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Est ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ -6x &= -24 \\ +8 &= +8 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Est ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 sunt 1, 3, 5.

Substituatur 1 pro x; erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ -3x^2 &= -3 \\ -13x &= -13 \\ +15 &= +15 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Est

Eſt ergo 1 una ex radicibus veris. Subſtituatur porro 3 pro x; erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \\ -3x^2 &= -27 \\ -13x &= -39 \\ +15 &= +15 \\ \hline 0 &= -24 \end{aligned}$$

Eſt ergo 3 nulla ex radicibus veris. Subſtituatur ergo -3 pro x.

$$\begin{aligned} x^3 &= -27 \\ -3x^2 &= -27 \\ -13x &= +39 \\ +15 &= +15 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Eſt itaque -3 radix falſa æquationis. Subſtituatur denique 5 pro x; erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 \\ -3x^2 &= -75 \\ -13x &= -65 \\ +15 &= +15 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Eſt ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compoſitæ ex multiplicatione ſimplicium oriantur (§. 329); ſi radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per ſimplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam diviſibilis ſit neceſſe eſt. Quare diviſio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3-3x^2-10x+24=0$. Factores termini ultimi ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes ſimplices conflantur $x-1=0$, $x+1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-4=0$, $x+4=0$; $x-6=0$, $x+6=0$; $x-8=0$, $x+8=0$; $x-12=0$, $x+12=0$. Diviſio fruſtra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falſa eſt, nec verarum una: ſuccedit autem diviſio per $x-2$.

$$\begin{array}{r|l} x-2) & x^3-3x^2-10x+24\ (x^2-x-12 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & -x^2-10x \\ & -x^2+2x \\ \hline & -12x+24 \\ & -12x+24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus ſit 12 in quotiente, 8 & 12 non ſunt in numero radicum. Diviſio æquationis quadraticæ $x^2-x-12=0$ per $x-3$ fruſtra tentatur; ſed per $x+3$ ſuccedit.

$$\begin{array}{r|l} x+3) & x^2-x-12\ (x-4 \\ & x^2+3x \\ \hline & -4x-12 \\ & -4x-12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 3 radix falſa æquationis &, ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter ſit $x^3-3x^2-13x+15=0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5; conſequenter diviſores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur diviſio per $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x-1) & x^3-3x^2-13x+15\ (x^2-2x-15 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -2x^2-13x \\ & -2x^2+2x \\ \hline & -15x+15 \\ & -15x+15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 1 radicum verarum una. Diviſio in æquatione quadratica per $x-3$ non ſuccedit: ſuccedit tamen per $x+3$.

$$\begin{array}{l|l} x+3) & x^2 - 2x - 15\ (x - 5 \\ & \underline{x^2 + 3x} \\ & \quad -5x - 15 \\ & \quad \underline{-5x - 15} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Est itaque 3 radix falsa, & ob $x-5 = 0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifestum est, Problema præsens hanc quoque admittere solutionem:

1. Numerus, quem radicem esse suspicamur, subducendus est ex coëfficiente secundi termini.
2. Residuum multiplicandum est per illum ipsum numerum, & factum ex coëfficiente termini tertii subtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini quarti subtrahatur, & ita porro.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -10x & +24 = 0 \\ & \underline{-2} & \underline{+2} & \underline{+24} \\ & -1 & -12 & 0 \\ -2 & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ & +2 & +24 & \end{array}$$

Quoniam o relinquitur, 2 est una radicum verarum.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & \underline{-1} & \underline{+2} & \underline{+15} \\ & -2 & -15 & 0 \\ -1 & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \\ & +2 & +15 & \end{array}$$

Est ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium investigatio molesta accidat, consultum est, ut vel æquationem propositam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus divisores pauciores habet, vel duos numeros investigemus, intra quos radices continentur: quem in finem sequentia subnectimus Problemata.*

PROBLEMA CLXVI.

354. *Æquationem propositam, in qua terminus ultimus plures admittit divisores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores divisores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$; vel $x=2$, vel $x=-2$; vel $x=3$, vel $x=-3$; vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. &, his valoribus successive substitutis, observetur, quo in casu summa relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda est, vel minuenda (§. 333).

Sit ex. gr. $x^3 - 3x^2 - 10x^2 + 24 = 0$

$$\begin{array}{lrcr} & \text{Fiat } x & = & 1 \\ \hline & \text{erit } x^3 & = & 1 \\ & -3x^2 & = & -3 \\ & -10x & = & -10 \\ & +24 & = & +24 \\ \hline & \text{Summa} & = & +12 \end{array}$$

Cum 12 pauciores divisores admittat quam 24;

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Fiat } x & = & y + 1 \\ & \text{erit } x^2 & = & y^2 + 2y + 1 \\ \hline & x^3 & = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ & -3x^2 & = & -3y^2 - 6y - 3 \\ & -10x & = & -10y - 10 \\ & +24 & = & +24 \\ \hline & & & y^3 \quad * \quad -13y + 22 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione est $y = x - 1$.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio* $y^3 * - 13y + 13 = 0$ *habet radicem falsam* -4. *Si enim hunc valorem pro* y *substituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur adeo* -3 *radix falsa æquationis propositæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; *prorsus ut supra* (§. 351).

PROBLEMA CLXVII.

356. *Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arithm.*).

$x < q : p$ (§. 182 *Arithm.*).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arithm.*).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246, 180 *Arith.*)

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 *Arithm.*).

$px \quad px$ add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arithm.*)

adeoque $(\sqrt{q} + p)\, x > q$ (§. 89 *Arith.*)

$x > q : (\sqrt{q} + p)$ (§. 182 *Arithm.*).

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q : p$ & major quam $q : (\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q positiva, erit

$px > q$

$x > q : p$

Sunt adeo limites æquationis p & $q : p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$

hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$

adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2 + q)}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + \sqrt{q}$; sed major quam $\sqrt{(p^2 + q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r : q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt adeo limites $r : q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3 + qx = r$

$qx < r$

$x < r : q$

Similiter $r > x^3$

$r^{1:3} > x$

$r^{2:3} > x^2$

$xr^{2:3} > x^3$

$xr^{2:3} + qx > x^3 + qx$

$> r$

$x > r : (r^{2:3} + q)$

Sunt adeo limites $r : q$, & $r : (r^{2:3} + q)$,

Sit $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

erit $x^3 - px^2 = r - qx$

Quodsi ergo $x > p$, erit quoque $r > qx$, consequenter $x < r : q$. Sed si $p > x$; erit $qx > r$, consequenter $x > r : q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r : q$.

Sit $x^3 - px^2 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = px^2 + qx$

$px^2 + qx > r$

$x^2 + qx : p > r : p$

$x^2 + qx : p + q^2 : 4p^2 > r : p + q^2 : 4p^2$

$x^2 + q : 2p > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)}$

$x > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)} - q : 2p$

Similiter $px^2 + qx > x^3$

$px + q > x^2$

$q > x^2 - px$

$q + \frac{1}{4}p^2 > x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} > x - \frac{1}{2}p$

$x < \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$

Sunt adeo limites $\sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)} - q : 2p$ & $\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$.

Sit $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$

erit $x^4 - qx^2 = rx + s$

Ergo $x^4 > qx^2$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

Similiter $x^4 - rx = qx^2 + s$

ergo $x^3 > r$

$x > r^{1:3}$

Tandem $x^4 - s = qx^2 + rx$

Ergo $x^4 > s$

$x > s^{1:4}$

$x^3 > s^{3:4}$

$x^3 s^{1:4} > s$

Similiter $x > q^{1:2}$ $\quad x > r^{1:3}$

$xq^{1:2} > q$ $\quad x^2 > r^{2:3}$

$x^3 q^{1:2} > qx^2$ $\quad x^2 r^{1:3} > r$

$x^3 r^{1:3} > rx$

Ergo ob $x^4 = qx^2 + rx + s$

$x^4 < x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$

$x < q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ vel $s^{1:4}$, & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

SCHOLION.

357. *In æquatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *factores termini ultimi sunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3} + \frac{25}{9})} - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3} = \frac{98-50}{30} = \frac{48}{30} = 1\frac{3}{5}$ *fere, &* $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor quam* $1\frac{3}{5}$ *debet tamen esse minor quam* 5. *Unde apparet divisionem tentandam esse per* $x - 2$.

Quo-

Quo facto reperitur $x = 2$ *& æquatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$, *& falsa* $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (§. 143).

PROBLEMA CLXVIII.

358. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducuntur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$
$px = py + pz$

Quamobrem in casu primo
$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$

Fiat $3y^2z + 3z^2y = +py + pz$ $\quad (y+z)$

erit $3yz = p$ $\quad 3y$

$z = p : 3y$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$
hoc est $y^3 + p^3 : 27y^3 = q^3$

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$
$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$
$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$
$$\left.\begin{matrix} y^3 - \tfrac{1}{2}q \\ \tfrac{1}{2}q - y^3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y = (\tfrac{1}{2}q \pm)\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$$

Est nempe $y = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$ & $z = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y + z = x =$
$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in casu tertio $x =$
$\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$
$+ \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ex. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6$, $q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; consequenter $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{392} = \sqrt{2.196} = 14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = 20 \pm 14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = 2 \pm \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3$, $q = 36$, adeoque $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}q^2 = 324$, $\frac{1}{3}p = 1$, $\frac{1}{27}p^3 = 1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 325 = \frac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 10\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 18 \pm \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = -2 \pm \sqrt{2}$, adeoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20 \pm \sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 Arithm.): *ut tamen appareat quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes com-*

commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica (§. 358) CARDANI *regulas vocat* CARTESIUS (*a*), *quia eas primus publicavit: ipse enim* CARDANUS *inventionis laudem* Scipioni FERREO *tribuit.*

PROBLEMA CLXIX.

360. *Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.*

Sit ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x+\sqrt{y}$, erit $x^2+2x\sqrt{y}+y=3+\sqrt{8}$.

Fiat $x^2+y=3$ $\qquad 2x\sqrt{y}=\sqrt{8}$

erit $x^4+2x^2y+y^2=9$ $\qquad 4x^2y=8$

$$4x^2y=8$$

$$x^4-2x^2y+y^2=1$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=1$$

$$x^2=y+1$$

Est vero etiam, ob $x^2+y=3$, $x^2=3-y$

Quare $3-y=y+1$

$$3=2y+1$$

$$2=2y$$

$$1=y$$

Ergo $x^2=y+1=2$

$$x=\sqrt{2}$$

Est ergo $x+\sqrt{y}=\sqrt{(3+\sqrt{8})}=1+\sqrt{2}$.

Sit similiter in Problemate præcedente ex $20+\sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x+\sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=20+\sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{392}$

erit $9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$

Porro $x^3+3xy=20$

$$\begin{array}{llll} x^6+6x^4y & +9x^2y^2 & & =400 \\ \phantom{x^6+{}}9x^4y & +6x^2y^2 & +y^3 & =392 \text{ subt.} \\ \hline x^6-3x^4y & +3x^2y^2 & -y^3 & =8 \end{array}$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=2$$

$$x^2-2=y$$

Substituto valore ipsius y in æquatione:

$$x^3+3xy=20$$

erit $x^3+3x^3-6x=20$

hoc est $4x^3-6x=20$

$$x^3 * -\tfrac{6}{4}x=5$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (§. 337).$$

$$z^3 * -6z=40$$

Si pro z substituatur 4; erit $64-24=40$. Est ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351); consequenter $x=z:2=2$. Quare cum sit

$$x^2-2=y$$

erit $4-2=y$

$$2=y$$

Est ergo radix cubica ex $20+\sqrt{392}$ extracta $2+\sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PROBLEMA CLXX.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4+qx^2+rx+s=0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum $+$, ut omnes casus repræ-

(*a*) *Geom.* Lib. II. p. m. 93, & 94.

repræſententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); aſſumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in ſe invicem ductæ generabunt

$$\begin{array}{l} x^4 * + zx^2 + yvx + vz = 0. \\ \quad + vx^2 - yzx \\ \quad - y^2x^2 \end{array}$$

Quoniam hæc æquatio eadem ſupponitur cum propoſita; erit

$$\begin{array}{ll} z + v - y^2 = q & yv - yz = r \quad vz = s \\ q + y^2 = z + v & v - z = r : y \\ q + y^2 - v = z & v - q - y^2 + v = r : y \\ & 2v = q + y^2 + r : y \\ & v = (q + y^2 + r : y) : 2 \end{array}$$

Subſtituatur valor ipſius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$$q + y^2 - (q + y^2 + r : y) : 2 = z$$

hoc eſt $z = (2q + 2y^2 - q - y^2 - r : y) : 2$
$= (q + y^2 - r : y) : 2$.

Ergo $vz = \left(\frac{q + y^2 + r:y}{2}\right)\left(\frac{q + y^2 - r:y}{2}\right)$

$$= \frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2 : y^2}{4} = s$$

$$\begin{array}{r} \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, 4y^2 \\ q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2 = 4sy^2 \\ \hline y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 = 0 \\ - 4sy^2 \end{array}$$

Fiat $y^2 = t$, erit

$$\begin{array}{l} t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0. \\ \qquad\quad - 4st \end{array}$$

PROBLEMA CLXXI.

362. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, ex. gr. $x^4 = a^2 bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$; & hinc denuo educatur radix quadrata: reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{\sqrt{2}}$.

II. Si æquatio fuerit affecta,

1. Tollatur ſecundus terminus, ſi adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data, ex æquationibus quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propoſitæ erui poſſunt.

Ex. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $s = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, ſit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$:
$\qquad\qquad - 4st$
ſi in ea ſubſtituantur valores quantitatum q, r, s, prodibit

$$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$$

Hæc æquatio cum ſit per $t - 100$ diviſibilis (§. 351); erit $t = 100$, adeoque in Problemate præcedente $y^2 = 100$ & hinc $y = 10$.

Hoc valore ſubſtituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r : y}{2} = z$; reperitur z

$$= \frac{-86 + 100 - 600:10}{2} = -\frac{46}{2} = -23.$$

Eodem valore ipſius y ſubſtituto in æquatione $v = \left(\frac{q + y^2 + r:y}{2}\right)$; invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600:10}{2} = \frac{74}{2}$
$= 37$. Tandem valores quantitatum y, z

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I. Vu & v

& v substituendi sunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus:

I. $x^3 + 10x - 23 = 0.$

$$x^2 + 10x = 23$$
$$\ 25 \quad 25$$
$$x^2 + 10x + 25 = 48$$
$$x + 5 = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$
$$x = \pm 4\sqrt{3} - 5$$

II. $x^2 - 10x^2 + 37 = 0$

$$x^2 - 10x^2 = -37$$
$$\ 25 \quad 25$$
$$x^2 - 10x + 25 = -12$$
$$\left.\begin{matrix} x - 5 = \\ 5 - x = \end{matrix}\right\} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$
$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt ergo radices æquationis propositæ $4\sqrt{3}-5$, $-4\sqrt{3}-5$, $5+2\sqrt{-3}$ & $5-2\sqrt{-3}$

PROBLEMA CLXXII.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices surdæ extrahi possint (§. 143), nec difficile sit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, universalis est, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, consultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> -\sqrt{56}$, sive $x < 10 +$ & $> 7 +$ (§. 354): ponamus radicem esse $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus assumtus 8 radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2 = 64 + 16y + y^2$$
$$-5x = -40 - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decrescunt, & radix tantum desideratur prope vera, y^2 abjiciatur: quo facto, erit

$$-7 + 11y = 0$$
$$y = \tfrac{7}{11} = \tfrac{6}{10} \text{ fere}, = 0.6$$

Ergo $x = 8 + 0.6 = 8.6$

Ponamus $x = 8.6 + y$: erit

$$x^2 = \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + y^2$$
$$-5x = -\tfrac{430}{10} - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$\tfrac{7396}{100} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0$$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum semel hic exhibere placuit)

$$7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$
$$-0.04 + 12.20y = 0$$
$$12.20y = 0.04$$
$$y = 004 : 1220 = 0.0032$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032.$

Ponamus $x = 8.6032 + y$, erit

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -31.00000000$$
$$-0.00094976 + 12.20640000y = 0$$
$$y = 0.00094976 : 12.20640000$$
$$= 0.000077808.$$

Ergo

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.000077808 = 8.603277808$.

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ [numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§. 354)]: quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3, omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 125 + 75y \ldots \\ +2x^2 = & 50 + 20y \ldots \\ -23x = & -115 - 23y \\ -70 = & -70 \\ \hline & -10 + 72y = 0 \\ \hline & y = \tfrac{10}{72} = 0.1 \end{array}$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 132.651 + 78.030y \ldots \\ +2x^2 = & 52.020 + 20.400y \\ -23x = & -117.300 - 23.000y \\ -70 = & -70.000 \\ \hline & -2.629 + 75.430y = 0 \\ \hline & 75.430y = 2.629 \\ \hline & y = 2629 : 75430 = 0.0348 \end{array}$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$\begin{array}{rlll} x^m = & t^m & + mt^{m-1}y & + \frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} y^2 \ldots \\ + ax^{m-1} = & at^{m-1} & + (m-1)\, at^{m-2}y & + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} y^2 \ldots \\ + bx^{m-2} = & bt^{m-2} & + (m-2)\, bt^{m-3}y & + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} y^2 \ldots \\ + cx^{m-3} = & ct^{m-3} & + (m-3)\, ct^{m-4}y & + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5} y^2 \ldots \\ \&c. & \&c. & & \\ + f = & + f & & \end{array}$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$

$mt^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4}$ &c. $= q$

$\frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5}$ &c. $= r$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$p + qy = 0$$

erit $qy = -p$

$$y = -p : q$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$ $(q+ry$

$y=-p:(q+ry)$

Sed $y=-p:q$, per regulam priorem.

Ergo $y=-p:(q-\frac{pr}{q})=-pq:(q^2-pr)$.

Vel quia $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$

$qy:r+y^2=-p:r$

$q^2:4r^2+qy:r+y^2=q^2:4r^2-p:r$

$q:2r+y=\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-pr)}:r$

Habetur adeo x, si valor ipsius y adjiciatur valori t, signo vel positivo, vel privativo, prout repertus fuerit.

SCHOLION.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus* HALLEIUS (*a*), *& easdem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestus esse videatur; non inconsultum tamen judicamus ut unum apponamus.*

Sit $x^3+\underset{a}{438}x^2-\underset{b}{7825}x-\underset{f}{98508430}=0$.

Fiat $x=t+y=300+y$; erit

$$\begin{aligned}
x^3 &= 27000000+270000y+900y^2+y^3\\
+ax^2 &= 39420000+262800y+438y^2\\
-bx &= -2347500-7825y\\
-f &= -98508430\\
\hline
0 &= -34435930+524975y+1338y^2
\end{aligned}$$

Est itaque $p=-34435930$, adeoque $-p=34435930$, $q=524975$, $r=1338$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=34435930:(524975+46075274340:524975)=34435930:612741=56$, consequenter $x=300+56=356$.

Fiat jam $x=356+y$; erit

$$\begin{aligned}
x^3 &= 45118016+380208y+1068y^2+y^3\\
+ax^2 &= 55510368+311856y+438y^2\\
-bx &= -2785700-7825y\\
-f &= -98508430\\
\hline
0 &= -665746+684239y+1506y^2.
\end{aligned}$$

Est itaque $p=-665746$, $q=684239$, $r=1506$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=665746:(684239+1002613476:684239)=665746{0}:685704=0.9708$, consequenter $x=356+0.9708=356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Sit $x^m-f=0$ & fiat $x=t+y$; erit $x^m-f=t^m+mt^{m-1}y+\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde si fiat $t^m+mt^{m-1}y-f=0$, erit $y=(f-t^m):mt^{m-1}$, quæ est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $t^m=p$, $mt^{m-1}=q$, $\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}=r$; reperietur ut in problemate $y=-p:(q-pr:q)$. Unde apparet eandem regulam inservire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA CLXXIII.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5$ &c.

Fiat $x=hv+iv^2+kv^3+lv^4+mv^5+nv^6$ &c. erit (§. 95),

$$\begin{aligned}
x^2 &= h^2v^2+2hiv^3+i^2v^4+2ikv^5+k^2v^6\\
&\qquad +2hkv^4+2hlv^5+2ilv^6\\
&\qquad +2hmv^6\\
x^3 &= h^3v^3+3h^2iv^4+3hi^2v^5+i^3v^6\\
&\qquad +3h^2kv^5+3h^2lv^6\\
&\qquad +6hikv^6\\
x^4 &= h^4v^4+4h^3iv^5+6h^2i^2v^6\\
&\qquad +4h^3kv^6
\end{aligned}$$

(*a*) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

$x^5 = b^5v^5 + 5b^4iv^6$

$x^6 = b^6v^6$

Substituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -v + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-v =$	$-v$						
$+ax =$	$+ahv$	$+aiv^2$	$+akv^3$	$+alv^4$	$+amv^5$	$+anv^6$	&c.
$+bx^2 =$		$+bh^2$..	$+2bhi$..	$+bi^2$..	$+2bik$..	$+bk^2$..	
				$+2bhk$..	$+2bhl$..	$+2bil$..	
						$+2bhm$..	
$+cx^3 =$			$+ch^3$..	$+3ch^2i$..	$+3chi^2$..	$+ci^3$..	
					$+3ch^2k$..	$+3ch^2l$..	
						$+6chik$..	
$+dx^4 =$				$+dh^4$..	$+4dh^3i$..	$+6dh^2i^2$..	
						$+4dh^3k$..	
$+ex^5 =$					$+eh^5$..	$+5eh^4i$..	
$+fx^6 =$						$+fh^6$..	

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v subducitur ex altero æquationis membro ipsi æquali; omnes terminos v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6 &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coëfficiens nihilo æqualis, erit

$$ah - 1 = 0, \quad h = 1:a \qquad ai + bh^2 = 0, \quad i = -bh^2:a, \quad i = -b:a^3$$

$$ak + 2bhi + ch^3 = 0$$
$$k = (-2bhi - ch^3):a$$
$$k = (+2b^2 - ac):a^5$$

$$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$$
$$l = (-bi^2 - 2bhk - 3ch^2i - dh^4):a$$

consequenter ob

$$bi^2 = b^3:a^6, \quad 2bhk = (4b^3 - 2abc):a^6$$
$$3ch^2i = -3bc:a^5 \quad dh^4 = d:a^4$$
$$l = -b^3:a^7 - 4b^3:a^7 + 2abc:a^7 + 3bc:a^6 - d:a^5$$
$$l = (5abc - 5b^3 - a^2d):a^7$$

$$am + 2bik + 2bhl + 3chi^2 + 3ch^2k + 4dh^3i + eh^5 = 0$$

Ergo ob

$$2bik = (-4b^4 + 2ab^2c):a^8, \quad 4dh^3i = -4bd:a^6$$
$$2bhl = (10ab^2c - 10b^4 - 2a^2bd):a^8 \quad eh^5 = e:a^5$$
$$3chi^2 = 3b^2c:a^7 \quad 3ch^2k = (6b^2c - 3ac^2):a^7$$
$$m = (14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e):a^9$$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc^2 - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f):a^{11}$; & ita porro.

Quodsi tandem in æquatione assumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h, i, k, l, m, n &c. substituantur, prodibit radix quæsita

$$x = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a^3}v^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5$$

&c. in infinit.

CAPUT VI.

De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

DEFINITIO XX.

367. PEr *Geometriam Sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

DEFINITIO XXI.

Tab. III. Fig. 36. 368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet.

DEFINITIO XXII.

369. *Vertex curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO XXIII.

Tab. III. Fig. 36. 370. *Ordinatim applicatæ* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *Semiordinatæ*. Vocantur etiam

Tab. V. Fig. 60. *Semiordinatæ* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AT positione datam ductæ, ac inter se parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Tab. III. Fig. 36. 371. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant.

SCHOLION.

372. *Abscissæ nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex subsequentibus patebit.*

DEFINITIO XXV.

373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat. Tab. III. Fig. 37.

DEFINITIO XXVI.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO XXVII.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, aut crescunt aut decrescunt. Tab. III. Fig. 38.

Ex. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: una enim crescente, crescit etiam altera.

Quantitates constantes sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, eædem manent.

Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

HYPOTHESIS VIII.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti literis indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

DEFINITIO XXVIII.

377. *Curva algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebraicam explicari potest. Sit ex. gr. in circulo Tab. III. Fig. 36.

AB

Tab. III. Fig. 38. $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $PB = a - x$, consequenter ob $PM^2 = AP.PB$ (§. 327, 377 *Geom.*) $y^2 = ax - x^2$. Vel sit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION I.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.*

SCHOLION II.

379. *Vulgo cum* CARTESIO (*a*) *lineas algebraicas* geometricas *vocant, quod eas tantum ad construenda Problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris* LEIBNITIO *atque* NEWTONO (*b*).

DEFINITIO XXIX.

380. *Curva transcendens* est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ transcendentes ab aliis,* CARTESII *exemplo, dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur; aliter sentientibus viris summis* LEIBNITIO *atque* NEWTONO. *Invenit quoque* LEIBNITIUS *novum æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur, & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eædem in omnibus curvæ punctis* (*c*).

DEFINITIO XXX.

382. *Curvæ algebraicæ ejusdem generis* sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit; *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, *curva secundi generis*; si ad quatuor, *curva tertii generis*, &c.

Ex. gr. æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO XXXI.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

Ex. gr. sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$, &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim, intuitu totius familiæ, sint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu, gradum determinatum habent: cum æquationes transcendentes, respectu ejusdem curvæ, indefiniti gradus existant* (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes per quas curvæ definiuntur, ingre-

(*a*) *Geom.* Lib. 2. p. m. 171 & seq.
(*b*) *Act. Erudit. Lips.* A. 1708. p. 15 26. [illegible]
(*c*) *Act. Erudit. Lips.* A. 1684. p. 234. 235.

ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis; omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possint (e. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum $+$ in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentiæ ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x, occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b, explicatur per omnes ejus coëfficientes, & exponens dignitatis, v. gr. n, per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO XXXII.

386. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION.

387. *Sectiones conicæ præter Circulum sunt tres*, Parabola, Hyperbola & Ellipsis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus; quia nobis propositum est, Algebræ ad Geometriam Sublimiorem applicationem exemplis docere; licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, si in solido, seu in cono ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO XXXIII.

388. *Parabola* est curva, in qua $ax = y^2$; hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION.

389. *Hanc proprietatem Parabolæ competere assumimus respectu axis: quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM I.

390. Est ergo Parabola curva primi generis, & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ; consequenter curva in se non redit.

COROLLARIUM II.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM III.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM IV.

393. Data itaque parametro AB describi potest Parabola. Continuetur enim parameter AB in C, & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis, circino usque ad A aperto, ducantur arcus rectam BV in I, II, III, IV, V, &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5, &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5, &c. abscissæ; BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare si lineæ B1, B2, B3, &c. ex recta BC in BN transferantur, & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII, &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens Parabola est: BN vero ejus axis (§. 392). Elegantius Parabola describitur, si sumto AX pro axe Parabolæ & puncto A pro vertice, fiat AB parametro æqualis, & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos secet, describantur pro arbitrio circuli quotcunque transeuntes per B & axem secantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abscissæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3, &c. semiordinatæ Parabolæ (§. 327 *Geom.*).

Tab. III. *Fig.* 39.

Tab. XII. *Fig.* 118.

COROL-

COROLLARIUM V.

Tab. III. *Fig.* 39. *394.* Quodlibet etiam punctum Parabolæ geometrice determinari poteſt. Ex. gr. quæritur, utrum punctum M ſit in Parabola, necne? Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM, & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN deſcribatur ſemicirculus. Quodſi enim is tranſeat per M; erit punctum M in Parabola (*§. 327 Geom. & §. 392 Analyſ.*).

DEFINITIO XXXIV.

Tab. III. *Fig.* 40. 395. *Focus* eſt punctum axis F, in quo ſemiordinata FN æquatur ſemiparametro.

PROBLEMA CLXXIV.

396. *Invenire diſtantiam Foci a vertice* AF.

Sit AF $= x$, parameter $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}a$ (§. 395); conſequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\text{§. } 388)$$

$$\overline{\phantom{\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\text{§. } 388)}} \; a \text{ div.}$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In Parabola diſtantia foci a vertice AF eſt ad parametrum in ratione ſubquadrupla, ſeu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (*§. 388*): quadratum ſemiordinatæ PM eſt quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam $\frac{1}{4}ax$, ſive AF. AP.

COROLLARIUM II.

398. Invenitur adeo diſtantia foci a vertice AF, ſi ad abſciſſam quamcunque AP & dimidiam ſemiordinatam $\frac{1}{2}$PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Eſt enim $\frac{1}{4}\text{PM}^2 = \text{AP. AF}$ (*§. 377 Geom.*); conſequenter $\text{PM}^2 = 4\,\text{AF. AP}$.

PROBLEMA CLXXV.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem ſemiordinatæ* M *ductæ.*

Sit AP $= x$. Quoniam AF $= \frac{1}{4}a$ (*§. 396*) erit PF $= x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, ſi AF > PA; conſequenter Tab. III. *Fig.* 40.

$$\text{PF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$\text{PM}^2 = ax \quad (\text{§. } 388)$$

$$\text{FM}^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\text{§. } 417 \textit{ Geom.})$$

$$\text{FM} = x + \frac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem ſemiordinatæ Parabolæ ducta æquatur aggregato ex abſciſſa AP & diſtantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in f & F transfertur, & per AD parallelæ quotcunque, ipſi in punctis P normales, MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta tranſiens eſt Parabola. Tab. III. *Fig.* 41.

COROLLARIUM II.

401. Poteſt ergo Parabola etiam continuo motu deſcribi. Nimirum aſſumta recta pro axe fiat $f\text{A} = \text{AF} = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB ſecans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero ſui extremo in foco F fixum, quod ſit = AD + AF. Quodſi ſtylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorſum & dein ſiniſtrorſum promoveatur; ſtylus Parabolam deſignabit. Eſt enim conſtanter $\text{FM} = \text{EM} = \text{P}f = x + \frac{1}{4}a$; conſequenter punctum M in Parabola (*§. 399*).

PROBLEMA CLXXVI.

402. *Invenire rationem ſemiordinatarum in Parabola.*

Sint abscissæ x & v, semiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388); consequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$
$$y^2 : z^2 = x : v \quad (§. 124)$$
$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata semiordinatarum sunt inter se ut abscissæ: ipsæ autem semiordinatæ in ratione subduplicata abscissarum.

PROBLEMA CLXXVII.

Tab. III. Fig. 40. 403. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum semiordinatarum* PM + *pm in differentiam earundem* R*m*.

$$pm + PM = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad (§. 292)$$
$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$
$$(PM + pm)mR = av - ax = a(v - x)$$
$$= a.\ Pp$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

COROLLARIUM.

404. Est ergo parameter ad summam duarum semiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abscissarum. (§. 299 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXVIII.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex semiordinata in abscissam.*

Tab. III. Fig. 40. Quoniam PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392); erit PM. AP $= x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare cum sit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc est, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124) hoc est a : PM = PM. AP : AP².

Theorema. In Parabola est rectangulum ex semiordinata in abscissam ad quadratum abscissæ ut parameter ad semiordinatam.

PROBLEMA CLXXIX.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abscissa una in alteram.*

Sit abscissa una $= x$, altera $= v$; semiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), consequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In Parabola quadratum parametri est ad quadratum semiordinatæ unius, ut quadratum semiordinatæ alterius ad rectangulum abscissarum.

PROBLEMA CLXXX.

407. *Determinare quantitatem chordæ* AM. Tab. III. Fig. 41.

Sit parameter $= a$, AP $= x$, erit PM² $= ax$ (§. 388). Quare cum AP² $= x^2$; erit AM² $= ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x)x = (a +$ AP$)$. AP.

Theorema. In Parabola chorda est media proportionalis inter abscissam & compositam ex parametro & abscissa.

DEFINITIO XXXV.

408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & semiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter semiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit. Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM.

409. Est adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*); adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329, 267 *Geom.*), PR : PM = PM : PT, & PM : PT = MR : TM, hoc est, in omni curva subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem & semiordinatam, & normalis est ad tangentem ut semiordinata ad subtangentem.

PROBLEMA CLXXXI.

Tab. III. Fig.42. 410. *Determinare quantitatem subtangentis* PT *& subnormalis* PR *in Parabola.*

Sit $AP = x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, $RA = v$, erit $PR = v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc est $x^2 - 2vx + v^2 = 0$
$\quad + ax - t^2$

Eadem æquatio provenit, si recta TM Parabolam secet, & quidem ad utrumque sectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abscissis per x designatis. Quare si fiat $x = z$ seu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem esse debet; consequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{2}a = v - x = PR$$

Porro (§. 409) $PR : PM = PM : PT$

hoc est, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : PT$

Ergo $PT = ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema. In Parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM I.

411. Quoniam $TA = x$, & distantia foci a vertice $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit $TF = \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 399); consequenter TFM triangulum æquicrurum.

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig.42. 412. Quoniam $PA = x$, & $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit $PF = x - \frac{1}{4}a$; consequenter cum sit $PR = \frac{1}{2}a$ (§. 410), $FR = x + \frac{1}{2}a$, adeoque $FR = FM$ (§. 399) $= TF$ (§. 411). Circulus igitur, ex foco Parabolæ F per punctum ejus M ductus, subtangentem PT & subnormalem PR determinat; consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM.

COROLLARIUM III.

413. Quodsi MN ducatur parallela axi AR, erit angulus $NMT = FTM$ (§. 233 *Geom.*). Cumque sit $TF = FM$ (§. 411); erit $FTM = FMT$ (§. 184 *Geom.*); consequenter $FMT = NMT$ (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXXII.

Tab. III. Fig.43. 414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela; determinare rationem segmentorum* HF *&* FN.

Sit $AP = AT$ (§. 410) $= x$, parameter $= a$, erit $PM = \sqrt{ax}$ (§. 392), $PT = IO$ (ob $TO = MF = PI$, (§. 257 *Geom.*) $= 2x$ (§. 410). Sit $MF = PI = v$, erit $TI = v + 2x$, $IA = v + x$. Sit denique $IQ = FG = t$, erit $OQ = OI + IQ = 2x + t$, $QA = x + v + t$, & hinc $QN^2 = ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

$$OI : IF = OQ : QN$$

hoc est, $OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$ (§. 124)

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : QN^2$$

$$4x : a = (2x + t)^2 : \frac{a(2x + t)^2}{4x}$$

Est itaq; $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

Tab. III. Fig. 43. Quodsi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse LI = IQ. Est vero (§. 268 *Geom.*). OH:OL = HN:LQ & OH : OL = HF: LI, adeoque HN : HF = LQ : LI (§. 167, 173 *Arithm.*). Sed LI = $\frac{1}{2}$ LQ = IQ, *per demonstrata.* Ergo HF = $\frac{1}{2}$ HN = FN (§. 149. *Arith.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

COROLLARIUM I.

415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368, 370, 371).

COROLLARIUM II.

416. Quoniam anguli recti ad G & I *per constr.* æquales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ *per construct.* anguli F & O in $\triangle\triangle$ FNG & OFI æquales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$OI : FI = FG : GN$$
$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$ erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x)\, v$. Jam cum FM $= v$, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM III.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri est rectæ illius quadrupla.

PROBLEMA CLXXXIII.

Tab. XII. Fig. 119. 418. *Si* TM *Parabolam tangit in* M & MR *fuerit ad eam normalis, & ex foco* F *ducatur recta* FM *atque* FO *ad* TM *normalis; demittatur etiam ex* R *ad rectam* FM *normalis* RH; *determinare quantitatem segmentorum* MH & FH, *itemque rectæ* OF.

Sit parameter a, AP $= x$, erit FM $= \frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR $= \frac{1}{2}a$, & TP $= 2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum æquicrurum (§. 411), erit TO = OM (§. 184 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. *cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388); consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\,\frac{1}{4}a$ (§. 417 *Geom.*). Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)\,a$. Jam cum in Triang. OFM & HMR anguli ad O & H recti *per hypoth.* sint inter se æquales (§. 145 *Geom.*), & ob parallelismum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*), anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$FM : OF = MR : MH$$

adeoq; $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)

$$(\tfrac{1}{4}a + x)^2 : (\tfrac{1}{4}a + x)\tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2$$
$$\tfrac{1}{4}a + x : \tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)\, a : MH^2 \ (\text{§. } 124)$$
$$1 : \tfrac{1}{4}a = a : MH^2 \ (\text{§. cit.})$$

$$MH^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$MH = \tfrac{1}{2}a = PR$$

Ergo HF $=$ FM $-$ HM $= x - \frac{1}{4}a =$ FP.

Theorema 1. Recta OF ex foco Parabolæ F ad tangentem TM ducta est media proportionalis inter quartam partem parametri & rectam FM ex foco F ad punctum Parabolæ M ductam.

Theorema

Tab. XII. Fig. 119. *Theorema* 2. Si MR fuerit ad Parabolam in puncto M normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Parabolæ punctum M ductam normalis RH; erit MH subnormali PR & HF portioni axis inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA CLXXXIV.

Tab. III. Fig. 42. 419. *Invenire æquationem ad Parabolam externam; hoc est, punctis Parabolæ M ad rectam AO, quæ ad axem AR in vertice A perpendicularis, relatis.*

Sit abscissa AN $= x$, semiordinata NM $= y$, parameter $= a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendiculares ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit AN = PM & NM = AP (§. 257 *Geom.*); consequenter PM $= x$, AP $= y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO XXXVI.

Tab. III. Fig. 44. 420. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem; hoc est, si AB $= a$, parameter $= b$, PM $= y$, AP $= x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.

COROLLARIUM I.

421. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM II.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$. Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM III.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2 b : 4a = \frac{1}{4}ab$; consequenter $y =$ CD $= \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo DE $= 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc est, axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum; consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

Invenitur ergo axis, parametro, abscissa & semiordinata datis; si fiat, 1° $b : y = y : \frac{y^2}{b}$ 2° $x - \frac{y^2}{b}$ seu $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : a$. Nimirum sit axis AB positione datus, & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat AN = AQ = PM; ducta NF ipsi LQ parallela, erit AF $= y^2 : b$, consequenter FP $= x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque AH = FP & AG = AP, ducatur GB ipsi HP parallela: erit AB $= bx^2 : (bx - y^2)$; adeoque axis quæsitus. Tab. XII. Fig. 120.

COROLLARIUM V.

Tab. IV. Fig. 45. 425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$;

consequenter 1° $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2° $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$. Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1°. Fiat AI = PM, & ex A per M ducatur recta AL. 2°. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 *Geom.*) ob AP : PM = AI : LI; LI $= y^2 : x$. 3°. Producatur PM in O, donec PO = LI $= y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4°. In A excitetur per-

Tab. IV. perpendicularis AG = [ob BP : PO = BA : GA] $ay^2 : (ax-x^2)$: quæ erit parameter AG.

Fig. 45.

COROLLARIUM VI.

426. $y = \sqrt{\left(\frac{abx-bxx}{a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}(a-x)\right)}$.

Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ BP semiordinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB, & erecta perpendiculari PN, fiat PL = PH, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim AB (a) : AG (b) = BP (x) : PH $(bx : a)$, & PN = $\sqrt{}$(AP. PL) = $\sqrt{}$(AP. PH) = $\sqrt{((a-x) \times (bx : a))} = \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$.

PROBLEMA CLXXXV.

Tab. III. 427. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Fig. 44. Sit AB $= a$, parameter $= b$, AF $= x$, erit FR $= \frac{1}{2}b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2 \quad (§. 420)$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b\right)} = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit CK $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$. Fiat itaque CF = CK; erit in F focus.

Tab. IV. Fig. 46. *Aliter.* Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}ab}$ = CD, (§. 423) si intervallo DF $= \frac{1}{2}a$ intersecetur AB in F, erit in F focus. Nam CD² $= \frac{1}{4}ab$ & DF² $= \frac{1}{4}a^2$. Ergo CF $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$, ut ante.

Æquatio secunda sequens suppeditat

Theorema. Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF. FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem, seu quadrato axis dimidii minoris CD æquale. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$, hoc est quadratum ejus est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA CLXXXVI.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM *&* pm *in Ellipsi.*

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (§. 421).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

seu PM² : pm^2 = AP. BP : Ap. pB

Theorema. In Ellipsi quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex axis segmentis.

COROLLARIUM I.

430. Est igitur etiam DC² : PM² = CB² : AP. PB, consequenter DC² : CB² = PM² : AP. PB (§. 173 *Arithm.*), hoc est, quadratum axis minoris est ad quadratum majoris ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex axis segmentis.

COROLLARIUM II.

431. Sit CP = x; erit AP = $\frac{1}{2}a - x$, & PB = $\frac{1}{2}a + x$; consequenter AP. PB = $\frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - xx$$

hoc est $b : a =$

$$ay^2 = \frac{1}{4}a^2 b - bx^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam Ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. III. Fig. 44. 432. Sit CD $= d$, AC $= r$, PC $= x$; erit AP $= r - x$ & PB $= r + x$; consequenter AP. PB $= r^2 - x^2 =$ AC^2 − PC^2. Habemus ergo, ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde

$$r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$
$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem Ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis, & qua in subsequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM IV.

433. Crescentibus adeo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$; consequenter $y^2 = 0$, adeoque Ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, Ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA CLXXXVII.

Tab. IV. Fig. 46. 434. *Determinare quantitatem rectarum* FM *&* fM *ex utroque foco* F *&* f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint FC $= f$C $= c$, reliqua ut ante: erit PC $= \frac{1}{2}a - x$, P$f = c + \frac{1}{2}a - x$, PF $= c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque PF$^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2, = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$; P$f^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Est vero (§. 430),

$$CB^2 : DC^2 = AP.\,PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$
$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

Tab. IV. Fig. 46.

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$
$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$
$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focis F & f (§. 427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipsis designabitur.

COROLLARIUM II.

436. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum Ellipseos M. Axis enim AB dividatur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f describuntur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PROBLEMA CLXXXVIII.

437. *Determinare quantitatem rectæ* MR *ex quovis Ellipsis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.* Tab. III. Fig. 44.

Sit MR $=$ PC $= v$, AC $= r$; erit AP $= r - v$, & PB $= r + v$. Sit DR $= z$, DC $= c$; erit RC $=$ PM $= c - z$; consequenter (§. 430)

DC^2:

Tab. III. Fig. 44.

$$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$$
$$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$$
$$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2 \text{ (§.173 Arith.)}$$
$$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2 \text{ (§.193 Arithm.)}$$
$$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2 \text{ (§.173 Arithm.)}$$
$$DR.RE : RM^2 = DC^2 : AC^2.$$

Theorema. Rectangulum ex segmentis axis conjugati est ad quadratum semiordinatæ ipsius, ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM II.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§.437); si fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Est adeo p parameter axis conjugati (§.420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, seu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA CLXXXIX.

Tab. IV. Fig. 47.

440. *Determinare subtangentem* PT *& subnormalem* PR *in Ellipsi.*

Eadem prorsus methodo utendum, qua in Parabola usi sumus. Nimirum sit parameter $= b$, axis major $= a$, AP $= x$, PM $= y$, MR $= t$, RA $= z$; erit PR $= z - x$, consequenter $PM^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Est vero etiam $PM^2 = bx - bx^2 : a$ (§.421). Quare

$$t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a$$
$$at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2$$
$$ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0$$
$$x^2 + \frac{ab - 2az}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0$$

Tab. IV. Fig. 47.

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§.410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, æquatio eadem cum anteriore, consequenter

$$(ab - 2az) : (a - b) = -2v$$
$$ab - 2az = -2av + 2bv$$
$$ab + 2av - 2bv = 2az$$
$$\tfrac{1}{2}b + v - bv : a = z$$

Est vero $v = x$, *per hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a =$ AR. Ergo PR $= \frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$, quæ expressio hanc suppeditat analogiam:

$$a : b = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Theorema. In Ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§.409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Est vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§.420). Ergo PT $= (abx - bx^2) : (\frac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$. Habemus adeo

$$\tfrac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$$
$$PC : AP = PB : PT$$

Ergo PB. AP = CP. PT

Theorema. In Ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem AT = PT − AP $= (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - x : \tfrac{1}{2}a = x : AT$$
$$PC : AC = AP : AT$$

Theo-

Tab. IV. Fig. 47. *Theorema.* Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem Ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 173 *Arithm.*); consequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. 190 *Arithm.*), hoc est, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM II.

442. Est ergo $AC^2 = PC.\ CT$ (§. 377 *Geom.*), hoc est quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

COROLLARIUM III.

443. Crescentibus abscissis x, decrescit $\frac{1}{2}a - x$; consequenter ratio $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arithm.*). Abscissa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor (§. 440).

COROLLARIUM IV.

444. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc est, quando AC fit abscissa, $\frac{1}{2}a - x = 0$; consequenter abscissa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum subtangente TP nunquam concurrit. Est igitur axi parallela.

COROLLARIUM V.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC respectu infinitæ pro nihilo habendam esse.

PROBLEMA CXC.

446. *Determinare quantitatem rectanguli ex subtangente* PT *in abscissam* CP.

Sit $PC = x$, $PT = t$, $AC = r$; erit $AP = r - x$, & $PB = r + x$, $CT = t + x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$
$$x : r = r : t + x$$

erit $tx + xx = r^2$

$$tx = r^2 - x^2 = AP.\ PB$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente PT in abscissam CP æquatur rectangulo ex segmentis axis. Tab. IV. Fig. 47.

PROBLEMA CXCI.

447. *Determinare valorem subtangentis* PT, *abscissis a centro computatis.*

Sit $AC = r$, $PC = v$, erit $PB = r + v$, $AP = r - v$; consequenter (§. 440)

$$PC : PB = AP : PT$$
$$v : r + v = r - v : t$$

$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente & distantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus distantiæ a quadrato semiaxis transversi.

PROBLEMA CXCII.

448. *Determinare quantitatem subtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 226 *Geom.*), erit ob parallelismum rectarum KM & CT (§. 256) angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$
$$\frac{r^2 - v^2}{v} : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodsi fiat $DC = c$, $DK = z$, erit $KC = PM = y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 437). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$, & $v^2 y (= 2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverso (§. 440).

PROBLEMA CXCIII.

Tab. IV. Fig. 48. 449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur, & punctum contactus* M *atque centrum* C *junganiur recta* MC, *quæ secat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Sit AB $= a$, PM $= y$, PC $= c$, FG $=$ KD $= t$, GI $=$ KS $= z$, erit IF $=$ HL $=$ DS $= t - z$, $HL^2 = t^2 - 2tx + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$

$$y : c = t : (tc : y)$$

Et quia $\triangle$ TMP $\backsim$ FOG (§. 233 & 267 *Geom.*), & GIH $\backsim$ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam TMP $\backsim$ GIH; consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} \text{ (§. 440)}$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit FL $=$ HI $= vz : cy$. Ergo CL $=$ FL $+$ FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL $=$ AC $-$ CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ & BL $=$ AB $-$ AL $= a - (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

$$AP.\ PB : LA.\ LB = PM^2 : HL^2$$

$$x^2 : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc $HL^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2 = t^2c^2v - 2tc^2vz + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2 = t^2c^2v + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v = v^2z^2 + c^2vz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v} = z^2$$

Quodsi jam KN dicatur z, reliqua mancant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$; consequenter $KN^2 = KS^2$, adeoque & KN $=$ KS. Tab. IV. Fig. 48.

Est vero (§. 268 *Geom.*) KN : KS $=$ GN : HG. Ergo GN $=$ HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum Ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.

450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368, 370). Tab. IV. Fig. 49.

COROLLARIUM II.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM III.

452. Est ergo etiam ECV ordinatæ HN parallela & per centrum C transiens diameter, consequenter MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA CXCIV.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit CA $= r$, CR $= v$, PT $= t$, PC $= x$; erit AR $= r - v$, RB $= r + v$; consequenter AP. PB $= tx$ (§. 446), AR. RB $= r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipsi TM parallela, *per hypoth.* erit MTC $=$ TCV (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R sint recti,

per

Tab. IV. Fig. 49. *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*), PM : RV = TP : RC. Hinc PM² : RV² = TP² : RC² (§. 124). Est vero etiam PM² : RV² = AP. PB : AR. RB (§. 429). Ergo (§. 167 *Arithm.*)

$$AP.\,PB : AR.\,RB = TP^2 : RC^2$$
$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$
$$tv^2 x = t^3 x + t^2 x^2 - t^2 v^2$$
$$v^2 x = t^2 x + tx^2 - tv^2$$
$$tv^2 + xv^2 = t^2 x + tx^2$$
$$v^2 = tx$$

hoc est, CR² = AP. PB.
consequenter AP : CR = CR : PB.

PROBLEMA CXCV.

454. *Determinare quantitatem semiordinatæ* GH *ad diametrum Ellipsis* MQ.

Ductis KI ipsi FD & KG ipsi AB parallelis, fiat CP = x, AC = r, PT = t, PM = y, KG = IL = m, LC = n. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$
$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per constr.* ang. TSI = KHG (§. 233 *Geom.*) adeoque ob rectos ad I & K *per constr.* T = HGK (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*).

$$TP : PM = KG : KH$$
$$t : y = m : \frac{my}{t}$$
$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$
$$CI = CL + LI = n + m$$
$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$
$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

$$AI.\,IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$$ (§. 432). Tab. IV. Fig. 49.

Est vero (§. 429)

$$AP.\,PB : AI.\,IB = PM^2 : HI^2$$
$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

y^2

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

x^2

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$
$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$
$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$
$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446)

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$
$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$
$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$
$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$
$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2.$$

Sit jam CM = v, erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : CM = CL : CG$$
$$x : v = n : (vn : x)$$

Ergo MG = MC − CG = $v - vn : x$, & GQ = GC

Tab. IV. $= GC + MC = v + vn : x$, MG. GQ $= v^2 - v^2 n^2 : x^2$

Fig. 49. Quodsi $v^2 - v^2n^2 : x^2 = MG.GQ$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§.453) & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2v^2 + n^2v^2 - x^2v^2 - r^2n^2v^2 : x^2$. Est itaque MG. QG. $CR^2 = KG^2$. CM^2, adeoque (§.299 *Arithm.*) $KG^2 : CR^2 = MG.QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN, *per hypoth.* MCV = MGH (§.233 *Geom.*), & ob parallelas KG & RC, *per constr.* MGK = MCR (§. *cit.*). Ergo KGH = RCV (§.91 *Arith.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§.267 *Geom.* & §. 260 *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arithm.*) MG. QG : $CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema. In Ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit MQ $= a$, EV $= c$, MG $= x$, HG $= y$, erit GQ $= a - x$; consequenter (§.454)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 ax - \tfrac{1}{4}c^2 x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 y^2 \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$c^2 x - \frac{c^2x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§.420), & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas Ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates Ellipsi competere intuitu diametri.*

PROBLEMA CXCVI.

457. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad tangentem Ellipsis TM perpendicularis.* Tab. XII. Fig. 119.

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); adeoque TR : RM = TF : FO (§.268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (§.368, 370); erit △ PMR ∽ △ TMR (§. 329 *Geom.*), adeoque TR : RM = RM : PR (§.267 *Geom.*). Est ergo RM : PR = TF : FO (§. 167 *Arithm.*); consequenter FO. RM = PR. TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA CXCVII.

458. *Si in F fuerit focus Ellipsis & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem segmentorum MH & HF.* Tab. XII. Fig. 119.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit FM $= \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§.434), PR $= (\frac{1}{2}ab - bx) : a$ (§.440), AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§. *cit.*) & AF $= \frac{1}{2}a - c$, consequenter TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipsi MR (§.256 *Geom.*); adeoque angulus OFM ipsi HMR æqualis (§.233 *Geom.*)

& hinc

Tab. XII. *Fig.* 119. & hinc, ob rectos ad O & H æquales (§.145 *Geom.*), reperitur (§.267 *Geom.*) $FM : FO = MR : MH$, hoc est, $FM : \frac{PR.TF}{MR} = MR : MH$ (§.457). Est itaque $MH = (PR.TF) : FM$; consequenter $FM : TF = PR : MH$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = \frac{ab - 2bx}{2a} : MH$$

$$a^2 - 2ac + 4cx : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = ab - 2bx : MH$$

(§.184 *Arith.*)

$$\frac{a^2 - 2ac + 4cx}{a - 2x} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = b : MH$$

(§.183 *Arith.*)

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§.149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Ellipsin normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Ellipseos punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XXXVII.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus*, *vel Latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in Ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§.421 & seqq.).

DEFINITIO XXXVIII.

461. In Hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in Ellipsi (§.423).

DEFINITIO XXXIX.

462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur. Tab. III. *Fig.* 37.

PROBLEMA CXCVIII.

463. *Datis parametro & axe transverso* AB, *invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $= b$, $AB = a$, erit $FN = \frac{1}{2}b$ (§.395) & (§.459),

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. Vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} = CE$ (§.461), si fiat $AG = EC$, erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit $AC = \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit $AF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, adeoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Est adeo distantia foci a centro $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si $FC^2 = c^2$, erit $CE^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM II.

465. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx = AF.FB$, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§.461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA CXCIX.

Tab. III. Fig. 40. 466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM *&* pm.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = v$, $pm = z$; erit (§.460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}.$$
$$= ax + xx : av + v^2 \ (\S.124).$$
$$= (a+x)x : (a+v)v$$

Theorema. In Hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus adeo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, adeoque semiordinatæ ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA CC.

468. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Si axis transversus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§.461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad aa, hoc est, ut b ad a (§.124).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 37. 469. Quoniam $b : a =$ PM^2 : AP. PB (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA CCI.

470. *Sint duæ Hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes* AN *&* BY *cum axe transverso communi* AB *in directum jacent.* Tab. III. Fig. 37. *Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *Hyperbolæ unius ducantur rectæ* fM *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit FC $=$ fC $= c$, reliqua ut in præcedentibus: erit AF $= c - \frac{1}{2}a$, A$f = c + \frac{1}{2}a$, PF $= x - c + \frac{1}{2}a$, P$f = c + \frac{1}{2}a + x$

$$\text{PF}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2,$$
$$\text{P}f^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{2}a^2 + 2cx + ax + x^2.$$

Jam (§.464) quadratum semiaxis conjugati CE $= cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§.469)

$$\text{AC}^2 : \text{CE}^2 = \text{AP. BP} : \text{PM}^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : \text{PM}^2$$

Est itaque

$$\text{PM}^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$\text{PF}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\text{FM}^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$
$$\text{FM} = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$\text{PM}^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$\text{P}f^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$
$$f\text{M}^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$$
$$f\text{M} = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$\text{FM} = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$f\text{M} - \text{FM} = a = \text{AB}$$

COROLLARIUM I.

471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Tab. IV. Fig. 50. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. IV. Fig. 50. 472. Iisdem datis, puncta quotcunque Hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque AB majore describatur arcus, facto $fb =$ AB, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m intersecans, erit enim ob $fm - Fm =$ AB, m punctum hyperbolæ (§. 470) Vel commodius hyperbola ita describitur: Tab. XII. Fig. 121. Fiat AB axi transverso æqualis, determinenturque foci f & F (§. 463.). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque, & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III, &c. Fiat fL $=$ AB, & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in Hyperbola. Est enim fI $= f$1, fII $= f$2, fIII $= f$3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 $=$ LI, F2 $=$ LII, F3 $=$ LIII &c. *per constr.* Ergo $f1 - F1 = f\text{I} - \text{LI} =$ AB, $f2 - F2 = f\text{II} - \text{LII} =$ AB, $f3 - F3 = f\text{III} - \text{LIII} =$ AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3, &c. in Hyperbola (§. 470).

PROBLEMA CCII.

Tab. IV. Fig. 51. 473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* M*m* *parallela ducitur.*

Sit AP $= x$, PM $= y$; parameter $= b$, axis transversus $= a$: erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$; consequenter DE tota extra Hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis M*m* parallela ducatur; Hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO XL.

Tab. IV. Fig. 51. 474. Si recta DE per verticem Hyperbolæ A ordinatis M*m* parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptota Hyperbolæ*.

COROLLARIUM I.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE $=$ CP : P*r*, & CA : (DA) AE $=$ CP : PR; erit P*r* $=$ PR (§. 177 *Arithm.*). Quare cum sit PM $=$ P*m* (§. 370); erit quoque MR $= mr$ (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED $=$ AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA $= \frac{1}{2}$ED (§. 474). Ergo AI $= \frac{1}{2}$DC $= \frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD $=$ EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI $=$ CI $= \frac{1}{2}$EC; consequenter AI $=$ CI (§. 87).

DEFINITIO XLI.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia Hyperbolæ*.

PROBLEMA CCIII.

478. *Determinare potentiam Hyperbolæ.*

Sit CA $= \frac{1}{2}a$, AE $= \frac{1}{2}c$, erit CE $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 417 *Geom.*); adeoque CI $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo CI$^2 = \frac{1}{16}(aa + cc)$.

Theorema: Potentia Hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam $cc = ab$ (§. 461); erit CI$^2 = \frac{1}{16}(aa + ab) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$; hoc est potentia Hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

PROBLEMA CCIV.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM *&* PR.

Quoniam

Tab. IV. Fig. 51.

Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461), & $CP = \frac{1}{2}a + x$; præterea (§. 268 *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$
$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Quare

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 \qquad bx + bx^2 : a \ (\text{§. } 460)$$
$$\overline{PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2}$$

Theorema. Si in Hyperbola semiordinata PM producatur, donec asymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crescente adeo semiordinata PM, decrescit recta MR, adeoque Hyperbola ad asymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere potest, quia cum sit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas CF & CG* ἀσυμπτώτους *seu non coincidentes vocaverint Veteres.*

PROBLEMA CCV.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, consequenter $MR. Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In Hyperbola rectangulum ex MR & Mr æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale est quadrato semiaxis conjugati DA (§. 480), consequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia sunt.

PROBLEMA CCVI.

485. *Si* QM *& sm cum asymptoto* CG, *qm &* SM *cum altera* CF *parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM. MS *& qm. ms.*

Tab. IV. Fig. 51.

Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b^2$ QM $= v$, $mq = z$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$a : v = b : (bv : a)$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : (bz : a)$$

Est ergo $MQ. MS = bvz : a$, & $mq. ms = bvz : a$; consequenter $MQ. MS = mq. ms$.

Theorema. Si QM & *ms* cum asymptoto CG; *qm* vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS & *qm* in *ms* æqualia sunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = sm$ & $CQ = MS$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqualia sunt.

PROBLEMA CCVII.

487. *Determinare rationem rectanguli ex qm in ms ad potentiam Hyperbolæ, seu* AI^2.

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. $E = r$, & ob parallelas AI & qm, ang. $I = q$ (§. 233 *Geom.*); consequenter (§. 267 *Geom.*).

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : (cy : z)$$

Porro ob $mR. mr = AE^2$ (§. 484) erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : (cc : z)$$

Denique ob parallelas *sm* & MQ (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$
$$z : y = (cc : z) : (ccy : zz)$$

Est enim $mr = RM$ (§. 475); cumque

Tab. IV. Fig. 51. que sit $mr : qm = AE : AI$, & $MR : QM = DA : HA = AE : AI$, *per demonstr.*, etiam $MQ = mq$ (§. 177 *Arith.*).

Quare $sm . qm = Cq . qm = ccyy : zz$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $sm . qm = AI^2$.

Theorema. Si qm asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex Cq in qm æquatur potentiæ Hyperbolæ.

Corollarium I.

488. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturam Hyperbolæ intra asymptotos declarans.

Corollarium II.

489. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiæ Hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet Hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§.272 *Geom.*). Nimirum sint AB

Tab. XIII. Fig. 123. & AC asymptoti, $AD = DI = a$ latus potentiæ Hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipsi AC, & PN parallela ipsi DI; erit $PN = DI$ (§. 257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN secans DI in H: erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

adeoque $DH = a^2 : x$. Quare si fiat PM $(= y) = DH$: erit $y = a^2 : x$; consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in Hyperbola (§. 488).

Corollarium III.

Tab. IV. Fig. 51. 490. Quodsi abscissæ non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$; consequenter $a^2 = by + xy$.

Problema CVIII.

491. *Determinare in Hyperbola subtangentem* PT *& subnormalem* PR. Tab. III. Fig. 42.

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $PM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$
$$\overline{az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2}$$
$$\begin{array}{l} bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0 \\ \quad\quad - 2atx - az^2 \end{array} \qquad b+a$$
$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b + a}\, x + \frac{at^2 - az^2}{b + a} = 0$$

Fiat jam, ob rationes supra (§. 410) allatas, $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$(ab - 2at) : (b + a) = -2v \qquad b+a$$
$$\overline{ab - 2at = -2bv - 2av}$$
$$ab + 2bv + 2av = 2at \qquad 2a$$
$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,

$\tfrac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.

Ergo $PR = \tfrac{1}{2}b + bx : a + x - x = \tfrac{1}{2}b + bx : a = (\tfrac{1}{2}a + x)\, b : a$.

Theorema. In Hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

$$PR : PM = PM : PT$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}a + x}{a} b : \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} : PT$$

Reperitur ergo $PT = (abx + bx^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)\, b = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

Theo-

Tab. III. Fig. 42. *Theorema.* In Hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita aggregatum ex integro axe transverso & abscissa ad subtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax \; x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In Hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita semiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem intercepta.

PROBLEMA CCIX.

Tab. V. Fig. 52. 492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ *qua* NO *secat in* G; *determinare rationem segmentorum* GN *&* GO.

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transversus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $PC = \frac{1}{2}a + x = p$, $GI = HS = v$, $GF = HD = z$, erit $IF = DS = LO = z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus GKI = PTM & ob parallelas KI & OF *per constr.* angulus GKI = GOF; consequenter GOT = PTM. Quare, cum præterea F & P sint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + xx)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur, brevitatis gratia, $ax + xx = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$, ut ante, erit $FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$, & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Est vero (§. 466)

Tab. V. Fig. 52.

$$AP.\,PB : AL.\,LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $yy = (ax + xx)b : a$ (§. 459). Cum itaque posuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expressione ipsius OL^2 substituto, habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}.$$

Enim vero $OL^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus adeo

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$$

Quodsi HN dicatur z, & calculus eodem modo instituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$. Unde liquet esse $HN^2 = GF^2 = HD^2$; consequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§. 268 *Geom.*) $HN : HD = NG : GO$; erit $NG = GO$.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Est itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368); MC vero est semidiameter transversa.

PRO-

PROBLEMA CCX.

Tab.V. Fig.53. 494. *Ductis duabus rectis* Hm & mK *ex eodem Hyperbolæ puncto m, utrinque in asymptotis* CQ & CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN & NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm. mK & LN. NO.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm.mr = QN.NT$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$
$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam, ob parallelas mr & NT, angulus $r = T$; &, ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$
$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem △△ QLN & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$
$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN.\ NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm.\ mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema. Si intra asymptotos Hyperbolæ, ex ejus puncto m ducantur utcunque duæ rectæ Hm & mK, & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm.\ mK = LN.\ NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam casu $Hm.\ mk = LN.\ No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt. Tab.V. *Fig.*53.

PROBLEMA CCXI.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ & CT *ducatur; determinare rationem segmentorum* HE & mk *inter Hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & m rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE.\ EG = Rm.\ mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mR : IE = EG : mr$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro, ob IG ipsi Rr parallelam, (§. 268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$
$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$
$$mr : km = EG : Ek$$
$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek.\ EH = abxy : ab = xy = Hm.\ mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$
$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$$

(§. 193 *Arithm.*)

h. e. $Em : mk = Em : HE$.

consequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter asymptotos recta Hk utcunque ducatur, segmenta HE & mk inter Hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM I.

497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk Hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM II.

Tab.V. Fig.53. 498. Rectangulum itaque ex segmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PROBLEMA CCXII.

Tab.V. Fig.54. 499. *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, adeoque ordinatæ NM parallela, C centrum Hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptotæ. Fiat $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$ & $CB = AC$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$
$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$, & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$, consequenter $RM . MQ = (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero $RM . MQ = DA^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2 \quad r^2$$
$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$
$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$
$$PM^2 : AP . PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$ & $AP = CP - CA = v - r$; adeoque $AP . PB = (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum semiordinatæ in Hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB = a$, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Tab.V. Fig.54.

Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio Hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis, estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet easdem proprietates Hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA CCXIII.

501. *Ductis* AF *&* TN *asymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit $CF = a$, $AF = b$; $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$, etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN . NQ = DA^2$ (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*).

$$RN : DA = DA : NQ$$
$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro, ob parallelas AF & NT, angulus $F = T$, & ob parallelas AE & GN, angulus $E = Q$ (§. 133. *Geom.*), ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$
$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$
$$AE : FE = QN : TQ$$
$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

Et $QN : QT = RN : TC$ (§. 263. *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo $TC . TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF . AF$.

Theo-

Tab.V. Fig.54. *Theorema.* Si ex vertice A & quocunque Hyperbolæ puncto N ducantur AF & TN cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi adeo fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio Hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA CCXIV.

Tab. XII. Fig. 119. 503. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad tangentem Hyperbolæ TM perpendicularis.*

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur FO. RM=PR. TF, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA CCXV.

504. *Si in F fuerit focus hyperbolæ & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam; determinare quantitatem segmentorum MH & HF.*

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit $FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), $PR = (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & $AT = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), $AF = c - \frac{1}{2}a$, $TF = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a = ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM perpendiculari, reperitur, prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, $FM : TF = PR : MH$ (§. 458). Quare

Tab. XII. Fig. 119.

$$c - \tfrac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : MH$$

Hoc est

$$2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : MH$$

(§. 184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = b : MH$$ (§. 183 *Arith.*)

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arithm.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Hyperbolam normalis, & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XLII.

505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales. Tab. IV. Fig. 51.

COROLLARIUM I.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM II.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam Hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM III.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM IV.

509. Si sint $CP = x$, $CA = r$, erit $AP = x - r$ & $PB = x + r$ consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM V.

510. Quoniam $AE = CA$ (§. 505); erit ACE angulus semirectus (§. 241 *Geom.*); consequenter angulus asymptotorum FCG in Hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA CCXVI.

Tab.V. Fig.55. 511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus ABC ita secetur ut sectionis axis DE sit lateri coni AC parallelus, ipsum vero planum sectionis DLN ad basin sectionis triangularis AB perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*); consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB, & a sectione data in pM & LN; erunt cum HI & AB, tum pM & LN inter se parallelæ (§.499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§.492 *Geom.*); consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*); adeoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§.368, 370). Et quia AH parallela ipsi EP, *per hypoth.* HP parallela ipsi AE, *per demonstr.* erit HP=AE (§.257 *Geom.*). Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP=x, DE=z; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP.\, PI$ (§. 377) $= tv$ & $EN^2 = AE.\, EB$ (§.*cit.*) $= tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $= tvx : tzv$ (§. 124)

$$= x : z$$

Est itaque curva NMDpL Parabola (§.402).

PROBLEMA CCXVII.

512. *Si conus ABC ita secetur, ut axis sectionis DE cum diametro basis AB continuata in F concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet; invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis DMNELD.* Tab.V. Fig.56.

Eodem, quo ante (§.511) modo ostenditur esse PM & QN cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE=a, DP=x, DQ=v, PH=t, QL=s; erit PE=$a-x$, QE=$a-v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a-v : s = a-x : \frac{sa-sx}{a-v}$$

Quare (§. 377) $PM^2 = HP.\, PI = (tsa - tsx) : (a-v)$, & $QN^2 = KQ.\, QL = vts : x$. Est adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa-tsx}{a-v} : \frac{vts}{x}$$

hoc est, $= tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$

(§. 124) $= ax - x^2 : av - v^2$

Est itaque curva DMNELD Ellipsis (§. 429).

PROBLEMA CCXVIII.

513. *Si conus ABC ita secetur, ut axis sectionis DQ continuatus cum latere coni AC continuato in E concurrat, planum vero sectionis DLN secet diametrum basis AB ad angulos rectos; invenire naturam curvæ DMN, quæ ex hac sectione resultat.* Tab. IV. Fig.57.

Eodem modo, quo paulo ante (§. 511), ostenditur, QN & PM esse semiordinatas cum circulorum HMI atque

Tab. IV. Fig. 57. atque ANB, tum curvæ DMN. Sit $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = s$; erit $EP = a + x$, $EQ = a + v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo $HP . PI = ts$ & $AQ . QB = (atsv + v^2 ts) : (ax + x^2)$; consequenter ob $PM^2 = HP . PI$, & $QN^2 = AQ . QB$ (§. 377),

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{astv + vvst}{ax + xx}$$

hoc est, $= 1 : \frac{av + vv}{ax + xx}$

(§. 124) $= ax + xx : av + vv$

Est itaque LDMN Hyperbola (§. 466), DE ejus axis transversus, E vertex Hyperbolæ oppositæ.

Scholion.

514. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio Parabolam, Hyperbolam atque Ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere, & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcunque assumtis, vel datis, curvarum proprietates ac descriptiones per Algebram & Arithmeticam speciosam eruere debeamus. Immo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de Ellipsi exemplum proposuisse suffecerit.*

Problema CCXXIX.

Tab. IV. Fig. 58. 59. 515. *Sit descripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in instrumento, cujus structura ex Fig.* 59 *Tab. IV manifesta est, ita ut paxilli in* E *defixi basis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *investigare naturam ejus.* Tab. IV. Fig. 58. 59.

Ex curvæ descriptione manifestum, esse longitudinem regulæ EM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem AC & semiaxem minorem DC.

Assumamus itaque quemcumque regulæ situm EFM (*Fig.* 58) & determinetur curva, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat $CP = RM = x$, $PM = y$, $AC = EM = a$, $CD = FM = b$, erit $EF = a - b$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$

$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo $PF = x - x + bx : a = bx : a$

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 417 *Geom.*) $= b^2 - b^2 x^2 : a^2 = (a^2 b^2 - b^2 x^2) : a^2 = y^2$.

Est adeo curva ADMB Ellipsis (§. 432).

Definitio XLIII.

516. *Circuli superiorum generum* sunt curvæ, in quibus est $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^n = PM^n : PB^n$. Tab. III. Fig. 38.

Corollarium I.

517. Sit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$: erit $PB = a - x$, consequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$, & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a - x)^n x^m$.

Corol-

COROLLARIUM II.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO XLIV.

519. *Parabolæ superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1} x = y^m$, ex. gr. per $a^2 x = y^3$, $a^3 x = y^4$, $a^4 x = y^5$, $a^5 x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2 x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3 x = y^4$; *surdesolidalem* si $a^4 x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis superius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad Parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $a^2 x = y^3$, $ax^3 = y^4$: quia a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2 x^2 = y^4$, $a^2 x^3 = y^5$, $a^3 x^4 = y^7$.

COROLLARIUM I.

520. Cum in Parabolis superiorum generum sit $y^m = a^{m-1} x$; si alia quæcunque semiordinata dicatur v, abscissa ipsi respondens z, erit $v^m = a^{m-1} z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1} x : a^{m-1} z$$

hoc est, $\quad = \quad x : z$

Communis adeo Parabolarum proprietas est, quod ordinatarum potentiæ rationem abscissarum habeant.

COROLLARIUM II.

521. In semiparabolis vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu potentiæ semiordinatarum sunt ut potentiæ abscissarum uno gradu inferiores; ex. gr. in semiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 sunt ut quadrata abscissarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis Parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO XLV.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. Ex. gr. *Elliptoidem cubicalem*, si $ay^3 = bx^2 (a - x)$: *Elliptoidem biquadraticalem* appellant Ellipsin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2 (a - x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM I.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z; erit $av^{m+n} = bz^m (a-z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a-x)^n : bz^m (a-z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a-x)^n : z^m (a-z)^n$.

COROLLARIUM II.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$ & si porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m (a-x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc est, Ellipses superiorum generum degenerant in Circulos superiorum generum.

DEFINITIO XLVI.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$ ex. gr. $ay^3 = bx^2 (a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROLLARIUM.

526. Est ergo in infinitis Hyperboloibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a+x)^n : bz^m (a+z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m \; (a+x)^n : z^m (a+z)^n$.

DEFINITIO XLVII.

527. *Conos superiorum generum* appello, quorum bases & sectiones basibus parallelæ sunt circuli superiorum
Tab.V. Fig. 55. generum. Generatur istiusmodi Conus, si recta linea AC in puncto sublimi C fixa, sed quæ pro re nata magis aut minus extendi posse concipitur, circa peripheriam circuli ANB convertatur.

PROBLEMA CCXX.

Tab.V. Fig. 55. 528. *Investigare naturas curvarum, quæ prodeunt, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, planum vero sectionis* LDN *secet diametrum basis* AB *ad angulos rectos.*

Eodem, quo supra (§. 511) modo ostenditur, esse PM & EN inter se parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN semiordinatas. Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in Probl.* 216 (§. 511), $EB = tz : x$. Est vero (§. 516)

$$\begin{array}{c} HP^m : PM^m = PM : PI \\ v^m : y^m = y : t \\ \hline y^{m+1} = tv^m \end{array}$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$.

$$\begin{array}{c} v^m : q^m = q : (tz : x) \\ \hline q^{m+1} = tzv^m : x \end{array}$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$ Tab.V. Fig. 55.

hoc est $= 1 : \frac{z}{x}$ (§. 124).

seu $= x : z$

Sunt ergo curvæ istæ Parabolæ superiorum generum (§. 520).

Vel sit generaliter (§. 516)

$$\begin{array}{c} HP^m : PM^m = PM^n : PI^n \\ v : y^m = y^n : t^n \\ \hline y^{m+n} = t^n v^m \end{array}$$

$$\begin{array}{c} AE^m : EN^m = EN^n : EB^n \\ v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n} \\ \hline q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n} \end{array}$$

Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t z^n v}{x^n}$$
$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvæ DLN superiorum generum Parabolis agnatæ (§. 521).

PROBLEMA CCXXI.

529. *Investigare naturam curvarum, quæ enascuntur, si coni superiorum generum ita secantur, ut axis sectionis* DE *cum diametro basis* AB *continuata in* F *concurrat, planum vero sectionis continuatum eandem ad angulos rectos secet.* Tab.V. Fig. 56.

Patet, ut supra (§. 511), PM & QN esse inter se parallelas atque semiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$, $PM = y$, $QN = z$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & reperietur *ut in Probl.* 217 (§. 512) $QK = vt : x$, $PI = (sa - sx) : (a - v)$. Est vero (§. 516)

Tab.V. Fig.56. $IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$\frac{s^m\,(a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n\, s^m\,(a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n\, t^n}{x^n}$$

$$z^{m+n} = t^n\, v^n\, s^m : x^n$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n\, s^m\,(a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n\, t^n\, s^m}{x^n}$$

hoc est $= (a-x)^m\, x^n : (a-v)^m\, v^n$

Sunt adeo curvæ istæ in numero Ellipsium superiorum generum (§. 523).

PROBLEMA CCXXII.

Tab. IV. Fig.57. 530. *Investigare naturam curvarum, quæ gignuntur, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DQ *cum latere coni continuato* AC, *continuatus & ipse, in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *diametrum basis* AB *ad angulos rectos secet.*

Patet, ut supra (§. 511), PM & QN esse inter se parallelas, atque semiordinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DMN. Sit DE$=a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, PI$=s$; erit EP$=a+x$, EQ$=a+v$, & reperietur *ut in Probl.* 218 (§. 513) AQ$=t(a+v):(a+x)$ & QB$=sv:x$. Est vero (§. 517)

$$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$$

$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n\, s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m\, v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n\,(a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n\, s^m\, v^m\,(a+v)^n}{x^m\,(a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n\, s^m : \frac{t^n\, s^m\, v^m\,(a+v)^n}{x^m\,(a+x)^n}$$

hoc est (§. 124) $= 1 : \dfrac{v^m\,(a+v)^n}{x^m\,(a+x)^n}$

$$= x^m\,(a+x)^n : v^m\,(a+v)^n$$

Sunt adeo curvæ Hyperbolæ superiorum generum (§. 526.)

PROBLEMA CCXXIII.

531. *Diametro semicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT, *ducanturque ex centro* C *secantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipsis* QR *æquales. Investigare naturam curvæ* AMP, *quæ est locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.* Tab.V. Fig.60.

Sit AQ$=$PM$=y$, QM$=$QR$=x$, AB$=a$, erit (§. 379 *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Est adeo curva AMR Hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§. 507).

COROLLARIUM.

532. Habemus adeo facilem Hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata descriptionem.

PROBLEMA CCXXIV.

533. *Invenire æquationem Hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductæ & ad axem transversum* AB *normalem relatæ.* Tab. XIII. Fig. 124.

Sit CQ$=$PM$=x$, CP$=$QM$=y$, CB$=$CA$=a$, erit BP$=a+y$, AP$=y-a$, adeoque BP. PA$=y^2-a^2$. Sit porro parameter $=b$, erit (§. 459)

$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$2ax^2 = by^2 - a^2\, b$$

$$2ax^2 + a^2\, b = by^2$$

$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. XIII. *Fig.* 124. 534. Quodsi Hyperbola fuerit æquilatera, erit $2a = b$ (§. 506), consequenter $y^2 = x^2 + a^2$, sive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. VI. *Fig.* 61. 535. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD secantes in Q, fiatque QM = QN = AE = EF; Curva, in qua sunt puncta M, dicitur a NICOMEDE inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*; altera vero, in qua sunt puncta N, *Conchois secunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem instrumentum, quo motu continuo Conchois prima describi potest. Nimirum in regula AD excavatus est canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri possit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fissuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodsi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; stylus in C Conchoidem primam describet.
Fig. 62.

COROLLARIUM I.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR = a - x$. Crescentibus adeo x, decrescit $a - x$ seu MR, adeoque curva continuo ad regulam BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decrescere debere, adeoque Conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM II.

537. Quoniam tamen inter Conchoidem utramque & rectam BD semper interjicitur recta QM, vel QN, ipsi AE æqualis (§. 535); neutra Conchoidum cum recta BD concurrere potest, consequenter BD est asymptotus utriusque Conchoidis. Tab. VI. *Fig.* 61.

PROBLEMA CCXXV.

538. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$

$$x : \quad a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$; consequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$

$$x : \quad a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo, ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 417 *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc est, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Est adeo Conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO XLIX.

540. Aliæ *Conchoidum* species prodeunt, si fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite si $CE^m : CQ^m = QM^n : AE^n$.

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 61. 541. Quare si CE $= b$, AE $= a$, CQ $= x$, QM $= y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis Conchoidibus $a^n b^n = x^m y^n$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione Hyperbolæ inter asymptotos* (§. 486); *eadem tamen non est, cum in præsente casu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam positione datam, quemadmodum in Hyperbola.*

PROBLEMA CCXXVI.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* CE : CQ $=$ QM : AE.

Sit AE $= a$, CE $= b$, PM $= y$, PE $= x$, erit CP $= b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) CP : CM $=$ CE : CQ $=$ EP : QM. Quare CE. EP : CQ. QM $= CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arithm.*), hoc est, ob CQ. QM $=$ CE. EA *per hypoth.*

CE. EP : CE. EA $= CP^2 : CM^2$

hoc est (§. 181 *Arith.*),

EP : EA $= CP^2 : CM^2$

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2 x + b^2 x + 2bx^2 + x^3$$

quæ est æquatio desiderata.

DEFINITIO L.

Tab. VI. Fig. 63. 544. Diametro AB semicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH, fiatque AM $=$ IH, vel in altero quadrante LC $=$ AN: erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Cissoidem* dixit DIOCLES inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) AP : KB $=$ AM : IH. Sed AM $=$ IH (§. 544). Ergo AP $=$ KB (§. 149 *Arithm.*), consequenter AK $=$ PB (§. 88 *Arithm.*), & PN $=$ IK. Tab. VI. Fig. 63.

COROLLARIUM II.

546. Eodem modo patet, Cissoidem AMO semicirculum AOB bifariam dividere. Est enim AO : OF $=$ AG : GB (§. 268 *Geom.*). Sed AO $=$ OF (§. 544). Ergo AG $=$ GB (§. 149 *Arithm.*). Est itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM III.

547. AK : KI $=$ KI : KB (§. 327 *Geom.*), hoc est, AK : PN $=$ PN : AP (§. 545). Porro AK : (KI) PN $=$ AP : PM (§. 268 *Geom.*). Ergo PN : AP $=$ AP : PM (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, si fiat PN $= v$, AP $= x$, PM $= y$, $x^2 = vy$. Eodem modo ostenditur esse AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA CCXXVII.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Cissoidis* AMOL *declarat.*

Sit AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit AK $=$ PB (§. 545) $= a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547, 124)

$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2 y^2 - 2axy^2 + x^2 y^2 = ax^3 - x^4 \quad (a - x \text{ div.})$$

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc est, $(a - x) y^2 = x^3$

Theorema. In Cissoide DIOCLIS cubus abscissæ AP æquatur solido ex quadrato semiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROL-

COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 63. 549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & BC $= y$, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{o}$ Quare $o : 1 = a^3 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, adeoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrit. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

COROLLARIUM II.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* PAPPUS.

DEFINITIO LI.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ *Logistica*, itemque *Logarithmica* vocari solet.

COROLLARIUM I.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c. semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

554. Hinc si AP $= x$, A$p = v$, PM $= y$, $pm = z$, & logarithmi ipsorum y & $z = ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$; consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

COROLLARIUM III.

555. Quamobrem infinitas alias logisticas excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM IV.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm cum abscissis continuo crescente (§. 552 *Analys.* & §. 205 *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§. 554.). Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX est ejus asymptotus. Tab. VI. Fig. 64.

DEFINITIO LII.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p, &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. resecentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in *Logistica spirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM I.

558. Sunt ergo arcus AP, Ap &c. logarithmi ordinatarum CM, Cm &c.

COROLLARIUM II.

559. Unde liquet, infinitas logisticas spirales excogitari posse (§. 555).

DEFINITIO LIII.

560. Si quadrans BGD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales Ah, hi, ik, kC, tandemque in punctis h, i, k, C applicentur normales eh, ig, kf, Cd ipsis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, e, g, f, d erunt in Linea, a LEIBNITIO inventore *Linea Sinuum* dicta. Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*) erunt abscissæ Ah, Ai, Ak, AC ut arcus seu anguli, semiordinatæ eh, ig, kf, Cd, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

DEFINITIO LIV.

Tab. VI. Fig. 66. 562. Iisdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcipimus, fiant *eh*, *ig*, *kf* &c; tangentibus BL, BM, BN &c. vel secantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

COROLLARIUM.

563. In linea tangentium abscissæ sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem tangentes: in secantium vero linea abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem secantes.

DEFINITIO LV.

Tab. VI. Fig. 67. 564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam bisectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. istis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam DINOSTRATES inventor *Quadratricem* appellavit.

COROLLARIUM.

565. Est ergo ANB : AN = AC : AP. Quare si fiat ANB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP $= y$; erit $ay = bx$.

DEFINITIO LVI.

Tab. VI. Fig. 68. 566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur, ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ PM, *pm* &c. ipsi CB; ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m*, &c. sunt in *Quadratrice Tschirnhusiana* a D^no^ DE TSCHIRNHAUSEN ad imitationem alterius excogitata (*a*).

(*a*) In *Medicina Mentis* part. II. p. 114.

COROLLARIUM I.

567. Cum etiam hic ANB : AN = AC : AP; Quadratrix quoque *Tschirnhusiana* continetur sub æquatione $ay = bx$. Tab. VI. Fig. 68.

COROLLARIUM II.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus arcus AN (§. 2. *Trigon.*). Quare cum sit AP : A*p* = AN : A*n* (§. 566); abscissæ Quadratricis hujus sunt ut arcus & semiordinatæ ut sinus eisdem respondentes, quemadmodum in linea sinuum (§. 561).

DEFINITIO LVII.

569. Peripheria circuli AP*p* A dividatur in partes quotcunque æquales in punctis, P, *p*, per continuam bisectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, C*m* vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, *m*, *m*, &c. in linea curva, quam ab inventore ARCHIMEDE dicunt *Spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari potest, circulo duplo radio descripto: immo *secunda* continuatur, descripto radio circulo triplo & ita porro in infinitum. Tab. VII. Fig. 69.

COROLLARIUM I.

570. Est ergo AP ad peripheriam ut CM ad radium. Quare si peripheria dicatur p, radius AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$, erit CM $= r - y$, consequenter ob $p : r = x : r - y$; habebimus $pr - py = rx$.

COROLLARIUM II.

571. Si CM $= y$; erit $rx = py$: quam æquationem cum Quadratrice tam DINOSTRATIS, quam TSCHIRNHUSII, communem habet spiralis.

Co-

Corollarium III.

572. Quare pro infinitis spiralibus & quadratricibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

Definitio LVIII.

Tab. VII. Fig. 70. 573. *Cyclois* vel *Trochois* est curva, quam describit punctum *a* in peripheria circuli, si circulus super recta AC rotatur.

Corollarium I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD semiperipheriæ circuli æqualis est, & in quocumque circuli genitoris situ A*d* arcui P*d*.

Corollarium II.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui BM circuli genitoris æqualis. Est enim P*d* = A*d* & hinc P*b* = *d*D (§. 574). Quare cum NL = D*d* (§. 226 *Geom.*) & ob P*b* = MB etiam PN = ML (§. 12 *Trigon.*); erit etiam PN + NM = PM = ML + NM = NL = D*d*; consequenter ob D*d* = P*b* = MB, *per demonstr.* PM = MB. Sumto igitur arcu MB pro abscissa, PM pro semiordinata, si BM = x, PM = y; erit $x = y$.

Definitio LIX.

576. *Epicyclois* describitur, si circulus non ut in præcedente definitione super recta, sed super peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois superior*, si circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, si ejus concavitatem emetitur.

Scholion I.

577. *Logarithmica, Logistica spiralis, Linea sinuum, Linea tangentium, Linea secantium, Quadratrix* Dinostratis, *Quadratrix* Tschirnhusiana, *Spiralis* Archimedea, *Cyclois, Epicyclois sunt lineæ transcendentes; neque enim per æquationes algebraicas explicari possunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his assumserimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non sunt. Supposuimus enim superius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per solas lineas rectas explicare debere.*

Scholion II.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari possunt & actu excogitatæ sunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime consultum est. Trademus autem in Analysi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, sed etiam aliarum quarumcunque symptomata, si quando iis opus habemus, erui possunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari possint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

Problema CCXXVIII.

Tab. XIII. Fig. 125. §. 579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, si semiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.*

Facile apparet, curvas infinitas, immo infinitas earum series construi posse. Æquatio igitur in dato casu specciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter a. Sit in omni casu AP $= x$, PN $= y$; erit PM$^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum AP$^2 = x^2$, & AM$^2 =$ AP^2 + PM^2 (§. 417 *Geom.*); erit AM$^2 = ax$, consequenter æquatio ad curvam genitam AND, $y^2 = ax$. Est itaque curva AND Parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC Parabola: erit PM$^2 = ax$ (§. 388); consequenter AM$^2 =$ PN$^2 = ax + x^2$. Quoniam itaque

Tab. XIII. *Fig.* 125. itaque æquatio ad curvam AND, $y^2 = ax + x^2$; erit ea Hyperbola æquilatera, cujus axis transversus $= a$ (§. 507).

Sit curva genetrix AMC Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, consequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND, $y^2 = ax + 2x^2$, adeoque eadem Hyperbola scalena, cujus parameter a, axis transversus vero $= \frac{1}{2}a$ (§. 459).

Sit AMC Parabola secundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§. 519), adeoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam sit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4x^2$, seu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2 - x^6 = a^4x^2$.

SCHOLION.

580. *Patet per Problema præsens plurimarum curvarum descriptiones facillimo negotio detegi posse: quod idem per sequentia quoque Problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem* AB *applicari posse tangentes, subtangentes, normales, subnormales, & quascunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto subinde Theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipsa resolutione Problematis præsentis continentur,* v. gr. *Quod, si Parabola circa diametrum circuli describatur, chordæ circuli* AM *sint semiordinatis Parabolæ* PN *æquales.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. XIII. Fig. 126. 581. *Investigare naturas curvarum, quæ gignuntur, si ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *semiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam secans in* N.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam MAN angulus rectus *per hypothesin*; erit $PM : AP = AP : PN$ (§. 327 *Geom.*); consequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$; consequenter si $AP = x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipsius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur. Tab. XIII. *Fig.* 126.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax - x^2$, adeoque æquatio ad curvam ANR, $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois DIOCLIS (§. 548).

Sit curva genetrix Parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est igitur ANR Parabola secundi generis (§. 519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex Parabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$ hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR Parabola proxime superior genetrice. Unde patet modus describendi omnes Parabolas in infinitum, quæ continentur sub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, adeoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Est igitur ANR curva secundi generis affinitatem quandam habens cum Cissoide; sed quæ peculiari nomine destituitur.

Sit curva genetrix Ellipsis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc est $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHOLION I.

582. *Si Circuli superiorum generum sumuntur pro genetrice, Cissoides superiorum generum erunt genitæ.*

PROBLEMA CCXXX.

Tab. XIII. Fig. 127. 583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AΓ *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis constantis; investigare naturam curvæ, in qua est punctum* N, *quod determinatur, demissa ex* S *perpendiculari* SR *ad semiordinatam genetricis* PM *& ducta recta* QN *par punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela, rectæ* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ductæ occurrente in* N.

Sit $AS = a$, $AQ = x$, $QN = y$, erit ob parallelas SR & QN (§. 268 *Geom.*)

$$AS : (SR)\ QM = AQ : QN$$ Tab. XIII. Fig. 127.

$$a : QM = x : y$$

adeoque $\frac{QM.\, x}{a} = y$

Sit AMK Parabola *Apolloniana*, erit $QM = x^2 : a$. Est igitur

$$\frac{y = x^3 : a^2}{a^2 y = x^3}$$

quæ est æquatio ad Parabolam secundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis Parabolis, erit $QM = x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*), adeoque $y = x^{m+1} : a^m$; consequenter $a^m y = x^{m+1}$. Est igitur curva genita Parabola proxime superior genetrice, patetque simul modus describendi Parabolas omnes in infinitum, quæ continentur sub æquatione $a^{m-1} x = y^m$.

CAPUT VII.

De Locis Geometricis.

DEFINITIO XL.

584. LOcus Geometricus est linea, per quam construitur Problema indeterminatum. In specie *Locus ad rectam* dicitur, si linea recta æquationi construendæ sufficit; *Locus ad circulum*, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO XLI.

385. Loca ad lineam rectam & circulum Veteres dixere *Loca plana*: quæ vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, *Loca solida*. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* est, si æquatio $x = ay : c$. *Locus secundi seu quadratici ordinis*, si ex. gr. $y^2 = ax$, vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii seu cubici ordinis*, si ex. gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA CCXXXI.

585. *Construere loca ad rectam.* Tab. VII.

Si $y = ax : b$; $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, vel $y = c - ax : b$; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $AI = b$, IE $= a$: Fig. 71.

Tab. VII. Fig. 71. ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit $IG = c$, per G agatur DF ipsi AB, & ex A, AD ipsi EI parallela, erit $AP = DQ = x$, $QM, = y$. Est enim $PM = ax : b$, *per demonstr.* $PQ = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo $QM = ax : b + c = y$.

Si $LG = b$, $GE = a$ & $LQ = x$: erit $QM = ax : b$, *per demonstr.* Fiat $IG = c$ & per I ducatur ipsi DF parallela AB, erit $PQ = c$ (§. 257 *Geom.*), consequenter $PM = ax : b - c$.

Tab. VII. Fig. 72. Denique sit $AC = c$ & $AD = b$; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela fiatque $DE = a$. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN ad EF agatur: erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

$$AD : DE = AP : PN$$
$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed $MN = AC = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo $PM = c - ax : b$.

PROBLEMA CCXXXII.

587. *Invenire Theoremata generalia construendi omnes aequationes ad Parabolam.*

Duo Theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem Parabolae.

Tab. VII. Fig. 75. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelae, & LDH angulus quicunque. Sit porro $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257 *Geom.*) $= n$, $DL = f$, & parametro t describatur Parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro $DQ = x$, $QM = y$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN\ (= PK)$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo $AP = PK - KA = fx : q - p$ & $PM = QM - PN - QN = y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum sit $PM^2 = t.\ AP$ (§. 388), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tfx}{q} - tp$$

hoc est,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tfx}{q} + tp$$

Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257 *Geom.*) $= n$, $DI = f$, $IM = DQ = y$, $QM = x$. Parabola AM denuo parametro t describatur. Tab. VII. Fig. 76.

Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = fy : q - p$ & $PM = QM$

Tab. VII. Fig.76. $= QM - QN - PN = x - ry : q - n$. Quare cum sit $PM^2 = t . AP$; erit (§. 388, 419),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - tp$$

hoc est,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsy}{q} + tp$$

Tab. VII. Fig.75. Sit ex.gr. $y^2 - ax = 0$, erit $-\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $s = q$; porro $n = 0$ & $ts : q = a$, hoc est, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, nec alia re opus est, quam ut parametro a Parabola AM describatur: erit enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r : q = 0$, consequenter H cadit in L, adeoque $s = q$. Porro $a = -2n$: ergo $-\frac{1}{2}a = n$. Item $-t = -b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$, hoc est, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Cadit adeo punctum K in A. Parametro itaque
Tab. VII. Fig.74. b describenda Parabola AM & in A erigenda perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a$, $MS = y$ & $BS = x$.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $q = s$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{n^2 + tp = -cc}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}aa}$$
$$p = (-c^2 - \tfrac{1}{4}a^2) : b$$

Parametro ergo b describenda Parabola AHM, & quia KA, sive p, est quantitas negativa, auferenda est ex AP, ita ut origo indeterminatae x statuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP, erit $NQ = RP = x$, & $QM = y$.

Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit, vi Theorematis secundi, $r:q = 0$, adeoque $q = s$. Porro $n = 0$ & Tab. VII. Fig.74.

$$\frac{-t = -a}{t = a} \qquad \frac{\dfrac{tp = bb}{ap = bb}}{p = \frac{bb}{a}}$$

Construitur adeo Parabola AHM parametro a, factaque $AK = bb : a$; erit $KP = y$, $PM = x$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$-\frac{2r}{q} = -\frac{a}{b} \quad 2n = 0 \quad -\frac{ts}{q} = -c$$
$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \quad n = 0 \quad t = \frac{qc}{s} = \frac{2bc}{s}$$
$$n^2 + tp = 0$$
$$p = 0$$

Construatur itaque parametro $2bc : s$ Parabola AHM, & factis $AO = 2b$, atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipsi OR parallela $= y$, $AT = x$.

Ceterum loca esse rite constructa patet, si assumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quaeratur aequatio ad curvam, eademque cum proposita reperiatur. Etenim si in exemplo ultimo $AO = 2b$, $RO = a$, parameter $= 2bc : s$, $AT = x$, $TM = y$, cum sit

$$AO : AR = AT : AP$$
$$2b : s = x : \frac{sx}{2b}$$

erit $t . AP = 2bcsx : 2bs = cx$.

Et quia $AO : OR = AT : TP$

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{2b} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, consequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quae est aequatio ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIII.

588. *Invenire Theorema generale construendi omnia loca solida ad Ellipsin.*

Tab. VII. Fig. 78. Circa diametrum AB descripta sit Ellipsis AMB, sintque KD & LH semiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD $=$ PN $= n$, KC $= p$, DH $= q$, LH $= r$, DL $= s$, semidiameter AC vel CB $= m$, parameter $= t$, DQ $= x$, QM $= y$. Erit (§. 257 *Geom.*) KP $=$ DN, & (§. 268 *Geom.*)

$$\mathrm{DH : HL = DQ : QN}$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$\mathrm{DH : DL = DQ : DN}$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Quare CP $=$ DN $-$ KC $= sx : q - q$ & PM $=$ QM $-$ QN $-$ PN $= y - rx : q - n$. Jam ex natura Ellipsis (§. 420),

$$t : 2m = \mathrm{PM}^2 : \mathrm{AP.\,PB}.$$

Est vero $\mathrm{PM}^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, AP $= m + \frac{sx}{q} - p$ & PB $= m - \frac{sx}{q} + p$, adeoque AP.PB $= m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. *cit.*) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}$$

Sit ex. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x: erunt $r : q = 0$, $q = s$, $n = 0$, $p = 0$; hinc $t : 2m = c : b$, hoc est, $c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, substituto pro $t : 2m$ valore ipsius ante invento $c : b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc semidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m : t = b : c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ construatur Ellipsis AMB; erit CP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $n = 0$; consequenter $s = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum est $= b : c$. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, seu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = aa$, seu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Est itaque semidiameter $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$. Quodsi ergo semidiametro $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$ & parametro $2c\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)} : b$ describatur Ellipsis, fiatque KC $= \frac{1}{4}d$; erit KP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit $2r : q = d : f$, adeoque $r : q = d : 2f$. Porro $r^2 : q^2 + ts^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc est $d^2 : 4f^2 + ts^2 : 2m.4f^2 = b : c$, consequenter $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cf^2$. Est denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, consequenter $m^2 = a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \sqrt{a^2cf^2} : \sqrt{(4bf^2 - cd^2)}$. Hinc vero porro ad datam rationem $2m : t$ reperitur parameter t. Quare si parametro t & diametro $2m$ Ellipsis construatur, fiatque CF $= 2f$, DF $= d$, ducta recta CQ ex C per F semiordinatæ PM continuatæ in Q occurrente, erit QM $= y$, CQ $= x$. Tab. VII. Fig. 77.

Locum rite esse constructum, eodem modo quo in Parabola ostenditur. Etenim

CF

Tab. VII. *Fig.* 77.

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare $PM = y - \frac{dx}{2f}$, consequenter $PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$.

Porro $CF : CD = CQ : CP$
$$2f : \int = x : \frac{\int x}{2f}$$

Quare $AP = \sqrt{\frac{aac\int^2}{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{\int x}{2f}$ & $PB = \sqrt{\frac{aac\int^2}{(4bf^2 - cd^2)}} - \frac{\int x}{2f}$, consequenter $AP.PB = \frac{aac\int^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{\int^2 x^2}{4f^2}$. Est itaque $\frac{t}{2m}.AP.PB = (4bf^2 - cd^2)\, a^2 c\int^2 : c\int^2 (4bf^2 - cd^2) - (4bf^2 \int^2 x^2 - cd^2 \int^2 x^2) : 4cf^2 \int^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$; consequenter cum sit in Ellipsi $\frac{t}{2m}.AP.PB = PM^2$ (§. 420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in Ellipsi sit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§. 420); si $b = a$, hoc est, si parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, seu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ est æquatio ad Circulum (§. 377). Æquatio itaque localis ad Ellipsin degenerat in æquationem localem ad Circulum: si ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0.$$
$$\qquad + \frac{\int^2 x^2}{q^2} \qquad - \frac{2p\int x}{q} \quad \begin{matrix} - m^2 \\ + p^2 \end{matrix}$$

Ceterum cum ex comparatione formulæ propositæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro construendis locis ad Ellipsin atque ad Circulum sufficit.

Ponamus ex. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deest, erit $r : q = 0$, consequenter $\int = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Locus adeo planus est ad Circulum. Porro

$$\begin{array}{ll} -2n = -b & -2tp : 2m = -c \\ \hline n = \frac{1}{2}b & 2p = c, \text{ ob } t = 2m. \\ & \hline p = \frac{1}{2}c \end{array}$$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
h. e. $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = m^2$
$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$$

Quare ducta linea recta AB & in ea assumta $CN = GD = \frac{1}{2}c$, si porro fiat $GN = CD$, & ad AB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$, atque ex centro C radio CG describatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$. Tab. VII. *Fig.* 73.

Cum enim sit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§. 417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$. Porro, ob $PR = GN$ (§. 257 *Geom.*) $= \frac{1}{2}b$, est $PM = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$. Similiter $CP = PN - NC = x - \frac{1}{2}c$, adeoque $CP^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}cc$. Quare cum sit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 + x^2 - cx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$: quæ est æquatio localis ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIV.

590. *Invenire Theorema generale construendi omnia loca ad Hyperbolam circa diametrum descriptam.* Tab. VIII. *Fig.* 80.

Diametro transversa $AB = 2m$ & parametro t descripta sit Hyperbola AM, cujus centrum in C, ductisque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis; fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = \int$, $DQ = x$, $QM = y$, erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

 DH:

Tab. VIII. *Fig.* 80.

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459)

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB$$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP.PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 499) $= \frac{s^2x^2}{q^2} - \frac{2psx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur $\frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$.

Quare aequatio generalis pro quovis loco hyperbolico,

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} & - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0 \\ - \frac{ts^2x^2}{2mq^2} & \qquad + \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m} \\ & \qquad\qquad - \frac{tp^2}{2m} \end{aligned}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, Hyperbola est aequilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, si Hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, nisi quod $tm^2 : 2m$ signo $-$ afficiatur.

Sit ex. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0$. Cum in aequatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $s = q$; consequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = aa$. Diameter adeo Hyperbolae $2a$: unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri diameter potest. Quare si datis diametro & parametro Hyperbola AML construatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Est enim $AC = CB = a$, adeoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, consequenter $AP.PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Est itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$. Tab. VIII. *Fig.* 79.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in aequatione desiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = 0$, $n = 0$ & quia (ob $r = 0$), DL coincidit cum DH, $s = q$. Quamobrem *Fig.* 80. $-t : 2m = -c : b$, hoc est, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc est, (ob $t : 2m = c : b$,) $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; constructa Hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$: quod ostenditur ut ante. *Fig.* 79.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy desideratur; erit $r : q = 0$, consequenter $s = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam aequilateram (§. 505). Porro

$$\begin{array}{ll} -2n = +b & 2tp : 2m = -a \\ \hline n = -\frac{1}{2}b & 2p = -a, \text{ob } t = 2m \\ \hline & p = -\frac{1}{2}a. \end{array}$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$
$$\overline{n^2 + m^2 = p^2}$$
$$\overline{m^2 = p^2 - n^2}$$

hoc est, $m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur Hyperbola aequilatera AML, fiatque

CR =

Tab. VIII. *Fig.* 79. $CR = \frac{1}{2}a$, $KR = GP = \frac{1}{2}b$; erit $KG = RP = x$, $GM = y$. Est enim $PB = CB + CR + RP = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & $AP = AR + RP = CR - CA + RP = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, adeoque $AP.PB = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = GM + GP = y + \frac{1}{2}b$: adeoque $PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, consequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy desideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = s$. Quare $t : 2m = 1$, seu $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam æquilateram. Porro

$$\frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{n^2 + m^2 - p^2 = 0}{m^2 = p^2 - n^2}$$
$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$
$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur Hyperbola æquilatera AML, factaque CF ex centro $C = \frac{1}{2}a$ & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipsi FP & NM ipsi FH parallelis; erit $HN = x$, $NM = y$. Est enim $BP = FP - BF = x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, $AP = FP - FA = x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque $AP.PB = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = MN - PN = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA CCXXXV.

Tab. VIII. *Fig.* 81. 591. *Invenire Theorema generale construendi omnia loca solida ad Hyperbolam intra asymptotos.*

Sint SA & AR asymptoti Hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri asymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = s$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{sx}{q} - p$ & $PM = QM - PN - NQ = y - n - rx : q$.

Quare ob $AR.\,RI = AP.\,PM$ (§. 502).

$$ms = \frac{syx}{q} - \frac{srx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$msq = syx - \frac{srx^2}{q} - pqy - snx + prx + pnq$$
$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} - nx + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}$$
$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} \underset{-nx-mq}{+ \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}} = 0.$$

Tab. VIII. *Fig.* 82. Invenitur adhuc regula alia pro locis ad Hyperbolam intra asymptotos, si valor ipsius x ponatur esse QM.

Sit nimirum IM Hyperbola, cujus asymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QM cum asymptoto AS, DL vero cum altera KR, & TM ipsi DH utcunque ductæ parallela. Sit ut ante $AK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $DL = AR = s$, $HL = r$, $RI = m$, $QM = x$, $DQ = TM = y$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Er-

Tab. VIII. Fig. 82. Ergo AP = DN − AK = $sy : q - p$ & PM = QM − QN − NP = $x - ry : q - n$.

Quare ob AR. RI = AP. PM (§. 502)

$$ms = \frac{sxy}{q} - \frac{rsy^2}{q^2} - \frac{sny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{s} + \frac{pry}{s} + \frac{pnq}{s} = 0.$$
$$\qquad\qquad - ny \qquad - mq$$

Sit ex. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$: erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & hinc $q = s$, quia L cadit in H, $-pq : s = +fd : c$, hoc est,
Fig. 81. ob $q = s$, $p = -fd : c$. Porro $+pr : s - n = 0$, quia x in æquatione præsente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : s - mq = -abd : c$. Sed $pnq : s = 0$; ergo $mq = ms = abd : c$. Quare si $s = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur AR $= ab : c$, & IR $= d$, atque constructa Hyperbola intra asymptotos, porro OA $= fd : c$; erit OP $= x$, PM $= y$. Nam AP $= x + fd : c$ adeoque AP. PM $= xy + fdy : c$. Quare cum sit AR. RI $= abd : c$, erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

adeoque $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$.

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $-pq : s = -c$. Ergo $p = sc : a$. Cum x in æquatione desit; $pr : s - n = 0$, seu $pr : s = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : s - mq = 0$, seu $pnq : s = mq$, vel $pn : s = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim AK $= sc : a$, KD $= bc : a$, DH $= a$, HL $= b$, DL $=$ AR $= s$, RI $= bc^2 : a^2$, DQ $= x$, QM $= y$: His enim positis, erit AR. RI $= sbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 *Geom.*).

DH : DL = DQ : DN   Tab. VIII. Fig. 81.

$$a : s = x : \frac{sx}{a}$$

Quare cum sit KA $= sc : a$, erit AP $= (sx - sc)\; a$. Est vero etiam

DH : LH = DQ : QN

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit KD = PN $= bc : a$, & QM $= y$, erit PM $= y - bx : a - bc : a$. Habemus adeo AP. PM $= \frac{sxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bsx^2}{a^2} + \frac{bsc^2}{a^2}$.

Quoniam itaque AR. RI = AP. PM, erit $\frac{sxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bsx^2}{a^2} + \frac{bsc^2}{a^2} = \frac{bsc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot Problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur* xy, *aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est Hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum* x^2 *&* y^2 *diversis signis afficiuntur, locus est Hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coëfficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus est Parabola; si minor, Hyperbola; si major, Ellipsis. In casu posteriori, si unum tantum quadratorum indeterminatorum adsit, locus est Parabola; si utrumque eodem signo afficiatur, Ellipsis vel Circulus; si signis diversis gaudeant, Hyperbola. Nempe in casu ultimo Hyperbola est æquilatera, in penultimo Circulus, si terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione.*

Quod

Quod si quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas ista ex parte opposita sumenda est, quemadmodum in exemplis propositis a nobis factum.

PROBLEMA CCXXXVI.

593. *Construere Rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus sit aequale quadrato dato.*

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2, sint latera rhomboidis x & y: erit per conditionem Problematis $xy = a^2$. Construenda itaque est Hyperbola intra asymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 488).

PROBLEMA CCXXXVII.

594. *Quadratum construere, quod sit aequale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui est locus ad Hyperbolam aequilateram, cujus parameter $= b$ (§. 507).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = f$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Est vero $-tf^2 : 2mq^2 = -1$, hoc est, ob $q^2 = f^2$, $t : 2m = 1$ seu $t = 2m$. Unde apparet, locum esse ad Hyperbolam aequilateram. Est praeterea $2tpf : 2mq = -b$, hoc est, ob $t = 2m$ & $f = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc est, $m^2 - p^2 = 0$, seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Constructio ex constructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transversa AB $= 2m$, pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia semidiametro in hoc casu aequalis. Unde origo indeterminatae x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, consequenter in nostro casu in A cadit. Porro, ob HL $= 0$, puncta H & L, adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, consequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatae y est in P. Tab. VIII. Fig. 80.

Est enim BP $= b + x$, adeoque AP. PB $= bx + x^2$. Quare cum PM$^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA CCXXXVIII.

595. *Super data recta* AB *triangulum construere, ita ut quadrata laterum* AC *&* CB *sint in ratione data.* Tab. VIII. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB $= x$
AB $= a$ DC $= y$
erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 417 *Geom.*) AC$^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, & CB$^2 = x^2 + y^2$; erit, per conditionem Problematis,

$$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$
$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$
$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$
$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Haec aequatio comparanda est cum aequatione generali locorum ad Ellipsin, quia deest xy, & y^2 atque x^2 eodem signo afficiuntur (§. 592). Reperitur adeo (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = 0 \qquad r^2 : q^2 + tf^2 : 2mq^2 = 1$$

hinc:

$$r = 0 \;\&\; q = f \qquad 2nr : q = 0 \qquad t : 2m = 1$$

h. e. $t = 2m$

Tab. VIII. Fig. 83. Cum diameter $2m$ parametro æqualis fit; locus ad construendum propositus est Circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$\text{h. e. } 2p = -\frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$p = -\frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\text{h. e. } \frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Est ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodsi igitur AL $= ac : (b-c)$, & radio CL $= a\sqrt{bc} : (b-c)$ describatur circulus ECF; erit AD $= x$, DC $= y$. Nam ponatur brevitatis gratia AL $= p$, LF $= m$; erit DL $= p - x$, ED $= m - p + x$ & DF $= m + p - x$, consequenter, ob ED. DF $=$ DC^2, $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$.

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 - m^2 = 0$$

hoc est, substitutis valoribus p & $p^2 - m^2$ erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA CCXXXIX.

Tab. VIII. Fig. 84. 596. *Duas rectas* AB *&* CD *ita secare in* E *&* F, *ut* AE. EB $=$ CF. FD.

Sit AB $= a$, AE $= x$ Tab. VIII. Fig. 84.
CD $= b$, CF $= y$
erit EB $= a - x$
FD $= b - y$

$$\text{Quare } ax - xx = by - yy$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro Hyperbola. Est nempe

$$\frac{2r}{q} = 0 \ \&\ \text{hinc } \frac{q = s}{q^2 = s^2} \qquad \frac{r^2}{q^2} = 0 \qquad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$-\frac{ts^2}{2mq^2} = -1 \qquad \frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2tps}{2mq} = a$$

$$t : 2m = 1 \qquad\qquad 2p = a$$

$$t = 2m \qquad\qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc est, parameter diametro æqualis, Hyperbola est æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$ construenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut sit FH $=$ PN $= \frac{1}{2}b$ & CF $= \frac{1}{2}a$, erit HN $= x$ & MN $= y$. Est enim CP $= x - \frac{1}{2}a$; PM $= y - \frac{1}{2}b$, & AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$. Quare, ob AP.PB $=$ CP^2 $-$ AC^2 $=$ PM^2, Tab. VIII. Fig. 79.

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

PRO-

PROBLEMA CCXL.

Tab. VIII. Fig. 85. 597. *Super recta* AB *descriptus sit semicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.*

Sit $AB = a$, $ED = d$, $AP = x$, $PM = y$: erit $PB = a - x$, $PN = \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), $PC = \frac{1}{2}a - x$, $NR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 *Geom.*)

$$NC : NP = NR : NM$$

$$\tfrac{1}{2}a : v = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$$

Quare $PM = v - \frac{av - dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$; consequenter $PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2, quæ æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h. e. $PM^2 : PA.\,PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M esse Ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLION.

598. *Apparet adeo curvam, quam fornicibus construendis aptam prædicat* SERLIUS (k) *esse Ellipsin.*

COROLLARIUM.

599. Quoniam $PN = v$, $PM = \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$; erit $PN : PM = v : \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$ hoc est (§. 124) $= \frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = CG : CF$

(k) *Architect.* lib. 1. c. 1. f. m. 9. b.

PROBLEMA CCXLI.

600. *Super recta* HI *describatur semicirculus* HGI. *Sit recta quæcunque* AB *bifariam divisa in* C *& ex* C *erecta perpendicularis* $CD = GF$. *Erecta perpendicularis* LN *fiat* $DC : AC = HL : AP$, *& in* P *erigatur perpendicularis* $PM = NL$. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.* Tab. VIII. Fig. 86.

Sit $HF = GF = DC = d$, $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$: erit, ex hypothesi,

$$AC : DC = AP : HL$$

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare $LI = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddxx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque, ex hypothesi,

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Est igitur locus quæsitus Ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens adeo est, curvam, quam* Albertus DURERUS *& cum ipso* Daniel HARTMANNUS (l) *fornicibus construendis aptam prædicant, esse Ellipsin* Apollonianam.

PROBLEMA CCXLII.

602. *Rectam* DB *ita secare in* P *simulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *sit æquale rectangulo ex segmentis partium* DP *&* PB. Tab. VIII. Fig. 87.

Sit $DB = a$, $AC = b$, $DP = x$, erit $PB = a - x$, consequenter, per conditionem Problematis,

 $ax -$

(l) *In der Bürgerlichen Bau-Kunst*, f. 7. & seqq.

Tab. VIII. Fig. 87.

$$ax - xx = by$$

$$x^2 - ax + by = 0.$$

Est itaque locus ad Parabolam (§. 592).

Quodsi cum æquatione locali ad Parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = -a \qquad -ts : q = b$$

$$\text{hinc } q = s \qquad n = \tfrac{1}{2}a \qquad t = -b$$

$$nn + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa - bp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa = bp$$

$$\tfrac{1}{4}aa : b = p$$

Est adeo parameter $= -b$. Quare parametro b describenda est Parabola deorsum tendens AMB, cujus pars altera AD, seu quod perinde est, describitur Parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit AK $= \frac{1}{4}aa : b$, erit KB $= \frac{1}{2}a$ (§. 388) $= \frac{1}{2}$DB, adeoque DB linea ad secandum proposita. Ducta igitur PM ipsi AK parallela, erit PB $= x$, PM $= y$. Nam KP $=$ RM $= \frac{1}{2}a - x$ & AR $= \frac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - by$, consequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA CCXLIII.

Tab. VIII. Fig. 88. 603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales secare.*

Sit MN $= a$, pars prima $= x$, secunda $= y$, erit tertia $= yy : x$ &, per conditionem Problematis,

$$x + y + yy : x = a$$

$$xx + xy + yy = ax$$

$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus sit ad Circulum (§. 592); æquatio comparanda est, cum formula generali ad Circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc est, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{s^2}{q^2} = 1 \qquad 2n = 0.$$

$$\tfrac{1}{4} + \frac{s^2}{4} = 1 \qquad \text{hinc } \frac{2nr}{q} = 0$$

$$1 + s^2 = 4 \qquad n^2 = 0$$

$$s^2 = 3 \qquad -\frac{2ps}{q} = -a$$

$$\frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$$

$$s = \sqrt{3} \qquad p = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$

$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Describatur ergo radio AC $= a : \sqrt{3}$ semicirculus, fiat (ob valorem negativum ipsius r) HL : AL $= 1 : \sqrt{3}$, ob valorem scilicet ipsius r negativum triangulum ALH contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H: ita enim prodit $s = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per Theorema *Pythagoricum*. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit AQ $= x$, QM $= y$. Nam (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. Fig. 88.

$$\text{AH} : \text{HL} = \text{AQ} : \text{QP}$$

$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde PM $= y + \frac{1}{2}x$ & PM$^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

Porro AH : AL $=$ AQ : AP

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde

Tab. VIII. *Fig.* 88. Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ & $AP \cdot PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo (§. 377),

$$y^2 + xy + \tfrac{1}{4}xx = ax - \tfrac{3}{4}x^2$$

$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

S C H O L I O N.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum, ad construenda loca hypersolida. Primus formulas generales computavit* Joannes Craigius (*a*), *earumque usum deinde uberius exposuit* Hospitalius (*b*).

C A P U T VIII.

De Constructione Æquationum superiorum.

P R O B L E M A CCXLIV.

605. *Æquationem quamcunque geometrice construere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.
3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim intersectio radices determinabit.

S C H O L I O N.

606. *Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit* Renatus Franciscus Slusius, *Canonicus* Leodiensis (*c*): *quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus, eam exemplis cubicarum imprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas sufficiunt, quæ de locis planis & solidis in capite præcedente tradidimus.*

(*a*) In *Tractatu de Figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis* p. 62. & seqq.

(*b*) *Traité analytique des Sect. coniq.* lib. 3. p. 206. & seqq.

(*c*) *Mesolabo* Part. 2. integra.

P R O B L E M A CCXLV.

607. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio proposita $y(y^2 + ab) = aac$ in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§. 167 *Arithm.*)

hoc est, $= ax + ab : ac$

seu (§. 124.) $= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

IV. $x^2 + ax + bx = y^2 + cy$

$$x^2 + bx = cy$$
$$x^2 + \frac{by_2}{a} = cy$$
$$\text{V. } y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$$
$$y^3 + aby = aac$$
$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$
$$\text{VI. } xy + by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax - bx = 0$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy + by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Ellipsin; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest, duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi Circulum cum una ex Sectionibus conicis combinari, non tam quod Circulus sit locus planus (ut vulgo cum CARTESIO sentiunt;) sed quia facilius describitur Sectionibus coni.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Locus prior construitur, si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP $= x$, PM $= y$ (§. 587). Tab. IX. Fig. 89.

Pro Circulo erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad 2n = c \qquad -2p = b - a$$
$$\text{\& hinc } q = s \qquad n = \tfrac{1}{2}c \qquad -p = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}a$$
$$(r^2 + s^2) : q^2 = 1$$
$$\text{seu } s = q$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Quodsi ergo radio AL $= m$ semicirculus AMB describatur, sumaturque LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ deorsum, quia valor ipsius p negativus, & KD $= \frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A, ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588, 589) origo indeterminatæ x in D, nempe DQ $= x$ & QM $= y$. Tab. IX. Fig. 90.

Si jam Circulus cum Parabola combinandus, quo eadem sit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ super AP cadere debet. Quare si fiat perpendicularis AK $= \frac{1}{2}c$ & altera KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum Circuli L & radius LA. Quodsi is describatur, secabit Parabolam in unico puncto M. Dico, semiordinatam Parabolæ PM esse radicem veram æquationis, radices duas reliquas nonnisi imaginarias. Fig. 90. & 89.

Est nimirum AK $=$ PR $= \frac{1}{2}c$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque LA $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ qui est radius circuli per superius demonstrata, &, si PM $= y$, MR $= y - \frac{1}{2}c$. Porro AP $=$ KR $= yy : a$ (§. 391), consequenter LR $= y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM² seu LA² $=$ LR²

Tab. IX. Fig. 89. & 90. $= LR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Quodsi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, consequenter cum valor ipsius p sit positivus, punctum K cadet ultra centrum L versus B, & $KL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $KD = \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Construamus porro eandem æquationem combinato Circulo cum Ellipsi. Quoniam locus ad Ellipsin est $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \qquad 2n = \frac{ac}{b}$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad\qquad n = \frac{ac}{2b}$$

$$\& \; q = s$$

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = 0 \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$-\frac{2tp}{2m} = 0 \qquad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$$

$$p = 0 \qquad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} = m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$$

Est itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b. Ellipsis diametro $AB = \sqrt{(ac^2 : b)}$ & parametro t describenda & in centro C erecta perpendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ ipsi AC & QM ipsi CF parallelis, erit $FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Tab. IX. Fig. 91. Circulus itaque ita combinandus cum Ellipsi, ut punctum D in F & DK super FC cadat, hoc est, $FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat $FK = \frac{1}{2}c$ (est enim $b > a$, hinc $bc > ac$, consequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius Circuli, qui descriptus Ellipsin in M secabit. Dico QM esse radicem æquationis.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac : 2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac : 2b$, $AP = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, $PB = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, $PM^2 = y^2 - acy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & $AP.\,PB = ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura Ellipsis (§. 420),

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = QR = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y - \frac{1}{2}c$, $RL = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, consequenter (§. 417 *Geom.*) $LF^2 = KL^2 + KF^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = ML^2 = MR^2 + RL^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$.

Unde

Unde habemus

$$y^2+x^2-cy+bx-ax=0$$

hoc est, ob $x^2=cy-by^2:a$

$$y^2+cy-\frac{by^2}{a}-cy+bx-ax=0$$

$$\frac{ay^2-by^2}{a}+bx-ax=0$$

seu $\dfrac{ay^2-by^2}{a}=ax-bx$ $\quad a-b$

$$\frac{y^2}{a}=x$$

$$\frac{y^4}{aa}=x^2$$

$$\frac{y^4}{aa}=cy-\frac{by^2}{a}$$

$$y^4=aacy-aby^2$$

$$y^3=aac-aby$$

$$y^3+aby-aac=0$$

Construamus denique eandem æquationem, combinatis loco ad Hyperbolam intra asymptotos $xy+by-ac=0$ & loco ad Circulum $y^2+x^2-cy+bx-ax=0$. Posterioris constructionem jam tradidimus: alterius constructio elicitur comparatione æquationis propositæ cum formula generali pro locis ad Hyperbolam intra asymptotos instituta. Est nempe (§.591),

$$\frac{r}{q}=0 \quad p=0 \quad -n=b \quad -mq=-ac$$

$$q=f \quad \frac{pr}{f}=0 \quad n=-b \quad m=c \quad q=a$$

Jungantur ipsi AR $=a$ recta RI $=c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt asymptoti Hyperbolæ æquilateræ per punctum I describendæ (§.489). Fiat AD $=b$, quia valor ipsius b negativus: erit DT $=x=$ NM, TM $=y$ (§.*cit.*) Quod si jam Circulus cum Hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ super DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur DK $=\frac{1}{2}c$ & ex K in L, KL $=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$. Radio DL describatur Circulus & ex puncto intersectionis Circuli atque Hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc esse radicem æquationis. Tab. IX. Fig. 92. Tab. IX. Fig. 90. & 92.

Quoniam enim AR $=a$, RI $=c$, AD $=$ PN $=b$, NM $=$ DT $=x$, TM $=$ AP $=y$; erit AT $=$ PM $=b+x$ & ob AR. RI $=$ AP. PM (§.501) $by+xy=ac$, consequenter $x=\frac{ac}{y}-b$. Porro Kr $=$ NM $=x$, LK $=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, DK $=$ Tr $=\frac{1}{2}c$. Ergo L$r=x+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, rM $=y-\frac{1}{2}c$, & ob LM$^2=$ Lr^2+rM^2 (§.417 *Geom.*) $x^2+bx+\frac{1}{4}bb-ax-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2+y^2-cy+\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$y^2-cy=ax-x^2-bx$$

seu $\quad =(a-x-b)x$

$$y^2-cy=\left(a-\frac{ac}{y}+b-b\right)\left(\frac{ac}{y}-b\right)$$

$$=\left(a-\frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y}-b\right)$$

hoc est,

$$y^2-cy=\frac{aac}{y}-\frac{a^2c^2}{y^2}-ab+\frac{abc}{y}$$

$$y^4-cy^3=a^2cy-a^2c^2-aby^2+abcy$$

$y-c)$

$$y^3=a^2c-aby$$

$$y^3+aby-a^2c=0$$

SCHO-

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui Tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam* CARTESII *ope Circuli & Parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radices per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA CCXLVI.

609. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = aac$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro: $y : x = yy - ab : ac$

hoc est, $= ax - ab : ac$

seu (§. 124) $= x - b : c$

$$\text{II. } x^2 - bx = cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 - bx = cy$$

$$\text{III. } ax - x^2 + bx = y^2 - cy$$
$$ax = y^2$$
$$cy = x^2 - bx$$

$$\text{IV. } ax - cy = y^2 - x^2 + bx$$
$$x^2 - bx = cy$$
$$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$$

$a : b$ mult.

$$\text{V. } \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$$
$$y^3 - aby = aac$$
$$\frac{y^3}{a} - by = ac$$

$$\text{VI. } xy - by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy + bx - ax = 0$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy^2}{b} = 0$.

VI. $xy - by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Hyperbolam scalenam; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem Problematis præcedentis resolvimus; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus: id quod in unico casu, quo Circulus cum Parabola combinatur, ostendisse suffecerit.

Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur ut in Problemate præcedente, si

Tab. IX. *Fig.* 93. si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP $= x$, PM $= y$.

Pro loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589), $2r = 0$ & hinc $q = s$

$$2n = c \qquad 2p = b + a$$

$$n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b + a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quia ergo in Circulo origo indeterminatæ x distat a centro quantitate $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\frac{1}{2}c$, fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem Parabolæ A Circulus, erit PM radix vera æquationis; QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$ (§. 417 *Geom.*), AP $= yy : a$ (§. 391), PD $=$ HR $= \frac{yy}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, MR $= y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA CCXLVII.

610. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = - aac$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = - aac$, hoc est, $aac = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac.$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc est, $= ab - ax : ac$

seu (§. 124) $= b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2$$
$$bx - xx = cy$$

III. $ax - bx + xx = yy - cy$

$$ax = yy$$
$$cy = bx - xx$$

IV. $ax - cy = yy - bx + xx$

$$bx - xx = cy$$
$$\frac{by^2}{a} - xx = cy$$

$a : b$ mult.

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$aac = aby - y^3$$
$$ac = by - \frac{y^3}{a}$$

VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx - ax = 0$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$

V. y^2

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam, tertius ad Hyperbolam æquilateram, quartus ad Circulum, quintus ad Hyperbolam scalenam, sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Æquationes locales denuo nonnisi signis differunt ab iis, quas in Problemate 245, (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis suffecerit constructionem ope Parabolæ & Circuli ostendisse.

Tab. IX. Fig. 94. Quoniam locus ad Parabolam $y^2 = ax$; Parabola denuo construitur parametro a, & origo indeterminatæ x est in vertice axis A.

Pro Circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b - a$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 95. Describatur ergo, radio AC $= m$, semicirculus, ductaque FLS intervallo CL $= \frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit SQ $= x$, QM $= y$.

Tab. IX. Fig. 94. Quamobrem si Circulus cum Parabola combinatur, punctum S super A & SL super AD cadet. Quare si fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$; erit AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$ radius Circuli per verticem describendi & PM radix vera æquationis.

Tab. IX. Fig. 94. Nam AP $= yy : a$ (§. 391), hinc DP $=$ HR $= yy : a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Porro MR $= y + \frac{1}{2}c$. Quare ob HM$^2 =$ MR^2 + HR^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0$$

$$\overline{}\, aa$$

$$y^4 - abyy + aacy = 0$$

$$\overline{}\, y$$

$$y^3 - aby + aac = 0$$

C O R O L L A R I U M.

612. Si Circulus Parabolam tangit; duæ intersectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec secat; radices omnes sunt impossibiles.

S C H O L I O N.

613. *Constructiones per Circulum & Parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis quas habet* CARTESIUS (a), *etsi alio modo erutæ.*

P R O B L E M A CCXLVIII.

614. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$. Substituatur ax pro y^2 in æquatione data.

erit $axy + aax - aby = aac$

II. $xy + ax - by = ac$

$$\overline{}\, y - a$$

$$xy^2 + axy - by^2 - axy - a^2x + aby = acy - a^2c$$

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$

$$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$$

 III.

(a) *Geomet.* lib. III. p. 85. & seqq.

III. $x^2 - bx - ax = cy - by - ac$
$ax - y^2$

IV. $2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$
$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$
$ax = y^2$

V. $x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$
$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$

VI. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $xy + ax - by - ac = 0$

III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
$\quad - ax + by$

IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
$\quad + by - bx$

V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
$\quad - by$

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
$\quad - ay$

Locus primus & tertius sunt ad Parabolam; secundus ad Hyperbolam intra asymptotos; quartus ad Circulum; quintus ad Hyperbolam æquilateram; sextus ad Hyperbolam scalenam.

Tab. IX. Fig. 96. Construamus æquationem combinando Circulum cum Parabola. Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur, si parametro a Parabola describitur; cujus vertex A origo ipsius x.

Pro Circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$\frac{2r}{q} = 0$ $\quad -2n = -c + b$ $\quad -2p = -2a - b$

hinc

$q = f$ $\quad n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$ $\quad p = a + \frac{1}{2}b$

$n^2 + p^2 - m^2 = ac$

$n^2 + p^2 - ac = m^2$

$\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)^2)} = m$

Jungatur ipsi IL $= a$ ad angulos rectos LR ipsi æqualis & resecetur LH $=$ PN $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$: erit CR $= m$, adeoque radius Circuli, quo descripto habebitur IP $= x$ & PM $= y$. Tab. X. Fig. 97.

Est enim NM $=$ PM $-$ PN $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque NM$^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP $=$ IP $-$ ID $= x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque DP$^2 =$ CN$^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit NM^2 + CN^2 (§. 417 *Geom.*) $=$ CM$^2 =$ CR$^2 =$ CH^2 + HR$^2 = \frac{1}{4}bb + aa + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita. Circulus itaque rite constructus.

Si jam Circulus cum Parabola combinatur, punctum I in verticem Parabolæ A & IP super AP cadit. Quare fiat AL $= a$; erit LR$^2 = aa$ (§. 388), hoc est, LR $= a$. Fiat porro LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR radius Circuli per punctum Parabolæ R ex centro C describendi, & semiordinata PM radix æquationis. Tab. IX. Fig. 96. & Tab. X. Fig. 97.

Nam PN $=$ LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura Parabolæ $y^2 : a =$ AP: unde DP $=$ CN $= \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum sit (§. 417 *Geom.*) CM^2 ($=$CR^2) $=$ CN^2 + NM^2 erit $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a}$

+

$+ab+\frac{1}{4}bb+y^2+by+\frac{1}{4}bb-cy-\frac{1}{2}bc$
$+\frac{1}{4}cc$,

hoc eſt,

$$\frac{y^4}{aa}-y^2-\frac{by^2}{a}+by-cy+ac=0$$

$$y^4-a^2y^2-aby^2+a^2by-a^2cy+a^3c=0 \quad (y-a$$

$$y^3+ay^2-aby-a^2c=0$$

S C H O L I O N.

615. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum caſus reliqui conſtrui debeant, ut adeo plura addere ſupervacaneum judicemus.*

P R O B L E M A CCXLIX.

616. *Æquationem biquadraticam $y^4+aby^2+a^2cy=a^3d$ conſtruere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit I. $ax=y^2$. Hinc $x=y^2:a$

Hoc valore in æquatione data ſubſtituto prodibit

$$a^2x^2+aby^2+a^2cy=a^3d \quad (ab$$

$$\text{II.}\quad y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}=\frac{a^2d}{b}$$

Item $a^2x^2+a^2bx+a^2cy=a^3d \quad (a^2$

$$x^2+bx+cy=ad$$

$$\text{III.}\quad x^2+bx=ad-cy$$

$$ax=y^2$$

$$\text{IV.}\quad x^2+bx+ax=y^2+ad-cy$$

$$ax=y^2$$

$$x^2+bx=ad-cy$$

$$\text{V.}\quad ax-x^2-bx=y^2-ad+cy$$

Habemus adeo æquationes locales;

I. $y^2-ax=0$

II. $y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{acy}{b}-\frac{a^2d}{b}=0$

III. $x^2+bx+cy-ad=0$

IV. $y^2-x^2-cy-bx+ad=0$
$\qquad\qquad\qquad\quad -ax$

V. $y^2+x^2+cy+bx-ad=0$
$\qquad\qquad\qquad\quad -ax$

Locus primus & tertius eſt Parabola, ſecundus Ellipſis, quartus Hyperbola æquilatera, quintus denique Circulus.

Conſtruamus primum æquationem, Circulo cum Parabola $ax=y^2$ combito. Conſtruatur Parabola MDN parametro a, erit $DQ=x$, $QM=y$. Tab.X. *Fig.*98.

Pro Circulo $y^2+x^2+cy+bx-ax-ad=0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q}=0 \quad \frac{f^2}{q^2}=1 \quad -2n=c \quad -2p=b-a$$

$$f=q \quad n=-\tfrac{1}{2}c \quad p=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b$$

$$n^2+p^2-m^2=-ad$$

$$n^2+p^2+ad=m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+ad=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb+ad)}=m$$

Erecta in D perpendiculari $DK=QP=\frac{1}{2}c$ ob valorem ipſius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque $KC=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ erit (§ 417 *Geom.*). $DC=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro $DI=a$ & continuata DC in H, donec $HD=d$, quæratur media proportionalis DL (§. 327 *Geom.*), quæ erit $\sqrt{ad}$: conſequenter $LC=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)}$ (§. 417 *Geom.*) eſt radius Circuli ex centro C per L deſcribendi, qui cum Parabolam ſecet in M & N; erit QM radix æquationis vera, RN falſa.

Tab. X. Fig. 98. Est enim $PM = y + \frac{1}{2}c$; $DQ = KP = y^2 : a$ (§. 388), $CP = KP - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§. 417 *Geom.*) ob CL^2 seu $MC^2 = PM^2 + PC^2$, $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad$$

$$\overline{}\ aa$$

$$y^4 + aby^2 + aacy = a^3d.$$

Combinemus eundem Circulum cum Ellipsi, quam definit æquatio superius reperta $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a^2d}{b} = 0$ Erit, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\frac{ac}{2b}$$

$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{ac^2}{4b} + ad\right)} = m$$

Construatur locus ad Circulum, ut ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a$
Tab. X. Fig. 99. $- \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*); consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 417 *Geom.*).

Jam cum origo indeterminatæ x sit in D, & valor ipsius n in Ellipsi etiam negativus, & $p = 0$; ex DK resecetur $DG = ac : 2b$, & per G ducatur AB ipsis DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem describatur Ellipsis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM esse radicem æquationis veram. Est enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura Ellipsis (§. 431) Tab. X. Fig. 99.

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 (= BR . RA)$$

$$= y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2$$

$$\overline{}\ b - a$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc

hoc est, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi superiorum

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; a^2$$

$$y^4 = a^3 d - aby^2 - a^2 cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2 cy = a^3 d$$

PROBLEMA CCL.

617. *Construere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + aby^2 - a^2 cy = - a^3 d.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipsius y^2 in æquatione proposita substituatur: prodibit

$$a^2 x^2 + aby^2 - a^2 cy = - a^3 d$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; ab$$

$$\text{II. } \frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2 d}{b}$$

Item $a^2 x^2 + a^2 bx = a^2 cy - a^3 d$

$$\text{III. } x^2 + bx = cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

$$\text{V. } ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2 d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx - cy + ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$
$\qquad - ax$

V. $y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$
$\qquad - ax$

Locus primus & tertius sunt Parabolæ; secundus est Ellipsis; quartus Hyperbola æquilatera; quintus denique Circulus.

Dabimus constructionem per Circulum & Parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$. Est ergo parameter $= a$, AP $= x$, PM $= y$. Tab. X. Fig. 100.

Pro circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0. \quad -2n = -c \quad -2p = -a + b$$

hinc

$$q = f \quad n = \tfrac{1}{2}c \quad p = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + p - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & sumatur C pro centro Circuli. Erigatur CK $= \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat AK $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat AI $= d$, AH $= a$; quæraturque media proportionalis AL $= \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*). Porro super AC describatur semicirculus, & in eo applicetur GA $=$ AL $= \sqrt{ad}$; erit GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad)}$ (§. 417 *Geom.*) adeoque radius Circuli.

Quoniam in Parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$, origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a describatur Parabola: dico PM esse radicem æquationis veram.

Est

Tab.X. *Fig.* 100. Est enim $MR = PM - PR = PM - CK = y - \frac{1}{2}c$; $AP = y^2 : a$ & $CR = KP = AP - AK = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $CG^2 = CM^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3d$$

Cum loco ad Circulum descripto eodem modo, quo in Problemate præcedente, combinatur locus ad Ellipsin. Lubet vero adhuc constructionem dare per Circulum & Hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem, vi Theorematis generalis (§. 590),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad -\frac{t}{2m} = -1 \qquad -2n = c \qquad 2p = -a-b$$

$$t = 2m \qquad n = -\frac{1}{2}c \qquad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad}$$

Tab.X. *Fig.* 101. Constructo nempe Circulo ut ante, ita ut sit $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $CK = \frac{1}{2}c$, adeoque $CA = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$, $AH = a$, $AI = d$, adeoque $AL = AG = \sqrt{ad}$, consequenter $GC = MC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad)}$; quia origo indeterminatæ y in Hyperbola ob valorem ipsius n negativum ab axe versus sinistram distat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat $KT = \frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipsi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis. Tab.X. *Fig.* 101.

Quoniam porro, ob valorem ipsius p negativum, indeterminatæ x origo a centro distat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat $FO = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $OQ = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$; erit O centrum & Q vertex Hyperbolæ æquilateræ; quæ si circa axem QS describatur, Circulum in M secabit. Dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim $CR = KP = AP - AK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP - CK = y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT = y + \frac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO = x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x^2 = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in æquatione

$x^2 +$

$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$
substitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3 d$$

seu $y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$.

PROBLEMA CCLI.

618. *Construere æquationum biquadraticam* $y^4 + 2by^3 + a^2 cy = a^3 d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3 d - a^2 cy$; æquatio data in hanc resolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, consequenter

$$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Substituatur in hac æquatione ulterius valor ipsius y^2; prodibit

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

h. e. $a^3 d - a^2 cy - b^3 y = a^2 x^2 - ab^2 x$

III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2 x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$$

$$y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad = 0$
$\qquad + \frac{b^3 y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = 0$
$\qquad + by - ax$
$\qquad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0$
$\qquad + by - ax$
$\qquad + cy$

Construamus æquationem per Circulum & Parabolam. Pro Circulo cum

sit $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2 x}{a} - ax$

$- ad = 0$; erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \qquad \frac{f^2}{q^2} = 1 \qquad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c.$$

$$f = q \qquad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c$$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

$$p = \frac{b^2}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorsus modo construitur, quo in Problemate 249, (§.

Tab. X. Fig. 102. (§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $HO = a$, $OI = d$; erit $OC = \sqrt{(n^2+p^2)}$, $OL = \sqrt{ad}$, & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$. Ducatur OQ ipsi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatae x in O.

Porro pro Parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit, vi theorematis generalis (§. 587),

$$\begin{array}{lll} \frac{r}{q} = 0 & -2n = b & -\frac{ts}{q} = -a \\ \text{hinc } r = 0 & n = -\frac{1}{2}b & t = a \\ q = s & & \end{array}$$

$$n^2 + tp = 0$$
$$\tfrac{1}{4}bb + ap = 0$$
$$ap = -\tfrac{1}{4}bb$$
$$p = -\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat $OK = \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela; ob valorem ipsius p negativum, fiat $KA = bb:4a$; erit in A Parabolae vertex parametro a circa axem AR describendae, quae Circulum secabit in M. Dico QM esse radicem aequationis veram.

Sit enim $QM = y$: erit $MR = y + \frac{1}{2}b$, adeoque $RA = \frac{yy + by + \frac{1}{4}bb}{a}$ (§. 391), consequenter $KR = AR - AK = \frac{yy + by}{a}$. Hinc $PC = OQ$ sive $KR - CD = \frac{yy + by}{a} - p$ & $PM = QM + QP = QM + DO = y + n$. Quare cum sit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebitur tandem

$$n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2,$$

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + y^2 + 2ny = ad.$$

Substituantur valores p & n ex aequatione ad Circulum: Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa} - by - \frac{b^3y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{aa} = ad,$$

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad$$
$$\overline{}\; aa$$
$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

SCHOLION.

619. *Aequationes locales, in quas aequationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo* SLUSII *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius Ellipsis vel Hyperbola unica, sed infinitae constructioni inserviunt. Potest etiam aequatio localis ad curvam datam revocari, sicque Problema per Sectionem conicam datam construi. Agedum itaque! videamus, quomodo utramque praestetur.*

PROBLEMA CCLII.

620. *Aequationem datam resolvere in aequationes locales, quae sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro y radice aequationis $az : v$, ubi pro v recta quaelibet assumi potest, & nova, quae prodit, aequatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit

Sit ex.gr. $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az:v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$; consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^2c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $= vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

seu (§. 124) $= x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$vx = z^2$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$vx = z^2$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^2c}{a}$ v

$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas Sectiones conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$ II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$	ad infinitas Parabolas.
III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} - vx = 0$	ad infinitas Hyperbolas æquilateras.
IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} - vx = 0$	ad infinitos Circulos.
V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$	ad infinitas Ellipses.
VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$	ad infinitas Hyperbolas intra asymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2x}{v}$ foret ad infinitas Parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: sed cum locus ad Circulum degeneret in locum ad Ellipsin, simplicitati constructionis minime consuleretur. Loca tamen ad Hyperbolam & Ellipsin determinatam ita reduci possunt ad Hyperbolas & Ellipses infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

Ex.gr. Pro æquatione proposita construenda elicuimus supra (§. 607)

I. $y^2 + ax = 0$ II. $x^2 + bx - cy = 0$	loca ad Parabolam.
III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$	locum ad Circulum.

 Quo-

$$\text{Quoniam} \quad y^2 = ax$$

$$\text{erit} \quad \frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$$

$$\text{\& ob} \quad cy = x^2 + bx$$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

$$\text{Item} \quad \frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$$

$$cy = x^2 + bx$$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas Ellipses $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + \frac{vbx}{a} - ax = 0$ & locum ad infinitas Hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ construi potest.

PROBLEMA CCLIII.

621. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.
2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda: æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

Ex. gr. Æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad Parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter Parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$, consequenter æquatio quæsita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad Circulum, cujus radius r. Quoniam radius Circuli, ad quam est æquatio data (§. 589) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc)}$

$$\text{erit} \quad (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{1}{4}cc = r^2$$

$$(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = f$$

$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = g$$

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis; prodit æquatio ad Circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA CCLIV.

622. *Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes, tam cubicas quam biquadraticas.*

Sit descripta Parabola, & ex centro H radio AH Circulus secans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$ parameter Parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 404) Tab. X. Fig. 103.

$$a : \text{OM} + \text{AQ} = \text{PM} : \text{AP}$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$, & RM$^2 = x^2 + 2dx + dd$.

Habe-

Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}-\frac{4bcx}{a}+bb$$
$$+x^2+2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}+2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3+4cx^2+4c^2x-4abc=0$$
$$-2abx+2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda

$x^3+px^2\pm qx\pm r=0$; erit

$$4c=p \qquad 4c^2-2ab+a^2=q$$
$$c=\tfrac{1}{4}p \qquad 4c^2+a^2-q=2ab$$
$$\tfrac{4}{16}p^2+a^2-q=2ab \quad 2a$$
$$\frac{p^2}{8a}+\tfrac{1}{2}a-\frac{q}{2a}=b$$

vel

$$a^2+4c^2-2ab=-q$$
$$a^2+\tfrac{4}{16}p^2+q=2ab$$
$$\tfrac{1}{2}a+\frac{p^2}{8a}+\frac{q}{2a}=b$$

Porro

$$2a^2d-4abc=r$$
$$2a^2d=r+4abc$$
$$d=\frac{r}{2a^2}+\frac{2bc}{a}$$

hoc est $d=\frac{r}{2a^2}+\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}\mp\frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2aad-4abc=-r$$
$$2aad=4abc-r$$
$$d=\frac{2bc}{a}-\frac{r}{2a^2}$$

hoc est $d=\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}-\frac{r}{2a^2}$

Sit jam $pN=x$; reliqua sint ut ante: erit $Nr=pN-rp=pN-DH$ Tab. X. *Fig.* 103.
$=x-d$, $No=x-c$, $pm=x-2c$.
Quoniam (§. 404)

$$a : oN+AQ=pm : Ap$$
$$a : x=x-2c : \frac{xx-2cx}{a}$$

erit $Dp=Hr=\frac{x^2-2cx}{a}-b$. Habemus adeo $NH^2=Hr^2+Nr^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}+\frac{4bcx}{a}+b^2$$
$$+x^2-2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}+\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}-2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3-4cx^2+4c^2x+4abc=0$$
$$-2abx-2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si terminus secundus sit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3-px^2\mp qx\mp r=0$; erit

$$-p=-4c$$
$$\tfrac{1}{4}p=c$$
$$4c^2-2ab+a^2=q$$
$$a^2+4c^2-q=2ab$$
$$\tfrac{1}{2}a+\frac{2c^2}{a}-\frac{q}{2a}=b$$

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab \qquad 2a$$
$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$
$$4abc - r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$
$$4abc + r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Tab.X. *Fig.* 103. Est ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula, q seu coëfficiens termini tertii semper afficitur signo contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, si p & r diversis signis afficiuntur: alias semper est $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evanescunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens est ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique si quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare si biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp f = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, sed Tab.X. *Fig.* 103.

$$f = a^3 f$$
$$f : a^3 = f$$

Unde radius Circuli invenitur ut in Problemate 250 (§. 617), si fuerit $+f$, vel ut in Problemate 251 (§. 618), si fuerit $-f$. His observatis, regula eadem constructioni æquationum biquadraticarum satisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc est regula, quam* Thomas BAKERUS (*a*) *centralem vocat & ad omnes casus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ superius tradidimus. Restat, ut usum hujus doctrinæ aliquot exemplis illustremus.*

PROBLEMA CCLV.

624. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Si datarum	quæsitarum
major $= b$	minor $= y$,
minor $= a$	major $= x$

erit, per conditionem Problematis,

$$\text{I.} \quad \begin{array}{l} a : y = y : x \\ \hline ax = yy \end{array}$$

$$\text{II.} \quad \begin{array}{l} y : x = x : b \\ \hline xx = by \end{array}$$

III.

(*a*) In *Clave Geometrica catholica* p. 6.

$$a : y = x : b$$

$$\text{III.} \quad ab = xy$$
$$x^2 = by$$
$$ax \quad y^2$$

$$\text{IV.} \quad x^2 - ax = by - y^2$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 = by$$

$$\text{V.} \quad x^2 + ax = y^2 + by$$
$$x^2 = by$$

$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$
$$ax = y^2$$

$$\text{VI.} \quad \frac{ax^2}{v} + ax = \frac{aby}{v} + y^2$$
$$ax = y^2$$
$$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$$

$$\text{VII.} \quad ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$) ad Parabolam.
II. $x^2 - by = 0$)

III. $xy - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Hyperbolas scalenas.

VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Ellipses.

Quodsi in æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos $xy = ab$ substituatur valor ex æquatione ad Parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2 b = 0$.

Constructio itaque multis modis fieri potest, nimirum per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos, per Circulum & Hyperbolam æquilateram, per Circulum & infinitas Hyperbolas, per Circulum & infinitas Ellipses, vel per duas Hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem BAKERI.

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad 2n = b \qquad 2p = a$$
$$\frac{s^2}{q^2} = 1 \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$
$$s = q$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quoniam in Parabola parametro a descripta, ad quam $ax = y^2$, origo ipsius x in vertice A existit; Circulus per ejus verticem describendus radio $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}aa)}$. Fiat itaque AD $= \tfrac{1}{2}a$, DH $= \tfrac{1}{2}b$; erit centrum Circuli in H & PM $= y$, PA $= x$: id quod facile ostenditur eodem, quo superius, modo. Tab. IX. Fig. 93.

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{v} \qquad 2n = \frac{ab}{v}$$
hinc
$$s = q \qquad n = \frac{ab}{2v}$$
$$\frac{2tp}{2m} = a = \frac{2ap}{v} \qquad n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$2ap = av \qquad n^2 + \frac{ap^2}{v} = \frac{am^2}{v}$$
$$p = \tfrac{1}{2}v$$

vn^2

$$\frac{vn^2}{a}+p^2=m^2$$

$$\frac{ab^2}{4v}+\tfrac{1}{4}v^2=m^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab^2}{v}+v^2\right)}=m$$

Tab.X. *Fig.* 104. Constructio itaque Problematis per Circulum & Ellipsin hæc est: Jungantur DF$=b$ & DE$=a$ ad angulos rectos. Fiat DK$=\frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari KC$=\frac{1}{2}a$; erit DC$=\sqrt{(\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}aa)}$. Ex centro itaque C radio DC describatur Circulus: ita locus prior erit constructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro Ellipsi fiat DH$=ab:2v$ & per H ducatur ipsi DE parallela IN. Fiat HL$=\frac{1}{2}v$ & LI$=$LN$=\frac{1}{2}\sqrt{(ab^2:v+v^2)}$; erit L centrum, IN axis Ellipsis: quæ si describatur, secabit Circulum in M. Dico esse DQ$=x$, QM$=y$, consequenter DE, QM, DQ, DF quatuor continue proportionales.

Est enim CP$=x-\frac{1}{2}a$ & PM$=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob DC$^2=$CM$^2=$CP$^2+$PM^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, hoc est, $yy+xx-by-ax=0$: qui est locus ad Circulum. Porro OM$=y-ab:2v$, LO$=x-\frac{1}{2}v$ adeoque ob

$$v:a=\text{IL}^2-\text{LO}^2:\text{OM}^2 \quad (\text{§. } 431)$$

$$1:\frac{a}{v}=\frac{ab^2}{4v}-x^2+vx:y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2}-\frac{ax^2}{v}+ax=y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2+\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}-ax=0$$

sed $y^2+x^2-by-ax=0$

Ergo $\dfrac{ax^2}{v}-\dfrac{aby}{v}+by-x^2=0$

$$x^2-by=0$$

$$x^2=by$$

Substituatur hic valor in æquatione $y^2+x^2-by-ax=0$; prodibit

$$y^2+by-by-ax=0$$

$$y^2=ax$$

Quare $a:y=y:x$ & (ob $x^2=by$) $y:x=x:b$. Sunt adeo a, y, x, & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo Problema construitur per Circulum & infinitas Hyperbolas scalenas.

Tab. XI. *Fig.* 105. Constructionem per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos adhuc apponimus. Jungantur nempe RI$=a$ & AR$=b$ ad angulos rectos, & per I describatur Hyperbola intra asymptotos RA, AT. Fiat RD$=\frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis DC$=\frac{1}{2}a$, tandemque ex centro C radio CA describatur Circulus secans Hyperbolam in M: erit TM$=y$ & AT$=x$.

Nam ex natura Hyperbolæ (ob AR. RI$=$AT. TM) $ab=xy$ & CK$=x-\frac{1}{2}a$, KM$=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob CM$^2=$CK$^2+$KM^2, $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, consequenter $yy+xx-ax-by=0$, seu $xx-ax=by-yy$. Est ergo, vi æquationis prioris,

$$a:x=y:b$$

Quare $x-a:a=b-y:y$ (§.124)

Porro, vi æquationis posterioris

$$x-a:b-y=y:x$$

Ergo (§. 124) $a:y=y:x$

Est vero etiam $a:y=x:b$ (§. *cit.*)

Ergo $a:y=y:x=x:b$ (§.167 *Arith.*)

Quod-

Tab. XIII. *Fig.* 122. Quodsi AR & AS jungantur ad angulos rectos, & circa axem AR parametro a describatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b Parabola altera AMI secans priorem in M; erit $AP = x$, $PM = y$: quem modum invenit MENECHMUS; ex conditione Problematis, absque calculo analytico facile eruendum: & nos ideo apponimus, quia inde enata est methodus construendi æquationes per duorum locorum combinationem. Est enim vi Parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi secundæ $x^2 = by$, adeoque $a : y = y : x$ & $y : x = x : b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, seu ponendo $2a = b$, $aab = y^3$. Quærendæ igitur sunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi est $ma^3 = y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ sunt duæ mediæ.

SCHOLION.

626. *Coincidit adeo Problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra pestem quærentibus Oraculum proposuisse fertur, cum Problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus observavit* HIPPOCRATES Chius): *unde & ipsum* Problema Deliacum *appellari solet. Celebre hoc Problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* PLATO, HERON Alexandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPPUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES *&* NICOMEDES *modis diversis ab* EUTOCIO (a) *conservatis solverunt.*

(a) In *Commentariis* in lib. 2 ARCHIMEDIS *de Sphera & Cylindro.*

PROBLEMA CCLVI.

627. *Rectam* AB *utcunque divisam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut sit* $CD : DB = AC^2 : CD^2$. Tab. XI. *Fig.* 106.

Sit $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$, erit $DB = b - y$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ Problema solidum esse facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, & hinc

$$y : b - y = a^2 : ax$$
$$= a : x \quad (\S.\ 124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b - y = a : x$

$$y^2 : by - y^2 = a : x \quad (\S.124)$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x \quad (\S.\ cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I)

& $x^2 = by - y^2$ (III) subt.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad Circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad Parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad Ellipsin.

Nos duas dabimus constructiones, alteram per Parabolam & Circulum; alteram per Circulum & Ellipsin.

Quoniam æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \qquad \frac{2n = b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{n^2 = m^2}{m = n = \frac{1}{2}b}$$
$$p = 0$$

Tab. XI. Fig. 107. In vertice adeo Parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D, radio $AD = \frac{1}{2}b$, describatur circulus; erit $PM = y$.

Demissa enim perpendiculari DR, erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, consequenter ob $DA^2 = DM^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Pro Ellipsi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \quad \frac{2n = \frac{1}{2}b}{n = \frac{1}{4}b} \quad \frac{\frac{2tp}{2m} = \frac{1}{2}a}{p = \frac{1}{2}a}$$

hinc

$q = \int$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$
$$\frac{1}{16}bb + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}bb + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ & parameter $= \sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x. Tab. XI. Fig. 108.

Quare Circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describatur Circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Est enim $PC = QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Est porro $AC^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : 2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{16}bb : \tfrac{1}{8}bb - x^2 + ax$$
$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}bb = \tfrac{1}{8}bb + ax - xx$$
$$2y^2 - by = ax - xx.$$

Porro $RM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, consequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb + xx$$
$$y^2 - by = -xx$$

Quo valore ipsius $y^2 - by$ in æquatione superiore substituto, prodit

$$y^2 - xx = ax - xx$$
$$y^2 = ax$$
$$y^2 : a = x$$
$$y^4 : aa = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Quod Ellipsis transeat per puncta D & L, ita ostenditur. Est $KL = DK = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)}$ & KC = DH = $\frac{1}{2}a$, adeoque AK = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & KB = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter AK. KB = $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}b^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{8}b^2$. Sed $2KL^2=\frac{2}{16}b^2=\frac{1}{8}b^2$. Est itaque $2KL^2$ = AK. KB, consequenter punctum L, adeoque & punctum D in Ellipsi (§.420).

PROBLEMA CCLVII.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi sit y; erit (*§. 536 Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a:y = y^2:bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a:y = y:x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a:y = ax:bc$

II. $xy = bc$

Porro $a:y = y:x$

$a:y = ax:bc$

adeoque $y:x = ax:bc$ (§.167 *Arithm.*)

$ax^2 = bcy$

III. $x^2 = bcy:a$

$ax = y^2$ subt.

IV. $x^2 - ax = bcy:a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy:a$

& $2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy:a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy:a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad Parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro loco ad Circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§.589),

$$2n = bc:a \qquad 2p = a$$
$$n = bc:2a \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Cum in Parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta, origo indeterminatæ x sit in vertice A, fiat AD = $\frac{1}{2}a$, DH = n = $bc:2a$; erit H centrum Circuli radio HA describendi: qui si describatur, secabit Parabolam in M, eritque MP = y. Tab. IX. *Fig.* 93.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2:4a^2$, PA = $yy:a$ (§.391), & hinc DP = HR = $yy:a - \frac{1}{2}a$, MR = $y - bc:2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2:4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$

hoc est, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$

$y:aa$

$$y^3 - abc = 0$$

Tab. XI. Fig. 105. Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur Hyperbola; erit origo indeterminatæ x in A. Porro ut Circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc:2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur Circulus Hyperbolam in M intersecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob AR. RI = AT. TM (§. 502) $bc = xy$. Præterea $CM^2 = AC^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa$, $CK = LT = AT - AL = x - \frac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = TM - AD = y - bc : 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$

hoc est, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituatur pro bc valor ipsius xy; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$ay^2 - xy^2 = aax - axx \qquad a-x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$\frac{r}{q} = 0$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2tp}{2m} = -a$

hinc

$q = s$ $\quad 2n = \frac{bc}{2a}$ $\quad \frac{2p}{2} = a$

$n = \frac{bc}{4a}$ $\quad p = a$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa\right)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C excitetur perpendicularis $CH = \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat $DH = a$: erit D origo indeterminatæ x. Ut Circulus cum eadem combinetur, fiat $DI = bc : 2a$ & $IL = \frac{1}{2}a$, & radio LD ex centro L describatur Circulus, qui Ellipsin secabit in M. Dico QM esse $= y$ & $DQ = x$. Tab. XI. Fig. 109.

Est enim $CP = HQ = DQ - DH = x - a$ & $PM = QM - PQ = QM - DK = y - bc : 4a$. Ex natura Ellipsis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$2 : 1 = \frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

Tab. XI. *Fig.* 109.

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro MR=QM−RQ=QM-DI $= y - bc : 2a$, LR=DQ−IL$=x - \frac{1}{2}a$. Quare ob DL²=LM²=LR²+RM² $\frac{1}{2}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc est,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituto valore ipsius $ax - xx$ in æquatione superiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x & x^2 denuo in æquatione superiore substitutis prodit

$$y^2 - y^4 : a^2 = y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a}$$

$$y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non absimili modo fit constructio per Circulum & Hyperbolam.

PROBLEMA CCLVIII.

629. *Datum angulum* ACB *trisecare.*

Tab. XI. *Fig.* 110. Concipiamus angulum ACB esse trifariam sectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium subtensæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales sunt (§. 289 *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $= y$, EG $= x$.

Jam anguli EAB mensura est arcus DB (§. 314 *Geom.*). Anguli vero ACE mensura cum sit arcus AE (§. 57 *Geom.*) ipsi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales sunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*) Tab. XI. *Fig.* 110.

AC:AE=AE:EG AC:EC=AE:AG

$b : y = y : x$ sed AC=EC

I. $yy = bx$ ergo AE=AG

Ducatur EF ipsi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*)=EDC (§. 312 & 233 *Geom.*). Porro EGF =HGC (§. 156 *Geom.*)=CED (§. 312 & 233 *Geom.*). Est igitur (§. 267 *Geom.*).

EC : ED = EG : GF

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB=ED=AE, & DB =BH, EA=AG, *per demonstr.* ED =FH (§. 257 *Geom.*): erit AE+ED +DB=AG+BH+GH+FG, hoc est, 3AE=AB+FG, consequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ seu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a \quad (\text{§}.167 \textit{ Arith.})$$

III. $ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ add.

IV. $ay + yy = 4bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ subtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ add.

 VI.

VI. $2yy + ay = 5bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ subtr.

VII. $ay - 2yy = bx - xx$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - 3by + ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad Parabolam.

IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad Circulum.

V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad Ellipsin.

VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro Circulo, ad quem est $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$-2n = a \qquad\qquad -2b = -4b$$

$$n = -\tfrac{1}{2}a \qquad\qquad p = 2b$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 93. Quare Parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b descripta, fiat $AD = 2b$, $DH = \frac{1}{2}a$, & ex centro H radio DH describatur Circulus; erit $QN = y$, $AQ = x$.

Est enim his positis $bx = y^2$ (§. 388), consequenter $x = y^2 : b$, atque hinc $DQ = KH = 2b - y^2 : b$. Porro $KN = QN + QK = QN + DH = y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = KH^2 + KN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc est

$$\frac{y^4}{bb} - 3y^2 + ay = 0$$

$$y^3 - 3bby + abb = 0 \quad y : bb$$

Eadem vero æquatio prodit, si in superius inventa secunda æquatione $3y = a + xy : b$ substituitur valor ipsius $x = y^2 : b$ ex prima. Est nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc est, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Constructio per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos ita absolvitur. Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $CK = \sqrt{(4bb + \frac{1}{4}aa)}$ radius Circuli ex centro C per K describendi. Producatur CL in I, donec $LI = a$ & KL in T, donec $LT = b$, seu $KT = 3b$. Intra asymptotos KTS per I describatur Hyperbola. Dico QM esse radicem veram quæsitam seu subtensam trientis arcus, qui metitur angulum trisecandum, radio b descripti: seu $QM = y$ & $KQ = x$. Tab. XI. Fig. 111.

Est enim $QT = KT - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL.LT = QT.QM$ (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc est, $y^2 + ay = 4bx - x^2$. Æquatio prior ad Hyperbolam in hanc resolvitur analogiam;

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§. 124)

$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio posterior ad Circulum hanc suppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 *Arithm.*)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Substitutis his valoribus in æquatione ad Circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$

$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2$$

$$y : b^2$$

$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

seu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.

Notan-

Tab. XI. Fig. 110. 111. Notandum vero eſt, cum eadem æquatio prodeat ſi ponatur $qm = y$, eſſe qm trientis complementi ad circulum ſubtenſam AI.

Conſtructiones reliquas facile proprio marte addent, qui ſuperiora rite perceperunt.

PROBLEMA CCLIX.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc eſt, a pro unitate aſſumta

$$a^{m-1} x = y^m$$

quæ eſt æquatio ad infinita Parabolarum genera (§. 519). Quare ſi parametro a Parabola primi generis ſit deſcripta & abſciſſa ſit ad parametrum ut numerus ſub ſigno radicali. ex. gr. ut 3 ad 1, ſi $\sqrt{3}$ deſideretur, vel ut 3 ad 2, ſi quæratur $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; ejus ſemiordinata exprimet numerum quæſitum.

Eſt enim in caſu primo, ſi $a = 1$, $x = 3$, $y^2 = 3$, adeoque $y = \sqrt{3}$. Et ſi fuerit $a = 1$, $a : x = 3 : 2$, erit $3x = 2a = 2$, conſequenter $x = \tfrac{2}{3}$. Hinc $y^2 = \tfrac{2}{3}$, adeoque $y = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Eodem modo patet, deſcribendam eſſe Parabolam ſecundi generis ſeu cubici ordinis, ſi radices cubicæ dentur; Parabolam vero tertii generis ſeu biquadratici ordinis, ſi radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed poſſunt etiam Parabolæ inferiores ſatisfacere radicibus ſuperioribus. Sit enim ex. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem Problematis erit

$$1 : \sqrt[3]{5} = a : y$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Conſtruetur adeo Problema per Parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a : y = y : x$

erit I. $y^2 = ax$

Æquatio propoſita $5a^3 = y^3$ reſolvitur in hanc analogiam:

$$a : y = y^2 : 5a^2$$
$$= ax : 5a^2$$
$$= x : 5a$$

unde $y : x = x : 5a$

$$x^2 = 5ay$$

$y^2 = ax$ vi num. I.

II. $y^2 + x^2 = 5ay + ax$

Æquatio prima eſt ad Parabolam & ſecunda ad Circulum. Unde æquatio $y^3 = 5a^3$ conſtruitur ut ſupra.

PROBLEMA CCLX.

631. *Invenire puncta quotcunque, quæ ſint in curva datæ æquationis.*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ deſcribendæ aſſumatur, pro arbitrio determinentur abſciſſæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad ſingulas abſciſſas.
3. Quoniam abſciſſa determinata eſt, æquatio data pro determinata recte habetur. Conſtruatur itaque per methodum ſupra expoſitam: ita enim invenietur ſemiordinata abſciſſæ reſpondens.

E. gr.

Ex. gr. Sit construenda Parabola secundi generis seu cubici ordinis $aav = y^3$. Assumta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$\text{I.} \quad ax = y^2$$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$

hoc est $\quad ax : av$

seu $\quad x : v$ (§. 124)

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 *Arithm.*)

$x^2 = vy$

addatur $y^2 = ax$

erit II. $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

Ope igitur æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos Circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in Paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro Circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = v \qquad 2p = a$$

$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Tab. XI. *Fig.* 112. Quare Parabola parametro a descripta, fiat portio axis AK $= \frac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur Circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in Paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinentur, ut quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem Parabolæ ducendi sunt Circuli alii in punctis adhuc aliis Parabolam intersecantes.

Nam si KC $= \frac{1}{2}v$ & QM $= y$; erit AQ $= yy : a$, KQ $=$ CP $=$ AQ $-$ AK $= yy : a - \frac{1}{2}a$, PM $= y - \frac{1}{2}v$. Quamobrem ob AC² $=$ AK² $+$ KC² $=$ CM² $=$ CP² $+$ PM² (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}vv = y^4 : aa - y^2 + \frac{1}{4}aa + y^2 - vy + \frac{1}{4}vv$, hoc est,

$$y^4 : aa = vy \qquad y : aa$$

$$y^3 = aav$$

Est ergo 2KC abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in Paraboloide cubicali.

Sit construendus Circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$

erit I. $vx = yy$

Porro $v : y = vx : av - v^2$

hoc est $y : x = x : a - v$ (§. 124)

Itaque $ay - yv = xx$

Addatur $vx = yy$

erit II. $yy + xx + vy - ay - vx = 0$.

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas Parabolas & posterioris ad infinitos Circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in Circulo secundi generis assumptas.

Parametro nimirum v describitur Parabola, in qua abscissa x, semiordinata y. Pro Circulo vero est, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = v - a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}v$$

$$q = s$$

$$-\frac{2ps}{q} = -v \qquad m^2 = n^2 + p^2$$

$$-2p = -v \qquad = \tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2$$

$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2)}$$

Fiat itaque AD $= \frac{1}{2}v$, DH $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & Tab. X.
radio AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2)}$ describatur *Fig.* 93.
Circulus ex centro H transiens per verticem Parabolæ A, erit AP $= x$ & PM $= y$.

Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova Parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyseos finitorum.

ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA,

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADENS.

SECTIO PRIMA,

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT PRIMUM.

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.

1. CALCULUS *differentialis* est Methodus quantitates differentiandi, hoc est, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities sumta datam adæquat.

DEFINITIO II.

2. *Infinitesima*, seu *quantitas infinite parva*, est particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis existat, seu quæ omni assignabili minor.

COROLLARIUM I.

3. Infinitesima itaque respectu ejus quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni assignabili minor, hoc est, nullus.

COROLLARIUM II.

4. Hinc duæ quantitates infinitesima differentes æquales sunt. Cum enim infinitesima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§. 3.), una alteri substitui potest. Sunt igitur æquales (§. 15 *Arithm.*).

SCHOLION.

5\. *Ut natura infinitesimarum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhæreat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in præsente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respectu Fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si Tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in Eclipsibus lunaribus computandis Terra pro sphæra perfecta, consequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris super disco Lunæ, si Terra sphæra perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere Veteres & inter eos demonstratores rigidissimi,* EUCLIDES *(a) atque* ARCHIMEDES *(b). Ex. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet* EUCLIDES, *seu, quod perinde est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablatæ, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet adeo hinc, nomen infinitesimæ esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam; cujus respectu infinitesima dicitur. Ex. gr. diameter Telluris in Eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiæ Fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta continui ac infiniti notione destituti nescio quæ phantasmata sibi fingunt, infinitesimas & infinitesimarum infinitesimas pro entibus realibus habeas: a quo ipse Calculi infinitesimalis inventor, illustris* LEIBNITIUS, *alienus. (c)*

(a) *Element.* Lib. 10. prop. 1.

(b) In præfatione ad *Quadraturam Parabolæ*, & in scriptis ejus omnibus.

(c) Vide *Acta Eruditorum* A. 1712. p. 167.

DEFINITIO III.

6\. Infinitesimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, si spectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir summus NEWTONUS (quem Angli sequuntur) infinitesimas *Fluxiones* vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, ex. gr. lineæ fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineæ, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7\. Cum itaque solæ quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, constantibus vero nihil accedat, (§. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8\. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa tamen littera* d. Ex. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y dicatur dy. *Est autem* dx *quantitas positiva, si* x *continuo crescit; negativa, si decrescit.*

SCHOLION.

9\. *Angli cum* NEWTONO *pro* dx *scribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *sed commodior est* Leibnitiana

nitiana *differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confusio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

Corollarium I.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitamus (*§. 376 Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (*§. 7*).

Corollarium II.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis adeo est differentiatio quantitatum per additionem aut subtractionem compositarum.

Problema I.

12. *Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.*

Resolutio.

I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$, erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

Demonstratio.

Tab.I. Fig.1. xy repræsentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$ & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodsi, in rectangulo $ALHB = ydx$, $AL = dx$ sumatur pro constante; erit $HGFB = dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DBFE. Quamobrem HBFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBFE, seu ydx & xdy, habetur pro nullo, consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. *Q. e. d.* Tab.I. Fig.1.

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, ex. gr. si fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per cas.* 1. Sed $dt = vdx + xdv$, *per cas.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim ex. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$, *per cas.* 1. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, *per cas.* 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + zxydv + vxydz$.

IV. Quodsi crescente una variabili altera y decresceret; evidens est, fore $ydx - xdy$ differentiale ipsius xy.

COROLLARIUM I.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM II.

14. Cum 1, 2, 3, 4 &c. exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4, &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 *Arithm.*); logarithmi vero dignitatum decrescentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. sint $-1, -2, -3, -4$ &c. (§. 351 *Arithm.*) erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, consequenter $d(1:x^m) = d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum sit $1 = x^0$ (§. 55 *part.* 1.), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part.* 1.), adeoque $d(1:x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM III.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analys. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit. & præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = \frac{n}{m} dx \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1 : \sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1} dx = -\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHOLION.

16. *Quodsi cuipiam non satis manifestum videatur, quomodo Corollaria duo posteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo investigare potest: quem in sequente Problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi usus esse possit, quoties in formulis compositis differentiandis aqua hæret.*

PROBLEMA II.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ & $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12) $0 = mx^{m-1} v dx + x^m dv$

$-mx^{m-1} v dx = x^m dv$

$-\frac{mx^{m-1} v dx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1} dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42, 54 *part.* I.)

h.e. $-mx^{-m-1} dx = dv$ (§. 54 *part.* I.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13)

hoc est, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 *part.* I.)

$my^m : y$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

seu $\frac{nx^{n:m} x^{n-1}}{mx^n} dx = dy$

$\frac{nx^{n:m}}{m} x^{-1} dx = dy$ (§. 54, *part.* I.)

hoc est, $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} z dx + x^{n:m} dz$ (§. 12.)

$-nx$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{m}zdx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}}dx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{2n:m}}dx = dz \; (\S.54\, part.1)$$

$$-\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = dz \; (\S.54\, part.1)$$

h. e. $-\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus caſibus eaſdem formulas, quas ſuperius elicuimus (§. 14, 15.)

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum eſſe arbitror, formulas in Problemate repertas ſubire vicem regularum, juxta quas in caſibus ſimilibus inſtituitur differentiatio.*

PROBLEMA III.

19. *Differentiare quantitates ſe mutuo dividentes $x : y$.*

RESOLUTIO.

I. Sit $x : y = v$
erit $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \; (\S.12)$$

$$dx - vdy = ydv$$

hoc eſt $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$$

ſeu $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale diviſoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in diviſorem. 2. Factum prius ex poſteriore auferatur. 3. Reſiduum per quadratum diviſoris dividatur. Quotus eſt differentiale quantitatum ſe mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy : vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy : vz = t : w$. Sed $d\,(t : w) = (wdt - tdw) : w^2$, *per caſ.* 1. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d\,(t : w) = d\,(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv) : v^2z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque caſui ſatisfacere.

CAPUT II.

De uſu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA IV.

20. INvenire *ſubtangentem in curva algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua, erit P*p* differentiale abſciſſæ; & demiſſa perpendiculari MR = P*p* (§. 226 *Geom.*), R*m* differentiale ſemiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Tab. I. *Fig.* 2.

Tab. I. *Fig.* 2. Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 370 *part.* 1), angulus $MmR = TMP$ (§. 233 *Geom.*). Quare $\triangle MmR \backsim \triangle TMP$ (§. 267 *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi, ex æquatione curvæ cujuscunque data, in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituatur: quantitates differentiales evanescunt, proditque valor subtangentis in quantitatibus communibus.

Tab. I. *Fig.* 4. Idem valor eruitur, si convexitas curvæ refertur ad axem AT.

COROLLARIUM I.

21. Pro Parabola *Apolloniana* est:

$$ax = y^2 \qquad (\text{§. 388 } part. \text{ 1})$$

Hinc $adx = 2ydx$ (§. 12)

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$: prorsus ut supra (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

22. Pro infinitis Parabolis (§. 519 *part.* 1.)

$$a^{m-1}x = y^m$$
$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\text{§. 12})$$
$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx.$

Ex. gr. Cum in Paraboloide cubicali $m = 3$; erit subtangens $= 3x$: cum in surdesolidali $m = 5$; erit subtangens $= 5x$.

COROLLARIUM III.

23. Pro Circulo est (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = yy$$
$$adx - 2xdx = 2ydy$$
$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a - 2x) dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2xx) : (a - 2x) = (ax - xx) : (\tfrac{1}{2}a - x)$, hoc est, $PC : PB = AP : PT$, consequenter $PC.PT = AP.PB$ (§. 378 *Geom.*) $= PM^2$ (§. 377 *part.* 1.) Tab. I. *Fig.* 3.

Ergo $AT = (ax - xx) : (\tfrac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \tfrac{1}{2}ax + xx) : (\tfrac{1}{2}a - x) = \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a - x)$ hoc est, $PC : PA = CA : AT$.

COROLLARIUM IV.

24. Pro infinitis Circulis est (§. 524 *part.* 1.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$
$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$$
$$dx = \frac{(m+1)\,y^m\,dy}{max^{m-1} - (m+1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)\,y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$, & $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$. Cum itaque in Circulo secundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$, & $PT = (2ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM V.

25. Pro Ellipsi *Apolloniana* est (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc

Tab. I. *Fig.* 3. Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$2aydy : (ab - 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = 2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorsus ut supra (§. 440 *part.* 1).

COROLLARIUM VI.

26. Pro infinitis Ellipsibus est (§. 522 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$dx = \frac{(m+n)\, ay^{m+n-1}\, dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}}$$

$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\, ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}} = (m+n)\, bx^m (a-x)^n : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) =$ [divisione per $bx^{m-1}(a-x)^{n-1}$ facta] $(m+n)(ax-x^2) : (ma - mx - nx)$, & hinc

$AT = (max - mxx + nax - nxx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m+n)x)$.

Cum adeo in Elliptoide cubicali sit $m = 2$, $n = 1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM VII.

27. Pro Hyperbola *Apolloniana* est (§. 459 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ prorsus ut supra (§. 491 *part.* 1.)

COROLLARIUM VIII.

28. Pro infinitis Hyperbolis, cum sit $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$ (§. 525 *part.* 1.): reperietur, ut ante pro infinitis Ellipsibus, $PT = (m+n)(ax + x^2) : (ma + (m+n)x)$ & $AT = nax : (ma + (m+n)x)$.

COROLLARIUM IX.

29. Pro Hyperbola intra asymptotos est (§. 502 *part.* 1.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = -xdy$$

$$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$$

Quoniam valor subtangentis est negativus, id indicio est, subtangentem PT esse sumendam in oppositum originis abscissæ AP. Differentiale enim ipsius xy esse debebat $ydx - xdy$, quia y decrescit (§. 12). Tab. I. *Fig.* 4.

COROLLARIUM X.

30. Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos, est

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$-mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$

$$-mxdy : ny = dx$$

$$PT = ydx : dy = -mxydy : nydy = -\frac{mx}{n}.$$

COROLLARIUM XI.

31. Pro Cissoide DIOCLIS est (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (a - x^3)$$

$$2ydy = (3ax^2dx - 3x^3dx + x^3dx) : (a-x)^2$$

$$2y(a-x)^2 dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2y^2(a-x)^2 : (3ax^2 - 2x^3) = 2x^3(a-x) : (3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - xx) : (3a - 2x)$.

Habemus itaque:

$$3a - 2x : a - x = 2x : PT$$

sive $\frac{3}{2}a - x : a - x = x : PT$ Tab. VI. *Algeb.* *Fig.* 63.

h. e. $PB + GB : PB = AP : PT$.

COROL-

COROLLARIUM XII.

Tab. I. Fig. 2. 32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385 *part.* 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$
$$a = 1 \quad m = 2 \qquad b = -a \quad n = 1$$
$$cy^r x^s = 0 \qquad f = 0.$$
$$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis, prodit subtangens Parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0 x^0) : (1.-ax^{1-1} + 0.\ 0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§. 21).

Similiter fit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$
$$a = 1 \quad m = 2 \qquad b = -a \quad n = 1$$
$$bx^n = x^2 \qquad cy^r x^s = 0$$
$$b = 1 \quad n = 2 \qquad c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut supra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$ay^m = y^3 \qquad bx^n = -x^3$$
$$a = 1 \quad m = 3 \qquad b = -1 \quad n = 3$$
$$cy^r x^s = -axy \qquad f = 0$$
$$c = -a \quad r = 1 \quad s = 1$$

His valoribus in formula subtangentis generali substitutis, prodit subtangens curvæ, ad quam est æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1x^2 + 1.-ayx^0) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$; consequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, [substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore axy] hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$. Tab. I. Fig. 2.

SCHOLION.

33. *In applicatione formulæ generalis,* bx^n *&* $cy^r x^s$ *totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eisdem respondent, singulique valores simul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod* bx^n *repræsentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata* x *occurrit, &* $cy^r x^s$ *omnes terminos, in quibus utraque indeterminata* x *&* y *locum habet* (§. 385 part. 1.)

COROLLARIUM XIII.

34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA V.

35. *Determinare subnormalem* PH *in linea algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $TP : PM = PM : PH$ (§. 409 *part.* 1.) hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodsi, ut in Problemate præcedente, in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur, differentiales quantitates evanescunt, & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

Co-

COROLLARIUM I.

Tab. I. Fig. 2. 36. In Parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo $PH = ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

37. In infinitis Parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque $PH = ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54 *part.* 1.) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519 *part.* 1.) $= y^2 : mx$, ut adeo sit $mx : y = y : PH$.

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 3. 38. In Circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx = PC$. Apparet adeo, in Circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere; consequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos insistere.

COROLLARIUM IV.

39. In infinitis Circulis $(max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx : (m+1)y^m = dy$. Unde subnormalis PH $[ydy : dx] = (max^{m-1}y - (m+1)x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2 - (m+1)x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1}) = (may^2 - (m+1)xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1}a - x : PH$.

COROLLARIUM V.

Tab. I. Fig. 2. 40. In infinitis Ellipsibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1}dx) : (m+n) ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde $PH = ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m (a-x)^{n-1}y) : (m+n) ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2 - nbx^m (a-x)^{n-1}y^2) : (m+n) ay^{m+n}$ sive $: (m+n)bx^m (a-x)^n = (my^2(a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n}a - x : PH$.

COROLLARIUM VI.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis Hyperbolis reperitur $PH = (my^2(a+x) + nxy^2) : (m+n)(ax + x^2)$. Est itaque $ax + xx : yy = \frac{m}{m+n}a + x : PH$.

COROLLARIUM VII.

42. Pro Hyperbola intra asymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde $PH = ydy : dx = -y^2 : x$ Tab. I. Fig. 4. Valor negativus indicio est, subnormalem PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$, adeoque $y = a^2 : x$, & $y^2 = a^4 : x^2$, erit $PH = a^2 y : x^2$, vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2 = y : PH$ & $x^3 : a^3 = a : PH$, hoc est, semiordinata habet ad subnormalem rationem duplicatam, & ad latus potentiæ Hyperbolæ rationem triplicatam abscissæ ad latus potentiæ Hyperbolæ.

COROLLARIUM VIII.

43. In Cissoide DIOCLIS, $2ydy = (3ax^2dx - 2x^3dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x : PH$.

COROLLARIUM IX.

44. Quia $PH = ydy : dx$ (§. 35), & $PM = y$; erit $MH = \sqrt{(y^2dy^2 : dx^2 + y^2)} = y\sqrt{(dy^2 + dx^2) : dx}$. Tab. I. Fig. 2.

SCHOLION.

45. *Equidem data per Problema præcedens subtangente, subnormalis reperitur facillime absque calculo differentiali* (§. 409): *quoniam tamen subinde subnormalis inveniri debet, data tantummodo æquatione ad curvam; ideo in Problemate præsente docendum erat, quomodo independenter a subtangente ex æquatione eruenda.*

PROBLEMA VI.

46. *Determinare curvarum algebraicarum asymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam asymptotus CD cum curva non concurrit, nisi intervallo infinito emenso; haberi potest pro tangente in puncto, cui abscissa infinita respondet. Quantitates ergo constantes respectu variabilium x & y sunt infinite parvæ (§. 2). Quamobrem si ex valore Tab. I. Fig. 2.

Tab. I. *Fig.* 2. ipsius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipsius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo asymptotus CD ducitur.

2. Quodsi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipsius AE: est enim in illo casu $\triangle MRm \backsim \triangle CAE$. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abscissam AP esse infinitam, adeoque TM asymptotum; evidens est $\triangle MRm \backsim \triangle TPM$ (§. 20). Sed $\triangle TPM \backsim \triangle TAG$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $\triangle TAG \backsim \triangle MRm$, consequenter $MR : Rm = TA : AG$ (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum $\triangle TAG$ alterum CAE; erit $MR : Rm = CA : AE$, hoc est, $dx : dy = CA : AE$.

COROLLARIUM I.

47. In Hyperbola *Apolloniana*, $AT = ax : (a + 2x)$ (§. 491 *part.* 1). Ergo in casu asymptotico degenerat in $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, prorsus ut supra habetur (§. 474 *part.* 1). Porro ad Hyperbolam *Apollonianam*

$$ay^2 = bx\,(a + x)$$

hoc est, in nostro casu, ob a infinitesimam,

$$ay^2 = bxx$$

consequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx : dy = CA : AE$ (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : AE$$

Unde habetur $AE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, denuo ut supra (§. 474 *part.* 1.).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In casu infiniti, seu asymptotico, $TP = CP = \frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro, ob similitudinem $\triangle\triangle$ TPM & CAE, est Tab. I. *Fig.* 2.

$$TP : PM = CA : AE$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : AE$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : AE$$

$$AE = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM II.

48. Pro infinitis Hyperbolis, est $AT = nax : (ma + mx + nx)$ (§. 28) adeoque in casu asymptotico, in quo $x = \infty$, $AC = nax : (mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quoniam porro (§. 525 *part.* 1.).

$$ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46),

hoc est, si fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$a^{1:r}y = b^{1:r}x$$

$$a^{1:r}dy = b^{1:r}dx$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = CA : AE$$

Unde ob $CA = na : r$, reperitur AE

$$\frac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}} = \frac{n}{r}\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

PROBLEMA VII.

49. *Determinare subtangentem & subnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois est curva algebraica (§. 377, 538 *part.* 1); subtangens ejus inveniri potest *per Probl.* 4, & subnormalis *per Probl.* 5 (§. 20 & 35). Enim vero quia, ob æquationem ejus admodum prolixam, expressio utraque non satis concinna prodit; ideo consultius judicamus alia methodo utramque investigari, qua & in casibus aliis similibus commode utendum.

Sit

Tab. I. *Fig.* 5. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur pm ipsi PM infinite propinqua: erit $Pp = MR = dx$, & $Rm = dy$, unde $PT = ydx : dy$, ut supra (§. 20). Sit porro $AB = QM$ (§. 535 *part.* 1.) $= a$, $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Ut valor ipsius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - z = t$$

$$\text{erit } -dx = dv \qquad -dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$
$$at = zv$$
$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc est,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy$$

Substituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipsorum differentialium dt & dv in duabus posterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$
$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{x}$$
$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{ydy - tdx}{z}$$
$$z^2dx - azdx = vydy - vtdx$$
$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$
$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$, ob $y^2 = z^2 - t^2$, & subnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$. Tab. I. *Fig.* 5.

Aliter.

Sit TC secans regulam in I perpendicularis ad MC & mc ipsi CM infinite propinqua. TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ describatur arcus Qt & radio CM arcus Mr. Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QtS$ angulus t rectus est (§. 38), & QCI itidem rectus (§. 78 *Geom.*), & ob angulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3), angulus $IQC = QSt$ (§. 239 *Geom.*), erit $\triangle QtS \backsim \triangle QIC$, (§. 267 *Geom.*), adeoque Tab. IV. *Fig.* 43.

$$CQ : CI = tS : Qt$$
$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Qt & Mr sunt arcus concentrici intra crura ejusdem anguli descripti, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$
$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra, modo ostendatur, esse $\triangle Mrm \backsim \triangle MCT$, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$
$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 *part.* 1)

$$y = x + a$$

adeoque $dy = dx$

Ergo $CT = \frac{by^2dx}{x^2dy} = \frac{by^2}{x^2}$

Tab. IV. Fig. 43. Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268 *Geom.*).

$$CQ : CM = CI : CG$$

$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare si porro TM ducatur parallela ipsi GQ; erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$

$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT subtangens, consequenter TM tangens quæsita.

PROBLEMA VIII.

Tab. I. Fig. 6. 50. *Determinare subtangentem in Spirali* Archimedea, *& infinitis Spiralibus aliis.*

Sit semidiameter circuli AB $= a$, peripheria $= b$, arcus BD $= x$, AG $= y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit CD $= dx$, & EF $= dy$ & (§. 138, 412 *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$

$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AG normalis; quæ est subtangens Spiralis: erit EG parallela ipsi AH (§. 256 *Geom.*), adeoque cum sit FA $=$ AE, sive AG, ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*),

$$FE : EG = FA : AH$$

$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam pro Spirali *Archimedea* (§. 571 *part.* I)

$$\frac{ax = by}{adx = bdy}$$

Hinc subtangens AH $= \frac{y^2dx}{ady} = by^2 : a^2 = zy : a$. Tab. I. Fig. 6.

Pendet adeo determinatio subtangentis a quadratura Circuli, cum pro arcu x assumenda sit recta.

Pro infinitis Spiralibus est (§. 572 *part.* I.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$$AH = y^2\, dx : ady = mb^n\, y^{m+1} : na^{m+1}\, x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1}\, x^{n-1} = mxy : na.$$

COROLLARIUM.

51. Quodsi ponamus arcum BC esse ad FC ut est abscissa curvæ algebraicæ ad semiordinatam; erit BC $= x$, CD $= dx$, FC $= y$, & (ducto radio AF arculo FI) GI $=$ FE $= dy$, atque (§. 138, 412. *Geom.*) ob AG $=$ AF (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$

$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$

$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{ady}$$

Quodsi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, substituatur in expressione subtangentis AH valor ipsius dx, prodibit subtangens quæsita. Sit. ex. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$

erit $\quad bdx = 2ydy$

unde AH $= (a-y)^2\, dx : ady = 2y\, (a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA IX.

52: *Determinare subtangentem* PT *in Cycloide.* Tab. Fig.

Sit

Tab.I. *Fig.7.* Sit APB circulus genitor Cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ Cycloidem in M tangat; erit TP subtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M transeunti intelligatur ipsa *qm* parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipsi PT parallela. Erit MS=PO (§. 226 *Geom.*) & MR=P*p*, quia arculus P*p*, infinite exiguus, habetur pro parte rectæ *p*T, (§. 257 *Geom*). Sit jam AP $=x$, PM $=y$; erit P*p* = MR $=dx$, *m*R $=dy$. Ob parallelas MP & *m*R, *per construct.* angulus M*m*R = TMP, & ob parallelas MR & TP, *itidem per constr.* *m*RM=*mp*T=MPT (§ 233 *Geom.*); consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : RM = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Est vero in Cycloide $y=x$ (§. 575 *part.* 1); consequenter $dy=dx$, & hinc $ydx : dy$ seu PT $=y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ Cycloidem in puncto respondente M tangit.

COROLLARIUM.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP sint abscissæ transcendentis AMC, eodem modo determinatur subtangens; cum in omni casu reperiatur PT $= ydx : dy$. Ponamus ex. gr.

$$bx = ay$$

$$\text{erit } bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA X.

54. *Determinare subtangentem* PT *in in Logistica.*

Sit AP $=x$, PM $=y$, *pm* ipsi PM parallela; erit MR = P*p* $=dx$ & R*m* $=dy$, & vi eorum, quæ in Problemate 4 (§. 20) demonstrata sunt, Tab.I. *Fig.8.*

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor $=v$, & semiordinata eidem respondens $=z$; erit subtangens $=zdv : dz$. Quoniam, ex natura Logisticæ, abscissæ in progressione arithmetica progrediuntur (§. 552 *part.* 1.) erit $dx=dv$. Quoniam vero semiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y+dy = z : z+dz$$

$$y : dy = z : dz \text{ (§. 193 } \textit{Arithm.})$$

$$dx = dv$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

PROBLEMA XI.

55. *Determinare subtangentem* MH *in Quadratrice* DINOSTRATIS. Tab.I. *Fig.9.*

Per punctum datum M ducatur radius CN, sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, C*n* ipsi CN, & *pm* ipsi PM infinite propinqua; AP $=y$, AN $=x$, CM $=p$, ANB $=a$, AC $=b$; erit MI $=b-y$, P*p* = MR $=dy$, N*n* $=dx$. Quoniam arcus infinite parvus, radio CM descriptus, coincidit cum recta MH, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$

$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Tab.I. Fig.9. Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§. 38) sint ad MK perpendiculares; erit mH ipsi KT parallela (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

consequenter (§. 167 *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Est vero, ex natura Quadratricis (§. 565 *part.* 1.)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Substitutis ergo, in valore ipsius MK, pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap - px) : b$ $= (a - x)p : b =$ NB. MC : AC.

Est vero NB arcus radio NC descriptus; adeoque constructio a rectificatione arcus illius, seu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA XII.

Tab.I. Fig.2. 56. *Intra angulum* QTH *describere curvam desideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP subtangens, PM semiordinata curvæ quæsitæ. Sit TP $= v$; PM $= y$, erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Tab.I. Fig.2. Quare si ex æquatione curvæ determinatur valor ipsius dx vel dy, & in æquatione modo inventa substituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abscissa x semiordinatæ PM datæ respondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodsi vero contingat, aliquas ex his determinari non posse, id quidem indicio est, eam variis modis assumi posse, adeoque plures curvas ejusdem speciei satisfacere proposito.

COROLLARIUM I.

57. Si curva AMO Parabola primi generis esse debet; erit (§. 388 *part.* 1.)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Quodsi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur; habebimus

$$vdy = 2y^2\, dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ seu } a = 2y^2 : v.$$

Porro ex æquatione ad Parabolam $a = y^2 : x$ Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x \qquad y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \tfrac{1}{2}v$$

Divisa nempe TP bifariam in A, habetur vertex Parabolæ A, ut jam ex superioribus (§. 21) constat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH Parabola describenda (§. 401 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

58. Si curva AMO Hyperbola æquilatera: erit (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quod-

Tab. I. Fig. 2. Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2\,dy : (a + 2x)$$

$$av + 2vx = 2y^2$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro, ex æquatione ad Hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = yy : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$\overline{}\; x$$

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$

$$yy = 2mx - xx$$

seu $xx - 2mx = -yy$

$$m^2 \qquad m^2$$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy$$

$$\left.\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x, datur vertex Hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$; consequenter Hyperbola describi potest (§. 472 *part.* 1.)

COROLLARIUM III.

59. Quoniam pro Circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM IV.

60. Si curva AMO Ellipsis primi generis; erit (§. 421 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 2.

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\dfrac{2ay^2}{av - 2vx} = \dfrac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$

$$-\tfrac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \frac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = \left\{\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right.$$

$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipsius a, seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet. Quodsi minor fuerit quam v; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)}$.

CAP. III.

CAPUT III.

De usu Calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis.

DEFINITIO IV.

61. SI semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis*.

SCHOLION.

62. Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed repræsentandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut Exempla inferius adducenda loquuntur.

PROBLEMA XIII.

Tab. I. Fig. 10. 11. 63. *Determinare maximam vel minimam aplicatam in curva algebraica.*

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit, in casu maximi vel minimi, subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero PH $= ydy : dx$. Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ &, ob PT $= ydx : dy = \infty$, (quæ est nota infinitatis) $dx = \infty$.

Fieri potest, ut tangens HG in directum jaceat semiordinatæ GC: quo in casu subtangens PT nihilo æquatur & subnormalis PH fit infinita. Est vero PT $= ydx : dy = 0$ (§. 20), quare si ponatur $ydx : dy = 0$, habebimus $dx = 0$. Vel, ob PH $= ydy : dx = \infty$, reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y, intuitu dy infinitesimæ. Tab. I. Fig. 12.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM I.

64. Quoniam in Circulo (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = y^2$$

erit

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in Circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis constat (§. 299 *Geom.*).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - xx = y^2$ substituatur; prodibit $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = yy$, hoc est, $\frac{1}{4}aa = yy$. Unde $\frac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$: erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a - 2x = 0$, ut ante.

COROL-

COROLLARIUM II.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$\frac{max^{m-1} = (m+1)x^m}{(m+1)x^{m-1}}$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Ex. gr. Sit $m = 3$, seu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \frac{3}{4}a$; consequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{1}{4}a\sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM III.

66. Pro Ellipsibus infinitis (§. 26)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit ex. gr. Ellipsis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (§. 421 *part.* 1.), $y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM IV.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$\frac{27x^6 = 2a^3x^3}{x^3}$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y = 3x^2 : a = \tfrac{3}{9}a\sqrt[3]{4} = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM V.

68. Sit $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a-x)^{1:3}$

Quodsi hic valor ipsius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipsius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit, ob denominatorem respectu numeratoris infinite parvum (§. 3),

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3} = a^{1:3}.\ 0 = 0$

adeoque $y - a = 0$

$$y = a.$$

COROLLARIUM VI.

69. Sit $y^5 = a^2x^3 - x^5 + b^2c^2x$

erit $5y^4dy = 3a^2x^2dx - 5x^4dx + b^2c^2dx = 0$

$$3a^2x^2 - 5x^4 + b^2c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2x^2 = b^2c^2$$

$$x^4 - \tfrac{3}{5}a^2x^2 = \tfrac{1}{5}b^2c^2$$

$$\tfrac{9}{100}a^4 \qquad \tfrac{9}{100}a^4$$

$$x^4 - \tfrac{3}{5}a^2x^2 + \tfrac{9}{100}a^4 = \tfrac{9}{100}a^4 + \tfrac{1}{5}b^2c^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{array}\right\} = \sqrt{\left(\tfrac{9}{100}a^4 + \tfrac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x^2 = \tfrac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{100}a^4 + \tfrac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\tfrac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{100}a^4 + \tfrac{1}{5}b^2c^2\right)}\right)}$$

Fiat $x = m$
erit $y^5 = a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m)}$$

COROLLARIUM VII.

70. Sit $b^2x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3y$
erit $2b^2xdx = 2cxydy + cy^2dx + 3x^2ydx + x^3dy$

$$2b^2xdx - cy^2dx - 3x^2ydx = 2cxydy + x^3dy = 0$$

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x = cy^2 + 3x^2y$$

$$2b^2x^2 = cxy^2 + 3x^3y$$

$$b^2x^2 = cxy^2 + x^3y - a^4$$

$$b^2x^2 = 2x^3y + a^4$$

$$b^2x^2 - a^4 = 2x^3y$$

$$\frac{b^2x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4x^4 - 2a^4b^2x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2y$$

adeoque ob

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} - \frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 0$$

h. e. $\frac{1}{2}b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

$$2b^2x^7 + 6a^4x^5 - b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4x^5}{b^2} - \frac{1}{2}b^2cx^4 + a^4cx^2 - \frac{a^8c}{2b^2} = 0$$

quæ est æquatio exprimens valorem ipsius x, seu abscissæ semiordinatæ maximæ respondentis.

PROBLEMA XIV.

71. *Ex dato puncto R in axe AX curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam MR, quæ sit minima omnium ex eodem puncto R ducendarum.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

Sit AP $= x$, PM $= y$, AR $= c$, erit PR $= c - x$, & ob PM^2 + PR^2 = MR^2 (§. 417 *Geom.*), MR$^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata sit MR (§. 62), erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0$$

Quodsi, ex æquatione ad curvam algebraicam data, pro ydy substituatur valor ejus; valorem ipsius x eruere licet.

COROLLARIUM I.

72. In Parabola (§. 21)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\frac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \;\&\; \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \frac{1}{2}aa = y^2$, & $(c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}aa + ac - \frac{1}{2}aa = ac - \frac{1}{4}aa = z^2$. Unde MR $= z = \sqrt{(ac - \frac{1}{4}aa)}$. Est adeo MR^2 : PM^2 $= ac - \frac{1}{4}aa : ac - \frac{1}{2}aa = c - \frac{1}{4}a : c - \frac{1}{2}a$.

Quia PR $= c - x = \frac{1}{2}a$, evidens est PR esse subnormalem (§. 36), consequenter MR normalem, unde patet

Theorema. Perpendicularis ad Parabolam est minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

Co-

Tab.I. Fig.13.

COROLLARIUM II.

73. In Hyperbola æquilatera (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

sive PR $= c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam subnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35), PR $= c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$, est denuo subnormalis, consequenter &

Theorema. In Hyperbola æquilatera normalis est brevissima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci possunt.

COROLLARIUM III.

74. In Ellipsi primi generis est (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare $\tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a - b)$$

$$c - x = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum subnormalis reperiatur $\tfrac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit PR $= c - x = \tfrac{1}{2}b - (bc - \tfrac{1}{2}bb) : (a - b) = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut adeo PR denuo sit subnormalis; consequenter &

Theorema. In Ellipsi normalis sit linea recta brevissima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

COROLLARIUM IV.

Tab.I. Fig.13.

75. Eodem modo in Hyperbola scalena reperitur $x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a + b)$.

COROLLARIUM V.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$ydy = cdx - xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = c - x = \text{PR}$$

Est adeo PR subnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis est linea recta brevissima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci potest.

PROBLEMA XV.

Tab.I. Fig.14.

77. *A puncto C extra curvam algebraicam dato ducere rectam CM, quæ sit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum.*

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum, datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit AD $= p$, CD $= q$, AP $= x$, PM $= y$; erit MH $=$ AP $-$ AD $= x - p$, & CH $=$ CD $-$ PM $= q - y$; consequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 sit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc est, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

seu $(y - q)dy + (x - p)dx = 0$.

Reliqua peragenda sunt ut in Problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curva AMO fuerit Parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Unde

Unde $y - q + (x - p)\,2y : a = 0$

$$ay - aq + 2xy - 2py = 0$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$$

$$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0$$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}aaq = 0$
$\quad - apy$

Tab. I. Fig. 14. Quodsi hæc æquatio ope Parabolæ datæ atque circuli construatur (§. 622 *part.* 1.); una eademque opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi §. cit.*) fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem Parabolæ A describendus est circulus, qui eam in puncto desiderato M secabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; si ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam secetur in L. Nam $AD = p$, adeoque $DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter $AL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis $AP = x$, $PM = y$. Etenim ex natura Parabolæ $AP = y^2 : a$, adeoque $LP = IR = y^2 : a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter $IR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro $MR = y - \frac{1}{4}q$, adeoque $MR^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) $MI^2 = IR^2 + MR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Est vero $MI^2 = AI^2 = IL^2 + LA^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}qy = 0$$
$$- \frac{py^2}{a}$$

$$y^4 + \frac{1}{2}a^2 y^2 - \frac{1}{2}a^2 qy = 0$$
$$- apy^2$$

$$y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}a^2 q = 0$$
$$- apy$$

quæ est æquatio ad construendum proposita.

COROLLARIUM II.

Tab. I. Fig. 14.

79. Quoniam (§. 77)

$$(y - q)\,dy + (x - p)\,dx = 0$$

erit $(x - p)\,dx = (q - y)\,dy$

$$\frac{(x-p)y}{q-y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)

$CH : MH = CD : Dr$

$q - y : x - p = q : Dr$

adeoque $Dr = \frac{qx - pq}{q - y}$; consequenter ob $DP = x - p$, $Pr = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) = (x - p)y : (q - y)$. Est adeo $Pr = ydy : dx$ subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo generale *Theorema*. In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis est brevissima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci possunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, si Problema non fuerit planum, consultius esse ut in expressione generali valor potius ipsius* dx, *quam* dy *substituatur. Nec absimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ: quemadmodum ex sequente Problemate patet.*

PROBLEMA XVI.

81. *A puncto* C *intra curvam algebraicam dato ducere rectam* CM, *quæ sit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.* Tab. IV. Fig. 44.

Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$, erit $HC = PD = p - x$ & $MH = y - q$, consequenter $MC^2 = MH^2 + HC^2$ (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 sit minimum quoddam, ex hypothesi: erit ejus differentiale nihilo

æqua-

Tab. IV. Fig. 44. æquale (§. 63), hoc est, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$ seu $(y-q)\,dy - (p-x)\,dx = 0$. Reliqua peragenda sunt ut in Problemate 14 (§. 71).

Corollarium I.

82. Quoniam $(y-q)\,dy = (p-x)\,dx$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p-x)\,y}{y-q} = \frac{HC.\,PM}{MH}$$

Quare cum sit $MH : HC = PM : PR$ (§. 268 *Geom.*); erit PR subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis est brevissima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci potest.

Corollarium II.

83. Linea itaque ad curvam normalis est brevissima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci potest (§. 76, 79, 82).

Problema XVII.

Tab. II. Fig. 15. 84. *Lineam rectam AB ita secare in D, ut rectangulum ex AD & DB sit maximum eorum, quæ hac ratione construi possunt.*

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD.\,DB = ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe esse ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

$$\text{Quare } adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB est secanda in duas partes æquales, estque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & bases junctim sumtæ inter se æquantur.

Problema XVIII.

85. *Lineam rectam AB ita secare in D, ut $AD^m.\,DB^n$ sit maximum factorum simili modo formatorum.* Tab. II. Fig. 15.

Sit denuo $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD^m.DB^n = x^m\,(a-x)^n$. Erit igitur x abscissa respondens semiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m\,(a-x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 *part.* 1), & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mx^{m-1}\,(a-x)^n = nx^m\,(a-x)^{n-1}$$

$$m\,(a-x) = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x$$

Sit ex. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{2}{3}a$, hoc est, si recta $AD = \frac{2}{3}a$ & $BD = \frac{1}{3}a$, atque BD sumatur pro altitudine prismatis, AD pro latere quadrati, quod est basis ejusdem; erit prisma omnium maximum eorum, quæ ex divisione rectæ AB in duas partes formari possunt.

Problema XIX.

86. *Super recta AB tanquam hypothenusa triangulum rectangulum maximum construere.* Tab. II. Fig. 16.

Sit $AB = a$, $AC = x$, erit (§. 417 *Geom.*) $BC = \sqrt{(aa - xx)}$, area (§. 392 *Geom.*) $= \frac{1}{2}AC.\,CB = \frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)}$. Habemus adeo æquationem ad curvam tertii generis

$$x\sqrt{(aa - xx)} = 2y^2$$

$$\text{seu } aaxx - x^4 = 4y^4$$

 Unde

Tab. II. *Fig.* 16. Unde $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 16y^3 dy = 0$

$$2a^2 x = 4x^3$$
$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x$$

Patet adeo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2 = aa$ & $AC^2 = \frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2 = \frac{1}{2}aa$; consequenter $AC = CB$.

PROBLEMA XX.

Tab. II. *Fig.* 17. 87. *Inter omnes conos æquales determinare eum, qui minimam habet superficiem.*

Sit soliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius coni $AC = x$; erit $r:p = x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat basin coni $px^2:2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam si dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}DC = 2a^3r:px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde $DC = 6a^3r:px^2$, &

$$DC^2 = 36a^6r^2:p^2x^4$$
$$AC^2 = x^2$$
$$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2:p^2x^4 \text{ (§. 417 } Geom.)$$
$$AD = \sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:px^2$$
$$\tfrac{1}{2} \text{ peripheria baf. } px:2r$$
$$\text{Superf. coni } \sqrt{(p^2x^6 + 36a^6r^2)}:2rx \text{ (§. 548 } Geom.)$$

Habemus itaque, vi methodi de maximis & minimis (§. 63),

$$(p^2x^6 + 36a^6r^2):4r^2x^2 = y^2$$

h. e. $p^2x^4:4r^2 + 9a^6:x^2 = y^2$

$$4p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2ydy = 0$$
$$p^2x^3dx:r^2 - 18a^6dx:x^3 = 0$$
$$p^2x^3:r^2 = 18a^6:x^3$$
$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$
$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$
$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$$
$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Tab. II. *Fig.* 17.

Quoniam $px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$, erit $x^3: a^3 = 3r\sqrt{2}:p$, consequenter evidens est

Theorema. Cubus radii coni inter æquales minimam superficiem habentis est ad ipsum conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA XXI.

88. *Sit* ADB *semicirculus & curva* AMD *ejus natura, ut sit* $BP:PN = AP:PM$; *determinare punctum* M, *in quo* MN *est maxima linea earum, quæ simili modo determinantur.* Tab. IV. *Fig.* 45.

Sit diameter semicirculi $AB = a$, $AP = x$; erit $PB = a - x$, & $PN = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 327, 377 *Geom.*). Est vero, *per hypoth.*

$$BP : PN = AP : PM$$
$$a - x : \sqrt{(ax - x^2)} = x : PM$$

adeoque $PM = \frac{x\sqrt{(ax - x^2)}}{a - x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$, consequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3}:\sqrt{(a - x)}$, & hinc $MN^2 = (a^2x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)}):(a-x) = [\text{ob} \sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3]$, $\frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a - x}$. Quare cum NM^2 sit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a - x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a - x)^2} = 0$$
$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a - x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. e.

Tab. IV. *Fig.* 45. h. e.

$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ \quad - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ \quad + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array}\right\} = 0$$

$$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0 \qquad a - 2x$$

$$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 6ax = -a^2 \qquad 4$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}a^2$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax + \tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{5}{16}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a - x = \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

$$x = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit $CE = \frac{1}{4}a$, adeoque, ob $CD = \frac{1}{2}a$, $DE = \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat $EP = ED$; erit $PB = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$; consequenter $AP = AB - PB = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA XXII.

Tab. IV. *Fig.* 46. 89. *Determinare maximam applicatam* QN *in curva* AMND *ejus naturæ, ut ducta recta* FM *per punctum* D, *rectæ* AE *quæ lineam* CB *positione datam in* E *ad angulos rectos secat, sit eidem* AE *constanter æqualis.*

Sit $FM = AE = a$, $DE = b$, $EP = MG = x$, erit $DP = x - b$ & $FG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G sint recti, *per construct.* & ob parallelas AE & MG (§. 256 *Geom.*) $PDM = DMG$ (§. 233 *Geom.*), erit $\triangle FGM \sim \triangle PDM$, & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$

$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$$

adeoque $PM = \dfrac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = \left(1 - \dfrac{b}{x}\right)(\sqrt{a^2 - x^2})$

Hinc $PM^2 = \left(1 - \dfrac{2b}{x} + \dfrac{b^2}{x^2}\right)(a^2 - x^2)$

$$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$$

Habemus adeo (§. 63) Tab. IV. *Fig.* 46.

$$\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$$

$$\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0 \qquad x^3$$

$$a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0 \qquad x - b$$

$$a^2b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Parametro a circa axem EB describatur Parabola EIR (§. 400 *part.* 1) fiatque (§. 622 *part.* 1) $EO = \frac{1}{2}a$, & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K, radio KE, describatur circulus EIT secans Parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis ($= EQ$) $= x$, adeoque QN perpendicularis ad AE transiens per I maxima applicata.

Est enim $IS = IL - SL = x - \frac{1}{2}b$, & cum $EL = x^2 : a$ (§. 391 *part.* 1) $LO = SK = \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare $SI^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, & $SK^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$; consequenter $EK^2 = IK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob $EK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA XXIII.

90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *sit axi* AE *&* Tab. IV. *Fig.* 47. *rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis.*

Sit $MN = AB = AE = a$, $AM = x$, $PM = y$, erit $AN = a - x$. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares, *per hypoth.* erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*) adeoque $AMP = NAB$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum porro angulus

ad

Tab. IV. Fig. 47. ad P rectus sit (§.78 *Geom.*) & ANB, qui est in semicirculo, sit itidem rectus, (§.317 *Geom.*); erit $\triangle$ AMP $\backsim$ $\triangle$ ANB (§.267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$
$$y : x = a - x : a$$
$$ay = ax - x^2$$
$$ady = adx - 2xdx = 0$$

Tab. IV. Fig. 47.

$$a - 2x = 0$$
$$a = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$

Est igitur in casu applicatæ maximæ AM $= \frac{1}{2}a$: unde reperitur AP $= \frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§.417 *Geom.*)

SECTIO SECUNDA.

DE CALCULO INTEGRALI, SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

De natura Calculi integralis.

DEFINITIO V.

91. Calculus *Integralis* seu *Summatorius* est Methodus quantitates differentiales summandi, hoc est, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus differentiatione resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis rite peractæ indicium est, si quantitas inventa juxta regulas Cap. 1, Sect. I, traditas differentiata eam producit, quæ ad summandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam* Angli *differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§. 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & qui a differentiis ad summas, seu, ut cum* Anglis *loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes (ita nimirum variabiles dicunt) ascendit*, Methodum fluxionum inversam *appellant.*

HYPOTHESIS.

94. *Signum summæ aut quantitatis integralis sit* $\int$, *ita ut* $\int ydx$ *denotet summam seu integrale differentialis* ydx.

PROBLEMA XXIV.

95. *Quantitatem differentialem integrare seu summare.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§.8).

II. $\int(dx \mp dy) = x \mp y$ (§.11.).

III. $\int(xdy + ydx) = xy$ (§.12).

IV. $\int mx^{m-1}\, dx = x^m$ (§.13)

V. $\int(n:m)\, x^{(n-m):m}\, dx = x^{n:m}$ (§.17).

VI. $\int(ydx - xdy) : y^2 = x : y$ (§.19).

Ex his casus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis summatur, si exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis, ex. gr. in casu quarto per $(m - 1 + 1)\, dx$, hoc est, per mdx.

Quodsi quantitas differentialis ad summandum

mandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriem infinitam cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad Quadraturas & Rectificationes curvarum simpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad Quadraturam circuli, vel Rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eædem abfuerint (§.11); itaque fieri potest, ut $\int dx$ sit $x+a$ vel $x-a$, $\int(xdy+ydx)=xy\mp a^2$, vel $xy\pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum sit, docebitur paulo post.

SCHOLION.

96. *Quemadmodum in Analysi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, sed non vice versa ex qualibet radix extrahi potest desiderata; ita similiter in Analysi infinitesimali quantitas qualibet variabilis, aut ex variabilibus & constantibus quomodocunque composita, haud difficulter differentiatur, sed non vice versa quodlibet differentiale integrari potest. Quemadmodum autem porro in Analysi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi Methodus hactenus inventa, neque enim ætas nostra transcendit limites ultra seculum & quod excurrit Algebræ jam assignatos: ita similiter in Analysi infinitorum Calculus integralis suam perfectionem nondum est assecutus. Sicuti autem in Analysi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita similiter in Analysi infinitorum ad series infinitas confugimus, ubi perfectam summationem dare non valemus.*

CAPUT II.

De usu Calculi integralis in Quadraturis curvarum.

DEFINITIO VI.

Tab.I. *Fig.*2. 97. *Differentiale* seu *Elementum areæ* dicitur rectangulum PMRP *ex* semiordinata PM in differentiale abscissæ *Pp*.

COROLLARIUM I.

98. Si ergo semiordinata $PM=y$, abscissa $AP=x$, erit $Pp=MR=dx$, consequenter Elementum areæ $PM.MR=ydx$.

COROLLARIUM II.

99. Quoniam $mR=dy$ & $MR=dx$; erit $\triangle MRm=\frac{1}{2}dxdy$ (§.392 *Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ est ipsius ydx infinitesima (§.12), consequenter trapezium PM*mp* æquale est rectangulo PMR*p*, in præsente nimirum casu, ubi *pm* ipsi PM infinite propinqua intelligitur (§.4). Quare cum area AMP in infinita istiusmodi trapezia resolvi possit; erit ea $\int ydx$ (§.91, 94). Tab.I. *Fig.*2.

COROLLARIUM III.

100. Quodsi itaque ex æquatione ad curvam datam substituatur valor ipsius *y*, & *ydx* integrabile evadat; integratione peracta habetur Quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare, idem est ac summare *ydx*.

PROBLEMA XXV.

101. *Invenire aream Trianguli.* Tab.II.

Sit $CP=x$, $MN=y$, $CD=a$, $AB=b$; *Fig.*18. erit, ob MN ipsi AB parallelam, (§.268, 396 *Geom.*)

$$CP:MN=CD:AB$$
$$\frac{x:y=a:b}{y=bx:a}$$

Ergo

Tab.II. Fig.18. Ergo elementum $MNnm = ydx$ (§. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§.95): quæ eſt area indefinita CMN (§.99). Quodſi pro CP, ſeu x, ſubſtituatur CD, ſeu a: prodibit area totius trianguli ACB $= ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}$AB. CD, prorſus ut in Elementis Geometriæ (§.392) demonſtratum.

SCHOLION.

102. *Hoc Exemplum ideo attulimus, ut Tyrones, quibus principia Calculi ſummatorii ſub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, niſi quæ demonſtrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perſpiciant.*

PROBLEMA XXVI.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro Parabola *Apolloniana* (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \tfrac{2}{3}xy,$$ ſubſtituto valore ipſius $a^{1:2}x^{1:2}$.

COROLLARIUM.

104. Eſt ergo ſpatium parabolicum ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc eſt, ut 2 ad 3 (§.124 *part.*1).

PROBLEMA XXVII.

105. *Infinitas Parabolas quadrare.*

Pro infinitis Parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part.* 1)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r} x^{m:r} = y$$
$$ydx = a^{n:r} x^{m:r} dx$$
$$\int ydx = \frac{r}{m+r} a^{n:r} x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r} xy,$$ ob $a^{n:r} x^{m:r} = y$.

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque eſt ad rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam, ut $rxy : (m+r)$ ad xy, hoc eſt, ut r ad $m+r$ (§.124 *part.*1).

PROBLEMA XXVIII.

107. *Quadrare ſegmentum ſpatii parabolici* PMNQ *inter duas ſemiordinatas* PM *&* QN *interceptum.* Tab.II. Fig.19.

I. Quoniam AP conſtans eſt, & origo abſciſſæ indeterminatæ in P: ſit AP $= b$, PQ $= x$, QN $= y$, erit AQ $= b+x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§.388 *part.*1)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab+ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab+ax)}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\sqrt{(ab+ax)} = v$$

erit
$$ab + ax = v^2$$
$$adx = 2vdv$$
$$dx = 2vdv : a$$
$$ydx = 2v^2dv : a$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(ab+ax)\sqrt{(ab+ax)} : a = \tfrac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}.$$

Quoniam in P, $x = 0$, & ſpatium quoque QNMP evaneſcit; ſi in integrali inventa ponatur $x = 0$, quod relinquitur, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, oſtendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut ſpatium QNMP nihilum evadat in P, conſequenter ut integrale fiat quadratura ipſius QNMP. Habemus nempe in noſtro caſu ſubtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: unde

Tab. II. *Fig.* 19. unde ipsius QNMP area $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

II. Sit AQ constans, & $= b$, origo ipsius x in Q, erit QP $= x$, PM $= y$, AP $= b - x$ & (§. 388 *part.* 1)

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab - ax)} = y$$

$$ydx = dx\sqrt{(ab - ax)}$$

Fiat ut ante $ab - ax = v^2$

erit $-adx = 2vdv$

$$dx = -2vdv : a$$

$$ydx = -2v^2dv : a$$

$$\int ydx = -\tfrac{2}{3}v^3 : a = -\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Ut intelligatur quid integrali sit adjiciendum, quo spatii PMNQ mensuram constituat; ponatur ut ante $x = 0$, relinquetur $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifestum est, si illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, haberi spatium PMNQ $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

SCHOLION.

108. *Spatium* PMNQ *esse in casu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in posteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ *etiam ex Problemate* 26 (§. 103) *manifestum est. Nimirum* PMNQ $=$ ANQ $-$ AMP. *Sed in casu priore* ANQ $= \frac{2}{3}$ AQ. QN $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, *&* AMP $= \frac{2}{3}$AP. PM $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* PMNQ $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In posteriore* ANQ $= \frac{2}{3}$AQ. QN $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ *&* AMP $= \frac{2}{3}$ AP. PM $= \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* QNMP $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quodsi adeo curva non supponatur descripta, sed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non constet, ubi origo ipsius x sit statuenda; evidens est, ex resolutione Problematis præsentis, quod in integrali poni debeat $x = 0$, &, deletis iis quæ per x multiplicantur, residuum, si quod fuerit, sub signo contrario ipsi sit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæsita.

PROBLEMA XXIX.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3 = a^4$.

Quoniam

$$y = a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx = \tfrac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2} = \tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

PROBLEMA XXX.

111. *Quadrare curvam* CARTESII (d), *ad quam* $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Quoniam $b^2y = bx^2 - x^3$

erit $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$$

$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$$

PROBLEMA XXX.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Quoniam $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

erit $ydx = \left(\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a\right)dx$

$$\int ydx = \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax$$

PROBLEMA XXXI.

113. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

(d) *Epist.* Tom. III. pag. 219.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)}=v$$

erit $x^2+a^2=v^2$

$$2xdx=2vdv$$

$$xdx=vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)}=v^2\,dv$$

$\int ydx=\frac{1}{3}v^3=\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$. Ponatur $x=0$, erit residuum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ sive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}-\frac{1}{3}a^3$ (§. 109).

PROBLEMA XXXII.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^3+ax^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx\sqrt{(x+a)}$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x+a)}=v$$

erit $x+a=v^2$ & $x=v^2-a$

$$dx=2vdv$$

$$ydx=2v^4\,dv-2av^2\,dv$$

$\int ydx=\frac{2}{5}v^5-\frac{2}{3}av^3=\frac{2}{5}(x+a)^2\sqrt{(x+a)}-\frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{(x+a)}=(\frac{6}{15}(x^2+2ax+aa)-\frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15$. Ponatur $x=0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x+a)}(6x^2+2ax-4aa)+\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$ (§. 109).

PROBLEMA XXXIII.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^2:(x+a)$.

Quoniam $y=x:\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx=xdx:\sqrt{(a+x)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)}=v$

erit $x+a=v^2$

$$x=v^2-a$$

$$dx=2vdv$$

$$xdx:\sqrt{(x+a)}=(2v^3dv-2avdv):v$$
$$=2v^2dv-2adv$$

$\int ydx=\frac{2}{3}v^3-2av=\frac{2}{3}(x+a)\sqrt{(x+a)}-2a\sqrt{(x+a)}=(2x+2a-6a)\sqrt{(x+a)}:3=(2x-4a)\sqrt{(x+a)}:3=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x=0$, & termini quidam nullescant, quale residui esse debeat signum, propterea quod $x-2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x=0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3ax^2+4a^3)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 109) $=\frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{(x+a)}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$.

PROBLEMA XXXIV.

116. *Quadrare omnes curvas, quæ comprehenduntur sub æquatione generali* $y=\sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y=(x+a)^{1:m}$

erit $ydx=dx(x+a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$(x+a)^{1:m}=v$$

erit $x+a=v^m$

$$dx=mv^{m-1}\,dv$$

$$ydx=mv^m\;dv$$

$$\int ydx=\frac{mv^{m+1}}{m+1}=\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}.$$

Fiat $x=0$: erit residuum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}-\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 109).

PRO-

PROBLEMA XXXV.

117. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b + cx^{m+1})} = v$$

$$\text{erit } b + cx^{m+1} = v^2$$

$$(m+1)\,cx^m\,dx = 2vdv$$

$$x^m\,dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)\,c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1)\,c$$

$$= 2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} : (m+1)\,c.$$

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1)\,c$

Est igitur area $\dfrac{2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1)\,c}$

PROBLEMA XXXVI.

118. *Quadrare innumeras Hyperbolas intra asymptotos.*

Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

$$\text{erit } 1 = y^m x^n$$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m}\,dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n} xy$$

Tab. I. Fig. 4. Si $m > n$; spatii interminati $\int$MPAS quadratura semper habetur: si $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura spatii IMPK: si vero $m = n$, spatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^2$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= \frac{4}{3}xy$. Tab. I. Fig. 4. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ seu xy pro spatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$, adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc est $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed si $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: est adeo numerator respectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

119. Johannes WALLISIUS (e) *spatium* $\int$AP MS, *eo in casu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *ostendit vero Celeberrimus* VARIGNONIUS (f), *Virum ceteroquin magno suo merito celebrem aliquid humani passum esse, consentiente summo* LEIBNITIO (g).

PROBLEMA XXXVII.

120. *Hyperbolam* Apollonianam *intra asymptotos quadrare.*

Quoniam ad Hyperbolam intra asymptotos (§. 490 *part.* I.) $a^2 = by + xy$, seu si fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio sit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

$$\text{erit } 1 : (1+x) = y$$

hoc est divisione actu facta, (§. 45 *part.* I)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2\,dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5\,dx + x^6\,dx : \text{\&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

(e) In *Arithmet. infinit.* Schol. Prop. 101. f. 407. & Prop. 104. fol. 409.

(f) *Memoires de l'Academie Royale des Sciences*, A. 1706. p. m. 15.

(g) In *Actis Eruditorum*, A. 1712. p. 267. & seqq.

SCHOLION.

121. *Hanc quadraturam Hyperbolæ primus dedit Serierum infinitarum inventor* Nicolaus MERCATOR (h). *Cum autem seriem quæsivisset per divisionem; celeberrimi Geometræ* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS (i) *methodum hanc serierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex serie quadam præsupposita. Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.*

PROBLEMA XXXVIII.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2 y + y = 1$.

Quoniam $x^2 y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

vel $$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$ydx = dx : (x^2 + 1)$$

vel $$= dx : (1 + x^2)$$

Resolvatur $1 : (x^2 + 1)$ per divisionem in seriem infinitam (§. 45 *part.* I), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \text{ \&c.}$$

$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \text{ \&c.}$$

Quare

$$ydx = x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx \text{ \&c.}$$

adeoque

$$\int ydx = -x^{-1} + \tfrac{1}{3}x^{-3} - \tfrac{1}{5}x^{-5} + \tfrac{1}{7}x^{-7} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \text{ \&c.}$$

Resolvatur similiter $1 : (1 + x^2)$ in seriem (§. *cit.*), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \text{ \&c.}$$

adeoque

$$ydx = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \text{ \&c.}$$

Quare $\int ydx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9$ &c.

Quoniam series exprimit aream, quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

(h) In *Logarithmotechnia*, prop. 17. p. 31. & seqq.
(i) Vid. *Epistola* ipsorum apud WALLISIUM vol. III. *Operum Mathematic.*

PROBLEMA XXXIX.

123. *Quadrare Hyperbolam* AMP. Tab. I.
Quoniam in Hyperbola $ay^2 = abx$ Fig. 2.
$+ bx^2$ (§. 459 *part.* I.); $y = \sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, adeoque $ydx = dx\sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$; consequenter $\int ydx = \sqrt{(b : a)} \int dx \sqrt{(ax + x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax + x^2)}$ est area Hyperbolæ æquilateræ (§. 507 *part.* I) hac data datur etiam area Hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ Hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax + x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 *part.* I), erit in theoremate generali

$$m = 1,\ n = 2,\ P = ax$$

$$Q = x : a = a^{-1} x$$

$$P^{m:n} = a^{1:2} x^{1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} a^{1:2} x^{1:2} . a^{-1} x$$

$$= \tfrac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} . a^{-1} x$$

$$= -\frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6} . -\frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} . a^{-1} x$$

$$= +\frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} . \frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} . a^{-1} x$$

$$= -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\tfrac{7}{10} . -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} a^{-1} x$$

$$= +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} a^{-9:2} x^{11:2} \text{ \&c.}$$

Est

Est itaque

$$y = a^{1:2}x^{1:2} + \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} - \tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} + \tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2} + \text{\&c. in infinit.}$$

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx + \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}dx + \tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}dx - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}dx \text{ \&c. in infinit.}$$

adeoque

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{5}a^{-1:2}x^{5:2} - \tfrac{1}{4.7}a^{-3:2}x^{7:2} + \tfrac{1.3}{4.6.9}a^{-5:2}x^{9:2} - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}a^{-7:2}x^{11:2} + \tfrac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}a^{-9:2}x^{13:2} \text{ \&c.}$$

Quoniam $a^{1:2}x^{1:2} = \sqrt{ax}$, erit

$$\int ydx = \sqrt{ax}\left(\tfrac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5} \text{ \&c. in infin.}\right)$$

PROBLEMA XL.

124. *Circulum quadrare.*

Tab. I. Fig. 2. Sit $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; erit (§. 377 *part.* 1.)

$$y = \sqrt{(x - xx)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(x - xx)} = dx(x - xx)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x - xx$ extrahatur radix per Theorema generale (§. 98 *part.* 1), in quo erit

$$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx : x = -x$$

$$P^{m:n} = x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}x^{1:2}.-x = -\tfrac{1}{2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.-\tfrac{1}{2}x^{3:2}.-x = -\frac{1}{2.4}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}x^{5:2}.-x = -\frac{1.3.x^{7:2}}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.-\frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}.-x = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10}.-\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}.-x = -\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2} \text{ \&c. in infin.}$$

Habemus adeo $ydx = x^{1:2}dx - \tfrac{1}{2}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{2.4}x^{5:2}dx - \tfrac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}dx - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}dx - \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}dx$ &c. in infin.

Hinc $\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{5}x^{5:2} - \tfrac{1}{4.7}x^{7:2} - \tfrac{1.3}{4.6.9}x^{9:2} - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}x^{11:2}$ &c. in infin. $= \sqrt{x}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{4.7}x^3 - \tfrac{1.3}{4.6.9}x^4 - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \tfrac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^7\right.$ &c. in infinit.$\left.\right) = \sqrt{x}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{28}x^3 - \tfrac{1}{72}x^4 - \tfrac{5}{704}x^5 - \tfrac{7}{1664}x^2\right.$ &c. in infin.$\left.\right)$

Hæc nempe series exhibet quadraturam indeterminatam segmenti AMP.

Aliter.

Quoniam si radius Circuli $= 1$, $CP = x$, $PM = y$ (§. 377 *part.* 1.) $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $\sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \tfrac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 98 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 3.

$$ydx = dx - \tfrac{1}{2}x^2dx - \tfrac{1}{8}x^4dx - \tfrac{1}{16}x^6dx - \tfrac{5}{128}x^8dx - \tfrac{7}{256}x^{10}dx - \text{\& in infin.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{40}x^5 - \tfrac{1}{112}x^7 - \tfrac{5}{1152}x^9 - \tfrac{7}{2816}x^{11} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quando x radio CA æqualis evadit, spatium DCPM degenerat in quadrantem. Substituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} - \tfrac{7}{2816}$ &c. in infinit., quæ eadem series integram Circuli aream metitur, si diameter fuerit 1.

Quodsi

Quodsi progressum in infinitum perspicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\surd(1-x^2)$ in seriem resolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4$

$$- \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$$ &c. in infinit.

$$ydx = dx - \tfrac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$$ &c.

$$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$$ &c. in infin.

Dicatur terminus primus A, secundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit

$$A = x$$

$$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$$

$$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$$

$$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 = -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$$

$$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$$

&c.

Aliter.

Tab.II. Fig.20. Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri seu dupli $KB = 2x : (1 - xx)$ (§. 327 *part.* 1) & (§. 269 *Geom.*)

$$BG : BC = KG : KC$$

$$x : 1 = \frac{x + x^3}{1 - xx} : \frac{1 + x^2}{1 - xx}$$

Est enim $KG = 2x : (1 - xx) - x =$ Tab.II. Fig.20. $(2x - x + x^3) : (1 - xx) = (x + x^3) : (1 - xx)$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$KC : KB = MC : PM$$

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : \frac{2x}{1 - x^2} = 1 : \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$KC : BC = MC : PC$$

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : 1 = 1 : \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Unde $PB = 1 - (1 - x^2) : (1 + x^2) = (1 + x^2 - 1 + x^2) : (1 + x^2) = 2x^2 : (1 + x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx) : (1 + x^2)^2 = 4xdx : (1 + x^2)^2$, & $mR = (2dx + 2x^2dx - 4x^2dx) : (1 + x^2)^2 = (2dx - 2x^2dx) : (1 + x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2 : (1 + x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2) : (1 + x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2) : (1 + x^2)^4$, & $Mm = (2dx + 2x^2dx) : (1 + x^2)^2 = 2dx : (1 + x^2)$. Denique $Mm . \frac{1}{2}MC = dx : (1 + x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MCm, seu elementum sectoris BCM, cujus dimidii tangens x, summetur; resolvi debet $1 : (1 + x^2)$ in seriem (§. 45 *part.* 1): quo facto reperitur $dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ series exprimit sectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens $GB = x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32 *Trig.*). Si ergo pro x substituatur 1, series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem Circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, si 1 denotet diametrum Circuli.

Brevius.

Brevius.

Tab.II. *Fig.*20. Sit tangens KB $= x$, BC $= 1$ & secans CA alteri CK infinite propinqua, ductusque arculus KL radio CK; erit AK $= dx$, KC $= \sqrt{(1 + x^2)}$ (§.417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L sint recti (§.38); & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC $=$ KAC (§. 239 *Geom.* & §. 3 *Analys. infinit.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$

$$\sqrt{(1 + x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Porro (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$

$$\sqrt{(1 + x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}$$

Sector igitur CMm $= \frac{1}{2}dx : (1 + x^2)$ $= \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c.). Unde per summationem eruitur sector BCM, cujus tangens KB $= x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque si BM octans Circuli, seu arcus 45°, sector erit (§. 32 *Trigon.*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. in infinit. Hujus adeo seriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum est quadrans Circuli, immo integra area si diameter $= 1$.

SCHOLION.

125. *Seriem primam invenit* NEWTONUS, *alteram* Jacobus GREGORIUS, *& in eandem incidit* LEIBNITIUS *ignorans, dubio procul, prodituram seriem* Gregorianam, *cum ex tangente quæreret aream. Neque enim putandum est, quod inventum seriei, quam* GREGORIO *repertam non ignorabat, etsi publice non constaret, sibi attribuerit absque ulla ratione Vir probati alias candoris. Sed nullum est dubium quin ingeniosissimus* LEIBNITIUS *methodo ab iis diversa, quas ego proposui, ad suam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde constet, (quod* LEIBNITIUS *in* Actis Eruditorum *asseruerat)* $\int(dx : (1 + x^2))$ *dependere a quadratura circuli, & quomodo inde eruatur series* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *responsurus, judicio* LEIBNITII *submisissem, eam equidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius absolvi posse: unde etiam factum est, ut postea de breviori cogitarem.*

PROBLEMA XL.

126. *Ellipsin* Apollonianam *quadrare.* Tab.I. *Fig.*10.

Sit AC $= a$, GC $= c$, PC $= x$; erit (§. 432 *part.* 1)

$$y^2 = c^2 (a^2 - x^2) : a^2$$

$$y = c\sqrt{(a^2 - x^2)} : a$$

Est vero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin. (§. 98 *part.* 1.). Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. consequenter $\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodsi pro x ponatur a; erit quadrans Ellipsis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem series integram Ellipsis aream exhibet, si a axem integrum denotet.

Aliter.

Tab.II. Fig.23. Quoniam elementum Ellipseos est $cdx\sqrt{(a^2-x^2)}:a$; erit $ECLR = \frac{c}{a}\int(dx\sqrt{(a^2-x^2)})$. Sed $\int(dx\sqrt{(a^2-x^2)}) = DCLK$ (§. 124). Est itaque $a:c = DCLK:ECLR$, hoc est, area circularis DCLK est ad Ellipticam ECLR ut axis major AB (qui est diameter circuli) ad minorem 2CE (§. 124 *part.* 1). Pendet adeo quadratura Ellipseos a quadratura Circuli.

COROLLARIUM I.

127. Si fiat $\sqrt{ac} = 1$, erit area Ellipsis $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo Ellipsin esse circulo æqualem, cujus diameter est media proportionalis inter axes Ellipsis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM II.

128. Est ergo Ellipsis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 408 *Geom.*), hoc est, ut c ad a (§. 124 *part.* 1), seu ut axis minor ad majorem: quod idem de segmentis indefinitis ostendimus analytice in resolutione.

COROLLARIUM III.

129. Data Circuli quadratura dabitur etiam quadratura Ellipsis, & contra.

SCHOLION.

130. *Quamvis Circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* HIPPOCRATES Chius, *ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *semicirculus &* GC = BG. *Describatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA Lunula HIPPOCRATIS. *Quoniam* $BC^2 = 2GB^2$ (§. 417 *Geom.*); *erit quadrans* AFBC *semicirculo* AEB *æqualis* (§. 408 *Geom.*). *Ablato igitur utrinque segmento communi* AFBA; *erit* AEBFA = △ ACB = GB^2. Tab.II. Fig.21.

PROBLEMA XLII.

131. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP = PM (§. 52): erunt in △PMT anguli M & T æquales (§. 184 *Geom.*), adeoque TPQ = 2M (§. 239 *Geom.*). Est vero anguli APQ mensura arcus dimidius AP (§. 291, & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322 *Geom.*). Ergo APQ = TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ = TPA + APQ = 2APQ = 2TMP, per *demonstrata*. Ergo APQ = TMP = MmS, ob parallelas MP & mq (§. 233 *Geom.*). Quamobrem, cum ad S & Q sint recti, *per constr.*; erit (§. 267 *Geom.*) Tab.I. Fig. 7.

AQ : QP = MS : Sm

Sit jam AQ = x, AB = 1, erit MS = dx, PQ = $\sqrt{(x-xx)}$ (§. 377 *part.* 1.) & mS = $dx\sqrt{(x-xx)}:x$. Reperimus autem supra (§. 124) $\sqrt{(x-xx)} = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\sqrt{(x-xx)}:x =$ (quoniam ob divisionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 *part.* 1) $x^{-1:2}dx - \frac{1}{2}x^{1:2}dx - \frac{1}{8}x^{3:2}dx - \frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c. in infinitum, cujus summa $2x^{1:2} - \frac{1}{3}x^{3:2} - \frac{1}{20}x^{5:2} - \frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, est semiordinata Cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM.dx, seu elementum QMSq spatii cycloidici AMQ = $2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus summa = $\frac{4}{3}x^{3:2} - \frac{2}{15}x^{5:2} - \frac{1}{70}x^{7:2} - \frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinit. exprimit segmentum Cycloidis AMQ.

Quodsi mS = gG = $dx\sqrt{(x-xx)}:x$ ducatur in GM = AQ = x, reperietur elementum GMHg areæ AMG = $dx\sqrt{(x-xx)}$: quod cum idem sit cum elemenmento ſegmenti circuli APQ (§. 124), erit ſpatium AMG ſegmento circuli APQ; conſequenter area ADC ſemicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB ſemiperipheriæ circuli æquatur (§. 574 *part.* 1.) ſi ea $= p$ & AB $= a$; erit rectangulum BCDA $= ap$ (§. 375 *Geom.*), & ſemicirculus APB, adeoque & ſpatium cycloidicum externum ADC $= \frac{1}{4} ap$ (§. 429 *Geom.*). Ergo area ſemicycloidis ACB $= \frac{3}{4} ap$ & AMCBPA $= \frac{1}{2} ap$; conſequenter area Cycloidis eſt circuli genitoris tripla.

PROBLEMA XLIII.

133. *Ciſſoidem* DIOCLIS *quadrare.*

Quoniam $y^2 = x^3 : (1-x)$, ſi 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part.* 1.); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1 : \sqrt{(1-x)}$ actu radix, per Theorema generale (§ 98 *part.* 1) in quo erit $m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2}.1. -x = \frac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4}.\frac{1x}{2}. -x = \frac{1.3x^2}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6}.\frac{1.3x^2}{2.4}. -x = \frac{1.3.5x^3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8}.\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}. -x = \frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus ſumma $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}\,(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1.3}{4.9}x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^5 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6$ &c. in infinitum) exprimit ſpatium APM.

Aliter.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PM = y$, $AB = a$; erit (§. 548 *part.* 1)

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$ Tab. II. Fig. 22.

Quoniam (§. 547 *part.* 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x = PB = z$: habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Eſt vero vdx elementum circuli PNnp; $\int zdy$, ob $z = PB = OM$ & $dy = mR = oO$, elementum mMOo areæ AMOB & ydx elementum PMmp areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra Ciſſoidem AI & ejus aſymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ eſt eadem area, adeoque $\int ydx = \int zdy$; conſequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem caſu $\int vdx$ ſemicirculum producat ANB; erit, ob $\int zdy = 3\int vdx$, totum ſpatium ciſſoidale in infinitum protenſum ſemicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA XLIV.

134. *Quadrare Logiſticam, ſeu Logarithmicam.*

Sit ſubtangens $PT = a$ (§. 54), $PM = y$, $Pp = dx$; erit (§. *cit.*) Tab. I. Fig. 8.

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Tab. I. Fig. 8. Spatium ergo interminatum HPMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM I.

135. Sit QS $= z$; erit ſpatium interminatum ISQH $= az$, conſequenter SMPQ $= ay - az = a(y - z)$, hoc eſt, ſpatium inter duas Logiſticæ ſemiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

COROLLARIUM II.

136. Eſt itaque ſpatium BAPM ad ſpatium PMSQ ut differentia ſemiordinatarum AB & PM ad differentiam ſemiordinatarum PM & SQ (*§. præc.* & §. 124 *part.* 1).

PROBLEMA XLV.

137. *Quadrare Spirales.*

Tab. I. Fig. 6. Sint omnia ut in Problemate 8 (§. 50); erit arculus EG $= ydx : a$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ AG producit ſectorem infinite parvum GAE $= y^2 dx : 2a$ (§. 435 *Geom.*). Eſt autem pro Spirali *Archimedea*,

$$by = ax$$

$$y^2 = a^2 x^2 : b^2$$

$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodſi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit ſpatium ſpirale integrum $\frac{1}{6} ab$. Similiter pro infinitis Spiralibus ad circulum relatis (§. 572 *part.* 1).

$$b^n y^m = a^m x^n$$

$$y^m = a^m x^n : b^n$$

$$y = ax^{n:m} : b^{n:m}$$

$$y^2 = a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m}$$

$$y^2 dx : 2a = ax^{2n:m} dx : 2b^{2n:m}$$

$$\int y^2 dx : 2a = max^{(2n+m):m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Tab. I. Fig. 6. Quare ſi pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro ſpatiis ſpiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n+2m) b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad CF ut abſciſſa ad ſemiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur ſpatium ſpirale. Sit enim ex. gr. BC ad CF ut abſciſſa Parabolæ ad ſemiordinatam, erit (ſumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$

$$\int y^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec abſimili modo invenitur ſpatium inter arcum BC & Spiralem BF comprehenſum, cujus elementum eſt trapezium CFID $= (\text{CD} + \text{FI}) \frac{1}{2}$ FC (§. 400 *Geom.*). Eſt vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, adeoque CFID $= (dx + ydx : a)(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam Spiralis ſit parabolica, pro dx ſubſtituatur valor ipſius $(2ydy - 2ady) : r$, erit elementum ſpeciale $(ay^2 dy + a^2 ydy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$, cujus ſumma, $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$, eſt ſpatium quæſitum BFC.

PROBLEMA XLVI.

138. *Quadrare Conchoidem* NICOMEDIS.

Tab. I. Fig. 5. Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM, *per hypoth.* erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), conſequenter (§. 268 *Geom.*),

PC

Tab.I. *Fig.* 5.

$$PC : PM = OQ : OM$$

$$a+b-x : y = a-x : OM$$

& hinc $OM = y(a-x) : (a+b-x)$
adeoque $OM^2 = y^2(a-x)^2 : (a+b-x)^2$.
Porro $OQ^2 = (a-x)^2$, & $QM^2 = AB^2$ (§. 535 *part.* 1) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2(a-x)^2}{(a+b-x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2(a-x)^2 : (a+b-x)^2$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a-x) : (a+b-x)$$

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \sqrt{(2ax - x^2)}$$

Habemus itaque elementum areæ $PpmM = ydx = \frac{a+b-x}{a-x} dx \sqrt{(2ax-x^2)}$ nec alia re opus est, quam ut $\sqrt{(2ax-x^2)}$ resolvatur in seriem (§. 98 *part.* 1.), series hæc porro ducatur in $a+b-x$ & factum tandem dividatur per $a-x$. Ita enim obtinetur series, quæ singulis terminis in dx ductis exprimit elementum areæ atque eodem, quo ante, modo summatur. Ne calculus perplexus tyrones turbet, sumamus casum simplicissimum, in quo est $b=a$, adeoque $a+b = 2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties sit scribenda, ponamus $2a = c$, ut sit $a = \frac{1}{2}c$: erit $ydx = \frac{c-x}{\frac{1}{2}c-x} dx \sqrt{(cx-x^2)}$. Est autem $\sqrt{(cx-x^2)}$ semiordinata circuli, cujus diameter c, atque adeo coincidit resolutio in seriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§. 124), nisi quod ibidem supposuerimus $c=1$. Quoniam tamen hic consultius est c retineri & in resolutione, in gratiam operationum sequentium, quædam notanda sunt; ideo non inconsultum ducimus, vi Theorematis *Newtoniani* (§. 99 *part.* 1) resolutionem ipsam instituere. Erit itaque

$$m = 1,\ n = 2,\ P = cx,$$

$$Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x \text{ (§. 54, 55 part. 1)},$$

adeoque

$$P^{m:n} = c^{1:2}x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}c^{1:2}x^{1:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}. -\tfrac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}. -\tfrac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}. -\tfrac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}, \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(cx - x^2)} = c^{1:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodsi hanc seriem multiplices per $c-x$, & porro dividas per $\frac{1}{2}c-x$, prodibit $(c-x)\sqrt{(cx-x^2)} : (\frac{1}{2}c-x) = 2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & divisio modo ordinario instituitur. Etenim si seriem multiplices per c, prodit $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-1:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2}x^{3:2} + \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Quodsi terminos homogeneos in unam summam colligas, obtinetur series $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{3}{2}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{5}{8}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{3}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Hac porro divisa per $\frac{1}{2}c - x$ (§. 40 *part.* 1), prodit quotus $2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

Tab. I. *Fig.* 5. Est adeo elementum areæ Conchoidis $2c^{-1:2}x^{1:2}\,dx + c^{-1:2}x^{3:2}\,dx + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}\,dx + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}\,dx + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}\,dx$ &c. in infinit. Quare area AMP $= \frac{4}{3}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{2}{5}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{11}{14}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{5}{4}c^{-5:2}x^{9:2} + \frac{723}{352}c^{-7:2}x^{11:2}$ &c. in infin.

PROBLEMA XLVII.

139. *Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.*

Sit elementum spatii curvilinei unius $= y\,dx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum spatii alterius $z\,dx$, posita nempe semiordinata hujus z, abscissa communi x. Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z, *per hypoth.* erit $\int y\,dx : \int z\,dx = y\,dx : z\,dx$ (§. 187 *Arithm.*) $= y : z$ (§. 181. *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem basium, quibus insistunt, si semiordinatæ correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM I.

140. Quare si ARB fuerit semiellipsis; AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad EC (§. 599 *part.* 1.), adeoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL. Tab. II. *Fig.* 23.

COROLLARIUM II.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem sector circularis BFK est ad sectorem ellipticum BFR ut KL ad RL (§. 187 *Arithm.*). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 *part.* 1.) & ut CD ad CE ita Circulus integer ad Ellipsin integram (§. 128); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut Circulus ad Ellipsin (§. 167. *Arithm.*), consequenter ut sector KFB ad aream integri Circuli, ita sector RFB ad integram Ellipsis aream (§. 173 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus Capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.

De usu Calculi integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO VII.

143. *Rectificatio curvæ* est inventio rectæ, cui æqualis est linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur constare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex superioribus constet, esse MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20); Tab. I. *Fig.* 2. erit Mm seu elementum curvæ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quodsi itaque ex æquatione differentiali ad curvam specialem substituatur

stituatur valor vel ipsius dx^2, vel ipsius dy^2; habetur elementum speciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumstantiis specialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

PROBLEMA XLVIII.

146. *Parabolam rectificare*,

Pro Parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)} = dy\sqrt{(aa + 4yy)} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, resolvatur in seriem infinitam (§. 99 *part.* 1.); erit in Theoremate generali

$$n = 2,\ m = 1,\ P = a^2,\ Q = 4y^2 : a^2$$

$$P^{m:n} = a = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}a.\,4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7} \text{ \&c.}$$

in infinitum.

Quare $dy\sqrt{(aa + 4yy)} : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. cujus integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum.

COROLLARIUM I.

Tab.II. *Fig.* 24. 147. Sint AC & DC semiaxes conjugati Hyperbolæ æquilateræ; erit $AC = DC = a$ (§. 505 *part.* 1). Sit $CQ = MP = 2y$; erit Tab.II. *Fig.* 24.
(§. 534 *part.* 1) $QM = \sqrt{(4yy + aa)}$. Quodsi qm intelligatur ipsi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ $CQMA = dy\sqrt{(aa + 4yy)}$. Pendet itaque rectificatio Parabolæ a quadratura spatii Hyperbolici CQMA.

COROLLARIUM II.

148. Sit AMR Parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem descripta Hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat $CQ = AV = QN = 2PM$, & rectangulum CORA spatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146, 147), consequenter $RV = AM - 2PM$, seu differentia inter ordinatam & arcum respondentem, & $ORVQ = VNA$. Tab. IV. *Fig.* 48.

SCHOLION.

149. *Probe notandum est, omnes summationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in casu iisdem utamur. Unde ut sint perfectæ, in omnibus observanda est regula supra tradita de quadraturis* (§. 109).

PROBLEMA XLIX.

150. *Rectificare Parabolam secundi generis, ad quam* $ax^2 = y^3$, *seu sumto* $a = 1$, $x^2 = y^3$.

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx = 3y^2dy$

$$4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4x^2 = 9y^4dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4}ydy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(\tfrac{9}{4}ydy^2 + dy^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(9ydy^2 + 4dy^2)} = \tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(9y + 4)} = v$$

erit $9y + 4 = v^2$

$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)} = \tfrac{1}{9}v^2dv$$

$$\int\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)} = \tfrac{1}{27}v^3 = \tfrac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y=0$; erit residuum $=\frac{4}{27}\sqrt{4}=\frac{8}{27}$: adeoque arcus $\frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)}-\frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.

Tab.II. *Fig.*19. 151. Sit parameter Parabolæ *Apollonianæ* 1, $AP=1$, $PQ=\frac{9}{4}y$, erit $AQ=\frac{9}{4}y+1$, & ob parametrum 1, $QN^2=\frac{9}{4}y+1=(9y+4):4$ (§.388 *part.* 1.), consequenter $QN=\frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)}$. Est adeo elementum $QNnq$ spatii parabolici $PMNQ=\frac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)}$; quod divisum per 1, sive parametrum, dat elementum arcus Parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2=y^3$. Pendet adeo hujus rectificatio a quadratura Parabolæ *Apollonianæ*; quæ cum dari possit (§.103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse.

PROBLEMA L.

152. *Infinitas Parabolas rectificare.*

Si parameter $=1$, pro infinitis parabolis (§. 519 *part.* 1)

$$y^m=x$$
$$my^{m-1}\,dy=dx$$
$$m^2y^{2m-2}\,dy^2=dx^2$$

h. e. si brevitatis gratia fiat $2m-2=r$

$$m^2y^r\,dy^2=dx^2$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(m^2y^r dy^2+dy^2)}=dy\sqrt{(m^2y^r+1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex m^2y^r+1 extrahenda est radix per Theorema generale (§. 99 *part.* 1); in quo erit

$$m=1,\ n=2,\ P=1,\ Q=m^2y^r$$
$$P^{m:n}=1=A$$
$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}m^2y^r=B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}m^2y^r\cdot m^2y^r=-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}=C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}\cdot-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}\cdot m^2y^r=+\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}=D.$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}\cdot m^2y^r=-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}=E$$
$$\frac{m-4n}{5n}EQ=-\frac{7}{10}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}\cdot m^2y^r=+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}\ \text{\&c. in infinitum.}$$

Habemus itaque $dy\sqrt{(1+m^2y^r)}$ $dy+\frac{1}{2}m^2y^r dy-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy+\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}dy-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}dy+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinit. cujus integrale $y+\frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1}-\frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1}+\frac{1.3}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}$. &c. in infinitum, indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m-2$; prodibit idem arcus $=y+\frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1}-\frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3}+\frac{1.3}{2.4.6(6m-5)}m^6y^{6m-5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LI.

153. *Dato sinu* PQ *arcus* AP; *invenire arcum* AP. Tab.I. *Fig.*7.

Sit radius $AI=1$, $PQ=y$, $AQ=x$; erit (§.377 *part.* 1)

Tab. I. *Fig. 7.*

$$2x - xx = yy$$
$$2dx - 2xdx = 2ydy$$
$$dx = ydy:(1-x)$$
$$dx^2 = y^2dy^2:(1-2x+xx) = y^2dy^2:(1-y^2)$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1-y^2} + dy^2$$
$$= (y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2):(1-y^2) = dy^2:(1-y^2)$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy:\sqrt{(1-y^2)} = dy(1-y^2)^{-1:2}.$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radicis, vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1), in quo erit

$$m = -1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = -y^2$$
$$P^{m:n} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.1. - y^2 = \tfrac{1}{2}y^2 = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}y^2. - y^2 = \tfrac{1.3}{2.4}y^4 = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}\tfrac{1.3}{2.4}y^4. - y^2 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}\tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6. - y^2 = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8 \text{ \&c. in infinit.}$$

Est adeo $dy:\sqrt{(1-y^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. est arcus AP, cujus sinus $PQ = y$, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum sit

$$A = y$$
$$B = \frac{1}{2.3}y^3 = \frac{1.1}{2.3}Ay^2$$
$$C = \frac{1.3}{2.4.5}y^5 = \frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5 = \frac{3.3}{4.5}By^2$$
$$D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 = \frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7 = \frac{5.5}{6.7}Cy^2$$
$$E = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 = \frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 = \frac{7.7}{8.9}Dy^2$$

Tab. I. *Fig. 7.*

series inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3}Ay^2 + \frac{3.3}{4.5}By^2 + \frac{5.5}{6.7}Cy^2 + \frac{7.7}{8.9}Dy^2$ &c.

Si cosinus $QI = x$, erit (§. 417 *Geom.*) $PQ = \sqrt{(1-xx)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua, & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q sint recti, *per hyp.* $PO = Qq = dx$ & $\triangle\triangle\, pOP$ atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 *Geom.*) & pPI itidem rectus (§. 38); erit etiam $pPO = IPQ$ (§. 91 *Arithm.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(1-xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

COROLLARIUM I.

154. Quoniam elementum arcus $Mm = dy:\sqrt{(1-y^2)}$, si $MC = 1$, $PM = y$ (§. 153); erit sector elementaris $MCm = dy:2\sqrt{(1-y^2)}$ (§. 435 *Geom.*); consequenter sector $BCM = \frac{1}{2}\int dy:\sqrt{(1-y^2)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4.4.5}y^5 + \frac{3.5}{4.4.6.7}y^7 + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}y^9$ &c. in infin. Tab. II. *Fig. 20.*

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 20. 155. Quodsi $MC = 1$, $PC = y$, erit denuo $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$ (§. 153); consequenter & $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$: Summa vero exhibet sectorem MCO.

COROLLARIUM III.

156. Si fiat $y = 1$, sector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui adeo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{3}{4.4.5} + \frac{3.5}{4.4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}$ &c. sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304}$ &c. in infinit. Eadem series integrum Circulum exprimit, si fuerit diameter $= 1$.

PROBLEMA LII.

Tab. I. Fig. 7. 157. *Dato sinu verso AQ; invenire arcum AP.*

Sit $AQ = x$, diameter $AB = 1$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1) & *vi Probl. praec.* $Pp = dx : 2\sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}dx\,(x - xx)^{-1:2}$. Cum adeo sit, in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1), $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$; erit

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1:2}.-x = \tfrac{1}{2}x^{1:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}.x^{1:2}.-x = \tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2}.-x = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}.-x = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$$

&c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ Tab. II. Fig. 7. &c. in infinitum, seu $\sqrt{x}(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \sqrt{x}$.

PROBLEMA LIII.

158. *Data tangente* BK; *invenire arcum* BM. Tab. II. Fig. 20.

Sit tangens $BK = x$, radius $BC = 1$; erit $Mm = dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§. 124). Hujus seriei summa $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum, dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio aequalis (§. 32 *Trigon.*), si pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° seu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quae eadem series quadranti satisfacit, si diameter $= 1$.

PROBLEMA LIV.

160. *Dato arcu* BM; *invenire sinum* PM.

Sit sinus $PM = y$, radius $BC = 1$, arcus $BM = v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§. 153). Valor ipsius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Est nimirum in Theoremate generali (§. 366 *part.* 1) $a = 1$, $c = \frac{1}{6}$, $e = \frac{3}{40}$ &c. adeoque

$$v : a = v$$

$$-acv^3 : a^5 = -\tfrac{1}{6}v^3$$

$$+(3a^2c^2 - a^3e)v^5 : a^9 = (\tfrac{3}{36} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= (\tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40})v^5$$

$$= \tfrac{40-36}{12.40}v^5$$

$$= \tfrac{4}{12.40}v^5 = \tfrac{1}{120}v^5.$$

Hinc

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3$
$+ \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7$
$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c.

Quodsi Theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 *part.* 1.) Theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \text{\&c.}$$

erit (§. 95 *part.* 1.)

$$\begin{aligned} y^3 &= a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \text{\&c.} \\ &\quad + 3a^2cv^7 + \text{\&c.} \\ y^5 &= a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \text{\&c.} \\ y^7 &= a^7v^7 + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\begin{aligned} y &= av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.} \\ \tfrac{1}{6}y^3 &= +\tfrac{1}{6}a^3v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}a^2cv^7 \\ \tfrac{3}{40}y^5 &= +\tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ \tfrac{5}{112}y^7 &= +\tfrac{5}{112}a^7v^7 \text{ \&c.} \\ -v &= -v \end{aligned}$$

$$a - 1 = 0 \qquad b + \tfrac{1}{6}a^3 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = -\tfrac{1}{6}$$

$$c + \tfrac{1}{2}a^2b + \tfrac{3}{40}a^5 = 0$$

h.e. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{40-36}{12.\ 40} = \frac{1}{120}$$

$$d + \tfrac{1}{2}ab^2 + \tfrac{1}{2}a^2c + \tfrac{3}{8}a^4b + \tfrac{5}{112}a^7 = 0$$

h.e. $d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$

seu $d + \frac{1}{5040} = 0$

$$d = -\tfrac{1}{5040}$$

Nimirum $\frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}$, $\frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$ tandem $\frac{5}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}$.

Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA LV.

161. *Dato arcu* BM; *invenire tangentem* BK. Tab. II. *Fig.* 20.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus $= v$; erit (§. 158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in Problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 *part.* 1).

Est nimirum, vi Theorematis generalis,

$$x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \text{ \&c.}$$

Jam vero $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$, per legem comparationis, adeoque

$$-\frac{ac}{a^5} = -c = -\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = 3c^2 - e = \tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{5}$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \frac{5-3}{3.5} = \tfrac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Potest etiam valor ipsius x eodem modo inveniri, quo in Problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. $= 0$; erit (§. 95 *part.* 1)

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ &\quad + 3a^2cv^7 \text{ \&c.} \\ x^5 &= + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ x^7 &= + a^7v^7 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Habemus adeo, ob

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = v$$

 $-v$

$$-v = -v$$
$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 = \quad -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$\qquad - a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5 = \quad +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7 = \quad -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Quamobrem

$$\begin{array}{lll} a - 1 = 0 & b - \tfrac{1}{3}a^3 = 0 & c - a^2b + \tfrac{1}{5}a^5 = 0 \\ \hline a = 1 & b = \tfrac{1}{3} & c = b - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} \end{array}$$
$$= \frac{5-3}{15} = \frac{1}{15}$$

$$d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0$$
$$\overline{d - \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} = 0}$$
$$d = \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945}$$
$$= \frac{51}{945} = \frac{17}{315}$$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione assumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. substitutis, prodit $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{2}{15}v^5 + \tfrac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, si plures termini desiderentur, assumtitiam quoque ex pluribus constandam esse.*

PROBLEMA LVI.

Tab. I. Fig. 7. 163. *Dato arcu* AP; *invenire sinum versum* AQ.

Quodsi formulam desideres, quam NEWTONUS dedit (a); radius supponi debet 1. In formula superiori, quam pro arcu ex sinu verso eruimus (§. 157), diameter est 1. Quamobrem hæc prius, eadem, qua supra usi sumus, methodo eruenda. Sit igitur $AI = 1$, $AQ = x$, erit $AB = 2$, $PQ = \sqrt{(2x - x^2)}$ & per demonstrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(2x - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

(a) In *Epistola ad* LEIBNITIUM, quæ legitur apud WALLISIUM Vol. III. Oper. f. 625.

consequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x - x^2)} = dx\,(2x - x^2)^{-1:2}$ cumque sit (§. 99 *part.* 1.)

$m = -1$, $n = 2$, $P = 2x$, $Q = -x^2 : 2x = -\tfrac{1}{2}x$, erit

$$P^{m:n} = (2x)^{-1:2} = \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} = A,$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x = +\frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$$

&c.

Est itaque $Pp = \dfrac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus $AP = \dfrac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \dfrac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \dfrac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

$$\text{Nam } \frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}.\frac{3}{2}} = \frac{2x^{3:2}}{3.4\sqrt{2}} = \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$$
$$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}.\frac{5}{2}} = \frac{2.3x^{5:2}}{5.32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$$
$$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}.\frac{7}{2}} = \frac{2.5x^{7:2}}{128.7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$$

Sit jam $AP = v$,

$$\text{erit } v = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}} \text{ \&c.}$$

adeoque

$$v^2 = \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2.6} + \frac{x^3}{2.36} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{4.3x^3}{2.80}$$

$$\text{hoc est, } v^2 = 2x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{72}x^3$$
$$+ \tfrac{3}{40}x^3$$

Ponatur

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit

$$x^2 = a^2v^4 + 2abv^6$$

$$x^3 = + a^3v^6$$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$

$$+\tfrac{1}{3}x^2 = +\tfrac{1}{3}a^2v^4 + \tfrac{2}{3}abv^6$$

$$+\tfrac{1}{72}x^3 = +\tfrac{1}{72}a^3v^6$$

$$+\tfrac{3}{40}x^3 = +\tfrac{3}{40}a^3v^6$$

$$-v^2 = -v^2$$

Quamobrem

$$2a - 1 = 0 \qquad 2b + \tfrac{1}{3}a^2 = 0$$

$$2a = 1 \qquad 2b = -\tfrac{1}{3}a^2$$

$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = -\tfrac{1}{6}a^2 = -\tfrac{1}{6.4} = -\tfrac{1}{24}$$

$$2c + \tfrac{2}{3}ab + \tfrac{1}{72}a^3 + \tfrac{3}{40}a^3 = 0$$

$$c = -\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 - \tfrac{3}{80}a^3$$

$$-\tfrac{1}{3}ab = +\tfrac{1}{144} = +\frac{8}{144.8}$$

$$-\tfrac{1}{144}a^3 = -\frac{1}{144.8}$$

$$-\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144.8} = \tfrac{7}{1152}$$

$$-\frac{3a^3}{80} = -\frac{3}{80.8} = -\tfrac{3}{640}$$

$$c = \frac{4480-3456}{1152.640} = \frac{1024}{1252.640}$$

$$= \frac{16}{1152.10} = \frac{1}{720}$$

Est igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1.2$, $24 = 1.2.3.4$, $720 = 1.2.3.4.5.6$. Quare $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6$ &c. Quodsi jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius $= 1$, erit sinus complementi, seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}v^8$ &c.

COROLLARIUM II.

165. Si $1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4$, sive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 *part.* 1).

PROBLEMA LVII.

166. *Dato arcu* BM, *invenire secantem* KC. Tab.II. *Fig.* 20.

Sit $BC = 1$, arcus $= v$, erit $KB = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161); adeoque $BC^2 = 1$, $KB^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. consequenter (§. 417 *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$, $KC^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit $KC = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli ostendit.

$$1 + v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.} \; (1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{5}{24}v^4 + \text{\&c.}$$

$$1$$

$$+ v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$

$$(2)$$

$$+ v^2 + \tfrac{1}{4}v^4$$

$$+ \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$

$$(2 + v^2)$$

$$+ \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{5}{24}v^6 \text{ \&c.}$$

$$+ \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$

$$(2 + v^2 + \tfrac{5}{12}v^4)$$

$$+ \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$

&c. &c.

SCHOLION.

167. *Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu, atque pro arcu ex iisdem determinando invenit* NEWTONUS (l); *seriem pro tangente & secante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando*, Jacobus GREGORIUS (m). *Existimavit autem* LEIBNITIUS *series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.*

PROBLEMA LVIII.

Tab.I. Fig.7. 168. *Rectificare Cycloidem.*

Sit $AQ = x$, $AB = 1$, erit $Qq = MS = dx$, $PQ = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1) & hinc $AP = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob $\triangle\triangle$ APQ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}\, dx$$

Est ergo Mm differentiale arcus cycloidici $AM = x^{-1:2} dx$. Unde $\int x^{-1:2} dx = 2x^{1:2} = 2AP$ est arcus AM, seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA LIX.

Tab. IV. Fig.49. 169. *Data chorda arcus* AP; *invenire arcum cognominem, quem subtendit.*

Sit $AB = 1$, $AP = x$: cum angulus APB sit rectus (§. 317 *Geom.*) erit $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus $AQB = APB + PAp$ (§. 239 *Geom.*) & PAp, cujus mensura est $\frac{1}{2}$ Pp (§. 314 *Geom.*) infinite parvus; erit $AQB = APB$ (§. 4), consequenter rectus (§. 145 *Geom.*) Est igitur & $PQp = AQB$ (§ 156 *Geom.*) rectus (§. 145 *Geom.*) itidemque AQP rectus (§. 65 *Geom.*) adeoque ipsi APQ æqualis (§. 145 *Geom.*) & hinc $AP = AQ$ (§. 253, 89 *Geom.*); consequenter Qp differentiale chordæ AP (§. 6) $= dx$. Tab. IV. Fig.49.
Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2}pB$ (§. 314 *Geom.*): quare cum arcus PB & pB, ob infinite parvum Pp, sint æquales (§. 4), erit angulus $PAB = QPp$ (§. 141 *Geom.*). Habemus itaque (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\sqrt{(1 - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

adeoque $Pp = dx : \sqrt{(1 - x^2)}$, & hinc porro arcus $AP = \int (dx : \sqrt{(1 - x^2)})$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9$ &c. in infinitum.

Quodsi $PB = x$, erit $PQ = dx$ & $AP = (\sqrt{1 - x^2})$, atque eodem prorsus modo reperitur arcus $PB = \int (dx : \sqrt{(1 - x^2)})$, ut adeo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

PROBLEMA LX.

170. *Data chorda arcus* AP; *invenire segmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit, per demonstrata in Problemate præcedente, $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $pQ = dx$, nec non $\triangle APB \backsim \triangle PQp$: erit etiam (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\sqrt{(1 - x^2)} : x = dx : PQ$$

adeo-

(l) Vide *Commercium epistolicum* D. Joh. COLLINS p. 40. 52.

(m) Ibidem p. 45.

Tab. IV. *Fig.* 49. adeoque $PQ = x\,dx : \sqrt{(1-x^2)}$, consequenter cum PQ haberi possit pro arcu infinite parvo ex centro A radio AP descripto (§. 38), adeoque APQ pro sectore circulari, erit $APQ = x^2 dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2}x^2 dx\,(1-x^2)^{-1:2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1:2}$ seu $1:\sqrt{(1-x^2)}$
$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (§. 153), adeoque

$$APQ = \tfrac{1}{2}x^2 dx\,(1-x^2)^{-1:2} = \tfrac{1}{2}x^2 dx + \tfrac{1}{4}x^4 dx + \frac{1.3}{4.4}x^6 dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^8 dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10} dx \text{ \&c. in infinit.}$$

Ergo segmentum circuli AP $= \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXI.

171. *Dato arcu* AP; *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, $AP = x$, erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque $AP = x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & vicissim chorda $AP = v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos superiores repetenti apparet. Tab. IV. *Fig.* 49.

PROBLEMA LXII.

172. *Rectificare arcum Ellipsis* GM. Tab. I. *Fig.* 10.

Sit $CG = c$, $AC = a$, $PG = x$, $PM = y$, erit (§. 432 *part.* I)

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$$
$$2a^2y\,dy = -2c^2x\,dx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4y^2} = \frac{c^4x^2dx^2}{a^2c^2 - a^2c^2x^2} = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 - a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$$
$$= \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$, resolvendus est in seriem & series prior per posteriorem dividenda eo modo, quem mox subjiciemus. Est itaque (§. 99 *part.* 1.), in casu primo, $m = 1$, $n = 2$, $P = a^4$, $Q = -(a^2 - c^2)x^2 : a^4$.

Fiat:

Fiat $a^2 - c^2 = b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q = -b^2x^2 : a^4$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n} = a^2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2} . a^2 . -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4} . -\frac{b^2x^2}{2a^2} . -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6} . -\frac{b^4x^4}{8a^6} . -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8} . -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} . -\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(a^4 - b^2x^2)} = \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)} = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $= K$

Enimvero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infin. (§. 126).

Quare $a\sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infin. $= L$.

Seriem adeo primam K per alteram L divisurus probe observare debes omnes terminos in divisione emergentes, in quibus x ad eandem dimensionem assurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus simul sumtis substitui possit unus, qualis etiam in casu singulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, si fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam summam colligerentur. Quamobrem terminus unusquisque dividendæ dividitur per a^2, quotcunque partibus fuerit auctus in ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum atque a dividenda subtrahitur, quemadmodum in communi divisione fieri solet: id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Resid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{10}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$L.B = -\frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

A.	B.	C.	D.	E.
1	$-\frac{b^2x^2}{2a^4}$	$-\frac{b^4x^4}{8a^8}$	$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}}$	$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$
	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$-\frac{b^2x^4}{4a^6}$	$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}}$	$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}}$
		$+\frac{3x^4}{8a^4}$	$-\frac{3b^2x^6}{16a^8}$	$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$
			$+\frac{5x^6}{16a^6}$	$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$
				$+\frac{35x^8}{128a^8}$

Resid.

$$\text{Resid. II.}\quad \begin{array}{l} -\frac{b^4x^4}{8a^6}-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ -\frac{b^2x^4}{4a^4}-\frac{b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{32a^8} \\ +\frac{3x^4}{8a^2}+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{9x^8}{128a^6} \end{array}$$

$$\text{L. C} = \begin{array}{l} -\frac{b^4x^4}{8a^6}+\frac{b^4x^4}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{64a^{10}} \\ -\frac{b^2x^4}{4a^4}+\frac{b^2x^6}{8a^6}+\frac{b^2x^8}{32a^8} \\ +\frac{3x^4}{8a^2}-\frac{3x^6}{16a^4}-\frac{3x^8}{64a^6} \end{array}$$

$$\text{Resid. III.} = \begin{array}{l} -\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ -\frac{b^4x^6}{16a^8}-\frac{b^4x^8}{64a^{10}} \\ -\frac{3b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{16a^8} \\ +\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{15x^8}{128a^6} \end{array}$$

$$\text{L, D} = \begin{array}{l} -\frac{b^6x^6}{16a^{10}}+\frac{b^6x^8}{32a^{12}} \\ -\frac{b^4x^6}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{32a^{10}} \\ -\frac{3b^2x^6}{16a^6}+\frac{3b^2x^8}{32a^8} \\ +\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{5x^8}{32a^6} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ -\frac{b^6x^8}{32a^{12}} \\ -\frac{3b^4x^8}{64a^{10}} \\ -\frac{5b^2x^8}{32a^8} \\ +\frac{35x^8}{128a^6} \end{array}$$

&c. &c.

Substi-

Substituatur jam valor ipsius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$- \frac{b^2x^2}{2a^4} = - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+ \frac{x^2}{2a^2} = + \frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$- \frac{b^4x^4}{8a^8} = - \frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$- \frac{b^2x^4}{4a^6} = - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+ \frac{3x^4}{8a^4} = + \frac{3x^4}{8a^4}$$
$$C = + \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$- \frac{b^6x^6}{16a^{12}} = - \frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$- \frac{b^4x^6}{16a^{10}} = - \frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$- \frac{3b^2x^6}{16a^8} = - \frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+ \frac{5x^6}{16a^6} = + \frac{5x^6}{16a^6}$$
$$D = + \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$- \frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = - \frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$- \frac{b^6x^8}{32a^{14}} = - \frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$- \frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = - \frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$- \frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = - \frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+ \frac{35x^8}{128a^8} = + \frac{35x^8}{128a^8}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$
$$1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \ \&c.$$
$$- \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est

Tab. I. *Fig.* 10. Est igitur elementum arcus

$$\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

&c. in infinitum.

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum coëfficientes reducas ad eandem denominationem; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4}$ $+ \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7$ $+ \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$

Corollarium I.

173. Quodsi ponamus esse $GC : AC = 1 : m$ adeoque $AC = mc$; erit $GM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7$ $+ \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Quare si species Ellipsis in casu dato determinetur, hoc est, m per numerum determinatum explicetur; prodibit series multo simplicior. Sit enim $m = 2$, erit $GM =$ Tab. I. *Fig.* 10.

$$x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 + \frac{2419}{75497472c^8}x^9 \text{ \&c.}$$

Corollarium II.

174. Quodsi $c = a$, Ellipsis degenerat in Circulum & series pro Circulo evadit $x + \frac{x}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8}$ &c. hoc est, si $a = 1$, series $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. prorsus ut supra (§. 153).

Problema LXIII.

175. *Rectificare arcum Hyperbolae* AM. Tab. II. *Fig.* 24.

Sit $BC = AC = c$, $CQ = PM = x$, dimidius axis conjugatus $= a$, $CP = y$, erit $BP = y + c$, $AP = y - c$

$AP.PB = y^2 - c^2$

Quare (§. 469 *part.* I)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h.e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

 Ele-

Tab.II. Fig.24. Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento Ellipsis (§.172). Quamobrem, eodem prorsus modo quo in Problemate præcedente, reperitur elementum arcus $Mm =$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \; \&c.$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus $AM =$

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \; \&c.$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coëfficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 + c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 + 48a^4c^4 + 24a^2c^6 + 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodsi denuo Hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus $AM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2+1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4+4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6+48m^4+24m^2+5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et si species Hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum determinatum 2, erit $AM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{17}{1024c^4}x^5 + \frac{145}{458752c^6}x^7 - \frac{4965}{75497472c^8}x^9$ &c. Tab.II. Fig.24.

Series adeo pro arcu hyperbolico à serie pro arcu elliptico non differt nisi signis, in formula generali.

COROLLARIUM.

176. Si Hyperbola fuerit æquilatera erit $c = a$, & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{5x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA LXVI.

177. *Rectificare Logarithmicam.* Tab.I. Fig.8.

Sit curvæ subtangens $= a$, $PM = y$, $Pp = dx$, erit (§.54)

$$\frac{ydx}{dy} = a$$
$$ydx = ady$$
$$dx = \frac{ady}{y}$$
$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{(\frac{a^2}{y^2}+1)}$$

Ut elementum hoc mM integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque, in Theoremate generali (§.99 *part.*1)

$m = 1$

Tab. I. *Fig.* 8.

$m = 1, n = 2, P = \frac{a^2}{y^2}, Q = 1 : \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^2}{a^2}$

$P^{m:n} = \frac{a}{y} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{y} \cdot \frac{y^2}{a^2} = \frac{y}{2a} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{2a} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{y^3}{8a^3} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{y^3}{8a^3} \cdot \frac{y^2}{a^2} = + \frac{y^5}{16a^5} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{y^5}{16a^5} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{5y^7}{128a^7}$ &c.

Est itaque $\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)} = \frac{a}{y} + \frac{y}{2a} - \frac{y^3}{8a^3} + \frac{y^5}{16a^5} - \frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit*) &, quæ provenit, $a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3} + \frac{y^6}{16a^5} - \frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum Mm arcus interminati $MI = \frac{a}{y}dy + \frac{y}{2a}dy - \frac{y^3}{8a^3}dy + \frac{y^5}{16a^5}dy - \frac{5y^7}{128a^7}dy$ &c.

Quare arcus $MI = \int \frac{ady}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur $SQ = z$, erit arcus interminatus $SI = \int \frac{adz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus $MS = \int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z} + \frac{y^2 - z^2}{4a} - \frac{y^4 - z^4}{32a^3} + \frac{y^6 - z^6}{96a^5} - \frac{5y^8 - 5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiæ Hyperbolæ, y & z sunt abscissæ in asymptoto sumtæ (§. 488 *part.* 1). Pendet adeo rectificatio curvæ Logarithmicæ a quadratura Hyperbolæ, quæ per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P = 1$, $Q = \frac{a^2}{y^2} = a^2 y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m = 1$; $n = 2$; erit

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a^2 y^{-2} = \frac{1}{2} a^2 y^{-2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} a^2 y^{-2} \cdot a^2 y^{-2} = -\frac{1}{8} a^4 y^{-4} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{8} a^4 y^{-4} \cdot a^2 y^{-2} = + \frac{1}{16} a^6 y^{-6} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} a^6 y^{-6} \cdot a^2 y^{-2} = -\frac{5}{128} a^8 y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2} a^2 y^{-2} dy - \frac{1}{8} a^4 y^{-4} dy + \frac{1}{16} a^6 y^{-6} dy - \frac{5}{128} a^8 y^{-8} dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $= y - \frac{1}{2} a^2 y^{-1} + \frac{1}{24} a^4 y^{-3} - \frac{1}{80} a^6 y^{-5} + \frac{5}{896} a^8 y^{-7}$ &c. $= y - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata $SQ = z$, erit longitudo curvæ $= z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

PROBLEMA LXV.

179. *Rectificare Hyperbolam ex æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit

$$y = a^2 : x = a^2 x^{-1}$$
$$dy = -a^2 x^{-2} dx$$
$$dy^2 = a^4 x^{-4} dx^2$$
$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4 x^{-4} dx^2$$
$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{(1 + a^4 x^{-4})}$$

Elementum hoc arcus Hyperbolici non multum differt ab elemento arcus Logarithmicæ (§. 177).

Vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$$m = 1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = a^4 x^{-4}$$
$$P^{m:n} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}.1.\ a^4x^{-4} = \tfrac{1}{2}a^4x^{-4} = B$$
$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}a^4x^{-4}.\ a^4x^{-4} = \frac{1}{2.4}a^8x^{-8} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}. -\frac{1}{2.4}a^8x^{-8}.\ a^4x^{-4} = +\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12} = D$$
$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}.\ a^4x^{-4} = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16} \text{ \&c.}$$

Est igitur elementum curvæ $dx + \tfrac{1}{2}a^4x^{-4}dx - \frac{1}{2.4}a^8x^{-8}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}dx$, &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3}a^4x^{-3} + \frac{1}{2.4.7}a^8x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11}a^{12}x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15}a^{16}x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy\sqrt{(1 + a^4y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam sit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quod-

Quodsi a dicatur 1, erit series pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{1}{2.3\,z^3} + \frac{1}{2.4.7\,x^7} - \frac{1}{2.4.7\,z^7} - \frac{1.3}{2.4.6.11\,x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11\,z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXVI.

180. *Data area Hyperbolæ intra asymptotos; invenire abscissam eidem respondentem.*

Sit area Hyperbolæ $= t$, abscissa a fine lateris potentiæ Hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

$$\begin{aligned} \text{erit } x^2 &= + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 \\ &\qquad\qquad\qquad + 2act^4 \\ x^3 &= \qquad\quad + a^3t^3 + 3a^2bt^4 \\ x^4 &= \qquad\qquad\qquad + a^4t^4 \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} x &= at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.} \\ -\tfrac{1}{2}x^2 &= -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 \\ &\qquad\qquad\qquad - act^4 \\ +\tfrac{1}{3}x^3 &= \qquad + \tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4 \\ -\tfrac{1}{4}x^4 &= \qquad\qquad\quad - \tfrac{1}{4}a^4t^4 \\ -t &= -t \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{2}$$

$$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$

h. e. $c - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$

$$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$

$$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$$

h. e. $d - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$$d = \tfrac{14}{48} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$$

Est igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c. $= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorsus modo in aliis casibus inveniri potest basis, si figuræ area datur per seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit opus.*

PROBLEMA LXVII.

182. *Quadrare Cycloidem, ex supposita arcus Circuli rectificatione vi sinus versi.*

In Cycloide est arcus AP = PM (§. 575 *part.* I). Jam si AQ $= x$, arcus AP, (§. 157) consequenter Tab.I. Fig.7.

$$\begin{aligned} PM &= x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{3}{40}x^{5:2} + \tfrac{5}{112}x^{7:2} \text{ \&c.} \\ PQ &= x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \; (\S.124) \\ \hline QM &= 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - \tfrac{1}{56}x^{7:2} \end{aligned}$$

Quare elementum QMmq $= 2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorsus ut supra (§. 131).

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi Cycloidem usus est* NEWTONUS (*a*): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro Circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis est* PM. *Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam, veluti si* AP *sit Parabola* (§. 146).

PROBLEMA LXVIII.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli $= d$
chorda arcus dati $= a$
ratio arcuum $= 1 : n$
chorda arcus quæsiti $= x$
erit (§. 169).

arcus datus $= a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 + \frac{1.3a^5}{2.4.5d^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6} a^7$ &c $= a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7$ &c.

arcus quæsitus $= x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7$ &c.

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2} a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 + \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \text{ \&c.} = x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 \text{ \&c.}$$

consequenter si prima series sit $= A$ altera B, erit $B - A = 0$.

Fiat

$$\begin{array}{lllll}
x = ha & + ia^3 & + ka^5 & + la^7 & \text{\&c.} \\
x^3 = & + h^3a^3 & + 3h^2ia^5 & + 3h^2ka^7 & \\
 & & & + 3hi^2a^7 & \\
x^5 = & & + h^5a^5 & + 5h^4ia^7 & \\
x^7 = & & & + h^7a^7 &
\end{array}$$

adeoque

$$\begin{array}{lllll}
x = & ha & + ia^3 & + ka^5 & + la^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{1}{2.3d^2} x^3 = & & + \frac{1}{2.3d^2} h^3a^3 & + \frac{1}{2d^2} h^2ia^5 & + \frac{1}{2d^2} h^2ka^7 \text{ \&c.} \\
 & & & & + \frac{1}{2d^2} hi^2a^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 = & & & + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} h^5a^5 & + \frac{3.3}{2.3.4d^4} h^4ia^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 = & & & & + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} h^7a^7 \text{ \&c.} \\
\text{\&c \&c} & & & & \text{\&c}
\end{array}$$

$$-A = -na - \frac{n}{2.3d^2} a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \text{ \&c.}$$

(*a*) In *Analysi per æquationes numero terminorum infinitas.* p. 18.

Habemus

Habemus itaque

$$\frac{h - n = 0}{h = n}$$

$$i + \frac{1}{2.3d^2}h^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$

$$i = \frac{n - n^3}{2.3d^2} = \frac{n.(1 - n^2)}{2.3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2}h^2 i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{1}{2d^2}h^2 i$$

Est vero

$$\frac{h^5 = n^5}{\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4}}$$

$$h^2 = n^2$$

$$i = \frac{n - n^3}{2.3d^2}$$

$$h^2 i = \frac{n^3 - n^5}{2.3d^2}$$

$$\frac{1h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3 - n^5}{3.4d^4}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{n.(1 - n^2).(9 - n^2)}{2.3.4.5d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n.(1 - n^2).(9 - n^2).(25 - n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6}$

Est igitur chorda arcus quæsiti $= na + \frac{n.(1 - n^2)a^3}{1.2.3d^2} + \frac{n.(1 - n^2).(9 - n^2)}{1.2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{n.(1 - n^2).(9 - n^2).(25 - n^2)}{1.2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c. in infinitum.

S C H O L I O N.

185. *Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia* (§. 2 Trigon.); *formula præsens sinibus computandis inservit.*

P R O B L E M A LXIX.

186. *Quadrare sectorem Ellipsis* DCM.

Ducatur Cm ex centro C ipsi CM infinite propinqua, & ex eodem centro C radio CM describatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38), & sector infinite parvus CMN = MN. $\frac{1}{2}$ CM (§. 435 *Geom.*). Est vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§. 417 *Geom.*) Tab. IV. Fig. 50.

Sit jam $AC = a$, parameter $= b$, $PC = x$, $PM = y$

erit $AP = a - x$
$PB = a + x$

$$AP.\,PB = a^2 - x^2$$

consequenter (§. 420 *part.* I)

$$b : AB = PM^2 : AP.\,PB$$

$$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)^{1:2}$$

Tab. IV. *Fig.* 50.

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§.172)

Est vero $c = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{-(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare $NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$

adeoque $NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$

Jam cum sit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum sectoris CMN $= \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$

$$= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN $= \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; consequenter sector BCM $= \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ Tab. IV. *Fig.* 50.

Enimvero $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$, sive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodsi fiat $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}$CE. LE, adeoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Est itaque

$$DCM : ECL = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$
$$= c : a \quad (\text{§. } 124 \textit{ part. } 1)$$
$$= CD : EL$$

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet adeo quadratura sectoris elliptici à quadratura sectoris circuli.*

PROBLEMA LXX.

189. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM describatur Tab. IV. *Fig.* 51.

Tab. IV. *Fig.* 51. batur arcus Circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$ CM. MN sector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), seu elementum sectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ erit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $PB = x + a$

$AP.\,PB = x^2 - a^2$

adeoque (§. 459 *part.* 1)

$$AB : b = AP.\,PB : PM^2$$

$$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2\,(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h. e. $Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)\,dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)\,dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{-(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)\,dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$\begin{array}{l} b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b \\ 4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b \\ \hline -\,2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2 \\ +\,2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2 \\ +\,4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2 \end{array}$$

&

$$\begin{array}{l} -\,4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2 \\ \quad 2abx^2 - 2a^3b \\ \hline +\,8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2 \\ -\,8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4 \end{array}$$

consequenter productis hisce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^6}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$

Tab. IV. Fig. 51.

$$\tfrac{1}{2}\text{CM. NM.} = \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 *part.* 1) qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in Hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Resolvatur $1 : \sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part.* 1) erit

$$m = -1, n = 2, \text{P} = x^2, \text{Q} = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$\text{P}^{m:n} = x^{-1} = \text{A}$$

$$\frac{m}{n}\text{AQ} = -\tfrac{1}{2}x^{-1}. - a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = \text{B}$$

$$\frac{m-n}{2n}\text{BQ} = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = \text{C}$$

$$\frac{m-2n}{3n}\text{CQ} = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = \text{D}$$

$$\frac{m-3n}{4n}\text{DQ} = \tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare

$$\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$$

&c.

Habemus itaque sectorem CAM

$$= \tfrac{1}{2}a\int cx^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$$

$$\text{\&c.} = \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3}{4.4.4x^4}a^5c - \frac{1.3.5a^7c}{4.4.6.6x^6} - \frac{1.3.5.7a^9c}{4.4.6.8.8x^8} \text{ \&c. in inf.}$$

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam Hyperbolæ intra asymptotos.

Quodsi Hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus CD $= c$, CA $=$ CB $= a$, CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, erit PM^2 $= x^2$, AP. PB $= y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1).

$$\text{AC}^2 : \text{CD}^2 = \text{AP. PB} : \text{PM}^2$$
$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter

Tab. IV. *Fig.* 51. rameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, adeoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$, & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

$$\text{Ergo } CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c} = \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c} = \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\text{Porro } y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{adeoque } 2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2} = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2 = \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + \frac{-(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} = \frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}.\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}.\sqrt{(x^2 + c^2)}} = \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}}$$

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a$$

$$= \tfrac{1}{2}acdx\,(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1.)

$$m = -1,\ n = 2,\ P = c^2,\ Q = \frac{x^2}{c^2}$$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{c}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.-\frac{x^2}{2c^3}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^4}{2.4c^5}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}.\frac{x^2}{c^2} = \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9} \ \&c.$$

Tab. IV. Fig. 51. Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter $CMA = \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pendere a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quandiu $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM I.

190. Quoniam in Hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut quadratum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiæ semiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM II.

191. Cum in Hyperbola æquilatera sit $c = a$, sector hyperbolicus est $\int(a^2dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)}) = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA LXXI.

Tab. IV. Fig. 52. 192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM; *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448, 444 *part.* I), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), adeoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam $AC = a$, $CD = 1$, $AE = x$, $PM = y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN, atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle EeN \sim \triangle AEC$, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, $Ee = dx$, & ob $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§. 417 *Geom.*) $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum sit (§. 267 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$
$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$

Porro, ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$
$$x : a = y : PC$$

adeoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 432 *part.* I)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arithm.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$$

Tab. IV. *Fig.* 52.

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2+1}$$

$$CM^2 = \frac{x^2+a^2}{x^2+1}$$

$$CM = \frac{\surd(x^2+a^2)}{\surd(x^2+1)}$$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CE : EN = CM : OM$$

$$\surd(x^2+a^2) : \frac{adx}{\surd(x^2+a^2)} = \frac{\surd(x^2+a^2)}{\surd(x^2+1)} : OM$$

adeoque $OM = \dfrac{adx}{\surd(x^2+a^2)\surd(x^2+1)}$

Jam $\frac{1}{2}CM = \dfrac{\surd(x^2+a^2)}{2\surd(x^2+1)}$

Ergo $CMO = \dfrac{\frac{1}{2}adx}{1+x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACE idem cum sectore circuli (§. 124), si $CD = 1$.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2}a(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. in infinit.).

PROBLEMA LXXII.

Tab. IV. *Fig.* 52. 193. *Dato sectore* KFB, *recta* KF *ex foco Ellipsis ducta; invenire semiordinatam* KQ.

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$, $FB = b$, sector $KFB = \frac{1}{2}v$, $CD = c$, erit differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$ & ob $QB.QA = BC^2 - QC^2$ (§. 431 *part.* I) ex natura Ellipsis (§. 430 *part.* I)

$$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$$

adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$ (§. 124 *part.* I.)

$$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$$

$$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$$

consequenter $CQ^2 = a^2(c^2 - y^2) : c^2$

$$CQ = a\surd(c^2 - y^2) : c$$

$$CB = a$$

$$QB = a - a\surd(c^2 - y^2) : c$$

$$FB = b$$

$$FQ = b - a + a\surd(c^2 - y^2) : c$$

Differentiale ipsius $FQ = \dfrac{aydy}{c\surd(c^2 - y^2)}$

$$KQ = y$$

Elementum segmenti $KQB = \dfrac{ay^2dy}{c\surd(c^2 - y^2)}$

Porro

$$FQ = b - a + a\surd(c^2 - y^2) : c$$

$$\tfrac{1}{2}QK = \tfrac{1}{2}y$$

$$\triangle FQK = \tfrac{1}{2}by - \tfrac{1}{2}ay + ay\surd(c^2 - y^2) : 2c$$

differentiale $\triangle FQK = \frac{1}{2}bdy - \frac{1}{2}ady - \dfrac{ay^2dy}{2c\surd(c^2 - y^2)} + ady\surd(c^2 - y^2) : 2c$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta.

$$d\triangle FQK = \frac{(bc-ac)\surd(c^2-y^2)dy + (ac^2-2ay^2)dy}{2c\surd(c^2-y^2)}$$

$$dKQB = \frac{2ay^2dy}{2c\surd(c^2-y^2)}$$

$$dFKB = \frac{(bc-ac)\surd(c^2-y^2)dy + ac^2dy}{2c\surd(c^2-y^2)}$$

$$= \frac{ac + (b-a)\surd(c^2-y^2)}{2\surd(c^2-y^2)}dy$$

Habemus itaque

$$\frac{ac + (b-a)\surd(c^2-y^2)}{2\surd(c^2-y^2)}dy = \tfrac{1}{2}dv$$

$$(ac + (b-a)\surd(c^2-y^2))dy = dv\surd(c^2-y^2)$$

$$\frac{dy}{dv}(ac + (b-a)\surd(c^2-y^2)) = \surd(c^2-y^2)$$

dy

$$\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$$

Jam ut valor ipsius y per v exprimatur, quod est quod quæritur, fiat

$$y = hv + iv^3 + lv^5 + mv^7 \quad \&c.$$

erit $dy = hdv + 3iv^2dv + 5lv^4dv + 7mv^6dv$ &c.

$$\frac{dy}{dv} = h + 3iv^2 + 5lv^4 + 7mv^6, \ \&c.$$

$$y^2 = h^2v^2 + 2hiv^4 + i^2v^6 + 2hlv^6 \quad \&c.$$

$$y^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^6 \quad \&c.$$

$$y^6 = h^6v^6 \quad \&c.$$

Porro (§. 99 *part.* 1)

$$\sqrt{(c^2-y^2)} = c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5} \ \&c.$$

$$= c - \frac{h^2v^2}{2c} - \frac{2hiv^4}{2c} - \frac{i^2v^6}{2c} \ \&c.$$

$$- \frac{2hlv^6}{2c} \ \&c.$$

$$- \frac{h^4v^4}{8c^3} - \frac{4h^3iv^6}{8c^3} \ \&c.$$

$$- \frac{h^6v^6}{16c^5} \ \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv} = bh + 3biv^2 + 5blv^4 + 7bmv^6 \quad \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6$$

$$- \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{2bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{2bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{4bh^4i}{8c^3}v^6$$

$$- \frac{3bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bh^7}{16c^5}v^6$$

$$- \frac{6bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{5bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{3bh^4i}{8c^3}v^6.$$

Quodsi pro b substituatur a, prodibit valor ipsius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}$.

Quamobrem, si hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)} = 0$ substituantur, prodibit

$$\frac{acdy}{dv} = ach + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \text{ \&c.}$$

$$- \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{5bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{7bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3}v^6$$

$$- \frac{bh^7}{16c^5}v^6$$

$$- \frac{6bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = -ach - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{ah^3}{2c}v^2 + \frac{5ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ahi^2}{2c}v^6$$

$$+ \frac{7ah^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{ah^5}{8c^3}v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3}v^6$$

$$+ \frac{ah^7}{16c^5}v^6$$

$$+ \frac{6ahi^2}{2c}v^6$$

$$- \sqrt{(c^2 - y^2)} = - c + \frac{h^2}{2c}v^2 + \frac{2hi}{2c}v^4 + \frac{i^2}{2c}v^6 \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{2hl}{2c}v^6$$

$$+ \frac{h^4}{8c^3}v^4 + \frac{4h^3i}{8c^3}v^6$$

$$+ \frac{h^6}{16c^5}v^6 = 0$$

Habemus itaque

$$ach + bch - ach - c = 0$$

$$bch - c = 0$$

$$bh - 1 = 0$$

$$bh = 1$$

$$h = 1 : b$$

$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$3bci - \frac{bh^3}{2c} + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$6bc^2i - bh^3 + ah^3 + h^2 = 0$$

$$6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2$$

$$= \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2}$$

$$= - \frac{a}{b^3}$$

$$i = - \frac{a}{6b^4c^2}$$

$$5acl + 5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - 5acl + \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

hoc est, $5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} + \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$

$$40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i + ah^5 + 8c^2hi + h^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - ah^5 - 8c^2hi - h^4$$

$$h^2 = \frac{1}{b^2} \qquad bh^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2} \qquad -ah^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2} \qquad hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$$

$$20bc^2h^2i = -\frac{10a}{3b^5} \qquad -8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$$

$$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$$

Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4}$$
$$= \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = -\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, adeoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^7$, &c.

PROBLEMA LXXIII.

194. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE. Tab. IV. Fig. 53.

Calculus prorsus idem, qui supra pro Ellipsi in casu simili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$ $AE = x$ $CD = 1$ erit $Ee = dx$ $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$ &, ob △△ AEC & EeN similitudinem, $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$; ob similitudinem vero △△CPM & CAE, ut in Ellipsi, $PC = ay : x$, atque, ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : PC^2 - AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469 *part.* 1) $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc ut supra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 - x^2)}$, & ob $CE : EN = CM : OM$, porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 - x^2)}$, tandemque elementum MOC sectoris $CMA = \frac{\frac{1}{2}adx}{1 - x^2}$: quod idem prorsus est, quod pro Ellipsi & Circulo reperimus, (§. 124, 192) nisi quod illic sit $+x^2$, hic $-x^2$. Unde prodit, ut supra, sector CMA, $\frac{1}{2}a\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c. in infin.).

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo series sectoribus circuli, ellipsis, atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inservit, nisi quod pro hyperbola signa omnia sint positiva.

CAPUT IV.

De usu Calculi integralis in cubandis Solidis & dimetiendis superficiebus eorundem.

DEFINITIO VIII.

196. *Solidum cubare* idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA LXXIV.

Tab.II. Fig.19. 197. *Cubare solidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMRp haud differet a trapeziolo PMmp (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ describit parallelogrammulum PMRp (§. 465 *Geom.*) est elementum solidi per illam rotationem producti: cujus adeo summa dat integrum solidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis constare concipitur.

Sit jam AP$=x$, PM$=y$, erit P$p=dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit peripheria circuli radio PM descripti $=py:r$; consequenter area $py^2:2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in Pp, sive dx, dat soliditatem cylindruli seu elementi solidi $=py^2dx:2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodsi jam ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y^2; habebitur, si elementum integrari possit, soliditas segmenti, cujus altitudo AP, radius basis PM, hoc est revolutione ipsius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA LXXV.

198. *Cubare Conum.* Tab.II. Fig.17.

Conus describitur, si triangulum ADC circa axem DC rotatur (§. 467 *Geom.*). Sit DC$=a$, AC$=r$, PM$=y$, DP$=x$; erit (§. 268 *Geom.*).

$$DP : PM = DC : CA$$
$$x : y = a : r$$

Hinc $rx : a = y$

& $r^2x^2 : a^2 = y^2$

$$py^2\,dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2dx : 2a^2$$ (§. 197).

$$\int py^2\,dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Quodsi pro x substituatur a; habebitur soliditas totius Coni, $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$. Basis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda est in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex Elementis Geometriæ constat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVI.

199. *Cubare Sphæram.*

Sphæra cum describatur per rotationem semicirculi circa diametrum ejus (§. 470 *Geom.*); erit, si diameter sit $2r$,

$$yy = 2rx - x^2 \quad (\text{§. } 377\ part.\ 1).$$

Unde $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem segmenti sphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

 Quod-

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp . \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii, aut sextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM I.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphæræ $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphæræ (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

201. Cylindri sphæræ circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 *Geom.*). Est itaque ad sphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXVII.

202. *Cubare Conoides parabolicum, ex rotatione parabolæ cujuscunque generis circa axem suum genitum.*

Sit parameter $= 1$, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$y = x^{1:m}$$
$$y^2 = x^{2:m}$$
$$py^2dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r$$
$$\int py^2dx : 2r = mpx^{2:m+1} : (4 + 2m) r$$
$$= mpy^2x : (4 + 2m) r$$

Sit altitudo totius conoidis $= a$, diameter baseos $2r$: erit a pro x, & r pro y substituto, soliditas totius conoidis

$$mpr^2a : (4 + 2m) r = \frac{m}{4+2m} apr$$
$$= \frac{1}{2}pr . \frac{m}{2+m} a.$$

Ex. gr. Si parabola genitrix fuerit *Apolloniana*, erit $m = 2$, adeoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \frac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 541 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVIII.

203. *Cubare sphæroides ellipticum ex rotatione Ellipsis* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Ellipsin *Apollonianam* (§. 420 *part.* 1).

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

erit $py^2 dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$

$$\int py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a, prodibit soliditas integri sphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM I.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 *part.* 1). Unde soliditas sphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$; hoc est, sphæroides ellipticum æquatur cono, cujus altitudo axi majori a æqualis, basis vero dupla circuli circa axem minorem descripti (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

205. Quoniam cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, adeoque soliditas $= \frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); erit sphæroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu ut 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

COROLLARIUM III.

206. Si diameter sphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam $= r:p$) $= ap:2r$; consequenter sphæra $= a^3p : 12r$. Est adeo sphæroides ellipticum ad sphæram axe majore a descriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc est, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$)

$\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM IV.

207. Si diameter sphæræ $= 2r$, erit soliditas $= \frac{2}{3}pr^2$ (§. 199). Est itaque sphæroides ellipticum ad sphæram axe minore $2r$ descriptam, ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§. 124 *part.* 1.), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA LXXIX.

208. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Hyperbolam scalenam (§. 459 *part.* 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$

& $\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar.$

Et quia ad Hyperbolam æquilateram (§. 507 *part.* 1.)

$$y^2 = ax + x^2$$

erit $py^2dx : 2r = (apxdx + px^2dx) : 2r$

& $\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo conoidis fuerit axi transverso æqualis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r.$

PROBLEMA LXXX.

Tab. II. Fig. 22. 210. *Cubare solidum ex rotatione Cissoidis circa axem* AB *genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2dx : 2r = px^3dx : 2r(1 - x)$$

hoc est, quia $2r =$ AB $= 1$,

$$py^2dx : 2r = px^3dx : (1 - x).$$

Est vero $x^3 : (1 - x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $py^2dx : 2r = px^3dx + px^4dx + px^5dx + px^6dx + px^7dx + px^8dx$ &c. in infinitum. Tab. II. Fig. 22.

Et hinc $\int py^2dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$, &c. definit solidum portione APM descriptum. Quodsi pro x substituatur AB $= 1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.).

PROBLEMA LXXXI.

211. *Cubare solidum ex rotatione Logisticæ circa asymptotum* AH *genitum.* Tab. I. Fig. 8.

In Logistica, cujus subtangens $= a$, est (§. 54).

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quodsi pro y substituatur AB $= r$, erit integrum solidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4}apr.$

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius basis $= r$, est $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2}apr$ ad $\frac{1}{4}apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur, unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA LXXXII.

214. *Cubare solidum ex rotatione Parabolæ circa semiordinatam* QN *genitum.* Tab. II. Fig. 25.

Ex resolutione Problematis 74 (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum & in differentiale Rr ipsius NR ductum.

Sit

Tab.II. Fig.25. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AQ = r$, $AP = x$, $QN = b$, $PM = y$, erit $Rr = dy$, $MR = PQ = AQ - AP = r - x$, peripheria radio MR descripta $= p - px : r$; consequenter area circuli $\frac{1}{2} pr - px + px^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum solidi $\frac{1}{2} prdy - pxdy + px^2 dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2 = x$ (§. 388 *part.* 1) & $y^4 = x^2$; quibus valoribus in expressione elementi generali substitutis, erit id $\frac{1}{2} prdy - py^2 dy + py^4 dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit solidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodsi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem solido $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} pxy + px^2 y : 10r = p (\frac{1}{2} ry - \frac{1}{3} xy + x^2 y : 10r)$.

Denique si pro y substituatur b, pro x vero r; prodibit solidum integrum $p (\frac{1}{2} br - \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br) = (30 - 20 + 6) pbr : 60 = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr . \frac{8}{15} b$, hoc est, basis seu circulus radio AQ descriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

C O R O L L A R I U M.

215. Cylindrus super eadem basi & ejusdem altitudinis est $\frac{1}{2} pbr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2} pbr$ ad $\frac{1}{2} pbr . \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu ut 15 ad 8 (§. 124 *part.* 1).

P R O B L E M A LXXXIII.

Tab.II. Fig.26. 216. *Cubare solidum ex rotatione spatii interminati hyperbolici juxta asymptotum CD tanquam axem genitum.*

Sit $AB = a$, $AC = b$, $CP = x$, $PM = y$; erit $Pp = dx$, & posita peripheria radio AC descripta $= p$, peripheria radio PC descripta $px : b$, quæ ducta in $PM = y$, dat superficiem cylindri parallelogrammo CPMR descripti $= pxy : b$ (§. 541 *Geom.*). Hæc vero si ulterius ducatur in $Pp = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo PpQM descriptus, seu elementum solidi $= pxydx : b$. Tab.II. Fig.26.

Est vero ex natura hyperbolæ intra asymptotos

$$xy = ab \text{ (§. 502 } part. \text{ 1).}$$

Quare $pxydx : b = pabdx : b = padx$

$$\int pxydx : b = pax.$$

Quodsi pro x substituatur b; prodibit solidum integrum pab.

C O R O L L A R I U M.

217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti est $\frac{1}{2} pba$ (§. 541 *Geom.*), adeoque ad solidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2} pba$ ad pba, hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad 1, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

S C H O L I O N.

218. *Possunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quascunque; Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura non addimus.*

P R O B L E M A LXXXIV.

219. *Metiri superficiem corporis rotatione figuræ ANQ circa axem AQ geniti.* Tab.II. Fig.19.

R E S O L U T I O.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM descripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum superficiei solidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ valor ipsius dx^2 substituatur, & elementum integrabile fiat; superficies desiderata per summationem habetur.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

Tab. II. Fig. 17. 220. *Invenire superficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressione generali ante (§. 198) inventa substituendus est valor ipsius dx^2. Sit nempe CD $= a$, AC $= r$, DP $= x$, PM $= y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$
$$x = ay : r$$
$$dx = ady : r$$
$$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$$

$$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py\sqrt{(a^2dy^2 + r^2dy^2)} : r^2$$
$$= pydy\sqrt{(a^2 + r^2)} : r^2$$

$$\int py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = py^2\sqrt{(a^2 + r^2)} : 2r^2$$

Quodsi pro y ponatur r, prodibit superficies coni integri $= \frac{1}{2}p\sqrt{(a^2 + r^2)} = \frac{1}{2}p$. AD; est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis coni in latus AD, prorsus ut in Elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXXVI.

Tab. I. Fig. 3. 221. *Invenire superficiem Sphæræ.*

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, AP $= x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\sqrt{(x - xx)}$, quod ductum in peripheriam radio PM descriptam $= 2p\sqrt{(x - xx)}$ producit elementum superficiei sphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphærici, cujus altitudo x.

Quodsi pro x substituatur diameter 1; erit superficies sphæræ integræ $= p. 1$; seu, si $1 = a$, pa.

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiei sphæricæ ad superficiem sphæræ integram ut px ad $p.1$, seu ut x ad 1 (§. 124 *part.* 1), hoc est ut altitudo segmenti ad diametrum sphæræ.

PROBLEMA LXXXVII.

223. *Invenire superficiem Conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$$
$$= py\sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2)} : ar$$
$$= pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2 + a^2)} = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$
$$ydy = \tfrac{1}{4}vdv$$
$$pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^2dv : 4ar$$

$\int pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^3 : 12ar$
$= p(4y^2 + a^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar$.
Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2\sqrt{a^2} : 12ar = pa^2 : 12r$. Unde superficies segmenti conoidis parabolici $=$
$p(4y^2 + a^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar - pa^2 : 12r$

CAPUT V.

De usu Calculi integralis in Methodo tangentium inversa.

DEFINITIO IX.

224. M*Ethodus Tangentium inversa* est, qua ex data tangente, aut linea quacunque alia cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ superius traditæ fuerint (§. 20, 34, 35, 44, 98, 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur, & æquatio differentialis vel summetur, vel, si id fieri nequeat, construatur; curva desiderata innotescit.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens* $= 2yy : a$.

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ $= ydx : dy$ (§. 20); erit

$$ydx : dy = 2yy : a$$
$$aydx = 2y^2dy$$
$$adx = 2ydy$$
$$ax = y^2$$

Est adeo curva quæsita parabola (§. 388 *part.* 1), cujus constructio ex superioribus manifesta (§. 393 *part.* 1).

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans, ex. gr.* $= a$.

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) $= ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax$$

Est adeo curva quæsita parabola, cujus parameter $= 2a$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 35); erit

$$ydy = rdx - xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$
$$y^2 = 2rx - xx$$

Est adeo curva quæsita circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§. 377 *part.* 1).

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r - x$ *&* y.

Quoniam (§. 20)

$$r - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)

$$rdx - xdx = ydy$$
$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx - xx = y^2$$

Est adeo curva quæsita denuo circulus, cujus diameter $2r$.

PROBLEMA XCII.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r + x$ *&* y.

Quoniam (§. 20)

$$r + x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)

$$rdx + xdx = ydy$$
$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx + x^2 = y^2$$

Est adeo curva quæsita Hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$ (§. 507 *part.* 1).

PROBLEMA XCIII.

231. *Invenire curvam in qua subtangens multiplo abscissæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit
$$mxdy = ydx$$
$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari possit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95).

erit
$$(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$$
$$y^m : x = a^{m-1}$$
$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo proposito infinita Parabolarum genera.

PROBLEMA XCIV.

232. *Invenire lineam, in qua subtangens semiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$
$$ydx = ydy$$
$$dx = dy$$
$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæsitam esse rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, seu hypothenusam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodsi vero x sumatur pro arcu circuli; erit linea quæsita Cyclois (§. 572 *part.* 1, & §. 52 *part.* 2).

PROBLEMA XCV.

233. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit
$$ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$
$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata semiordinatarum hujus curvæ exprimere spatia Parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur semiordinatæ ipsæ mediæ proportionales inter abscissas & $\tfrac{2}{3}$ semiordinatarum Parabolæ circa communem axem descriptæ (§. *cit.*).

SCHOLION.

234. *Curva hæc dici potest Quadratrix Parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem descriptam, cujus semiordinatis datis datur quadratura partium respondentium in altera curva. Ex. gr. si fuerit ut in nostro casu* APMA = PN², *vel* APMA = AP. PN, *vel* APMA = PN. *a, &c. erit* AND Quadratrix *ipsius* AMC. Tab.II. *Fig.* 27.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire curvam, cujus normalis constans est.*

Sit constans linea $= a$, abscissa $= x$, semiordinata $= y$; erit (§. 44)

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a$$
$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx$$
$$y^2dy^2 + y^2dx^2 = a^2dx^2$$
$$y^2dy^2 = a^2dx^2 - y^2dx^2$$
$$ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}$$
$$-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -dx$$
$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x \quad (\text{§. } 95).$$

Est itaque curva quæsita circulus.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per $a\sqrt{ax}$.*

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

erit $\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2}dx = ydx$

$\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2} = y$

$\frac{1}{4}a^3x^{-1} = \frac{1}{4}a^3 : x = y^2$

$\frac{1}{4}a^3 = xy^2$

Est adeo curva Hyperbola secundi generis intra asymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ sit semiordinata Parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens est Parabolam *Apollonianam* esse quadratricem Hyperbolæ intra asymptotos, ad quam $\frac{1}{4}a^3 = xy^2$.

PROBLEMA XCVIII.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita $= x^3 : a$.*

Quoniam $x^3 : a = \int ydx$

erit $3x^2dx : a = ydx$

$x^2 = \frac{1}{3}ay$

Tab.II. Fig. 28. Est adeo curva quæsita Parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$, erit $\frac{1}{3}ay = x^2$ (§. 388 *part.* 1).

PROBLEMA XCIX.

239. *Invenire curvam, cujus area $= a\sqrt{(aa+xx)}$.*

Quoniam $axdx : \sqrt{(aa+xx)} = ydx$

$ax : \sqrt{(aa+xx)} = y$

$a^2x^2 : (aa+xx) = y^2$

hoc est, $y^2 : x^2 = a^2 : aa+xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro existentibus a (§. 507 *part.* 1, & §. 234 *part.* 2).

PROBLEMA C.

240. *Invenire curvam, cujus area $= x\sqrt{(aa+xx)}$.*

Quon. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} + dx\sqrt{(aa+xx)} = ydx$

erit $\frac{2x^2+aa}{\sqrt{(aa+xx)}} = y$

$(2x^2+aa)^2 = y^2(aa+xx)$

$y^2 : aa+2xx = aa+2xx : aa+xx$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex Problematibus his apparet, quod data quadratrice semper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri possunt curvæ innumeræ quadrabiles, construique curvarum quadrabilium, seu, quod perinde est, formularum summabilium canones.*

PROBLEMA CI.

242. *Invenire curvam, cujus subtangens est linea constans a.*

Quoniam $ydx : dy = a$ (§. 20)

erit $dx = ay^{-1}dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$

Quodsi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum Hyperbolæ intra asymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua asymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 *part.* 1). Quodsi ergo y sumatur pro abscissa, erit respondens semiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis spatio hyperbolico asymptotico per constantem a, quæ latus est potentiæ in Hyperbola æquilatera (§. 477 *part.* 1), diviso. Unde constructio

curvæ

curvæ quæſitæ a quadratura Hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1}dy$, eſt logarithmica ad aſymptotum relata (§. 54) atque x in aſymptoto ſumta logarithmus ſemiordinatæ ipſi reſpondentis (§. 553 *part.* 1); erit quoque $\int ay^{-1}dy$ logarithmus ejuſdem ſemiordinatæ y, conſequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy : y = ly$; ($ly$ denotat logarithmum ipſius y in logiſtica ſumtum, cujus ſubtangens $= a$). Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, ſit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$ erit etiam $d(ly)n = n(ly)^{n-1}\,ady : y$ ubi a notat ſubtangentem logiſticæ.

COROLLARIUM II.

244. Et quia $a\int\frac{dy}{y}$ eſt ſpatium hyperbolicum per latus potentiæ Hyperbolæ diviſum; ſpatia hyperbolica per idem latus diviſa exprimunt logarithmos, quorum numeri ſunt ut ſemiordinatæ ad aſymtotum relatæ.

PROBLEMA CII.

245. *Invenire curvam, in qua eſt ut a ad y ita $\sqrt{(aa - yy)}$ ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa - yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\sqrt{(aa - yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa - yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa - yy)} : a = x$

Tab.I. Fig. 3. Quoniam $\int dy\sqrt{(aa - yy)}$ eſt portio circuli CDPM, cujus radius AC $= a$, abſciſſa PC $= y$ (§. 124): conſtructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc eſt, circulus eſt quadratrix curvæ quæſitæ (§. 234). Retentis nempe abſciſſis PC, ſemiordinatæ x erunt æquales ſpatio PMDC per conſtantem a diviſo.

PROBLEMA CIII.

246. *Invenire curvam, in qua eſt ut a ad y ita $\sqrt{(aa + yy)}$ ad ſubtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa + yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc eſt, $a : 1 = dy\sqrt{(aa + yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa + yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa + yy)} : a = x$

Quoniam $\int dy\sqrt{(aa + yy)} : a$ eſt arcus Parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146); ſi ſemiordinata Parabolæ PM ſumatur pro abſciſſa curvæ quæſitæ, erit ſemiordinata ejuſdem arcui parabolico AM æqualis. Tab.II. Fig. 19.

SCHOLION.

247. *Apparet adeo, interdum conſtructionem pendere a rectificatione curvarum. Præſtat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere; quia in priori caſu praxis eſt facilior, ubi arcum filo metiri datur. In poſteriori autem ſpatiorum quadratura ope ſerierum infinitarum definienda eſt in numeris prope veris, & inde ſimiliter in iſtiuſmodi numeris ſemiordinatæ curvarum quæſitarum ſunt computandæ.*

PROBLEMA CIV.

248. *Invenire curvam, in qua eſt ſubtangens ad y ut quantitas conſtans r ad $\sqrt{(r^2 - y^2)}$.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

hoc eſt, $dx : dy = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$

erit $dx = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$

$x = \int(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})$.

Quia $\int(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})$ eſt arcus circuli AM, cujus radius AC $= r$, PM $= y$ (§. 153); conſtructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Tab.I. Fig. 3.

Tab.I. Fig.3. Nempe si semiordinatæ in circulo PM sumantur pro abscissis curvæ quæsitæ; erunt ejusdem semiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA CV.

249. *Invenire curvam, in qua subtangens est ad y ut r^2 ad r^2+y^2.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2+y^2$$

hoc est, $dx : dy = r^2 : r^2+y^2$

erit $dx = r^2 \, dy : (r^2+y^2)$

Quoniam $\int(r^2 \, dy : (r^2+y^2))$ aut, si $r=1$, $\int(dy:(1+y^2))$ est elementum Tab.II. Fig.20. arcus BM, cujus tangens BK $=y$ (§. 158); evidens est, constructionem curvæ quæsitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abscissis curvæ quæsitæ; semiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli existente r.

PROBLEMA CVI.

250. *Invenire curvam, in qua tangens est constans.*

Sit constans illa $=a$, abscissa $=x$, semiordinata y: erit (§. 34)

$$y\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$$

$$x = \int\left(\frac{dy}{y}\sqrt{(a^2-y^2)}\right).$$

Tab.I. Fig.8. Curva, in qua tangens constans est, describitur puncto M, si alterum extremum rectæ TM in recta AR incedit, diciturque *Tractoria*. Ad ejus adeo descriptionem non opus est, nisi bacillo, in cujus utroque extremo cuspis infixa, ita ut cuspis in M prematur in planum elatere, vel pondere. Est itaque æquatio inventa ad Tractoriam. Tab.I. Fig.8.

Eadem æquatio sic eruitur. Quoniam TM $=a$, PM $=y$; erit PT $=\sqrt{(a^2-y^2)}$. Sed PT $=ydx:dy$ (§. 20. Ergo $ydx:dy = \sqrt{(a^2-y^2)}$; consequenter $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$; aut, quia semiordinatæ continuo decrescentis differentiale negativum, $dx = -dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$.

COROLLARIUM I.

251. Si fuerit $x=0$, erit etiam $dx=0$, adeoque

$$-dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y=0$$

$$\sqrt{(a^2-y^2)}=0$$

$$a^2-y^2=0$$

$$a=y$$

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ x, AB $=a$; id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM II.

252. Quoniam $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$, erit $ydx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}$; adeoque spatium indeterminatum RPMI $=\int dy\sqrt{(a^2-y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a quadratura circuli (§. 124), cujus radius est a, abscissæ a centro computatæ sunt y.

COROLLARIUM III.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2dy^2-y^2dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2dy^2-y^2dy^2}{y^2}+dy^2$$
$$= a^2dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int\frac{ady}{y}$$

Quare

Quare cum $\int \frac{ady}{y}$ sit logarithmus ipsius y; arcus tractoriæ sunt ut logarithmi, semiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int (ady : y)$ est abscissa logarithmicæ, cujus subtangens $= a$; arcus tractoriæ rectificantur per abscissas logarithmicæ.

COROLLARIUM IV.

254. Si BO $= v$, erit OA $=$ PM $= a - v$, adeoque $a - v = y$, & $-dv = dy$; consequenter $dx = -dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y = dv \sqrt{(2av - v^2)} : (a - v)$. Habemus adeo æquationem, quæ Tractoriam definit respectu axis BA.

CAPUT VI.

De usu Calculi integralis in Logarithmorum doctrina.

PROBLEMA CVII.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Tab. III. Fig. 30. Sit Logarithmicæ MBN ordinata AB $= 1$, eademque subtangenti, quæ constans est (§. 54) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, AQ logarithmus numeri unitate minoris.

Quodsi jam differentia inter AB & PM sit y; erit PM $= 1 + y$; consequenter AP, seu logarithmus unitate majoris numeri, $\int (dy : (1 + y))$ (§. 243). Est vero $1 : (1 + y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $dy : (1 + y) = dy - ydy + y^2 dy - y^3 dy + y^4 dy$ &c. in infinitum; consequenter $\int (dy : (1 + y))$, seu logarithmus numeri $1 + y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodsi differentia inter AB & QN sit y, erit QN $= 1 - y$; consequenter AQ, seu logarithmus numeri unitate minoris, $= \int (-dy : (1 - y))$. Est vero $-1 : (1 - y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $-dy : (1 - y) = -dy - ydy - y^2 dy - y^3 dy - y^4 dy$, &c. in infinitum; consequenter $\int (-dy : (1 - y))$, seu logarithmus numeri unitate minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

256. Si latus potentiæ Hyperbolæ AB, vel BC, fuerit 1, BP $= y$; erit AP $= 1 + y$, & spatium hyperbolicum asymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Tab. II. Fig. 29. Et ubi BQ $= y$, erit AQ $= 1 - y$, adeoque (si QN $= v$) ob $1 = v - vy$ (§. 490 *part.* 1), elementum spatii hyperbolici asymptotici $- 1ydy : (1 - y)$; consequenter spatium $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Possunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum si latus potentiæ AB $= 1$, abscissa AP est numerus unitate major, spatium asymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; similiter abscissa AQ est numerus unitate minor & spatium hyperbolicum asymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM II.

257. Quodsi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM III.

258. Quoniam logarithmus ipsius $1 : (1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem est (§. 351 *Arithm.*), fractio vero $1 : (1 + x)$

numerus unitate minor; pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula posterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum satisfacit. Nempe cum sit ex hypothesi

$$\frac{1-y=1:(1+x)}{\text{erit } 1-1:(1+x)=y}$$

hoc est, $\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}=y$

adeoque in formula $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. pro y substitui debet $x:(1+x)$, si numeri unitate majoris logarithmus desideretur.

SCHOLION.

259. *Formula posterior si in casu quoque priore, ubi numerus cujus logarithmus quæritur unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera absolvitur; quia series citius convergit, quam si priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum* Neperianis, *adeoque diversos esse a* Briggianis, *quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici sint ad* Briggianos *ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii* Briggianum, *sitque logarithmus binarii hyperbolicus* 2. 302585092994 &c. Briggianus 1. 000000000000; *hyperbolici ad* Briggianos, *quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA CVIII.

260. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y=l+bl^2+(2b^2-c)\,l^3+(5bc-5b^3-d)\,l^4+(14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e)\,l^5$ &c. (§. 366 *part.* 1) ob $a=1$, & $b=-\frac{1}{2}$, $c=+\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, $e=+\frac{1}{5}$ &c. erit

$$2b^2-c=\tfrac{2}{4}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\tfrac{1}{6}$$

$$5bc-5b^3-d=-\tfrac{5}{6}+\tfrac{5}{8}+\tfrac{1}{4}=\frac{-40+30+12}{48}=\frac{2}{48}=+\frac{1}{24}$$

$$14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e$$
$$=\frac{14}{16}+\frac{6}{8}-\frac{21}{12}+\frac{3}{9}-\frac{1}{5}$$
$$=\frac{7}{8}+\frac{6}{8}-\frac{14}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$
$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{40-15-24}{120}=+\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y=l+\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{6}l^3+\frac{1}{24}l^4+\frac{1}{120}l^5 \text{ \&c. in infinit.}=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y=l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l est logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y=1+l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y=l-\frac{1}{1.2}l^2+\frac{1}{1.2.3}l^3-\frac{1}{1.2.3.4}l^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$, &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-\frac{l}{1}+\frac{1}{1.2}l^2-\frac{1}{1.2.3}l^3+\frac{1}{1.2.3.4}l^4-\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, &c. erit $y=l-\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl-\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum; consequenter $1-y=1-l+\frac{1}{2}Al-\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl-\frac{1}{5}Dl$, &c. in infinitum.

PRO-

PROBLEMA CIX.

261. *Dato sinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $=1$, cosinus $=x$, erit sinus $=\sqrt{(1-xx)}$ (§. 377 *part.* 1) $=\sqrt{((1+x)(1-x))}$. Sed $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$ & $l(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$ Ergo $l(1-xx)=-\frac{2}{2}x^2-\frac{2}{4}x^4-\frac{2}{6}x^6$ (§. 337 *Arith.*) & $l\sqrt{(1-xx)}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Ar.*).

PROBLEMA CX.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° (§. 32 *Trigon.*) $=1$; tangens arcus 45° majoris $=1+x$; tangens arcus 45° minoris $=1-x$; erit logarithmus tangentis in casu posteriore $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255.)

SECTIO TERTIA.
DE CALCULO EXPONENTIALI.

CAPUT I.
De natura Calculi exponentialis.

DEFINITIO X.

263. Calculus *exponentialis* est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

DEFINITIO XI.

264. *Quantitas exponentialis* est dignitas, cujus exponens variabilis, ex. gr. x^x, a^x.

PROBLEMA CXI.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio succedit per §. 243.

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y=z$$

erit $ylx=lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$lxdy+ydx:x=dz:z \text{ (§. 243)}$$

$$zlxdy+zydx:x=dz$$

hoc est, $x^y\, lxdy+yx^{y-1}\,dx=dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda secundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y}=z$$

erit $x^y lv=lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$(x^y lxdy+yx^{y-1}\,dx)\,lv+x^y\,dv:v=dz:z \text{ (§. 243)}$$

$$z(x^y\,lxdy+yx^{y-1}dx)\,lv+zx^y\,dv:v=dz$$

hoc est,

$$v^{x^y}(x^y\,lxdy+yx^{y-1}\,dx)\,lv+v^{x^y}v^{-1}\,x^y\,dv=dz$$

seu

$$v^{x^y}\,x^y\,lxlvdy+v^{x^y}\,yx^{y-1}lvdx+v^{x^y}v^{-1}x^ydv=dz$$

Eadem

Eadem ratione inveniri potest differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

PROBLEMA CXII.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$\begin{array}{ll} & x = 1 + y \\ \text{erit} & lx = l(1+y) \\ \& & dx = dy \end{array}$$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)\,dy.$$

Est vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 255). Ergo $l(1+y)(1+y)\,dy = (1+y)\,dy\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$)$ = [multiplicatione actu facta]

$$\begin{array}{l} ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.} \\ \qquad + y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.} \end{array}$$

h. e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua serie $y = x - 1$.

PROBLEMA CXIII.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, & $dx = dy$, adeoque $x^x dx = (1+y)^{1+y}dy$.

Fiat $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

erit $(1+y)\,l(1+y) = l(1+v)$

hoc est, $(1+y)\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 255); seu per calculum praecedentem, $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 266).

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{erit } v^2 = & + y^2 & + 2ky^3 & + k^2y^4 & + 2kmy^5 \\ & & & + 2my^4 & + 2ny^5 \\ v^3 = & & + y^3 & + 3ky^4 & + 3k^2y^5 \\ & & & & + 3my^5 \\ v^4 = & & & + y^4 & + 4ky^5 \\ v^5 = & & & & + y^5 \end{array}$$

(§. 95 *part.* 1). Unde

$$\begin{array}{lllll} v = y & + ky^2 & + my^3 & + ny^4 & + py^5 \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{2}v^2 = & -\frac{1}{2}y^2 & - ky^3 & - \frac{1}{2}k^2y^4 & - kmy^5 \text{ \&c.} \\ & & & - my^4 & - ny^5 \\ +\frac{1}{3}v^3 = & & +\frac{1}{3}y^3 & + ky^4 & + k^2y^5 \text{ \&c.} \\ & & & & + my^5 \\ -\frac{1}{4}v^4 = & & & -\frac{1}{4}y^4 & - ky^5 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{5}v^5 = & & & & +\frac{1}{5}y^5 \text{ \&c.} \\ -y & -\frac{1}{2}y^2 & +\frac{1}{6}y^3 & -\frac{1}{12}y^4 & +\frac{1}{20}y^5 = 0 \end{array}$$

Habemus ergo

$$\begin{array}{lll} 1 - 1 = 0 & k - \frac{2}{2} = 0 & m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0 \\ \hline 1 = 1 & k = 1 & m = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\frac{n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0}{n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0}{p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}}$$

Consequenter

$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. in infinitum.

Quare differentiale ad integrandum propositum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

PRO-

PROBLEMA CXIV.

268. *Quantitatem exponentialem, consequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, construere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ sunt ad logarithmicas, quæ per abscissas Logarithmicæ exhiberi possunt.

Ex. gr. Sit construenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$, erit (§. 341 *Arithm.*)
Tab. III. $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN descriptam, & in ea semiordinatam AB = 1.
Fig. 30. Sit PM = x; erit AP = lx. Est vero $1 : lx = x : ly$ (§. 299 *Arithm.*). Ergo ly reperiri potest (§. 271 *Geom.*): cui si æqualis in axe Logisticæ sumatur AH, erit HI = y (§. 553 *part.* 1).

Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur sequentem in modum: Tab. III.

Fiat AC = x, & ducatur MC ipsi AP parallela, quæ Logisticam in M secabit; erit MC = AP = lx. Fiat CD = AB = 1, & DE = AC, ducaturque LE ipsi MC parallela; erit LE = ly. Ducatur LH ipsi EA parallela; erit HI = y. Quodsi ergo AC sumatur pro axe curvæ exponentialis, fiatque CG = HI; erit G punctum in curva quæsita. *Fig.* 30.

Porro cum $x = 0$, erit $ly = 0$. Sed 0 est logarithmus unitatis. Ergo y est unitas, consequenter = AB. Quare si fiat AF = AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB = 1 = x, erit $lx = 0$, adeoque ad AB applicata y est 1, seu ipsi AB æqualis. Quamobrem si fiat BK = BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.

De usu Calculi exponentialis in Curvarum exponentialium symptomatis investigandis.

DEFINITIO XII.

269. *Curva exponentialis* est, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO XIII.

270. *Æquatio exponentialis* est, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA CXV.

271. *Invenire subtangentem curvæ, in qua* $a_x = y$.

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

Ergo subtangens $ydx : dy$ (§. 20) $= ydy : ylady = 1 : la$.

Constructio. Sit descripta Logistica quæcunque MBN & in ea AB = 1. Fiat AC = a, ducaturque CM ipsi AP & MP ipsi AC parallela: erit PM = AC = a & AP = la (§. 554 *part.* 1). Fiat porro PQ = AB = 1, itemque QT ipsi AB parallela; erit TQ = $1 : la$ (§. 302 *Arithm.* & §. 268 *Geom.*). Tab. III. *Fig.* 31.

COROLLARIUM.

272. Quoniam curvæ subtangens $1 : la$ constans: æquatio proposita ad Logarithmicam est.

SCHOLION.

273. *Nempe si subtangens Logisticæ fuerit* $1 : la$; *ea definitur per* $a^x = y$.

PROBLEMA CXVI.

Tab. I. Fig. 8. 274. *Quadrare spatium Logisticum interminatum* HPMI.

Sit Logisticæ subtangens PT $=1:la$: PM $=y$, P$p=dx$; erit

$$a^x=y \quad (\S.\ 273).$$
$$xla=ly$$
$$ladx=dy:y \quad (\S.\ 243)$$
$$dx=dy:yla$$
$$ydx=ydy:yla=dy:la$$
$$\int ydx=y:la=y\,(1:la)=\text{PM.PT}$$

COROLLARIUM I.

275. Spatium Logisticum interminatum HPMI est trianguli subtangente PT, tangente TM, & semiordinata PM contenti duplum (§.392 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

276. Quoniam Spatium HPMI = PM.PT & ISQH = SQ. PT (§.274); erit QPMS = (PM − SQ) PT, hoc est, spatium inter duas semiordinatas interceptum æquale rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

PROBLEMA CXVII.

277. *Cubare solidum Logisticum ex rotatione spatii interminati* HPMI *circa asymptotum* PH *geniti.*

Quoniam (§.274)

$dx=dy:yla$ erit (§.197)

$$py^2dx:2r=py^2dy:2ryla=pydy:2rla$$
$$\int py^2dx:2r=py^2:4rla.$$

COROLLARIUM I.

278. Quoniam $py^2:2r$ est circulus radio PM $=y$ descriptus (§.197), $py^2:4rla$ est cylindrus, cujus basis eadem est cum basi solidi logistici, altitudo vero $1:2la$ seu $\frac{1}{2}$PT (§. 541 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

279. Est ergo solidum istud logisticum ad conum, cujus altitudo subtangens PT $=1:la$, semidiameter basis PM $=y$, ut $py^2:4rla$ ad $py^2:6rla$, hoc est, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, seu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§.124 *part.* 1). Tab. I. Fig. 8.

PROBLEMA CXVIII.

280. *Determinare subnormalem Logisticæ.*

Quoniam $ladx=dy:y$ (§.274).

erit $dy=yladx$

$$ydy:dx=y^2ladx:dx \quad (\S.\ 35).$$
$$=y^2\,la=y^2:\frac{1}{la}$$

Est adeo subnormalis tertia proportionalis ad tangentem PT $=1:la$ & semiordinatam PM $=y$.

COROLLARIUM.

281. Quodsi ergo Parabola describatur, cujus parameter subtangenti Logisticæ æqualis; semiordinatæ Parabolæ eædem sunt cum semiordinatis Logisticæ, illius autem abscissis hujus subnormales æquantur.

PROBLEMA CXIX.

282. *Determinare subtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x=y$.

Quoniam $xlx=ly$

erit $lxdx+xdx:x=dy:y$

$$ylxdx+ydx=dy$$

Ergo subtangens $ydx:dy=ydx:(ylxdx+ydx)=1:(lx+1)$.

Est itaque PT tertia proportionalis ad AB+AP $=1+lx$ & AB $=1$ (§.268). Tab. III. Fig. 30.

PROBLEMA CXX.

283. *Determinare subnormalem curvæ, ad quam* $x^x=y$.

Quia $ylxdx+ydx=dy$ (§.282); erit subnormalis (§.35) $ydy:dx=(y^2lxdx+y^2dx):dx=y^2lx+y^2=y^2(lx+1)$.

Quærenda igitur est ad AB $=1$, & PM $=y$, tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad AB $=1$, AB + AP $=1+lx$, atque

atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA CXXI.

Tab. III. Fig. 30. 284. *Determinare minimam applicatam* SR *in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282);

fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63).

erit $lx + 1 = 0$

$1 = -lx$

Fiat ergo $AT = AB = 1$; erit $TV = AR = x$ (§. 554 *part.* 1).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ substituatur valor modo inventus -1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur $AQ = VT = -x$: erit $NQ = SR = y$ (§. *cit. part.* 1).

PROBLEMA CXXII.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98), erit area curvæ $= \int x^x dx =$ [si pro x ponatur $1 + y$] $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§. 267).

PROBLEMA CXXIII.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

erit $dy = y\,(1 + lx)\,dx$

$dy : y = dx + lxdx$

$\int(dy : y) = ly$, $\int(dx + lxdx) = xlx$

$ly = xlx$

$y = x^x$ (§. 341 *Arithm.*)

PROBLEMA CXXIV.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2\,(lx + 1)$.

Quoniam $y^2\,(lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2\,(lx + 1)\,dx = ydy$

$lxdx + dx = dy : y$

$xlx = ly$ (§. 243)

$x^x = y$ (§. 341 *Arithm.*).

PROBLEMA CXXV.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2\,la$.

Quoniam $y^2\,la = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2\,ladx = ydy$

$ladx = dy : y$

$xla = ly$ (§. 243)

$a^x = y$ (§. 341 *Arithm.*)

Est ergo Curva quæsita Logarithmica vulgaris, seu Logistica (§. 273).

PROBLEMA CXXVI.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2\,lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$

erit $4xlx = 4yla$

$xlx = yla$

$x^x = a^y$ (§. 341 *Arithm.*)

Curva hæc vi Probl. 114 (§. 268) ita construitur, ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe $AB = 1$, quæ in infinitum producatur. Tab. III. Fig. 32. Fiat $AD = a$, & $AC = x$, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallelæ; erit $DL = AH = la$, & $CM = AP = lx$ (§. 268). Fiat $AF = AH$, & ducatur FE ipsi CG parallela, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens, erit $CG = xlx : la = y$ (§. 268 *Geom.*); adeoque punctum G in curva quæsita, quæ definitur per $x^x = a^y$.

Co-

COROLLARIUM I.

Tab. III. Fig. 32. 290. Quia $lxdx + dx = lady$ (§. 243)

erit $dx = lady : (lx + 1)$

$ydx : dy = yla : (lx + 1)$ (§. 20).

Est ergo subtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & constantem AH.

COROLLARIUM II.

291. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $ydy : dx = y(lx + 1) : la$, adeoque subnormalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad AP + AB & ad CG. Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM III.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y(lx + 1) : la$, hoc est, ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 *part.* 1) Quare quadratum compositæ ex constante AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.

SECTIO QUARTA.

DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi differentio-differentialis.

DEFINITIO XIV.

293. *Calculus differentio-differentialis* est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam signum differentialis est d (§. 8): differentiale ipsius dx erit ddx: differentiale ipsius ddx erix $dddx$, & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. *Scribantur* ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. *compendiosius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO XV.

296. *Differentiale primi gradus* est infinitesima quantitatis ordinariæ, ut dx. *Differentiale secundi gradus* est infinitesima quantitatis differentialis primi gradus, veluti ddx, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* est infinitesima quantitatis differentialis secundi gradus, ut $dddx$, dx^3, $dxdydz$ & ita porro.

PROBLEMA CXXVII.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§ 17, 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

Ex. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius xdx.

Fiat $xdx = v$

erit $dx = v : x$

$d^2x = (xdv - vdx) : x^2$ (§. 19)

$x^2d^2x = xdv - vdx$

$vdx + x^2d^2x = xdv$

hoc

hoc est, ob $v = xdx$

$$xdx^2 + x^2d^2x = xdv$$

$$dx^2 + xd^2x = dv$$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ se mutuo multiplicantes differentiari solent (§.12).

II. Sit differentiale ipsius $x : dx$ investigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = vdx$$

$$dx = vd^2x + dxdv, \textit{ per caf. præc.}$$

$$dx - vd^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = x : dx$

$$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$$

$$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ se mutuo dividentes differentiari solent (§.19).

III. Sit differentiale ipsius dx^2 investigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2, \textit{ per caf. 2.}$$

$$dx^2d^2x = dxdv - vd^2x$$

$$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = dx^2$

$$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$$

$$2dxd^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari solent (§. 13, seqq.).

Corollarium I.

298. Cum differentialia composita aut se mutuo multiplicent, aut se mutuo dividant, aut potentiæ, sive perfectæ, sive imperfectæ, differentialium primi gradus existant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

Corollarium II.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non est diversus a calculo differentiali (§. 293).

Problema CXXVIII.

300. *Differentiare differentialia.*

Resolutio.

Differentialia considerentur instar ordinariarum quantitatum, & ex circumstantiis casuum specialium dijudicetur quænam sint variabiles, quænam constantes. Ipsa vero differentiatio absolvatur per Problemata *Cap.* 1. *Sect.* 1. (vi §. 299).

Ex. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$, & 1 quantitas constans, erit $d(1:dx) = - d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, si dx constans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, si dy constans.

CAPUT II.

De usu Calculi differentio-differentialis in inveniendo puncto flexus contrarii curvarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 301. *Punctum flexus contrarii* est punctum M, in quo curva flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva AMI in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA CXXIX.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ sunt inter se parallelæ.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2. Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, sintque PM, *pm* & QS infinite propinquæ, & P*p*=*p*Q, hoc est, *dx* sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipsi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus M*m*R=*m*S*r* (§. 233 *Geom.*). Sed MR=P*p* & *mr*=*p*Q *per hypoth.* adeoque MR=*mr* (§. 87 *Arithm.*). Ergo *m*R=*r*S (§. 251 *Geom.*). Est vero S*r*> V*r*, quando curva axi concavitatem obvertit, & S*r*< V*r*, quando convexitas curvæ axem respicit. Quamobrem, in casu priore, differentia semiordinatarum *dy* continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumta abscissæ differentia *dx* pro constante. In puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum *dy* est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, si fiat $ddy=0$, vel $ddy=\infty$, hoc est, si sumpta *dx* pro constante, valor ipsius *dy* denuo differentietur (§ 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur.

COROLLARIUM.

303. Quodsi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex æquatione differentiali eruatur ratio *m*R & MR. Ex. gr. In Parabola (§. 388 *part.* 1).

$$ax=y^2$$

adeoque $$adx=2ydy$$

$$a:2y=dy:dx$$

hoc est $$a:2\sqrt{ax}=dy:dx$$

Crescente adeo abscissa x, decrescit ratio $a:2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arithm.*). Quare cum *dx* sit constans, *per hypoth.* *dy* decrescere debet (§. 204 *Arithm.*) Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA CXXX.

304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut sit* AQB : BN = AQ : QM. Tab. III. Fig. 34.

Sit

Tab. III. Fig. 34. Sit semiperipheria circuli genitoris $AQB = p$, $BN = a$, $AB = 1$, $PQ = v$, $AQ = z$, $AP = x$, $PM = y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$
$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit $PM = PQ + QM = v + az : p$

Est adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az . p$$

unde $dy = dv + adz : p$.

vel $pdy = pdv + adz$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) & ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$.

Quodsi adeo dx sumatur pro constante; erit (§. 300)

$$2pddy = -\frac{2p\sqrt{(x-xx)}\,dx^2}{x-xx} - \frac{pdx^2 - 4pxdx^2 + adx^2 + 4px^2dx^2 - 2axdx^2}{(x-x^2)\,2\sqrt{(x-xx)}}$$

$$= \frac{(-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax)\,dx^2}{2(x-xx)\sqrt{(x-xx)}}$$

$$= \frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x-xx)\sqrt{(x-xx)}}$$ Quare (§. 302)

$$\frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x-xx)\sqrt{(x-xx)}} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo $CP = AP - AC = x - \frac{1}{2} = p : 2a$. Est adeo $a : p = \frac{1}{2} : CP$.

$$BN : AQB = BC : CP.$$

PROBLEMA CXXXI.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $axx = (xx + aa)y$.*

Quoniam $axx = (xx + aa)\,y$

erit $axx : (xx + aa) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc est, $\frac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$

Quodsi adeo dx sumatur pro constante reperietur (§. 300)

$$\frac{(2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)dx^2 - (8a^3x^4 + 8a^5x^2)\,dx^2}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$= \frac{(2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\,dx}{(x^2 + a^2)^4} = ddy$$

Quare (§. 302)

$$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0$$

$(2a^3$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0$$

$(aa + xx$

$$aa - 3xx = 0$$

$$aa = 3xx$$

$$\tfrac{1}{3}aa = xx$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}aa} = x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)\,y$ substituatur: prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}aay$$

$(\frac{4}{3}aa$

$$\tfrac{1}{4}a = y$$

Quare si $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ & $\frac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PROBLEMA CXXXII.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$*

Quoniam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

erit $4b^3dx = 4b^2ydy - 4y^3dy$

$$\frac{b^3dx}{b^2y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300),

ddy

$$ddy = \frac{-b^5 dxdy + 3b^3y^2dxdy}{(b^2y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

Substituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$, erit

$$4b^3x = \tfrac{2}{3}b^4 - \tfrac{1}{9}b^4 = \tfrac{5}{9}b^4$$

$$x = \tfrac{5}{36}b$$

Quodsi sit $x = 0$, erit

$$2b^2y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodsi ponamus $dy = \infty$, erit ob

$$b^3dx : (b^2y - y^3) = dy$$

$$b^2y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in casu maximi (§. 63).

Quodsi denique hic valor substituatur in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$; erit

$$4b^3x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

adeoque $x = \tfrac{1}{4}b$

Curvæ igitur hujus ductus est prorsus mirabilis.

PROBLEMA CXXXIII.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $ay^2 = x^3 - bx^2$.*

Quia $ayy = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2dx - 2bxdx$

$$dy = \frac{3x^2dx - 2bxdx}{2ay}$$

$$ddy = 0 = \frac{12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2dxdy + 4abxdxdy}{4a^2y^2}$$

Hinc

$$(12axy - 4aby)dx^2 = (6ax^2 - 4abx)dxdy$$

$$\frac{(6x-2b)ydx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{(3x^2 - 2bx)dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b)ayy = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc est,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \frac{4}{3}b$$

Substituatur valor ipsius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur

$$ayy = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{16}{9}b^3 = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{48}{27}b^3 = \tfrac{16}{27}b^3$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{(b^3 : 3a)}$$

PROBLEMA CXXXIV.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva ad quam $y - a = (x - a)^{3:5}$*

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \tfrac{3}{5}(x - a)^{-2:5}dx$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante; reperietur

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5}dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x - a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipsius x prodit in hypothesi $ddy = 0$; ponatur

$-6dx$

SECTIO QUINTA.

DE ARITHMETICA INFINITORUM.

CAPUT I.

De natura Arithmeticæ infinitorum.

DEFINITIO XIX.

333. ARithmetica infinitorum est methodus summandi series numerorum infinitis terminis constantes, aut earum rationes investigandi.

PROBLEMA CXLVII.

334. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum numerator communis est unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad suum denominatorem.*

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum sit infinitus, & termini continuo decrescant, devenietur tandem ad infinitesimam (§. 2), adeoque summa fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima consideratur, ipsi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§. 4). Divisa ergo per $e - 1$ dat summam omnium terminorum $1:(ee - e)$, excepto primo (§. 119 *part.* 1). Quare summa integræ seriei $1:(ee - e) + 1:e = (1 + e - 1):(ee - e) = e:(ee - e) = 1:(e - 1)$.

Sit ex. gr. $e = 2$; erit $\int(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c. in infinit.$) = 1$.

Sit $e = 3$; erit $\int(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{2}$.

Sit $e = 4$; erit $\int(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{3}$.

Sit $e = 5$; erit $\int(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{4}$.

Sit $e = 6$; erit $\int(\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ &c. in infinit.$) = \frac{1}{5}$.

PROBLEMA CXLVIII.

335. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis est unitate minor denominatore primæ, & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $= m$; erit numerator $= m - 1$. Summa primi & ultimi termini, utpote primo æqualis $= (m-1):m$, quæ per $m-1$ divisa dat summam omnium terminorum, excepto maximo seu primo $1:m$. Quare summa integræ seriei $= m:m = 1$.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $\int(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}$ &c. in infinit.$) = 1$, ut ante (§. 334).

Sit $m = 3$, erit $\int(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ &c. in infinit.$) = 1$.

Sit $m = 4$, erit $\int(\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64}$ &c. in infinit.$) = 1$.

SCHOLION.

336. *Poterat idem per modum Corollarii ex Theoremate præcedente deduci. Est enim* $\int(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ &c.$) = \frac{1}{2}$ (§. 334). *Ergo duplum hujus seriei, hoc est,* $\int(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ &c.$) = \frac{2}{2} = 1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*$) = 1:(m - 1)$. *Ergo multiplum hujus seriei, cum sumitur vicibus* $m - 1$, *fit necesse est* $(m - 1):(m - 1) = 1$.

PROBLEMA CXLIX.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Si terminus primus $= (m - n) : m$; qui, utpote æqualis summæ primi & ultimi, divisus per $(m - 1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m - n) : (m^2 - m)$. Quare summa seriei integræ $= (m - n) : (m^2 - m) + (m - n) : m = (m - n + m^2 - mn - m + n) : (m^2 - m) = (m^2 - mn) : (m^2 - m) = (m - n) : (m - 1)$.

Sit ex. gr. $n = 1$, erit $(m - n) : (m - 1)$
$= (m - 1) : (m - 1) = 1$.

Sit $n = 2$, $m = 4$, erit $\int(\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{64}$ &c.
$= (4 - 2) : (4 - 1) = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 2$, $m = 5$; erit $\int(\frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125}$ &c.
$= (5 - 2) : (5 - 1) = \frac{3}{4}$.

Sit $n = 2$, $m = 6$; erit $\int(\frac{4}{6} + \frac{4}{36} + \frac{4}{216}$ &c.)
$= (6 - 2) : (6 - 1) = \frac{4}{5}$.

Sit $n = 2$, $m = 7$; erit $\int(\frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343}$ &c.)
$= (7 - 2) : (7 - 1) = \frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n = 3$, $m = 6$; erit $\int(\frac{3}{6} + \frac{3}{36} + \frac{3}{216}$ &c.)
$= (6 - 3) : (6 - 1) = \frac{3}{5}$.

Sit $n = 3$, $m = 7$; erit $\int(\frac{4}{7} + \frac{4}{49} + \frac{4}{343}$ &c.)
$= (7 - 3) : (7 - 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 3$, $m = 8$; erit $\int(\frac{5}{8} + \frac{5}{64} + \frac{5}{512}$ &c.)
$= (8 - 3) : (8 - 1) = \frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n = 4$, $m = 8$; erit $\int(\frac{4}{8} + \frac{4}{64} + \frac{4}{512}$ &c.)
$= (8 - 4) : (8 - 1) = \frac{4}{7}$.

Sit $n = 4$, $m = 9$; erit $\int(\frac{5}{9} + \frac{5}{81} + \frac{5}{729}$ &c.)
$= (9 - 4) : (9 - 1) = \frac{5}{8}$.

Sit $n = 4$, $m = 10$, erit $\int(\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$
&c.) $= (10 - 4) : (10 - 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. &c. &c.

PROBLEMA CL.

338. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $= m$; denominator fractionis primæ $= a$; denominator rationis $= n$; erit series summanda $\frac{m}{a} + \frac{m}{na} + \frac{m}{n^2 a} + \frac{m}{n^3 a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in Problematibus præcedentibus, modo reperitur summa $m : (na - a) + m : a = (m + mn - m) : (na - a) = mn : (na - a) = mn : a(n - 1)$.

Sit ex. gr. $m = 5$, $a = 6$, $n = 2$; erit $\int(\frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{24}$ &c.) $= 10 : 6(2 - 1) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Sit $m = 3$, $a = 5$, $n = 4$; erit $\int(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{3}{320}$ &c.) $= 12 : 5(4 - 1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Sit $m = 1$, $a = 7$, $n = 2$; erit $\int(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56}$ &c.) $= 2 : 7(2 - 1) = \frac{2}{7}$.

SCHOLION.

339. *Hoc Problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim* $n = a$ *&* $m = n - l$, *qui est casus Problematis præcedentis: substitutis hisce valoribus in formula præsente, prodit* $(n^2 - ln) : n(n - 1) = (n - l) : (n - 1)$, *quæ est formula Problematis præcedentis. Similiter sit* $n = a$, $m = n - 1$, *erit summa* $= (n^2 - n) : (n^2 - n) = 1$, *ut supra* (§. 335). *Denique si* $m = 1$, $n = a$; *erit summa* $= n : (n - 1)n = 1 : (n - 1)$, *ut supra* (§. 334).

PROBLEMA CLI.

340. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &c.) *ad summam totidem maximo æqualium.*

Termi-

Terminus primus $= 1$, numerus terminorum $= n$, differentia $= 1$. Ergo ultimus $= n$, & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 *part.* 1) & $\int n = n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66 *Arith.*) $1 : n = n : n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, adeoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c. in infinit.$) : \int n = \frac{1}{2}n^2 : n^2 = 1 : 2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA CLII.

341. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ, sive finitæ, sive infinitæ, cujus terminus primus est* 0, *ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $= 0$, ultimus $= v$, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= \frac{1}{2}nv$ (§. 107 *part.* 1), summa vero totidem maximo æqualium nv. Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIII.

342. *Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 *part.* 1). Est vero $1 : n = n^2 : n^3$ (§. 66 *Arithm.*). Ergo, quia 1 infinitesima ipsius n, *per hypoth.* erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3; consequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ *ad* n^3, hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIV.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1.). Sed eodem modo, quo in Problemate præcedente, ostenditur $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n_4. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc est, ut 1 ad 4 (§ 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLV.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti, respectu superioris, evanescunt (id quod eodem modo, quo in Probl. 153 ostenditur), summa omnium potentiarum ab 0 in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part.* 1) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1 = 0$, respectu n. Sed potentia maxima est n^m adeoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1}.

 Ergo

Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1} \times n^{m+1}$ ad n^{m+1}, consequenter ut 1 ad $m+1$ (§. 124 *part.* 1).

Ex. gr. Sit $m = 2$; erit summa quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit summa cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit summa potentiarum septimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

345. *In infinitum continuari revera non aliud significat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam respectu aliarum evanescant (l). Nam ex. gr. (§. 342) in summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, ratio termini primi $\frac{1}{3}n^3$ ad reliquos $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$ continuo crescit. Unde non mirum, si ratio posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut assignari amplius nequeat. Est enim primus ad secundum $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124 part. 1). Quare crescente n, ratio ipsius 2n ad 3 continuo crescit (§. 203 Arithm.). Similiter terminus primus est ad tertium ut $\frac{1}{3}n^3$ ad $\frac{1}{6}n$ hoc est, ut $2n^2$ ad 1 (§. 124 part. 1). Quare crescente n, ratio ipsius $2n^2$ ad 1 multo magis crescit, quam in casu priore (§. 203 Arithm.). In eo igitur casu, in quo terminus secundus respectu primi fit inassignabilis, tertius multo magis inassignabilis esse debet.*

SCHOLION II.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum Theoremata inveniri possunt, si utamur iis, quæ in Analysi finitorum* (§. 210 & seqq.) *de numeris figuratis demonstrata sunt.*

SCHOLION III.

347. *Usum Arithmeticæ infinitorum in Geometria ostenderunt (m)* WALLISIUS *inventor, & qui eam magis excoluit,* Ismael BULIALDUS *(n). Enimvero cum per calculum* LEIBNITII *summatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius, sed & plurima huic insuperabilia inveniri possint; e re nostra non esse judico, ut de ejus usu multa proferamus. Sufficerit igitur pauca eam in rem attulisse.*

CAPUT II.

De usu Arithmeticæ infinitorum in Geometria.

PROBLEMA CLVI.

Tab. III. Fig. 40. 348. *Invenire rationem trianguli* ACB *ad parallelogrammum* AEFB *super eadem vel æquali basi* AB, *& ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter se æquales divisa; triangulum ACD resolvetur in parallelogrammula, quorum bases sunt ordinatæ trianguli Mm, Nn, Oo &c. altitudines infinitesimæ ipsius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter se & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe bases basi trianguli AB

(l) Vid. *Ontologia* nostra §. 823. & seqq.

(m) In *Arithmetica infinitorum*, quæ extat in Vol. I. *Oper. Mathem.*

(n) In *Opere novo ad Arithmeticam infinitorum.*

Tab. III. Fig. 40. AB sigillatim æquales sunt. Parallelogrammula itaque, seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum Mm, Nn, Oo &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatæ vero sunt ut abscissæ CP, CQ, CR (§. 396 *Geom.*); &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressione arithmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA CLVII.

Tab. II. Fig. 28. **349.** *Invenire rationem spatii parabolici externi* AKLPA *nec non interni* ANLPA, *ad rectangulum* AKLN *super eadem basi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si spatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula resolvantur, ut in Probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales divisa; elementa parabolici progrediuntur ut semiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem respondent maximo, cujus basis KL, æqualia. Quodsi parameter parabolæ fuerit a, AH$=1$, AQ$=2$, AK$=3$ &c. erit HI $= 1 : a$, QP $= 4 : a$, KL$= 9 : a$ &c. (§. 391 *part.* 1), hoc est bases elementorum, adeoque elementa ipsa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abscissarum, hoc est, ut 0, 1, 4, 9 &c. Est ergo spatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342), adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3. Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA CLVIII.

350. *Invenire rationem spatii paraboloidici cujuscunque* AKLPA *&* ANLPA *ad rectangulum* AKLN.

Si abscissæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt semiordinatæ HI, QP, LK ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part.* 1). Quare, cum etiam spatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo respondeant totidem maximo æqualia; erit illud ad hoc ut 1 ad $1 + m$ (§. 344); consequenter ANLPA ad idem rectangulum NK, ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc est, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, seu ut m ad $1 + m$ (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIX.

351. *Invenire rationem Pyramidis & Coni ad Prisma & Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si Pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales divisa; in prismata resolvitur, quæ inter se sunt ut bases (§. 573 *Geom.*), hoc est, ut plana similia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum prismatum sunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipsa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis respondeant in prismate super eadem basi & ejus-

Tab. III. Fig. 41. dem altitudinis totidem maximo æqualia; Pyramis ad Prisma est ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

PROBLEMA CLX.

352. *Invenire rationem Conoidis parabolici, ex rotatione Parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti, ad Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 42.

Constat ex superioribus (§. 197), altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa, Conoides resolvi in cylindrulos, quorum bases sunt circuli radiis PM, QN, SR descripti, quique adeo sunt ut isti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodsi $AP = 1$, $AQ = 2$, $AR = 3$; erit $PM = 1$, $QN = \sqrt{2}$, $SR = \sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) adeoque circuli sunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 408 *Geom.*). Quare cum iisdem respondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri sunt ut 1 ad 2 (§. 341).

FINIS Analyseos infinitorum, & Tomi Primi.

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

erit $\overline{25\ (x-a)^{7:5} = 0}$

$$\overline{x - a = 0}$$

$$x = a$$

PROBLEMA CXXXV.

309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinata* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur.*

Sit C*m* ipsi CM infinite propinqua
Tab. III. Fig. 35. n. 1. 2. & CM $= y$. Tangat TM curvam in puncto M, & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m*, & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quæ ipsi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* $<$ CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit: ast eadem C*t* $>$ CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* $= 0$. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR $= dx$ & radio CT arcus TH; erit ob MCT $= m$ C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* $=$ HCT (§. 91 *Arithm.*); consequenter arcus TH $\backsim$ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM est rectus, *per construct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), adeoque TCM $=$ MR*m* (§. 145 *Geom.*) Et quia TMC $=$ M*m*C $+$ MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* $= 0$; erit M*m*R $=$ TMC, consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes, *per demonstrata*, erit (§. 413 *Geom.* & §. 171 *Arithm.*)

$$CM : CT = MR : TH$$ Tab. III. Fig. 35.

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Denique cum, ob infinite parvum LCT, angulus HLT $=$ LTC (§. 239 *Geom.*), & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus, *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

Ergo HL $= dx^3 : dy^2$.

Est vero ob CT $= ydx : dy$, sumto arculo MR $= dx$ pro constante, *t*H $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 300). Ergo *t*L $=$ *t*H $+$ HL $= (dxdy^2 - ydxddy + dx^3) : dy^2$.

Fiat jam $\dfrac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $\overline{dy^2 + dx^2 = yddy}$

PROBLEMA CXXXVI.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in Conchoide* NICOMEDIS.

Sit AB $= q$M $= a$, BC $= b$, C$q = z$, Tab. I.
CM $= y$, M$r = dx$, erit $mr = dy$ & Fig. 5.
(§. 535 *part.* 1)

$$\overline{z + a = y}$$

$$dz = dy$$

Porro B$q = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B, atque S & q non nisi infinite parvo angulo qCS differentes (§. 239 *Geom.*), adeoque æquales (§. 4), $\triangle$Sqt $\backsim$ $\triangle$BCq (§. 267 *Geom.*); consequenter

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores Cqt & CMr similes est

Tab. I. Fig. 5. $Cq : qt = CM : Mr$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2-b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2-b^2)}}{bz+ab} = dz = dy$$

Si itaque dx sumatur pro constante, cum sit differentiale ipsius $zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2-b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)} = (2z^2-b^2)dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz+ab$ sit bdz, reperitur $ddy = (2bz^3 - b^3z + 2abz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bz\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz+ab)^2 = (bz^3 + 2abbz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} =$

[substituto valore ipsius dz,]

$(bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)dx^2 : (bz+ab)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \ (\S.\ 308)$$

hinc tandem eruitur

$$b(z+a)(z^4+2az^3-ab^2z)dx^2 : (bz+ab)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (bz+ab)^2$$

$$z^4 + 2az^3 - ab^2z = (bz+ab)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z = b^2z^2 + 2ab^2z + a^2b^2 - b^2z^2 = 2ab^2z + a^2b^2$$

$$2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Tab. I. Fig. 14. Describatur itaque parametro b parabola & (§. 622 *part.* 1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$, & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A describatur circulus: dico esse $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = IR^2 + MR^2$, $\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb = \frac{z^4}{bb} - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^2 + z^2 - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$

Tab. I. Fig. 5.

$$\frac{z^4}{bb} - \tfrac{6}{4}z^2 - \tfrac{1}{2}az = 0 \qquad \times : bb$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

SCHOLION.

311. *Nisi inconsulta nobis visa fuisset figurarum multiplicatio, Parabolam circa axem* CT *descripsissemus, statuto vertice in* C *& crure sursum tendente.*

PROBLEMA CXXXVII.

312. *Determinare punctum flexus contrarii in Spirali parabolica* AMC, *qua generatur, si axis Parabola in peripheriam circuli incurvatur.* Tab. III. Fig. 36.

Quoniam semiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 38). Quare si parameter Parabolæ a, abscissa $AP = v$, $PM = y$; erit æquatio ad Spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque

$$adv = 2ydy$$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, $MR = dx$; erit $CM = r - y$, &

$$CP : Pp = CM : MR$$

$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r - y)dv : r$$

hoc est, substituto valore ipsius dv,

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$

$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, si dx sumatur pro constante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy}{ar} = 0$$

$$(r - 2y)dy^2 + (ry - y^2)ddy = 0$$

$$(r-y)yddy = (2y - r)dy^2$$

$$yddy = (2y - r)dy^2 : (r - y)$$

Habe-

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\,dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y - r)\,dy^2}{r - y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y est semiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT III.

De usu Calculi differentio-differentialis in investigandis Evolutis curvarum & Radio osculi.

DEFINITIO XVII.

Tab. III. Fig. 37. 313. Si curvæ BC filum circumplicetur & successive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extensi curvam aliam describit, quam HUGENIUS inventor (k) *Curvam ex evolutione descriptam*; sicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO XVIII.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius osculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C describitur, dicitur curvam ex evolutione descriptam in M *osculari*.

COROLLARIUM I.

315. Evoluta igitur BC est locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione descriptam AMI osculantium.

COROLLARIUM II.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM III.

317. Quia elementum arcus Mm in curva ex evolutione descripta est arcus circuli radio CM descriptus (§. 313); radius evolutæ CM est ad curvam AMI perpendicularis (§. 38). Tab. III. Fig. 37.

(k) In *Horolog. Oscillatorio* part. 3. Def. 3. §. 60.

COROLLARIUM IV.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipsam evolutam BC continuo tangit, ceu ex genesi manifestum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta describuntur, si tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur: donec arcubus sibi respondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum osculis debetur illustri* LEIBNITIO, *qui primus Evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum usum ostendit.*

PROBLEMA CXXXVIII.

320. *Determinare Radium osculi vel curvedinis in curvis, quarum semiordinatæ* PM *&* pm *sunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua; sit item radius osculi Cm alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipsi AB parallela, donec

Tab. III. *Fig.* 37. semiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R sunt recti, &, ob EMG & CM*m* (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GM*m*; erit (§. 267 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = t : \frac{t\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Jam cum radius MC constans intelligatur, quandiu ex centro C arcus infinite parvus M*m* describitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali R*m*; erit radii osculi CM differentiale nullum (§ 7). Sed, si dx sumatur pro constante, differentiale ipsius MC est

$$\frac{dt\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} + \frac{tdy\,ddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

$$\text{Ergo } \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -\,tdyddy$$

Quoniam *m*R differentiale semiordinatæ etiam differentiale ipsius ME ob PE constantem; erit $dt = dy$.

$$\text{Quare } dx^2 + dy^2 = -\,tddy$$

$$(dx^2 + dy^2) : -\,ddy = t$$

Quodsi itaque, ex æquatione ad curvam datam, substituatur valor ipsius dy^2 & $-\,ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipse desideretur (quem interdum inveniri præstat) fiat (§. 268 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 35)

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{-\,ddy} : \frac{dx^2\,dy + dy^3}{-\,dxddy}$$ Tab. III. *Fig.* 37.

$$\text{Unde } EC^2 = \frac{dx^4\,dy^2 + 2dx^2\,dy^4 + dy^6}{dx^2\,ddy^2}$$

$$ME^2 = \frac{dx^4 + 2dx^2\,dy^2 + dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6 + 2dx^4\,dy^2 + dx^2\,dy^4}{dx^2\,ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^6 + 3dx^4\,dy^2 + 3dx^2\,dy^4 + dy^6}{dx^2\,ddy^2} = \frac{(dx^4 + 2dx^2dy^2 + dy^4)(dx^2 + dy^2)}{dx^2\,ddy^2}$$

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-\,dxddy.}$$

PROBLEMA CXXXIX.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad Evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Investigentur quantitates BN & CN in valore abscissæ AP aut semiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde subducta PM relinquit PE=NC. Sed per analogiam PM : PH=ME : EC (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP+EC =AN subtrahatur AB radius Evolutæ in vertice B, per Probl. præc. determinandus, relinquitur BN. Tab. III. *Fig.* 37.
2. Fiat valor ipsius BN $= v$, CN $= z$ & communis æquationum reductio dabit æquationem ad Evolutam in puris v & z atque constantibus.

PROBLEMA CXL.

322. *Invenire Radium circuli Parabolam osculantis, & æquationem ad ejus Evolutam.*

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$
erit $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$
$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$
h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, si dx sumatur pro constante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$$

Tab. III. *Fig.* 37. Unde $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{(4xdx^2+adx^2)4x\sqrt{ax}}{4axdx^2} = \frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = y + \frac{4xy}{a} = t = \text{ME} = \text{PM}+\text{PE}$. Est vero $\text{PM} = y$. Ergo $\text{PE} = 4xy : a$, hoc est, quia $x = y^2 : a$, $\text{PE} = 4y^3 : aa$.

Constructio. Quoniam $\text{PM}=y$, $\text{TP}=2y^2:a$, (*§*. 21); si in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipsi MP continuatæ in E occurrens; erit $\text{PE} = 4y^4 : aay = 4y^3 : aa$ (*§*. 327 *Geom*). Quodsi ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis interfectio in C radium osculi seu Evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipsi PH parallela; erit (§. 268 *Geom.*) ob $\text{PH} = \frac{1}{2}a$ (§. 36)

$$\text{MP} : \text{PH} = \text{ME} : \text{EC}$$
$$y : \tfrac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \tfrac{1}{2}a + 2x$$

adeoque $\text{EC}^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$
$\text{ME}^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

$$\text{MC}^2 = \tfrac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a.$$

Jam cum MC coincidit in AB, hoc est, quando radius Evolutæ est AB, $x = 0$. Quare $\text{AB}^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc $\text{AB} = \frac{1}{2}a$. Est adeo $\text{BN} = \text{AP} + \text{PM} - \text{AB} = 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam $\text{BN} = v$, $\text{CN} = \text{PE} = z$: erit

$v = 3x \qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$ Tab. III. *Fig.* 37.
$\frac{1}{3}v = x \qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$$3az = 4v\sqrt{\tfrac{1}{3}av}$$
$$9a^2z^2 = \tfrac{16}{3}av^3 \quad a : 3$$
$$27az^2 = 16v^3$$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur Evolutam Parabolæ Apollonii esse Parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{27}{16}$ parametri Parabolæ *Apollonianæ*.

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, substitutis in formula generali $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy$ valoribus dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, $\text{MC} = (dx^2 + \frac{adx^2}{4x})\sqrt{(dx^2+\frac{adx^2}{4x})}4x\sqrt{ax} : adx^3 = (4x+a)dx^3\sqrt{(4x+a)}4x\sqrt{ax} : 8axdx^3\sqrt{x} = (4x+a)\sqrt{(4x+a)} : 2\sqrt{a}$

Quodsi fiat $x=0$, erit vi n. 1, $\text{ME}=0$ & $\text{MC} = a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc est, circuli Parabolam in vertice osculantis diameter æquatur parametro, & centrum ejus, ob $\text{ME} = 0$, est in axe Parabolæ. Porro, quia $\text{MC} = \frac{(4x+a)\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{a}} = \frac{(4ax+aa)\sqrt{(4ax+aa)}}{2a^2}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax+aa)} = \text{MH}$ seu normali: erit $\text{MC} = \frac{8\text{MH}^3}{2a^2}$

Est autem 8MH^3 cubus duplæ normalis MH, sicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Constructio. Fiat $a : 2\text{MH} = 2\text{MH} : \frac{4\text{MH}^2}{a}$ & $2\text{MH} : \frac{4\text{MH}^2}{a} = \frac{4\text{MH}^2}{a} : \frac{8\text{MH}^3}{a^2}$ hoc est, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis, erit ejus dimidium radius osculi MC.

Tab. III. Fig. 37. Quoniam etiam MC $= 4MH^3 : a^2$, erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a} : \& MH : \frac{MH^2}{a} = \frac{MH^2}{a} : \frac{MH^3}{a^2}$, hoc est, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius osculi seu evolutæ MC.

PROBLEMA CXLI.

323. *Determinare Radium osculi seu Evolutæ* MC *in infinitis Parabolis aut Paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§ 519 *part.* 1).

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, erit

$$(m^2-m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(m^2-m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$

$$(m-1)y^{-1}dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$(dx^2+dy^2) : -ddy = (ydx^2+ydy^2) : (m-1)dy^2$

hoc est, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2 : a^{2m-2}$

$$ME = \frac{m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2}{(m-1)a^{2m-2}dy^2} =$$

$$\frac{m^2y^{2m-1} + a^{2m-2}y}{(m-1)a^{2m-2}} = \frac{m^2y^{2m-1}}{(m-1)a^{2m-2}} + \frac{y}{m-1}$$

$$= \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax . y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque ME $= 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in Problemate præcedente.

PROBLEMA CXLII.

324. *Determinare Radium osculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

erit $2ydy = 2rdx - 2xdx$

$$ydy = rdx - xdx$$

Tab. III. Fig. 37. Quare si dx sumatur pro constante, erit

$$dy^2 + yddy = -dx^2$$

$$(dx^2+dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2} = y$$

Est itaque ME $= y$, hoc est, punctum E cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 38, 320). Radius igitur circuli idem est cum radio osculi, hoc est, circulus, qui circulum osculatur, huic congruit & circuli Evoluta est centrum ejus.

PROBLEMA CXLIII.

325. *Invenire Radium osculi in Ellipsi.*

Quoniam ad Ellipsin (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit $2aydy = abdx - 2bxdx$

$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$

ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$.

Unde, si dx sumatur pro constante,

$$ddy = -\frac{4bdx^2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}{4a^2bx - 4abx^2}$$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}} =$$

$$\frac{(-4a^2b^2x + 4ab^2x^2 - a^3b^2 + 4a^2b^2x - 4ab^2x^2)dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

$$= -\frac{a^3b^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

Nimirum si D $= 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & N $= abdx - 2bxdx$; reperietur dD $= (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, adeoque $\frac{dD . N}{D^2} =$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}},$$

quæ est differentialis valoris ipsius dy pars negativa (§. 19).

Est

Eſt vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2)\,dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)}\,dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2)\,2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$; conſequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^3b^2$.

Eſt vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum ſit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)}\sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)}dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)}\,dx = \sqrt{v} : 2a$; conſequenter $MH^3 = v\sqrt{v} : 8a^3$; adeoque $4MH^3 = v\sqrt{v} : 2a^3$. Eſt itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$

Conſtructio. Fiat $b : MH = MH : MH^2$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$ hoc eſt, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius oſculi MC.

COROLLARIUM.

326. Si AP, ſive $x = 0$: circuli in A Ellipſin oſculantis AB radius reperitur $a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLIV.

327. *Invenire Radium oſculi ſeu Evolutæ in Hyperbola.*

Quoniam ad Hyperbolam (§. 459 *part.* I) $ay^2 = abx + bx^2$, radius oſculi MC eodem prorſus, ut in Probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$ &, ſi $x = 0$, hoc eſt in vertice,

$$= a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = \tfrac{1}{2}b.$$

PROBLEMA CXLV.

328. *Invenire radium circuli* MC *Cycloidem* AMB *in* M *oſculantis.* Tab. III. *Fig.* 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 157); adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - xx)} + \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 575 *part.* 1). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - xx)} + \int\frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - xx)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$= dx(1 - x) : \sqrt{x}.\sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur

$ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (-xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{(x - xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x - xx)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2.(1 - x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$; eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$ (§. 320) $= 2xdx^3\sqrt{(x - x^2)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)} = 2DQ$ (§. 417 *Geom.*). Nam

$PD^2 = 1 - 2x + xx$

$PQ^2 = x - xx$

$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$.

Conſtructio. Quoniam tangens TM ipſi AQ parallela (§. 132); $TMQ = AQP$ (§. 233 *Geom.*). Eſt vero AQD rectus (§. 317 *Geom.*), & TMC itidem rectus (§. 317): Ergo $QMC = PQD$ (§. 91 *Arithm.*); conſequenter MC ipſi QD parallela. Conſtructio igitur talis eſt: Ducatur MC ipſi QD parallela, & fiat $EC = EM$; erit C punctum in Evoluta Cycloidis.

Co-

COROLLARIUM I.

329. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare si DG fiat $= AD$; in G terminabitur Evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius Evolutæ $2\sqrt{(1-1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare Evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM II.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD = BDQ (§.233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§.322 *Geom.*) chordæque cognomines (§.289 *Geom.*); consequenter BL = EC (§. 337 *Geom.*), & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§.257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§.575 *part.* 1) adeoque & alteri BL, *per demonstr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§.87 *Arithm.*). Est itaque Evoluta Cycloidis itidem Cyclois æqualis & similis (§.575 *part.* 1), hoc est, Cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLION.

331. *Cum Radius osculi aut Evolutæ vel æqualis sit arcui Evolutæ, vel eundem quantitate data excedat (§.316); omnes arcus Evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus Cycloidis BC sit chordæ BL duplus (§.168): est enim radius Evolutæ MC ejusdem duplus (§.328) & Evoluta Cycloidis ipsa quoque Cyclois est (§.330). Liquet etiam innumeras inveniri posse curvas, quæ saltem geometrice rectificantur. Ceterum utilis est Radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita speculum sphæricum cavum, observante* LEIBNITIO *in* Actis Erudit. *A.* 1686, *substituitur parabolico, quia parameter parabolæ est diameter circuli eam in vertice osculantis (§.317) sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA CXLVI.

332. *Determinare Radium osculi seu Evolutæ in Logarithmica.*

Quoniam in Logarithmica (§.54)

$$ydx : dy = a$$

$$ydx : a = dy$$

$$dxdy : a = ddy, \text{ quia } dx \text{ constans}$$

seu $ddy = ydx^2 : a^2$,

Est vero $dy^2 = y^2dx^2 : a^2$, adeoque

$$dy^2 + dx^2 = y^2dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2)\,dx^2 : a^2$$

$$(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : a^3$$

$$(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy = \frac{dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-a^3ydx^3 : a^2} = \frac{(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-ay}$$

Est igitur Radius osculi seu Evolutæ $= (y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : ay$.

Enimvero cum a sit subtangens Lo- Tab.I
gisticæ PT, y semiordinata PM, erit Fig.8.
$\sqrt{(y^2+a^2)}$ tangens TM (§.417 *Geom.*). Porro cum sit

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y : PH$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$; consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2 + a^2) : a$.

Habemus adeo

$$y : \frac{y^2+a^2}{a} = \sqrt{(y^2+a^2)} : MC$$

h. e. $PM : TH = TM : MC$

Theorema. In Logistica Radius osculi seu Evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est, ob valorem ipsius y in præsente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum HPMI (§.134) & $(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)} = TM^3$; erit $HPMI : TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis, ut tangens ad Radium osculi seu Evolutæ.

SEC-

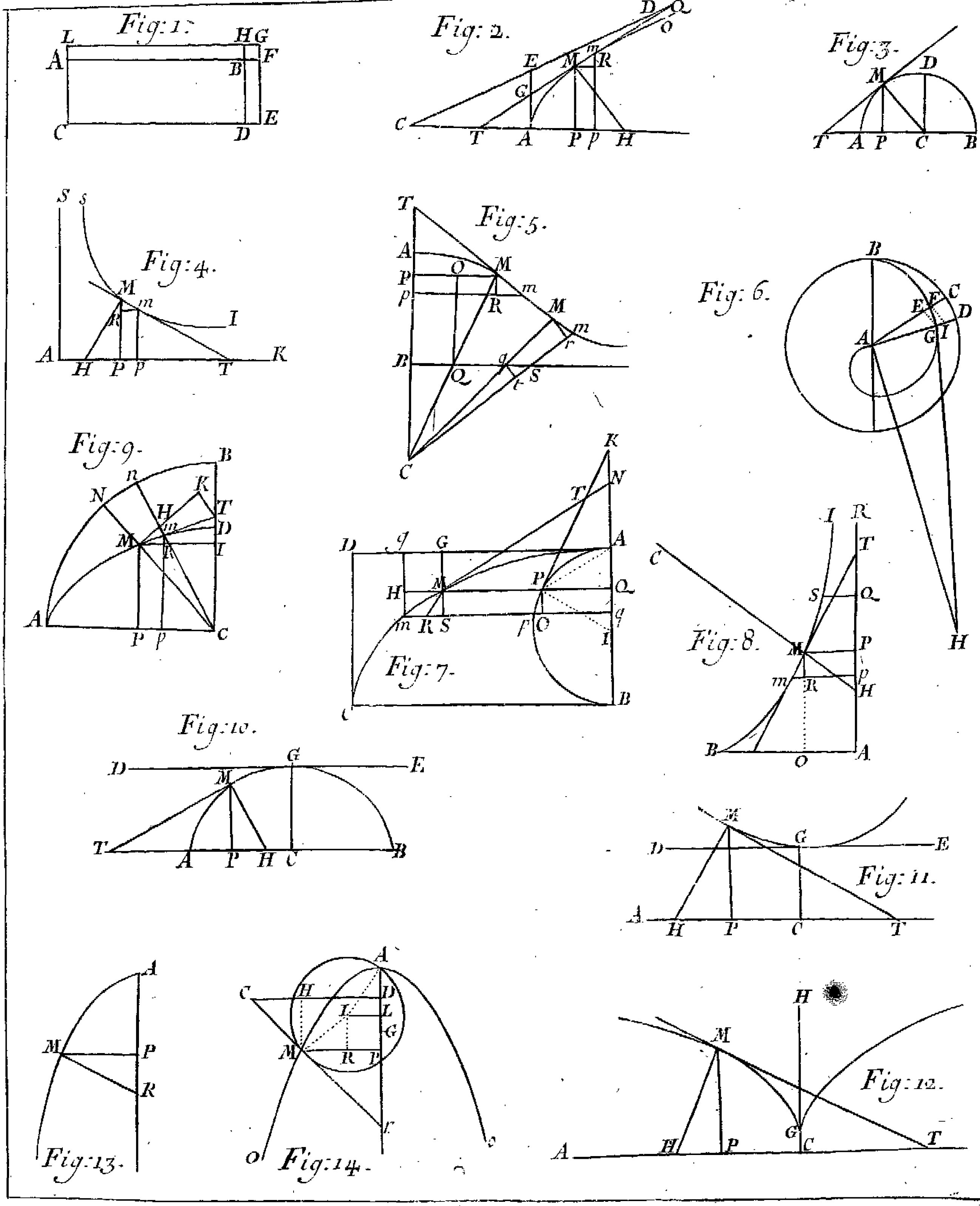


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.
Fig: 14.

Fig: Anal: infin: Tab: II.

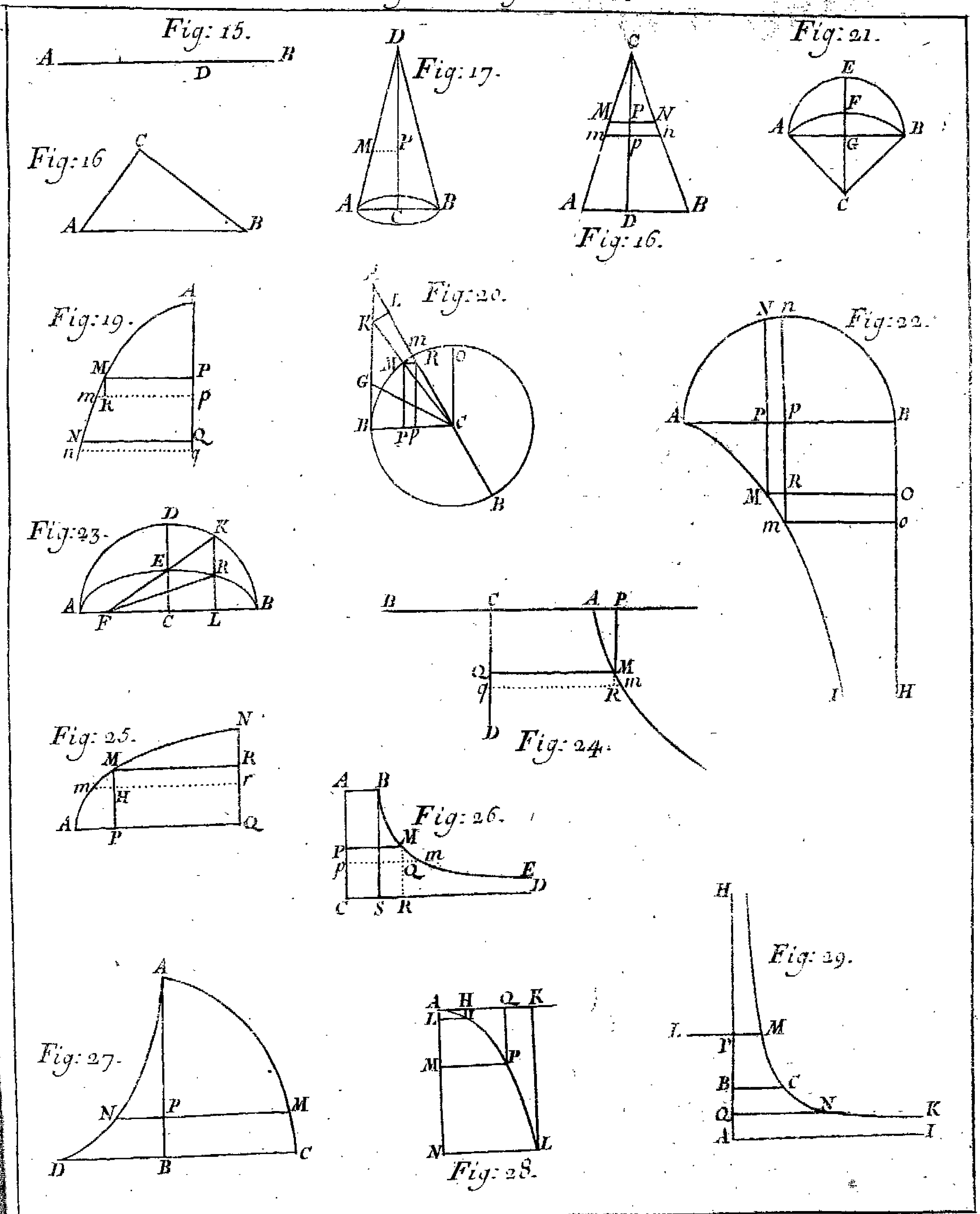


Fig. 30.

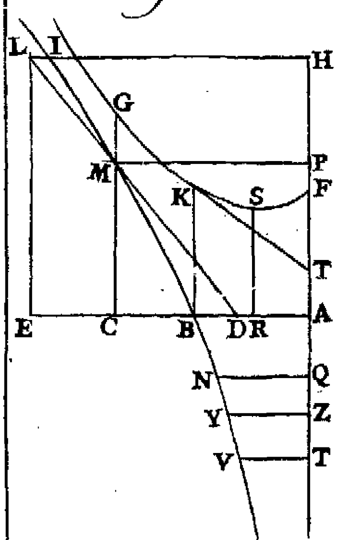


Fig. 31.

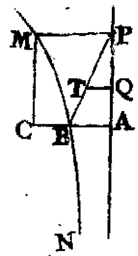


Fig. 32.

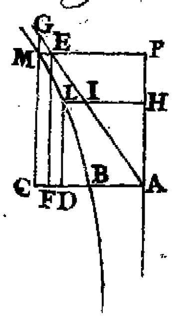


Fig. 33.

N. 1. N. 2.

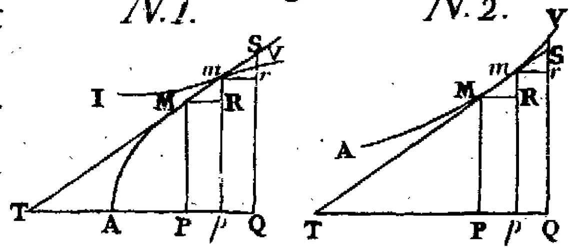


Fig. 35.

N. 1. N. 2.

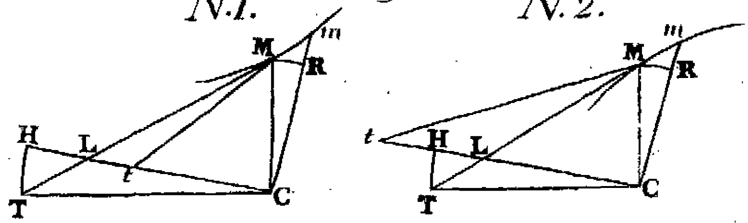


Fig. 36.

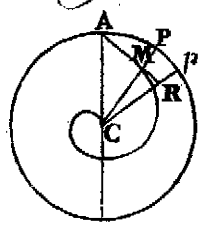


Fig. 34.

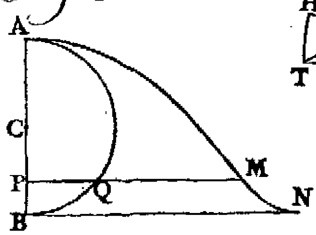


Fig. 37.

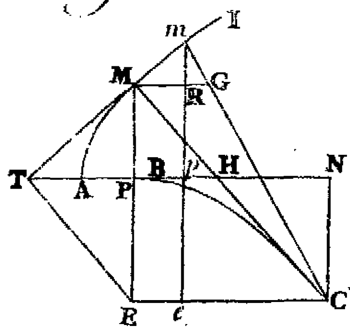


Fig. 38.

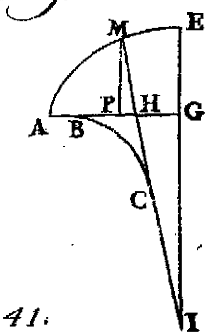


Fig. 39.

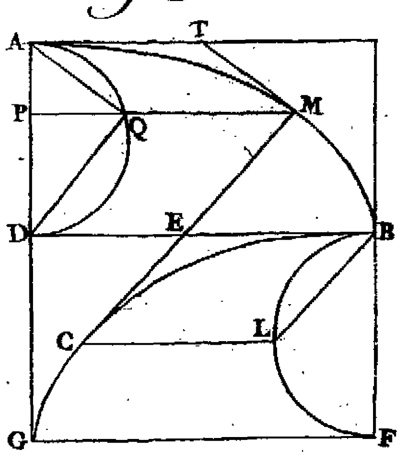


Fig. 40.

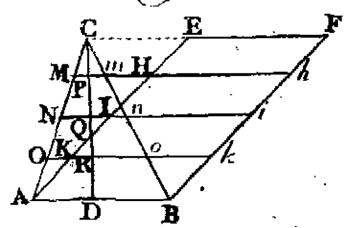


Fig. 41.

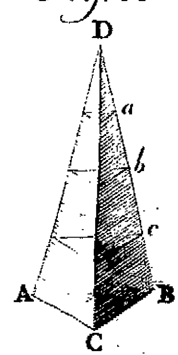


Fig. 42.

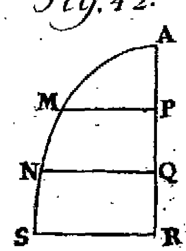


Fig. Anal. infin. Tab. IV.

Fig. 43.

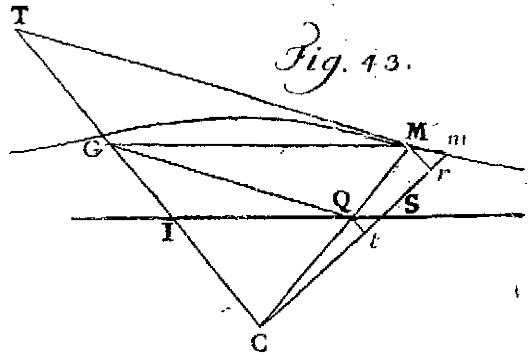


Fig. 44.

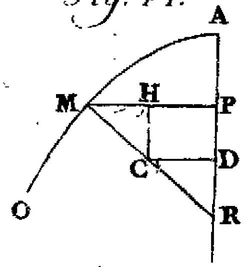


Fig. 45.

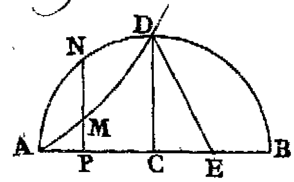


Fig. 46.

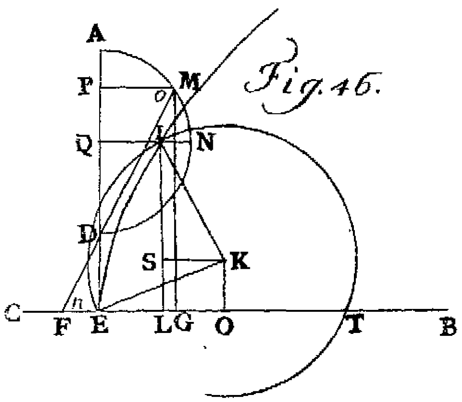


Fig. 47.

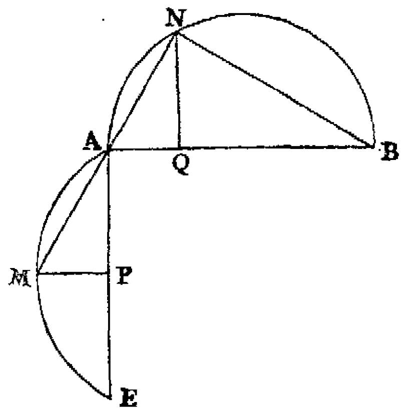


Fig. 48.

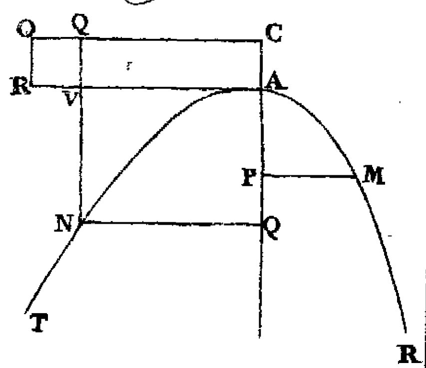


Fig. 49.

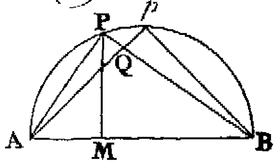


Fig. 50.

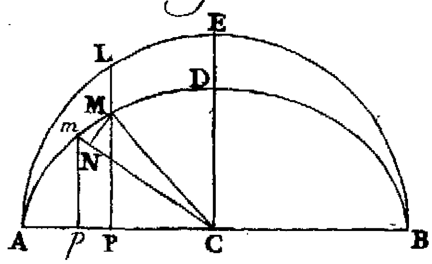


Fig. 51.

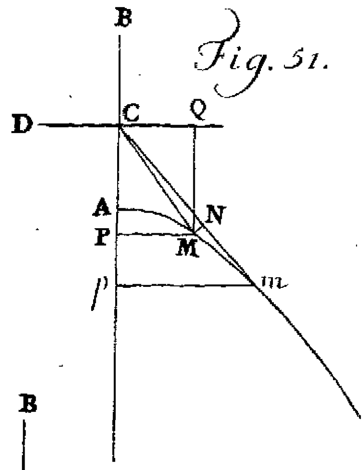
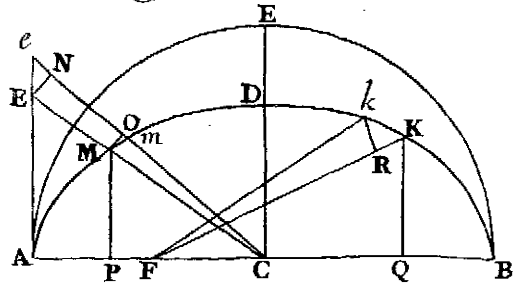


Fig. 52.



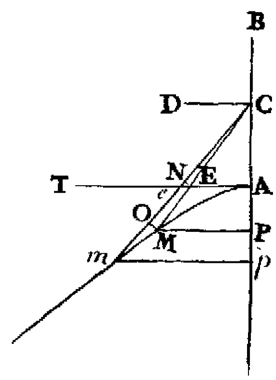


Fig. 53.