

WOLF, Christian

Christiani Wolfii... Elementa matheseos universae : tomus secundus... -- Editio novissima, multo auctior et correctior. --

Genevae : Apud Henricum-Albertum Gosse, & Socios, 1746

VIII, 396 p., [31] h. de grab. pleg., *4, A-Z4, 2A-2Z4, 3A-3C4, 3D2 ; 4º marquilla

Port. a dos tintas, con grab. xil . -- Las h. de grab. pleg. son calc . -- Numerosas cabeceras xil., intercaladas en el texto . --

Texto a dos col.

1. Matemáticas-Tratados, manuales, etc. 2. Matematikak-Tratatuak, eskuliburuak, etab. I. Título

R-5050 Enc. perg.

Arms of
Meyers Bay
Feb 7th

C.S. C.44

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI, BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI;
FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS
NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS
ORDINARIÏ, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARIÏ,
ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISIENSIS, SOCIETATUMQUE
REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA
MATHESIOS

UNIVERSÆ.

TOMUS SECUNDUS,

*Qui MECHANICAM cum STATICA, HYDROSTATICAM,
AEROMETRIAM atque HYDRAULICAM complectitur.*

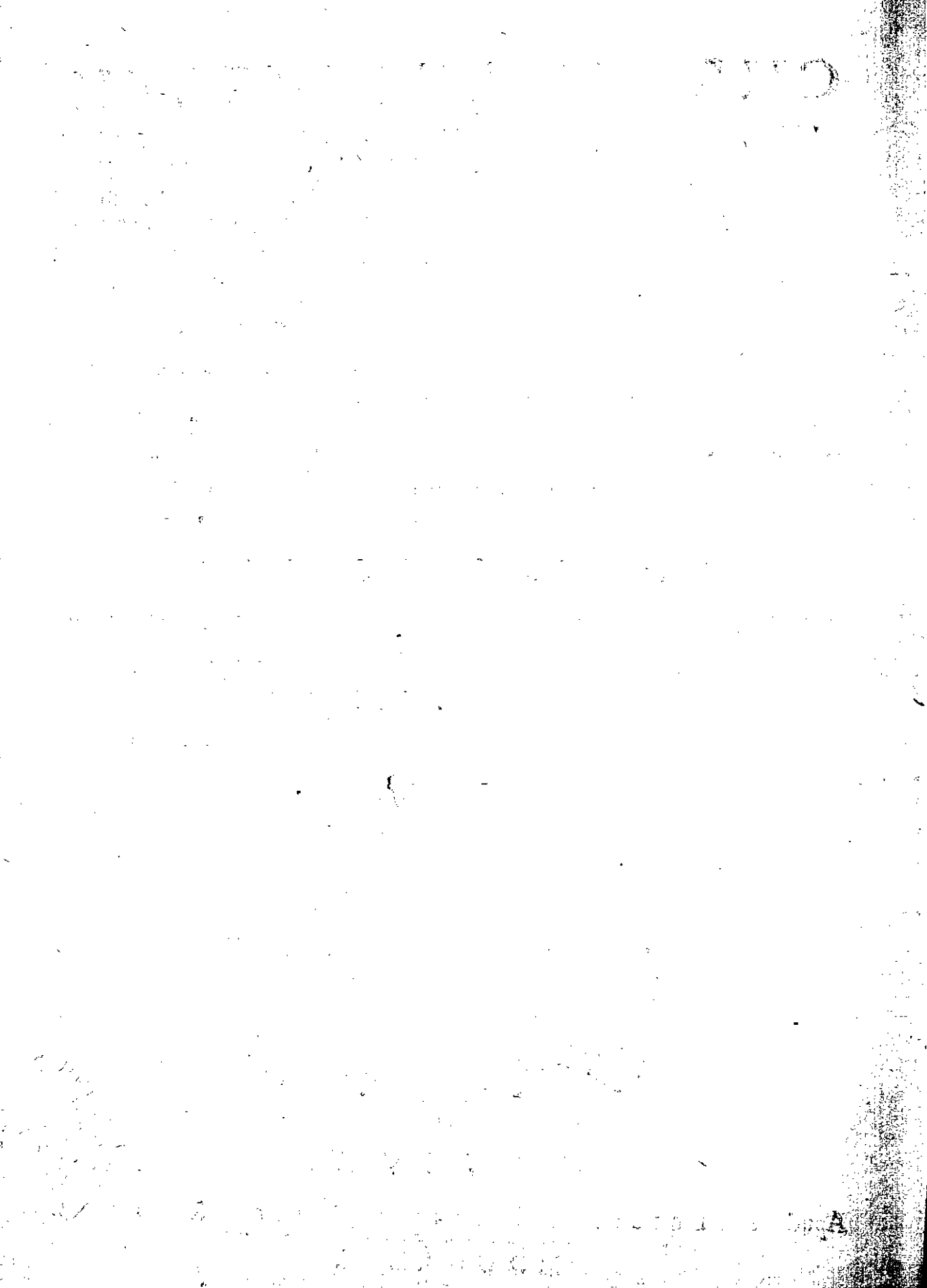
EDITIO NOVISSIMA,
MULTO AUCTIONE ET CORRECTIONE.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCLVI.





PRÆFATIO.



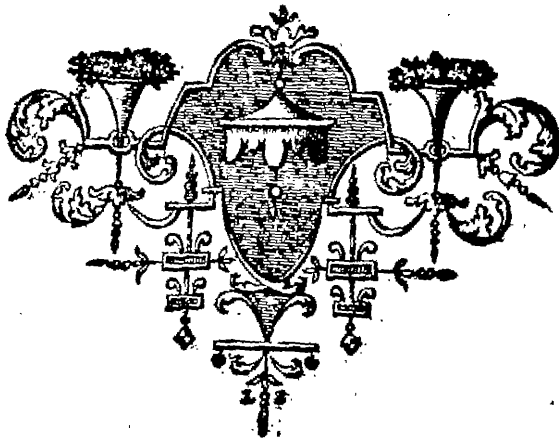
NOVA hæc Matheseos Elementa eo fine conscripsimus, ut Mathematicum cultores palmarias Matheseos universæ veritates labore facili intra breve temporis spatium sibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: Ita enim futurum confidimus, ut

ad legendos quosvis Autores, qui de rebus mathematicis commentati sunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quascunque à Mathesi diversas Scientias severius & fructuosius tractandas accedant. Atque eodem consilio novæ huic Elementorum Editioni plurima adjeci, quæ in priore non leguntur, ut adeo totum opus in Duos Tomos divisum antea, in quatuor nunc secari opus fuerit. Prodit jam Tomus Secundus, qui *Mechanicam, Hydrostaticam, Aerometriam & Hydraulicam* complectitur, atque adeo Motum & Æquilibrium solidorum ac fluidorum exponit. Veteres,

præeunte ARCHIMEDE in Libris *De Equiponderantibus & Insidentibus humido*, ultra æquilibrium gravium non progressi sunt; primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid addere ausus motum gravium ad notiones distinctas & fecundas revocavit, usum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clarissimo specimine demonstrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indivisibilium uberius exulta tandemque ad Analysin certam revocata terebatur, ut sublimiora ingenia ad veritates maxime abstrusas atque abditas accederent. Admiranda igitur de Motu solidorum ac fluidorum hodie prostant inventa, sed ita ab Inventoribus proposita, ut ab iis tangendis arceantur Tyrones & quotquot in Mathesi consensescere omneque tempus suum consumere prohibentur. Nostrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui sedato animo in Elementis nostris tractandis progreditur, eo quo conscripta sunt, ordine, illa eadem facilitate perspiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perspexerat. Ea de causa, Mechanica imprimis & Hydraulica plurimis accessionibus in nova hac Editione aucta. Ita Theoriam de Motu gravium effecimus generalem, ut, cum in priore Editione tantummodo cum GALILÆO motum uniformiter acceleratum exposuerimus, nunc ad accelerationem quacunque lege factam illam extenderimus. Addidimus Methodos investigandi Centrum gravitatis in spatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum, tendentiamque mediam in Motu composito; ut alia taceamus. Integrum Caput octavum de descensu & ascensu corporum

porum in lineis curvis, quod præclara maxime continet ævi hujus inventa, loco conveniente inseruimus. Theoriam de motu Penduli ex sublimioribus inventis effecimus uberiolem: Id quod etiam circa Theoriam de Centro oscillationis curæ nobis cordique fuit. Eadem nobis dicenda sunt de Motu projectorum & de Motu corporum ex percussione. Inprimis autem Theoria de Viribus centralibus uberrimè a nobis pertractata, cujus antea primas tantummodo lineas duxeramus. Caput decimum - quartum integrum de Resistentia mediû nunc demum accedit. Non commemoramus ea, quæ passim adpersa a nobis fuere: Quâ de causâ de Hydrostaticæ & Aërometriæ accessionibus specialiora non proferimus. Hydraulicæ tandem Theoriam non uno modo reddidimus ampliorem, eamque duobus integris Capitibus de Cursu fluminum & de Percussione fluidorum auximus. Ac hoc pacto finem, quem intendimus, nos consecutos esse speramus. Cur ex intervallo demum prodeat Tomus Secundus, causæ in vulgus notæ sunt, ut de iis dicere supervacaneum existimem. Operam daturi sumus, ut Tomus Tertius, etsi mole Secundum superaturus, celerius sequatur, si Deo ita visum fuerit. Nullus vero dubito non defuturam in hoc Secundo Tomo materiam, in qua interea industriam suam exercent Mathematicum cultores, donec Tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo, quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt: Utut ingens quoque eorum farrago sit, quæ ad vitæ non minus jucunditatem, quam necessitatem utilia. Quotquot igitur animum habent sciendi cupidum, ex materiis, de quibus hic instituitur tractatio, plurimum voluptatis percipient. Neque ullus du-
bito

bito fore, ut, qui cum attentione in iis discutiendis versati fuerint, Artem inveniendi ipso usu sibi sint comparaturi, qua deinceps extra Mathesin felicissime utentur. Dabam MARBURGI CATTORUM, die 28 Martii, Anno 1733.





ELEMENTA
MECHANICÆ
ET
STATICÆ.

P R Æ F A T I O.



PLERISQUE Autoribus , qui Mechanicæ Elementa in usum tyronum explicarunt , non omnis Motus ratio habetur , sed ejus tantum qui , vel Virium vel Temporis aliquo compendio , ope Machinarum perficitur. Nec improbandum est eorum institutum ; si quidem plura docere non intendunt , quam quæ in construendis & examinandis Machinis usum præbere possunt.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

A

Quo-

Quoniam tamen nobis constitutum est *Matheseos Elementa* dare, non modo ad usum vitæ humanæ, sed & ad profectum *Scientiarum*, *Physicæ præfertim*, sufficientia; ideo consultum duximus, ut de iis quoque tractarem, quæ ad illustrandam *Motus doctrinam* hactenus inventa. Hæc enim necessaria sunt ad *Naturæ cognitionem*, ut sine iis certa obtineri nunquam possit; cum in *Motu plurimorum Phænomenorum* ratio contineatur. Ipsarum vero etiam *Machinarum* consideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in *Physicis* aliquando versaturus; cum *Motus corporum organicorum* explicatio frustra sine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars *Motuum Scientiæ* superstruatur, *Experientia* clarissime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos necessitatibus vitæ humanæ impulsæ non sine maximo sudore perageremus. Eum igitur in finem, non solum *Machinarum simplicium* (quod vulgo fieri solet) rationem omnem fideliter exposui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum constructionem scitu necessaria sunt, & desideratam hactenus in istiusmodi *Elementis* tractationem de *Potentiarum ad Machinas applicatione* addidi. Quos rerum naturalium cognitionem parum juvat, his solis contenti præterire possunt *Motus regulas*: *Machinarum enim Vires* sine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli *Staticam a Mechanica* sejungant; consultius tamen visum fuit sororio vinculo utramque connecti, cum ita demonstrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELEMENTA MECHANICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Æquabili.

DEFINITIO I.

1. **M**ECHANICA est Scientia Motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de Æquilibrio Solidorum agit.

DEFINITIO II.

2. *Quies* est permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero est continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. *Moveri nempe dicitur corpus, si successive aliis aliisque corporibus quiescentibus, aut ejusdem corporis quiescentis partibus sit contiguum.*

DEFINITIO III.

4. *Gravitas* est nifus deorsum versus centrum Terræ.

DEFINITIO IV.

5. *Gravitatio* est pressura, quam corpus in aliud sibi subjectum vi Gravitatis suæ exercet.

DEFINITIO V.

6. *Massa* corporis est materia ipsi cohærens, hoc est, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO VI.

7. *Moles* seu *Volumen* est expansio corporis secundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO VII.

9. *Vis Motrix*, seu *Vis* simpliciter, est principium motus, seu id unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, si cum motu actuali conjungitur, qualis est in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, si ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, seu quæ in solo nifu seu conatu ad motum consistit, qualis est in globo ex filo suspenso, & in elatere tenso quod se restituere nititur.

SCHOLIUM.

10. *Hanc Virium distinctionem dudum agnovere inter homines plebeios Molitores nostrates. Mortuam enim vocant aquam in alveo stagnantem aut segniter admodum fluentem; vivam vero, quæ impetu concepto rotis molendinorum circumagendis sufficit. Acutissimus LEIBNITIUS cum magnum momentum in ea situm esse deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in Mechanicam introduxit (a).*

DEFINITIO VIII.

11. *Tempus hic voco eam temporis partem, qua motus durasse supponitur.*

DEFINITIO IX.

12. *Spatium est linea, quam mobile instar puncti consideratum motu suo describere concipitur.*

DEFINITIO X.

13. *Velocitas seu Celeritas est ea Vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore spatium datum percurrendi.*

COROLLARIUM.

14. *Celeritas adeo dupla est, qua eodem tempore spatium duplum describitur; tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum describitur; & ita porro in infinitum, in quacunque multiplicium vel submultiplicium specie.*

SCHOLIUM I.

15. *Nimirum celeritas tanto major censetur ab omnibus, quanto majus spatium eodem tempore percurret mobile. Ponamus mobile A intervallo unius minuti secundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile B, quod intervallo unius secundi percurret spatium trium pedum. Ultra fatebuntur omnes*

(a) AB. *Erudit. An. 1695. p. 194.*

celeritatem ipsius mobilis B majorem esse celeritate alterius A.

SCHOLIUM II.

16. *Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod satis patet attendenti, celeritas quasi per totam mobilis massam diffusa concipitur, ita ut eadem in singulis partibus existat. Proprie loquendo est gradus vis motricis.*

DEFINITIO XI.

17. *Linea directionis est, juxta quam corpus progredi nititur.*

DEFINITIO XII.

18. *Velocitas sumta cum directione dicitur Conatus.*

SCHOLIUM.

19. *Unde conatus censetur major, quo major est celeritas.*

DEFINITIO XIII.

20. *Vis resistendi dicitur, quæ in contrarium, seu juxta oppositam directionem Vis cujuscunque alterius agit.*

SCHOLIUM.

21. *Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.*

DEFINITIO XIV.

22. *Quantitas motus, momentanea scilicet, est factum ex celeritate in massam. LEIBNITIUS appellat Quantitatem motionis,*

SCHOLIUM.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & a quantitate massa, & a quantitate celeritatis; ita ut in eodem corpore motus existimetur major, si major est celeritas, qua movetur; & in duobus corporibus, quorum eadem est celeritas, ejus motus major sit, cujus massa quantitas major est.*

DEFINITIO XV.

24. *Motus æquabilis est, si mobile continuo eadem celeritate fertur.*

AXIOMA I.

25. *Nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit.*

SCHOLIION.

26. *De hoc Principio plura diximus in Ontologia seu Philosophia prima, integro Capite 2, Sect. I, Part. I. Et in Mechanica idem jam olim tacite supposuit ARCHIMEDES in libris De Æquiponderantibus.*

AXIOMA II.

27. *Si Mobile eadem celeritate movetur, equalibus temporibus equalia spatia describit.*

SCHOLIION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum spatium dato tempore percurrendum (§. 13.); nulla sane ratio est, cur temporibus equalibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diversa spatia describere deberet. Describit adeo eandem (§. 25). Axiomatis hujus veritatem apertius stabilimus in Philosophia prima (§. 656. Ontol.), ubi etiam Scientiarum Mathematicarum principia demonstrativa ratione a priori ex notionibus simplicioribus deduximus.*

AXIOMA III.

29. *Si duo Mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore equalia spatia describunt.*

SCHOLIION.

30. *Patet idem per Axioma primum (§. 25). Conferatur eadem Philosophia prima (§. 660).*

THEOREMA I.

31. *In motu æquabili, Spatia a mobili percurra sunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis, (*per hypoth.*), mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare si tempore t describit spatium f , alio tempore t priori æquali describit quoque spatium f priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis t spatium bis f , immo tempore quocunque multiplici seu submultiplici $nt (=T)$ spatium $nf (=S)$. Sunt igitur spatia f & S ut tempora t & T (§. 184 Arithm.). *Q. e. d.*

THEOREMA II.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur; Spatia descripta sunt ut Tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit spatium f , etiam mobile B, quod eadem celeritate fertur, (*per hypoth.*) eodem tempore t percurrit spatium f priori æquale (§. 29). Sed si idem mobile percurrit tempore quocunque alio T spatium S , erit hoc ad alterum f ut T ad t (§. 31). Quare cum spatium f sit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonstrata*; spatia f & S , a mobilibus A & B temporibus t & T descripta, sunt ut tempora t & T , quibus describuntur. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur; Spatia eodem tempore motu æquabili descripta sunt ut Celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t celeritate c spatium f describit; eodem tempore t celeritate bis c describit spa-

tium bis f , & celeritate quacunque multiplici vel submultiplici nc spatium quodcunque multiplex vel submultiplex nf (§. 31). Erunt adeo spatia f & S ($=nf$) descripta ut celeritates c & C ($=nc$). Quare si mobile B eodem tempore t celeritate C describit spatium S : erit adhuc spatium a mobili A descriptum f ad spatium a mobili B eodem tempore descriptum S ut celeritas illius c ad celeritatem hujus C . *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta sunt in ratione composita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Describat mobile A celeritate c spatium f tempore t , & B celeritate C spatium S tempore T . Ponamus idem mobile B celeritate c describere spatium q tempore T . Quoniam celeritas c mobilium A & B eadem, erit $q : f = T : t$ (§. 32). Et quia spatia S & q eodem tempore T describuntur, erit $S : q = C : c$ (§. 33). Ergo $Sq : fq = TC : tc$ (§. 213 *Arithm.*); consequenter $S : f = TC : tc$ (§. 181 *Arithm.*); hoc est, spatia sunt in ratione composita temporum & celeritatum (§. 159 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

35. Si $S = f$; erit $CT = ct$, adeoque $C : c = t : T$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si duo corpora motu æquabili æqualia spatia describunt; celeritates habent temporum rationem reciprocã.

COROLLARIUM II.

36. Si ulterius $t = T$; erit etiam $C = c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali spatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA V.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates C & c sunt in ratione composita ex directã spatorum S & f & reciproca temporum T & t .*

DEMONSTRATIO.

Est enim $S : f = CT : ct$ (§. 34). Quare cum sit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arithm.*); erit $C : c = St : fT$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

38. Quoniam $C : c = St : fT$ (§. 37); erit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{f}{t}$ (§. 181 *Arithm.*). Quare celeritas C analytice exprimitur per $\frac{S}{T}$; hoc est, celeritas est ut spatium per tempus divisum.

THEOREMA VI.

39. *Si duo corpora motu æquabili lata celeritatibus C & c describunt spatia S & f ; tempora T & t , quibus describuntur, erunt in ratione composita ex directã spatorum & reciproca celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $S : f = CT : ct$ (§. 34); erit $fCT = Sct$ (§. 297 *Arithm.*). Quare $T : t = cS : Cf$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

40. *Si spatia S & f a duobus mobilibus*

libus motu æquabili descripta fuerint ut celeritates C & c , tempora T & t erunt æqualia.

DEMONSTRATIO.

Est enim $S : f = CT : ct$ (§. 34). Quare si esse debet $S : f = C : c$, necesse est ut sit $T = t$ (§. 178 Arithm.). Est vero $S : f = C : c$ per hypoth. Ergo etiam $T = t$. Q. e. d.

Idem etiam hoc modo ostenditur. $S : f = C : c$, per hypoth. Sed $S : f = CT : ct$ (§. 34). Ergo $C : c = CT : ct$ (§. 167 Arithm.); consequenter $1 : 1 = T : t$ (§. 185 Arithm.). Quare cum sit $1 = 1$, erit etiam $T = t$. Q. e. d.

THEOREMA VIII.

41. Quantitates motus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, Q & q , sunt in ratione composita celeritatum C & c & massarum M & m .

DEMONSTRATIO.

Est enim $Q = CM$, & $q = cm$ (§. 22). Quare $Q : q = CM : cm$, hoc est, Q habet ad q rationem compositam ipsius C ad c & ipsius M ad m (§. 159 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

42. Si $Q = q$; erit $CM = cm$, adeoque $C : c = m : M$ (§. 299 Arithm.): hoc est, si quantitates motus duorum mobilium motu æquabili latorum fuerint æquales; celeritates habent rationem massarum reciprocam.

COROLLARIUM II.

43. Quare si ulterius $M = m$; erit etiam $C = c$: hoc est, si duorum mobilium ejusdem massæ motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM III.

44. Similiter si $C = c$; erit $M = m$: hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moventur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt massæ eorundem æquales.

THEOREMA IX.

45. Duorum corporum quæ motu æquabili feruntur, celeritates C & c sunt in ratione composita ex quantitatum motus Q & q directæ & massarum M & m reciproca.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41) erit $Qcm = qCM$ (§. 297 Arithm.).

Ergo $C : c = Qm : qM$ (§. 299 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

46. Si $C = c$; erit $Qm = qM$, adeoque $Q : q = M : m$ (§. 299 Arithm.): hoc est, si duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus massarum rationem habent.

COROLLARIUM II.

47. Quodsi ulterius fuerit $M = m$; erit etiam $Q = q$: adeoque si duo mobilia æqualem massam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales sunt.

THEOREMA X.

48. In motu æquabili massa corporum M & m sunt in ratione composita ex quantitatum motus Q & q directæ & celeritatum C & c reciproca.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = CM : cm$ (§. 41) erit $Qcm = qCM$ (§. 297 Arithm.).

Ergo $M : m = Qc : qC$ (§. 299 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

49. Si $M = m$; erit $Qc = qC$, adeoque $Q : q = C : c$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum massæ fuerint æquales; quantitates motus sunt ut velocitates.

THEOREMA XI.

50. In motu æquabili, quantitates motus Q & q sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum M & m atque spatiorum S & s & reciproca temporum T & t .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $C : c = St : sT$ (§. 37)

& $Q : q = CM : cm$ (§. 41)

erit $CQ : cq = CMSt : cmsT$
(§. 213 *Arithm.*)

$Q : q = MSt : msT$ (§. 185
Arithm.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

51. Si $Q = q$; erit $MSt = msT$, adeoque $M : m = sT : St$, $S : s = mT : Mt$, $T : t = MS : ms$: hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; 1°. massæ eorundem sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca spatiorum: 2°. Spatia sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca massarum: 3°. Tempora denique sunt in ratione composita massarum & spatiorum.

COROLLARIUM II.

52. Si præterea $M = m$; erit $sT = St$, adeoque $S : s = T : t$ (§. 299 *Arithm.*). Nempe si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac massæ fuerint æquales; spatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM III.

53. Si ulterius $T = t$; erit quoque $S = s$. Duo igitur mobilia, quorum massæ ac quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt.

COROLLARIUM IV.

54. Si præter $Q = q$, fuerit $S = s$; erit $mT = Mt$ (§. 51) adeoque $M : m = T : t$ (§. 299 *Arithm.*): hoc est, si duo mobilia, quorum quantitates motus æquales sunt, æquabili motu æqualia spatia percurrunt; massæ eorundem sunt temporibus proportionales, vel, quod perinde est, tempora sunt massis proportionalia.

COROLLARIUM V.

55. Si ulterius $T = t$; erit etiam $M = m$; adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales sunt & quæ eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt, massæ æquales sunt.

COROLLARIUM VI.

56. Si præter $Q = q$, fuerit $T = t$; erit $MS = ms$ (§. 51), adeoque $S : s = m : M$: hoc est, spatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili descripta sunt in ratione massarum reciproca.

THEOREMA XII.

57. In motu æquabili, spatia S & s sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatuum motus Q & q atque temporum T & t & reciproca massarum M & m .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = MSt : msT$ (§. 50)

erit $QmsT = qMSt$ (§. 297 *Arithm.*).

Unde $S : s = QTm : qtM$ (§. 299
Arithm.). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM I.

58. Si $S = f$; erit $Q T m = q t M$; adeoque $Q : q = t M : T m$, $M : m = Q T : q t$, $T : t = q M : Q m$ (§. 299 *Arithm.*). Quod si adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia spatia feruntur; erunt 1°. quantitates motus in ratione composita ex directa massarum & reciproca temporum: 2°. massæ in ratione composita quantitatum motus atque temporum: 3°. tempora in ratione composita ex directa massarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM II.

59. Si præter $S = f$, fuerit $M = m$; erit $Q T = q t$, adeoque $Q : q = t : T$ (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, quantitates motus sunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia spatia feruntur.

COROLLARIUM III.

60. Si præter $S = f$, fuerit $T = t$; erit $q M = Q m$ (§. 58), adeoque $Q : q = M : m$ (§. 299 *Arithm.*) Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia spatia æquali tempore motu æquabili feruntur, quantitates motus massis proportionales sunt.

THEOREMA XIII.

61. Corporum motu æquabili latorum massa M & m sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus Q & q atque temporum T & t & reciproca spatiorum S & s .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = M S t : m s T$ (§. 50); erit $Q m s T = q M S t$ (§. 297 *Arithm.*) Unde $M : m = Q T s : q t S$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Si $M = m$; erit $Q T s = q t S$, adeoque $Q : q = t S : T s$, $S : s = Q T : q t$ & $T : t = q S : Q s$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

(§. 299 *Arithm.*), hoc est, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum massæ æquales, 1°. quantitates motus sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca temporum: 2°. spatia sunt in ratione quantitatum motus & temporum composita: 3°. tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca quantitatum motus.

COROLLARIUM II.

63. Si præter $M = m$ fuerit $T = t$; erit $q S = Q s$, adeoque $Q : q = S : s$ (§. 299 *Arithm.*); hoc est quantitates motus duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, spatiis æquali tempore peractis proportionales sunt.

THEOREMA XIV.

64. In motu æquabili tempora T & t sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum M & m atque spatiorum S & s & reciproca quantitatum motus Q & q .

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q : q = M S t : m s T$ (§. 50); erit $Q m s T = q M S t$ (§. 297 *Arithm.*) Unde $T : t = q M S : Q m s$ (§. 299 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

65. Si $T = t$; erit $q M S = Q m s$, adeoque $Q : q = M S : m s$, $M : m = Q s : q S$ & $S : s = Q m : q M$ (§. 299 *Arithm.*); hoc est, si motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquiditurnus; erunt 1°. quantitates motus in ratione massarum & spatiorum composita: 2°. massæ in ratione composita ex quantitatum motus directa & spatiorum reciproca: 3°. spatia in ratione composita ex directa quantitatum motus & reciproca massarum.

SCHOLIUM.

66. *Suadeo tyronibus, ut hactenus demonstrata numeris illustrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus A, cujus massa sit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 secundorum emetiri spatium 12 pedum, & corpus aliud B, cujus massa sit ut 5, tempore 8 secundorum emetiri spatium 16 pedum: habebimus $M=7, T=3, S=12, m=5, t=8, f=16$, adeoque $C=4, c=2$ (§. 38.), $Q=28, q=10$ (§. 22). Hinc mihique deprehenditur.*

$$\begin{aligned} C:c &= St:fT \quad (\S. 37) \\ 4:2 &= 12:16. 3:8 = 96:48 = 4:2 \\ S:f &= CT:ct \quad (\S. 34) \\ 12:16 &= 4:3. 2:8 = 12:16 \\ T:t &= cS:Cf \quad (\S. 39) \\ 3:8 &= 2:12. 4:16 = 24:64 = 3:8 \\ C:c &= Qm:qM \quad (\S. 45) \\ 4:2 &= 28:14. 5:10. 7:14 = 140:70 = 4:2 \\ M:m &= Qc:qC \quad (\S. 48) \\ 7:5 &= 28:20. 2:10. 4:20 = 56:40 = 7:5 \\ S:f &= TQm:tqM \quad (\S. 57) \\ 12:16 &= 3:28. 5:8. 10:7 = 420:560 \\ 1 &= 12:16 \\ M:m &= TQf:tqS \quad (\S. 61) \\ 7:5 &= 3:28. 16:8. 10:12 = 7:5 \end{aligned}$$

$$Q:q = MST:mst \quad (\S. 50)$$

$$28:10 = 7.12.8:5.16.3 = 672:240 = 28:10$$

Eodem modo illustrantur singula Theorematum Corollaria.

Sit enim $S=12, T=6, f=8, t=4$; erit $C=12:6=2$, & $c=8:4=2$, consequenter ob $C=c$

$$S:f = T:t \quad (\S. 32)$$

$$12:8 = 6:4.$$

Sit $S=12$ & $f=12$. Quoniam $S=CT$ & $f=ct$ (§. 34); si $C=2$ & $c=3$, erit $T=6$ & $t=4$. Habemus adeo

$$C:c = t:T \quad (\S. 35)$$

$$2:3 = 4:6.$$

Si pro S & f ponatur Q & q , pro T & t vero M & m ; idem Exemplum illustrabit primum Theorematis VIII Corollarium (§. 42). Iisdem observatis Exemplum precedens in Corollarium primum Theorematis quinti quadrat.

Sit denique $Q=12, q=8, M=4, m=4$; erit $C=12:4=3$, & $c=8:4=2$, (§. 22), adeoque

$$Q:q = C:c \quad (\S. 49)$$

$$12:8 = 3:2.$$

CAPUT II.

De Motu uniformiter accelerato & retardato.

DEFINITIO XVI.

67. **M**otus acceleratus est, qui nova capit celeritatis incrementa. Uniformiter acceleratus est, qui temporibus æqualibus æqualia continuo capit celeritatis incrementa.

COROLLARIUM I.

68. In motu adeo uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora quibus acquiruntur.

COROLLARIUM II.

69. Quare si tempuscula elementaria fuerit dt & dT , celeritates elementares iis respondentes dc & dC ; erit $t:T = c:C$ (§. 192 Arithm. & §. præc.) Sant enim t & T summa ipsorum dt & dT , c & C vero summa ipsorum dc & dC (§. 178. 67 Arithm.)

DEFINITIO XVII.

70. Motus retardatus est, cujus ce-

Cap. II. DE MOTU UNIFORMITER ACCELERATO & RETARDATO. II

leritas decrefcit. *Uniformiter retardatus* dicitur, fi continua celeritatis decre-
menta fuerint temporibus proportio-
nalia.

A X I O M A II.

71. *Corpus femel quiefcens nunquam* movebitur, nifi aliunde ad motum con-
citetur: femel autem motum eadem ve-
locitate & fecundum eandem directio-
nem moveri perget, nifi a caufa aliqua
ftatum fuum mutare cogatur.

S C H O L I O N.

72. *Hæc fatis manifefta funt ex Axiomate* omnis Philofophiæ fundamentali, quod nihil
fit fine ratione fufficiente (§. 25): quemad-
modum idem oftendimus in *Cofmologia*. Nec
experientia eidem repugnat, cum femper ra-
tio assignari poffit, tam motus retardati, quam
directionis mutata, modo omnes circumftan-
tias fatis perpendamus.

C O R O L L A R I U M I.

73. *Corpus itaque, quod nonnifi impul-*
fu femel facto movetur, per lineam rec-
tam moveri debet.

C O R O L L A R I U M II.

74. *Quodfi vero per curvam incedit,*
duplici vi urgeatur necesse est, altera nem-
pe, qua progredetur fecundum lineam
rectam, altera vero, qua a motu rectili-
neo continuo retrahitur.

A X I O M A III.

75. *Si nifus & renifus duorum cor-*
porum fuerint æquales; motus nullus
fubfequitur, fed corpora fe mutuo impel-
lentia juxta fe invicem quiefcunt.

A X I O M A IV.

76. *Si corpus motum fecundum ean-*
dem directionem, qua movetur, impelli-
tur; motus acceleratur (§. 67).

A X I O M A V.

77. *Corpus motum a vi resistente re-*
tardatur (§. 20. 70).

O B S E R V A T I O I.

78. *Gravitas corporum eadem est in*
qualibet a fuperficie Telluris diftantia, in
qua experimentum capere licet: quam in
pofterum Intervallum non nimis ma-
gnum dicemus.

O B S E R V A T I O II.

79. *Gravia descendunt motu accele-*
rato.

T H E O R E M A XV.

80. *Si corpus ex quiete motu uni-*
formiter accelerato fertur, spatia funt
in ratione duplicata temporum.

D E M O N S T R A T I O.

Defignet recta AB tempus quo mo-Tab. I.
tus mobilis acceleratur, & rectæ ad Fig. 1,
AB applicatæ PM, BC fint ut celeri-
tates in fine temporis AP, AB acqui-
fitæ. Quoniam motus uniformiter ac-
celeratur & motus a quiete incipit,
per hypoth. erit $AP : AB = PM : BC$
(§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB
perpendiculares per construct. adeoque
inter fe parallelæ (§. 256 *Geom.*). Est
igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*);
idque rectangulum (§. 91 *Geom.*).
Ponamus pm esse alteri lineæ PM infi-
nite propinquam: celeritates PM & pm
non different nifi quantitate infinite
parva mR in fine tempusculi Pp, atque
adeo tempusculo toto Pp eadem cele-
ritate fertur mobile (§. 4 *Analys.*) &
confequenter motus ifto tempusculo
æquabilis est (§. 24). Enimvero in
motu

Tab. I. *Fig. 1.* motu æquabili spatium est ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arithm.*), adeoque spatium a mobili tempusculo Pp confectum ut rectangulum Pp RM (§. 376 *Geom.*); consequenter cum singulis tempusculis, quibus AP constat, ipsi Pp æqualibus istiusmodi parallelogrammula respondeant, quæ simul sumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analys. infin.*), area APM exprimit spatium à mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit spatium à mobili tempore AB confectum. Sunt igitur spatia temporibus AP & AB descripta ut triangula APM & ABC; consequenter ob eorundem similitudinem (§. 268 *Geom.*), in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc est, temporum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68); spatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus describuntur, acqvisitarum (§. 80).

COROLLARIUM II.

82. In motu uniformiter accelerato tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 159 *Arithm.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM III.

83. Etiam celeritates in fine temporum sunt in ratione subduplicata spatiorum illis descriptorum (§. 159 *Arithm.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA XVI.

84. Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, crescunt tem-

poribus æqualibus secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. spatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo percursum ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (80). Quodsi ergo subtrahas spatium intra minutum unum percursum a spatio intra duo confecto 4; remanebit spatium minuto secundo respondens 3. Eodem modo reperitur spatium minuto tertio absolutum $9 - 4 = 5$, spatium quarto respondens $16 - 9 = 7$, quod quinto convenit $25 - 16 = 9$ &c. & ita porro (§. 83 *Analys.*). Spatium ergo minuti primi est ut 1, secundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9, &c. adeoque spatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

85. Corpora gravia, in medio non resistente, per intervalla non nimis magna, motu uniformiter accelerato descendunt.

DEMONSTRATIO.

Cum gravia descendant motu accelerato (§. 79); Vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Est vero gravitas in intervallo non nimis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorsum impelli debent (§. 25). Itaque

si tempusculo primo impelluntur celeritate c , etiam secundo celeritate c , impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non resistit per hypoth. celeritatem semel acquisitam constanter retinent (§. 71), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, consequenter motu uniformiter accelerato descendunt (§. 67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

86. Sunt igitur spatia descensus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81); & secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, &c. crescunt (§. 84).

COROLLARIUM II.

87. Tempora vero, itemque velocitates, sunt in ratione spatiorum subduplicata (§. 82. 83).

SCHOLIUM I.

88. Dum gravia descendere supponimus in medio non resistente, ab omni externo impedimento abstrahimus, quocunque tandem nomine veniat & a quacunque causa ortum trahat. Unde motum quoque secludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Astronomia adstruendum, in transversum rapiuntur gravia ipso descensus tempore: quamvis in intervallo non nimis magno nulla inde in descensum gravium irregularitas irrepit.

SCHOLIUM II.

89. GALILÆUS GALILÆI, qui legem descensus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experientiis consonam apprehendit (a). In tabula scilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiore, agglutinata intus membrana, ne scabritie sua pilam aeneam bene politam in descensu remoraretur. Eam

(a) In Dialogis de motu locali, Dial. 3. p. III. 157. 158.

postea supra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis successive elevavit, & tempus, in qua pila per canalem descendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit spatia decursa semper esse ut temporum quadrata. Notandum vero spatia computanda esse non in longitudine, sed in altitudine plani, vi eorum, quæ inferius demonstrabuntur.

SCHOLIUM III.

90. Eadem experimenta, modo tamen diverso, sæpius cum GRIMALDO suo repetiit Joh. Baptista RICCIOLUS (b), plurimos Globos cretaceos ejusdem molis, pondere 8 unciarum, ex diversarum turrium aut ædium fenestris dimittens & tempus descensus perpendiculari vibrationibus dimetiens. Perpendiculari vibrationes numeravit cum GRIMALDO à transitu Caudæ Leonis per Meridianum usque ad alterum transitum, ut certo constaret, quot vibrationes penduli respondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps usus in observationibus Astronomicis, antequam Horologia oscillatoria ab HUGENIO fuissent inventa. Experimenta sequens representat Tabella.

Vibrationes Penduli.	Tempus		Spatium in fine temporis.	Spatium singulis temporibus confectum.
	II	III		
			Ped. Rom.	Ped. Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

B 3

SCHO-

(b) Almagest. Nov. Tom. I. lib. 2. c. 21. PROP. 4. fol. 89. 90.

SCHOLIUM IV.

91. Cum adeo experimenta RICCIOLI in observando maxime exercitati in tanto intervallo instituta Theoriae apprime consentiant; vix attendenda esse videntur, quæ in contrarium affert (c) DECHALES, qui se expertum scribit, uno minuto semisecundo grave descensu suo confecisse pedes $4\frac{1}{2}$, duobus $16\frac{1}{2}$, tribus 36, quatuor 60, quinque 90, sex 123. Sufficit, quod ipse a resistentiæ aëris irregularitatem deducat, quam in Demonstratione insuper habuimus.

THEOREMA XVIII.

92. Si grave in medio non resistente per intervallum non nimis magnum descendit; spatium ab eo decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur quam in fine temporis grave acquirit.

DEMONSTRATIO.

Tab. I.
Fig. I. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum descensus representet, in partes quotcunque æquales divisa, & ad abscissas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ sint ut celeritates cadendo in istis temporibus acquisita. Quoniam itaque $AP:AQ=PM:QI$; $AP:AS=PM:SH$ &c. (§. 85); & rectæ PM, QI, SH, BC inter se parallelæ (§. 256 Geom.); erit ABC triangulum (§. 268 Geom.). Et spatium tempore AB percursum est ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonstratione Theorematis xv (§. 80) constat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter descriptum cum sit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique

(c) Statica lib. 2. prop. 11. Mund. Mart. Tom. II. f. 275.

istud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 Geom.) Tab. I.
L. e. d. Fig. 1.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipsius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquisita conficitur, æquale est spatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro descendit.

PROBLEMA I.

94. Dato tempore, quo grave ex altitudine data descendit; spatia definire, quæ singulis istius temporis partibus conficit.

RESOLUTIO.

Sit altitudo data = a , tempus = t ; spatium parte temporis 1 confectum x ; erit (§. 86),

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Est adeo spatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decursum parte secunda = $3a : t^2$, tertia descriptum = $5a : t^2$ &c. (§. 86).

E. gr. supra in Experimentis RICCIOLI (§. 90) intra 4 secunda globus cretaceus descendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo secundo confectum = $240 : 16 = 15$, spatium confectum secundo = $15 \cdot 3 = 45$, confectum tertio = $15 \cdot 5 = 75$, confectum denique quarto $15 \cdot 7 = 105$. Est autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA II.

95. Dato tempore, quo grave in medio non resistente per spatium datum descendit; determinare tempus, quo aliud spatium datum in eodem medio conficit.

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum spatia sint ut quadrata temporum (§. 86), quærat^r ad spatium per quod grave dato tempore descendit, spatium quod in quæstione est, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis, (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum temporis quæsitⁱ.

2. Quare si inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) prodibit ipsum tempus quæsitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis RICCIOLI (§. 90) intervallo 4 minutorum descendit per spatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus sit spatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{(135 \cdot 16 : 240)} = \sqrt{(135 : 15)} = \sqrt{9} = 3$.

PROBLEMA III.

96. Dato spatio, quod grave in medio non resistente dato aliquo temporis intervallo confecit; determinare spatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum spatia sint ut quadrata temporum (§. 86); quærat^r ad quadratum temporis, quo grave per datum spatium descendit, ad quadratum temporis quo aliud quæsitum emetiri debet, atque ad spatium datum numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui erit spatium quæsitum.

E. gr. Per experimenta RICCIOLI, Globus cretaceus intervallo duorum secundorum confecit spatium 60 pedum: quæritur quantum spatium confecturus sit intervallo 4 secundorum? Reperietur spatium quæsitum 16, 60; $4 = 4$, $60 = 240$.

THEOREMA XIX.

97. Si corpus fertur motu uniformiter retardato; spatium dimidium ejus percurrit quod motu uniformi eodem tempore conficeret.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum repræ-Tab. I. sentans recta AB in partes quotcunque Fig. 1 æquales divisa & ad eam applicentur rectæ BC, SH, QI, PM, quæ sint ut velocitates temporis partibus o, BS, BQ, BP, BA respondententes, ita ut, dimissis perpendicularibus HE, IF, MG, rectæ CE, CF, CG, CB sint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc est, BS, BQ, BP, BA amissæ. Quoniam CE:CF=EH:FI & CG:CB=GM:BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodsi Bb sit tempusculum infinite parvum, motus erit uniformis, adeoque spatiolum a mobili descriptum ut areola BbcC, consequenter spatium tempore AB confectum ut triangulum ABC, quemadmodum ex Demonstratione Theor. xv (§. 80) constat. Enimvero spatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter descriptum est ut rectangulum ABCD (§. 34). Ergo illud hujus dimidium (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.*

THEOREMA XX.

98. Spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus aequalibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt.

DEMONSTRATIO.

Percurrat mobile tempusculo primo spatium 7 pedum; dico, quod secundo

Tab. I. do confecturum fit spatium 5 pedum, Fig. 1. tertio spatium 3, quarto spatium unius, si motus uniformiter retardetur. Sint enim partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, semiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet: erunt trapezia BSHC, SQIH, QPMI, & Δ PAM ut spatia temporibus istis descripta: quod patet ex Demonstratione Theorematis præcedentis (§. 97). Sit igitur $BC = 4$ & $BS = SQ = QP = PA = 1$; erit $SH = 3$, $QI = 2$, $PM = 1$ (§. 70), $BSHC = (4+3) 1:2 = \frac{7}{2}$, $SQIH = (3+2) 1:2 = \frac{5}{2}$, $QPMI = (2+1) 1:2 = \frac{3}{2}$ (§. 400 *Geom.*), $PAM = \frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*), consequenter spatia æqualibus temporibus descripta sunt ut $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, hoc est, ut 7, 5, 3, 1 (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

Tab. I. 99. Si ad altitudinem AE applicentur celeritates PM, ES, descensu uniformiter accelerato per spatia AP, AE acquisita; locus celeritatum AMS erit Parabola.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AP & AE sunt spatia & PM atque ES celeritates descensu per ea acquisitæ; erit $AP:AE = PM^2:ES^2$ (§. 81), hoc est, quadrata semiordinatarum sunt ut abscissæ. Est igitur AMS Parabola. (§. 402 *Anal. fin.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

100. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68); si ad spatia AP, AE applicentur tempora

PM, ES, quibus describuntur, curva temporis AMS erit itidem Parabola. Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA IV.

101. Data celeritate mobilis in motu quomodocunque accelerato per tempus; invenire spatium.

RESOLUTIO.

Designet in axe curvæ AP tempus & semiordinata PM celeritatem eodem acquisitam, sitque AMS locus celeritatum. Ducatur pm ipsi PM infinite propinqua. Fiat $AP = t$, $PM = c$, erit $Pp = dt$ & elementum $PMmp = cdt$ (§. 98 *Analys. infin.*). Enimvero quoniam tempusculo dt motus est æqualis; erit spatiolum a mobili descriptum $= cdt$ (§. 34), consequenter $\int cdt$ five area AMP designabit spatium tempore AP descriptum. Quare si detur celeritas c per tempus t , non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento cdt substituto formula summetur.

E. gr. Sit $c = t$: erit $cdt = t^2 dt$, adeoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Sunt igitur spatia APM & AES temporibus AP & AE decursa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$, ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, consequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 178 *Arithm.*), adeoque, ob $t = c$, ut ct ad CT . Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquisita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata temporis; spatia sunt in ratione composita celeritatum atque temporum.

PRO-

PROBLEMA V.

Tab. I. 102. *Data celeritate mobilis motu continuo, sed quomodocunque accelerato lati per spatium; invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas = c , tempus = t , spatium r ; elementum spatii dr tempusculo dt percursum est cdt (§. 101). Habemus itaque

$$\begin{aligned} cdt &= dr \\ \frac{cdt}{c} &= \frac{dr}{c} \\ t &= \int \frac{dr}{c} \end{aligned}$$

Quare si celeritas detur per r , non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento $dr : c$ substituto formula summetur.

E. gr. Sit in Hypothesi Baliani c ut r , erit $dr : r = dt$, adeoque $t = \int \frac{dr}{r} = lr$ (§. 243 *Analys. infin.*). Unde patet

Theorema. Si in motu accelerato celeritates sunt ut spatia, tempora sunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\int \frac{dr}{r}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiae Hyperbolae 1 divisum (§. 244 in *Analys. in fin.*); ideo

Theorema. In hypothesi Baliani, in qua celeritates sunt ut spatia, tempus exhibetur per spatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio à quadratura Hyperbolae pendet.

Similiter si celeritas fuerit in ratione multiplicata vel submultiplicata quacunq; spatii, hoc est, c ut r^n ; erit $dt = dr : r^n$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

$$\begin{aligned} &= r^{-n} dr, \text{ consequenter } t = \frac{1}{-n+1} r^{-n+1} \\ &= \frac{1}{1-n} \times \frac{r}{r^n}, \text{ adeoque } T:t = \frac{1}{1-n} \frac{R}{R^n} \\ &= \frac{1}{1-n} \frac{r}{r^n} = \frac{R}{R^n} \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} \frac{r}{c} = Rc : rC. \end{aligned}$$

Theorema. Si celeritates acquisitae fuerint in ratione quacunq; multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLIUM.

103. VARIGNONIUS, *Geometra eximius*, (a) doctrinam de motu accelerato & retardato *Analysi generali* absolvens varia dedit exempla, quae ad exercendam *Analysin* faciunt, etsi in *Mechanica*, ubi in *Hypothesibus* naturae exemplo GALILAEI acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut Tyrones ad solutiones *Problematum Physico-Mathematicorum* praeparemus, utque intelligant principia in his *Elementis* stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta *Analysi* cum primis principiis *Matheseos* connexum exhibere lubet.

PROBLEMA VI.

104. *Si tempora sint ut abscissa AP & Tab. celeritates istis acquisitae ut semiordinata XIII. PN curva ANS ejus natura, ut semi- Fig. ordinata PN sit ad semiordinatam Hyperbole aequilaterae PM in ratione quacunq; multiplicata vel submultiplicata dimidii axis AC ad abscissam CP à centro C computatam: invenire spatia dato tempore descripta.* 122. 2.

C

RESO-

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1707. p. 290. & seq.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII
 Ex Superioribus (§. 101) Squa spacia
 quatuor esse ut aream APN, adeoque
 pendere à quadratura curva data AN.
 Quoniam itaque AMR est Hyperbola
 regularis, cujus axis transuersus AR
 centrum C; si sit AC = a, AP = r,
 erit CP = 2a + r, adeoque ob AP, PB
 = PM² (§. 507 *Analyt.*), PM²
 = 2ar + r²; consequenter PM =
 √(2ar + r²). Quare cum pone in
 per *hyperb.*

CP · AC = PM · PN

(2a + r) · a = √(2ar + r²) · PN,
 erit PN = a · √(2a + r) / (a + r).
 Est itaque celeritas tempore AP ac-
 quiritur, quam PN representat per
hyperb. Quare si in Elemento spacia
 PN² = a² · (2a + r) / (a + r) substituam va-
 lor ipsius ex predicto Elemento spe-
 ciale a² · (2a + r) · (a + r). Totum
 adeo negotium huc redit, ut hoc Ele-
 mentum summabile reddatur, quan-
 tum dicitur. Hinc itaque

$$\begin{aligned} & a + r = x \\ & \text{erit } \frac{dx}{dr} = \frac{a}{a+r} \\ & \frac{dx}{x} = \frac{a}{x} \frac{dr}{a+r} \\ & \int \frac{dx}{x} = \int \frac{a}{x(a+r)} dr \\ & \ln x = \int \frac{a}{x(a+r)} dr \\ & \ln \sqrt{2ar + r^2} = \int \frac{a}{\sqrt{2ar + r^2}(a+r)} dr \\ & \ln \sqrt{2ar + r^2} = \int \frac{a}{(a+r)\sqrt{2ar + r^2}} dr \end{aligned}$$

Fiat pone

$$\begin{aligned} x &= \frac{r^2}{a-r}, & x &= \frac{r^2}{(a-r)^2} \\ \text{erit } dx &= \frac{r^2 dr}{(a-r)^2}, & x &= \frac{r^2}{(a-r)^2} \\ dx &= \frac{r^2 dr}{2r(a-r)^2} = \frac{r dr}{2(a-r)^2} \\ &= \frac{r^2 dr}{2(a-r)^2} \end{aligned}$$

$$\text{erit } dx = \frac{r^2 dr}{2(a-r)^2}$$

Item $x^2 = \frac{r^4}{(a-r)^4}$

atque $dx = \frac{r^2 dr}{2(a-r)^2}$

Quare tandem habentur
 $dx = \frac{r^2 dr}{2(a-r)^2}$

Elementum hoc PN² ita APN in-
 tegrabile est, si a fuerit numerus pe-
 titus per binario magis.

E.g. Sit a = 4, erit $\frac{dx}{dr} = \frac{4}{4+r}$,
 atque $\int \frac{dx}{dr} = \int \frac{4}{4+r} dr = 4 \ln(4+r)$
 (§. 55 *Analyt.*), consequenter
 $PN^2 = \frac{a^2 \cdot (2a+r)}{a+r} = \frac{16(8+r)}{4+r}$

atque ANP = $\int \frac{16(8+r)}{(4+r)\sqrt{2ar+r^2}} dr$

Item quia
 $\frac{dx}{dr} = \frac{r^2}{(a-r)^2}$
 $\frac{dx}{x} = \frac{r}{a-r} \frac{dr}{a-r}$
 $\frac{dx}{x} = \frac{r}{(a-r)^2} dr$
 $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{r}{(a-r)^2} dr$
 $\ln x = \int \frac{r}{(a-r)^2} dr$
 $\ln \frac{r^2}{a-r} = \int \frac{r}{(a-r)^2} dr$

Porro

$$\begin{aligned} x &= t + a \\ x^2 &= t^2 + 2at + a^2 \\ x^2 - a^2 &= t^2 + 2at \\ \frac{1}{2}x\sqrt{ax} &= \frac{a^2(t^2 + 2at)\sqrt{(t^2 + 2at)}}{3(a+t)^3} \\ &= \text{ANP} \end{aligned}$$

SCHOLIUM.

105. Apparet adeo, Exemplum hoc non alium habere usum, quam ad exercendum Calculum summatorium. Et idem quoque de sequentibus patebit.

PROBLEMA VII.

106. Si celeritas tempore t acquisita fuerit ut $t^{n-1} : (t^n + a^{2n})$; determinare spatium r .

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101), erit $dr = t^{n-1} dt : (t^{2n} + a^{2n})$. Utelementum integrabile reddatur, fiat

$$\begin{aligned} t^{2n} &= a^{2n-2}x^2 \\ \text{erit } t &= a^{(n-1):n}x^{1:n} \end{aligned}$$

$$dt = \frac{1}{n} a^{(n-1):n} x^{1:n-1} dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n : t$

$$\begin{aligned} t^{n-1} &= a^{(n-1):n} x : a^{(n-1):n} x^{1:n} \\ &= a^{(n-1):n} x^{(n-1):n} \end{aligned}$$

$$t^{n-1} dt = \frac{1}{n} a^{(n-1):n} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{t^{n-1} dt}{t^{2n} + a^{2n}} &= \frac{\frac{1}{n} a^{(n-1):n} dx}{a^{2n-2}x^2 + a^{2n}} \\ &= \frac{1}{n} a^{1-n} \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

Quare spatium $r = \frac{1}{n} a^{1-n} \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Si tangens arcus circuli fuerit x , ra-

dius a , erit $\int \frac{a^2 dx}{x^2 + a^2}$ arcus (§. 158 *Analyf. in fin.*), ut adeo quadratura curvæ, quæ spatium r exhibet, pendeat à rectificatione arcus circuli.

VARIGNONIUS formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad sinum versum: id quod fit hoc modo. Sit

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{(2a:y-1)} \\ &= a(2ay^{-1}-1)^{1:2} \end{aligned}$$

erit $dx = -a^2 y^{-2} dy : \sqrt{(2ay^{-1}-1)}$. Elementum hoc in præsentem casu sumendum est positivum, quia crescente x decrefcit y , consequenter ipsius y differentiale $-dy$.

$$\begin{aligned} \text{Porro } x^2 &= 2a^2:y-a^2 \\ \frac{x^2+a^2}{x^2+a^2} &= 2a^2:y \end{aligned}$$

Quamobrem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{a^2 y dy}{2a^2 y^2 \sqrt{(2ay^{-1}-1)}} \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \\ \frac{1 \cdot a^{1-n} dx}{n \cdot (x^2+a^2)} &= \frac{1}{2na^{n+1}} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \end{aligned}$$

PROBLEMA VIII.

107. Data celeritate c tempore t acquisita, qua sit ut $t^{n-1} : (t^{2n} - a^{2n})$; invenire spatium r .

RESOLUTIO.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

$$\text{erit } dr = t^{n-1} dt : (t^{2n} - a^{2n})$$

Ponatur ut ante (§. 106)

$$\begin{aligned} t^{2n} &= a^{2n-2}x^2 \\ \frac{t^{n-1} dt}{t^{2n} - a^{2n}} &= \frac{1}{na^{n-1}} \cdot \frac{dx}{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

reperietur

prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = a \sqrt{(2ay^{-1} + 1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{dy}{2a\sqrt{(2ay + y^2)}}$ ut
ante, adcoque tandem

$$dv = \frac{1}{2na^{2+1}} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$$

Ponatur denique

$$v - a = y$$

$$\text{erit } v^2 - 2av + a^2 = y^2$$

$$2av - 2a^2 = 2ay$$

$$v^2 - a^2 = y^2 + 2ay$$

$$\sqrt{(v^2 - a^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ay)}$$

$$dv = dy$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(v^2 - a^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 + 2ay)}}$$

Tab. XIII. Quoniam $a^2 dv : 2\sqrt{(v^2 - a^2)}$, est
Fig. sector hyperbolicus CAM, abscissis à
123. a. fin. centro computatis (§. 189 *Analys. in-*
fin.), erit dimidius axis Hyperbolæ
æquilateræ = a , & CP = v ; conse-
quenter $a^2 dy : \sqrt{(y^2 + 2ay)}$ exprimit
eundem sectorem CAM, abscissa AP
existente y . Patet itaque determina-
tionem spatii in casu præsentè pende-
re à quadratura Hyperbolæ.

SCHOLIUM I.

108. Apparet ex his Problematibus, quam
utile sit formulas omnes elementorum Ar-
cuum, segmentorum & sectorum pro sectio-
nibus conicis aliisque curvis descriptu facilio-
ribus atque cognitarum proprietatum repe-
rire, sibi que familiares reddere, ut formula
non summabiles ad eas tanquam simpliciores
reduci possint, quemadmodum & paulo ante
vidimus (§. 106) posse constructiones curva-
rum ad alias descriptu faciliores reduci, per
quas construantur: cujus rei exempla quoque
dedimus in Algebra (§. 245 & seqq. *Analys.*
infin.).

SCHOLIUM II.

109. Potest etiam sectoris CAM Elemen- Tab.
tum independentè à formula $a^2 dv : \sqrt{(v^2 - a^2)}$ XIII.
inveniri hoc modo. Sit AC = CB = a , AP Fig.
= y , erit PB = $2a + y$, consequenter ob 123. a.
PM² = AP. PB (§. 507. *Analys. finit.*) = $2ay$
+ y^2 ; PM = $\sqrt{(2ay + y^2)}$, qua in $\frac{1}{2}$ CP
= $\frac{1}{2}(a + y)$ ducta prodit area trianguli CMP
= $\frac{1}{2}(a + y)\sqrt{(2ay + y^2)}$.

$$\text{Ergo } CmM + mMPP = \frac{1}{2}dy \sqrt{(2ay + y^2)} + \frac{ady + ydy \cdot a + y}{\sqrt{(2ay + y^2)^2}} = \frac{2aydy + y^2dy + \frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}$$

$$\text{Jam } mMPP = dy \sqrt{(2ay + y^2)} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}}. \text{ Ergo } CmM \text{ elementum sec-}$$

$$\text{toris CMA} = \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay + y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay + y^2)}}$$

DEFINITIO XVIII.

110. In motu continuo accelerato:
celeritatis incrementum tempusculo:
quocunque infinite parvo successive
nascitur. Quamobrem quantitas mo-
tus eodem genita resolvitur in innume-
ras alias æqualibus illius tempusculi
particulis natas. Particulæ istiusmodi
elementares quantitatis motus, tempus-
culo infinite parvo genitæ, dicuntur
Sollicitatio ad motum.

COROLLARIUM.

III. Quodsi ergo istæ particulæ ponan-
tur æquales, quatenus spectantur ut effec-
tus ab eadem causa tempusculis æquali-
bus producti; si sollicitatio ad motum di-
catur, erit nisus elementaris seu quanti-
tas motus tempusculo de genita = gdt .

PROBLEMA IX.

112. Data accelerationis lege; de-
terminare sollicitationem ad motum.

RESOLV.

RESOLUTIO.

Si sollicitatio sit g , erit quantitas motus tempusculo dt genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempusculo isto $= dc$, massa mobilis $= m$. Quoniam tempusculo infinite parvo dt motus æquabilis supponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, adeoque $g = mdc : dt$.

Quare si ex data accelerationis lege determinetur dt per dc , vel contra; prodibit valor ipsius g .

E. gr. In Hypothesi Galilæana gravium, seu in motu æquabiliter accelerato, celeritas c est ut tempus t , adeoque dt ut dc . Quare g ut $mdc : dc$, hoc est, ut m . Quare patet

Theorema. In Hypothesi Galilæana gravium seu in motu æquabiliter accelerato sollicitatio ad motum est ut massa, adeoque constans.

Si fuerit c ut t^n

$$\text{erit } \frac{dc = nr^{n-1} dt}{g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnr^{n-1} dt}{dt}}$$

$$= nmr^{n-1}$$

$$= nmt^n : t$$

$$= nmc : t$$

Theorema. Si celeritas crescit in ratione temporis multiplicata, erit sollicitatio ad motum ut factum ex massa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe & ut tempus reciproce: hoc est, si duo fuerint mobilia, sollicitationes ad motum erunt in ratione composita ex directa massarum & celeritatum in exponentes dignitatis temporum ductarum, & reciproca temporum, nempe

$$\text{ut } \frac{NMC}{T} \text{ ad } \frac{nmc}{t}, \text{ seu ut } NMCt \text{ ad } nmcT.$$

PROBLEMA X.

113. Data sollicitatione ad motum; invenire mobilis motu continuo accelerato latitum velocitatem in locis singulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.

RESOLUTIO.

Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, PN &c. sint ut sollicitationes ad motum in A, P &c. PM sit ut celeritas à mobili in P acquisita. Ducatur pn ipsi PN infinite propinqua & dicatur $PN = g$, $AP = r$, $PM = c$, massa mobilis $= m$; erit $Pp = dr$. Sit porro tempusculum, quo mobile per Pp descendit, $= dt$: quia motus in spatiolo Pp æquabilis supponitur, erit

Tab. XIII. Fig. 122. b.

$$c = dr : dt \text{ (§. 38) \& } g = mdc : dt \text{ (§. 112).}$$

$$\frac{cdt = dr}{dt = dr : c} \quad \frac{gdt = mdc}{dt = mdc : g}$$

$$\frac{dr}{c} = \frac{mdc}{g}$$

$$\frac{gdr = mdc}{\int gdr = \frac{1}{2} mc^2}$$

Est vero $\int gdr$ area APNC & $\frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} PM^2$. Quare si mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 Arithm.).

Habemus itaque:

Theorema. Si mobile quacunq; sollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine spatii dati AP acquisita est ut recta, quæ potest aream sollicitationum APNC, seu est in ratione subduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

Tab.
XIII.
Fig.
122. 2.

$$c = dr : dt \quad \int gdr = \frac{1}{2} mc^2$$

$$\frac{2 \int gdr}{m} = c^2$$

$$\frac{\sqrt{2 \int gdr}}{\sqrt{m}} = c$$

$$\frac{dr : dt = \sqrt{2 \int gdr} : \sqrt{m}}{dr} = \frac{dt}{\sqrt{2 \int gdr} : \sqrt{m}}$$

$$\int \frac{1 dr}{\sqrt{2 \int gdr} : \sqrt{m}} = t$$

Quodsi ergo fiat $PL = \frac{I}{\sqrt{2 \int gdr} : \sqrt{m}}$,
seu, mobili existente eodem, $=$
 $I : \sqrt{2 \int gdr}$, area DAPLE designabit
tempus.

Ponamus jam $AQ = R$, $QS = G$,
erit $C = \sqrt{2 \int GdR}$, mobili existente
eodem, ut massa poni possit I , aut ejus
nulla habenda sit ratio. Erit adeo

$$C : c = \sqrt{2 \int GdR} : \sqrt{2 \int gdr}.$$

$$\text{Sed } PL : QO = \frac{I}{\sqrt{2 \int GdR}} : \frac{I}{\sqrt{2 \int gdr}}$$

$$= \sqrt{2 \int gdr} : \sqrt{2 \int GdR}$$

$$\text{Ergo } PL : QO = c : C$$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunq; sollicitatione movetur motu continuo accelerato, erunt tempora QO & PL ; quibus spatia data AQ & AP conficit, celeritatibus in fine illorum spatiorum acquisitis reciproce proportionalia, nempe ut PM ad QT .

SCHOLIUM I.

114. Consentit Analysis cum iis, que **NEWTONUS** (a) demonstravit, nisi quod is Vim centripetam vocet, quod nos Sollicitationem appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem sumunt tanquam effect-

(a) In Princip. Phil. Natural. Mathematic. Lib. I. Prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

tum vis motricis eidem proportionalem, atque adeo quantitatem motus tanquam mensuram vis illius. Quare cum **NEWTONUS** vim illam consideret ut urgentem mobile versus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in casu descensus gravium gravitatem vocant, quia gravitas consideratur ut causa acceleratrix motus gravium & celeritas momentis singulis descendenti superaccedens tanquam effectus illius causæ.

SCHOLIUM II.

115. Ex Theorematis per Problema præsens erutis omnia deducere licet, qua de motu gravium in Hypothesi Galilæana sive in alia quacunq; demonstrantur. Etenim in Hypothesi Galilæana est c ut t , adeoque dc ut dt . Jam $gdr = cdc$ (§. 113). Ergo $gdr = cdt$, consequenter $gdr : dt = c$, adeoque, ob $dr : dt = c$, erit $gc = c$. Cum adeo sit $g = 1$, gravitas in Hypothesi Galilæana constans, hoc est, elementa singula, ex quibus quantitas motus tempusculo infinite parvo constat, sunt inter se æqualia. Jam quia $g = 1$, erit, in eadem Hypothesi, $\int gdr = \int dr = \frac{1}{2}c^2$, hoc est, r ut c^2 , (§. 181 Arithm.) quemadmodum supra (§. 86). Similiter cum in Hypothesi **BALIANI** sit c ut r ; erit $gdr = rdr$ (§. 113), adeoque $g = r$. Jam initio descensus $r = 0$; ergo $g = 0$, hoc est sollicitatio ad motum initio nulla est, seu phrasi communi Mathematicorum gravitas nulla est: quod cum sit absurdum, Hypothesis Baliana impossibilis.

COROLLARIUM I.

116. Quoniam $\sqrt{2 \int gdr} = APNC$ continuo crescit, semiordinata $PL = I : \sqrt{2 \int gdr}$ continuo decrescit. Jam cum sit in A , $dr = 0$; erit $AD = I : 0 = \infty$. Est igitur AD asymptotus curvæ temporis ELF .

SCHOLIUM III.

117. Hinc patet ratio, cur curva temporis ELF ita fuerit delineata, ut cum axe AB non concurrat, sicuti curva celeritatum AMT , neque rectam AD ad axem AB normalem sectet, sicuti curva sollicitationum CNG .

COROL-

Tab.
XIII.
Fig.
122. 2.

COROLLARIUM II.

118. Cum sit $gdr = cdc$ (§. 113), adeoque $g = cdc : dr = PM. mR : Pp$; Sollicitatio ad motum, in quacunque accelerationis Hypothesi, erit ut subnormalis curvæ celeritatum (§. 35 *Analys. infin.*)

PROBLEMA XI.

Tab. XIII. Fig. 123. b. 119. Si sollicitatio centralis sit distantie à centro AD, PD &c. proportionalis; invenire velocitatem in quovis puncto P & tempus descensus per AP.

RESOLUTIO.

Quoniam $AD : PD = AC : PN$ per hypoth. scala sollicitationum centralium DC est linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit $AD = a$, AP spatium descensus $= r$, PN sollicitatio in P $= g$, erit $PD = a - r$. Est vero PN ut PD, per hypoth., adeoque g ut $a - r$. Quare cum sit (§. 113),

$$\begin{aligned} \text{erit } \frac{\int gdr = \frac{1}{2}c^2}{\int adr - \int rdr = \frac{1}{2}c^2} \\ \frac{ar - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}c^2}{2ar - r^2 = c^2} \\ \sqrt{(2ar - r^2)} = c \end{aligned}$$

Jam cum $AD = a$, $AP = r$: si ex centro D radio AD describatur Quadrans AIH, erit semiordinata PI $= \sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Analys. finit.*) Habemus itaque sequens

Theorema. Si sollicitatio centralis sit proportionalis distantie locorum à centro, velocitates in fine spatii acquisite sunt sinibus arcuum respondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem descripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ per demonstrata

$$\begin{aligned} \text{Ergo } \frac{dr = dt \sqrt{(2ar - r^2)}}{dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}} \end{aligned}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Tab. XIII. Fig.

Quoniam $a \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ est arcus AI^{123. b.}

(§. 157 *Analys. infin.*); erit tempus descensus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque sequens

Theorema. In Hypothesi Problematis, tempora descensus per spatia AP sunt ut arcus AI circuli ex centro D descripti.

Quodsi species curvæ celeritatum AMG desideretur, fiat $AC = b$.

Cum sit $AD : AC = DP : PN$, per hyp.

$$a : b = a - r : PN$$

erit $PN = g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\frac{1}{2}c^2 = \int gdr$ (§. 113)

$$\begin{aligned} \text{Ergo } \frac{\frac{1}{2}c^2 = \int bdr - \int brdr : a}{= br - br^2 : 2a} \end{aligned}$$

Patet itaque (§. 421 *Anal. finit.*) sequens

Theorema. In Hypothesi Problematis, locum celeritatum AMG esse Ellipsin, cujus parameter 2AC est dupla sollicitatio initialis, axis 2AD dupla distantia mobilis initio descensus a centro.

Si $a = r$, erit $GD^2 = 2ab - 2a^2b : 2a = 2ab - ab = ab$, adeoque $GD = \sqrt{ab}$.

Cum itaque GD sit Axis dimidius conjugatus (§. 423 *Anal. finit.*); erit in D centrum Ellipseos, & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponent tempora, quibus corpus quodvis per spatia AP & AD descendit, si sollicitationes fuerint distantis à centro proportionales, per idem spatium corpus quodvis eodem tempore descendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLIUM.

121. Omnia hæc consona sunt ijs, quæ NEWTONUS (a) demonstravit.

CAPUT

(a) In Princip. Natural. Mathem. lib. 1. prop. 38. p. 119.

CAPUT III.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO XIX.

122. **C**entrum gravitatis est, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una æquiponderare alteri, si neutra alteram movet.

COROLLARIUM I.

123. Quod si ergo descensus Centri gravitatis impeditur, grave quiescit.

COROLLARIUM II.

124. Quare si corpus ex Centro gravitatis suspenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM III.

125. Totam corporis gravitatem in Centrum gravitatis coactam supponere licet, adeoque pro corpore gravi solum Centrum gravitatis surrogari potest in demonstrationibus.

DEFINITIO XX.

126. *Diameter gravitatis* est recta transiens per Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Intersectio itaque duarum Diameterum determinat Centrum gravitatis.

DEFINITIO XXI.

128. *Planum gravitatis* est figura plana, in qua situm est Centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo intersectio duorum Planorum gravitatis aut plurium est *Diameter gravitatis*.

DEFINITIO XXII.

130. *Gravia homogenea* sunt, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO XXIII.

131. *Gravia heterogenea* sunt, quorum gravitates non sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ inter se non erunt pondere æquales. Aut si duorum gravium partes sumas volumine æquales, & eædem sint pondere inæquales; gravia inter se heterogenea sunt, licet in se homogenea esse possint.

DEFINITIO XXIV.

132. *Centrum magnitudinis* est punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA XXII.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete, in media non resistente, eodem tempore per idem spatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Descendat grave A per spatium r : erit tempus descensus ut \sqrt{r} (§. 87). Descendat etiam grave B per idem vel æquale spatium r : erit etiam tempus descensus ut \sqrt{r} (§. 87). Si ergo spatium descensus ex quiete idem est, tempus etiam descensus idem est. *Q. e. d.*

SCHO.

SCHOLIION.

134. *Idem observatione confirmatur. Nam in spatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aërometria docemus) levissima plumula eodem tempore ex data altitudine descendit, quo globus plumbeus. Imo si corpora magna & ponderosa in aëre per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavementum attingunt, modo altitudines sint mediocres, monente HUGENIO (a). Pendulorum in primis experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus RICCIOLUS globos argillaceos 20 unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole istis æquales, sed pondere subduplos per intervallum 280 pedum demittens contrarium probare conatur (b), ideo non consentiunt, quia resistentia aëris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitæ sunt ut tempus (§. 85); velocitates gravium descendendum ex quiete dato tempore æquales sunt.

THEOREMA XXIII.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendendum dato tempore æquales sunt (§. 135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiæ, quæ cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nisus versus centrum Terræ (§. 4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, adeoque illud quod quantitati motus accedit,

(a) In *Horologio oscillatorio*. Part. 4. Prop. 5.
(b) *Almag. Nov.* Tom. I. Lib. 2. c. 21. Prop. 1. f. 89.

consequenter sollicitatio ad motum (§. 110). Sed sollicitatio est etiam massæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. Q. e. d.

SCHOLIION.

137. *Liquet jam veritas Definitionis quintæ (§. 6).*

COROLLARIUM I.

138. Massa igitur corporum recte æstimatur per pondus.

COROLLARIUM II.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 41) & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus æquales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 42).

COROLLARIUM III.

140. Massa invariata, pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA V.

141. *In homogeneis, quæ secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possunt, Centrum gravitatis idem est cum Centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

142. Quodsi ergo linea recta AB bi-Tab. I. fariam secetur in C; erit C Centrum gravitatis.

SCHOLIION.

143. *Tale corpus homogeneum, quod se-Tab. I. cundum longitudinem in partes similes secari Fig. 3. potest, est e. gr. Cylindrus plumbeus. Si enim longitudo AE concipiatur in tres partes æquales ED, DC & CA vel quocumque*

plures divisa; secabitur in Cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint (§. 535 Geom.); atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium (§. 570 Geom.).

THEOREMA XXIV.

Tab. I. Fig. 4. 144. Si Centra gravitatis duorum corporum A & B jungantur recta AB; Centri gravitatis communis C distantia BC & AC a Centris gravitatis particularibus B & A sunt reciproce ut pondera A & B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & $AC : CB = 1 : 3$. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec $BD = AC$ & $AE = CB$; erit $EC = CD$ (§. 88 Arithm.). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales divisa, quot nempe librarum sunt pondera junctim sumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomocunque varietur figura (§. 140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffusa concipiatur, Centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipsius B per FD, & gravitas ipsius A per EF uniformiter (§. 142); consequenter pondera A & B junctim sumta rectam ED repræsentabunt. Hujus vero Centrum gravitatis commune est in C (§. cit.). Ergo idem est Centrum gravitatis commune ponderum A & B. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

145. Quodsi gravitates corporum A & B fuerint æquales, Centrum gravitatis com-

mune C erit in medio rectæ AB Centra Tab. I. gravitatis conjungentis. Fig. 4.

COROLLARIUM II.

146. Quia $A : B = BC : AC$; erit $A \cdot AC = B \cdot BC$. Unde patet vires æquiponderantium æstimandas esse per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis. Factum hoc Momentum ponderum vulgo vocant.

SCHOLIUM.

147. Theorema hoc utilissimum Experimento non ineleganti illustrari potest. Ex ligno parentur parallelepipedum plura inter se æqualia, & quorum latitudo sit dupla profunditatis, longitudo vero sextupla latitudinis: quamvis necesse non sit, ut hæ rationes accurate observentur, sufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimensiones. Parentur præterea alia quædam; unum sit longitudinis dupla, alterum tripla, tertium quadrupla & ita porro. Quodsi parallelepipedum longitudinis dupla colloces super latere prismatis trigoni, ita ut latus prismatis ipsum dividat in partes æquales AC & CB; partes AC & CB æquiponderabunt: quo ipso Axioma (§. 141) confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum tripla longitudinis DE ea lege super prismate, ut ejus latus ipsum dividat in partes DF, FE, quæ sunt in ratione subdupla: pars FE præponderabit. Quodsi vero tria parallelepipedum simplicis longitudinis ipsi DF superimposueris; quatuor parallelepipedum duobus FK, KE in unum FE conjunctis æquiponderabunt. Est enim ipsius FE Centrum gravitatis in K, & ipsius DF in medio L, per experimentum primum. Distantia igitur Centrorum gravitatis a fulcro LF & FK sunt ut DF & FE, seu ut pondera (§. 130 Mech. & 573 Geom.). Est ergo ibi Centrum gravitatis commune, ut habet Theorema nostrum (§. 144). Eodem modo deprehenduntur 9 prismata sibi mutuo superimposita æquiponderare uni IH, cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.

Tab. I.
Fig. 5.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. I. 148. Quoniam $A : B = BC : AC$ (§. 144);
Fig. 4. erit etiam $A + B : A = BC + AC : BC$
(§. 190 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

149. Reperitur adeo Centrum gravitatis commune duorum ponderum C , si factum ex pondere uno A in distantiam Centrorum gravitatis separatorum AB ($= AC + CB$) dividatur per summam ponderum A & B (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. $A = 12$, $B = 4$, $AB = 24$; erit $BC = 24$. $12 : 16 = 18$.

COROLLARIUM V.

150. Quodsi pondus A detur & distantia Centrorum gravitatis particularium AB , una cum Centro gravitatis communi C , reperitur pondus $B = A$. $AC : BC$ (§. 302 *Arithm.*), hoc est, si momentum ponderis dati dividatur per distantiam ponderis quaesiti B a Centro gravitatis communi (§. 146). Sit ex. gr. $A = 12$, $BC = 18$, $AC = 6$; erit $B = 6$. $12 : 18 = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA XII.

Tab. I. 151. *Ponderum plurium datorum*
Fig. 6. a, b, c, d , Centrum gravitatis commune in recta AB determinare.

RESOLUTIO.

1. Quæratür Centrum gravitatis commune duorum ponderum a & b (§. 149): quod sit in F .
2. In F concipiatur applicari pondus $a + b$ duobus reliquis a & b æquale (§. 125), & quæratür porro in recta FE Centrum gravitatis commune ponderum $a + b$ & c (§. 149): quod sit in G .
3. Denique in G concipiatur applicari pondus $a + b + c$ duobus $a + b$ & c æquale (§. 125), & quæratür inter

ipsum & pondus d Centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod sit in H .

Est adeo H Centrum gravitatis commune ponderum a, b, c & d . Patet etiam, quomodo sit progrediendum, si plura pondera dentur.

Sit e. gr. $a = 20$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 5$, $AC = 9$, $CE = 6$, $EB = 12$: erit $AF = b$. $AC : (a + b) = 10$. $9 : 30 = 3$, adeoque $FC = 6$ & $FE = FC + CE = 12$. Hinc reperitur $FG = c$. $FE : (a + b + c) = 15$. $12 : 45 = 4$. Quare $GE = FE - FG = 8$, & $GB = GE + EB = 20$. Invenitur adeo $GH = d$. $GB : (a + b + c + d) = 5$. $20 : 50 = 2$. Unde $HB = GB - GH = 18$, & (ob $AB = AC + CE + EB = 27$) $AH = 9$.

PROBLEMA XIII.

152. *Duobus ponderibus D & E extra Centrum gravitatis commune in C suspensis; determinare quodnam eorum & quantum præponderet.*

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in distantiam suam a centro suspensionis, nempe D in AC & E in BC : ex qua parte factum majus prodit, versus eam est præponderatio.
2. Factum minus a majore subtrahatur: erit residuum præpondium.

E. gr. Sit $D = 30$ librarum, $E = 20$, $AC = 2$, $BC = 4$: erit $D \cdot AC = 60$, $E \cdot BC = 80$, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit $AC : CB = d : md$, & pondus $D = mp$; æquiponderabit eidem in B pondus p (§. 150). Sed pondus E majus est quam p . Dicatur ergo excessus

Tab. I. *Fig. 7.* *sus* r , ita ut sit $E = p + r$. Quoniam momentum ipsius r æquale est momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur *mrd* (§. 146); excessus momenti ponderis E supra momentum alterius D est *mrd*. Sed *mrd* est differentia inter *mpd* & *mpd + mrd*, hoc est, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo excessus momenti ipsius E supra momentum alterius D, si factum D. AC ex E. CB subtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

153. Ponderum D & E itaque extra Centrum gravitatis in C suspensorum momenta sunt in ratione composita ipsorum met ponderum D & E & distantiarum a puncto suspensionis AC & CB.

COROLLARIUM II.

154. Ponderis itaque ex ipso puncto C suspensi momentum respectu reliquorum D & E nullum est, seu eadem ratione D & E inter se ponderant, ac si pondus in C plane abesset, quia scilicet distantia ejus nulla est.

PROBLEMA XIV.

Tab. I. *Fig. 8.* 155. *Determinare præponderationem; ponderibus pluribus a, b, c, d extra Centrum gravitatis in C suspensis.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera c & d in suas distantias a puncto suspensionis CE & CB: summa dabit momentum ponderum c & d junctim, seu ponderationem versus dextram (§. 153).
2. Ducantur quoque pondera a & b in suas distantias AC & CD: summa denuo dabit ponderationem versus sinistram (§. cit.)

3. Quodsi ergo ponderationem majorem a minore subtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæsitæ.

E. gr. Sit AC = 6, DC = 4, CE = 5, CB = 8, $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$, $d = 8$: erit ponderatio versus dextram = $c \cdot EC + d \cdot CB = 20 \cdot 5 + 8 \cdot 8 = 164$; versus sinistram = $a \cdot AC + b \cdot DC = 12 \cdot 6 + 15 \cdot 4 = 132$. Præponderant ergo c & d versus dextram momento ut 32.

PROBLEMA XV.

156. *Ponderibus quocumque extra Centrum gravitatis in C suspensis & versus dexteram præponderantibus; determinare punctum F, ex quo si summa omnium ponderum suspendatur; eadem maneat præponderatio versus dextram, quæ fuerat ante in dato ponderum a, b, c, d situ.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera c & d , vel quocumque fuerint, versus dextram præponderant (§. 155).
2. Cum momentum summarum ponderum in F suspendenda eidem æquale esse debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in summam ponderum (§. 153). Quare si per summam ponderum dividatur; quotus erit distantia CF, ex qua suspendenda est ponderum summa, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in Problemate præcedente; erit momentum quo pondera versus dextram præponderant 32. Quodsi hoc divides per summam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ est distantia CF quæsitæ.

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. I. 157. Si Elementa figurarum, quale Fig. 9. mMn , concipiantur instar ponderum ad axem AE appensorum & in vertice A punctum suspensionis; determinabitur punctum in AE, ex quo summa omnium ponderum suspenſa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc est Centrum gravitatis (§. 125), summa momentorum omnium pondusculorum per summam pondusculorum divisa (§. 156). Sit enim $AP = x$, $MP = y$, $Pp = dx$; erit unum pondusculum $2ydx$, summa omnium $2fydx$, momentum unius pondusculi $2yxdx$ (§. 153), summa omnium $2fyxdx$, consequenter distantia Centri gravitatis a vertice $AF = fyxdx : fydxdx$. Quodsi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in *Analysi Infinitorum* docuimus, Centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA XVI.

Tab. I. 158. Determinare Centrum gravitatis in Triangulo BAC. Fig. 10.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD basin BC bifariam secans in D. Quoniam $\triangle BAD = \triangle DAC$ (§. 440 *Geom.*): utrumque in totidem ponduscula ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata resolvi potest; adeoque Centrum gravitatis $\triangle BAC$ erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat $AD = a$, $BC = b$, $AP = x$, $MN = y$; erit (§. 397 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$

$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur AE perpendicularis ad BC, erit $AD : AE = AP : AQ$ (§. 396 *Geom.*), adeoque $AQ = cx : a$ & $Qq = cdx : a$. Unde momentum $yxdx = cbx^2 dx : a^2$, & $fyxdx$

$= cbx^3 : 3a^2$, quæ summa, per aream Tab. I. trianguli $AMN = cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Fig. 10. Geom.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis a vertice $= 2acb x^3 : 3acb x^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodsi pro x substituat a ; prodibit distantia Centri gravitatis totius Trianguli a vertice, $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}AD$.

PROBLEMA XVII.

159. Determinare Centrum gravitatis in Parabola. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Ad Parabolam est

$$ydx = a^{1/2} x^{3/2} dx \quad (\text{§. 103 } \textit{Anal. infinit.})$$

$$xydx = a^{1/2} x^{5/2} dx$$

$$fxydx = \frac{2}{5} a^{1/2} x^{5/2}$$

$$\text{sed } fydxdx = \frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2} \quad (\text{§. cit.})$$

$$\text{Ergo } fxydx : fydxdx = \frac{2}{5}x = AF \quad (\text{§. 157})$$

PROBLEMA XVIII.

160. Determinare Centrum gravitatis in omnibus Parabolis superiorum generum & curvis agnatis in infinitum.

RESOLUTIO.

In infinitis Parabolis & curvis agnatis est (§. 105 *Analys. infinit.*)

$$ydx = a^{n/r} x^{m+r} dx$$

$$xydx = a^{n/r} x^{(m+r)+r} dx$$

$$fxydx = \frac{r}{m+2r} a^{n/r} x^{(m+2r)+r}$$

$$fydxdx = \frac{r}{m+r} a^{n/r} x^{(m+r)+r} \quad (\text{§. cit.})$$

$$fxydx : fydxdx = \frac{m+r}{m+2r} x = AF \quad (\text{§. 157})$$

E. gr. In Paraboloido cubicali, $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analys. finit.*). Ergo $AF = \frac{4}{7}AP$. In Paraboloido surdesolidali, $m = 1$, $r = 5$. Ergo $AF = \frac{6}{11}AP$.

Tab. I. In Paraboloide biquadratico, $m = 1, r = 4$. Ergo $AF = \frac{5}{9} AP$.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2, r = 3$, $AF = \frac{5}{6} AP$.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3, r = 4$, $AF = \frac{7}{11} AP$.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4, r = 5$, $AF = \frac{9}{14} AP$.

COROLLARIUM.

161. Distantia ergo FP Centri gravitatis a basi est $= x - \frac{m+r}{m+2r} x = \frac{mx+2rx - mx - rx}{m+2r}$

$$= \frac{r}{m+2r} x.$$

E. gr. In Parabola Apolloniana, $m = 1, r = 2$. Ergo $PF = \frac{2}{3} AP$.

In Paraboloide cubicali, $m = 1, r = 3$. Ergo $PF = \frac{3}{4} AP$.

In curva ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2, r = 3$. Ergo $PF = \frac{5}{8} AP$.

PROBLEMA XIX.

162. Determinare Centrum gravitatis in Parabola exteriori AST.

RESOLUTIO.

Si $AQ = x$, $QM = y$, Parameter $= 1$; erit (§. 388 *Analys. finit.*) $x^2 = y$ & hinc

$$\frac{ydx}{xydx} = \frac{x^2 dx}{x^3 dx}$$

$$\frac{xydx}{sxydx} = \frac{x^3 dx}{\frac{1}{4} x^4}$$

$$\frac{sxydx}{fydx} = \frac{\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{3} x^3}$$

$$\frac{fydx}{sxydx} = \frac{\frac{1}{3} x^3}{\frac{1}{4} x^4} = \frac{4}{3} x = \frac{1}{4} AQ = AL.$$

PROBLEMA XX.

163. Determinare Centrum gravitatis in infinitis Parabolis exterioribus superiorum generum, & aliis curvis agnatis.

RESOLUTIO.

Si Parameter $= 1$, pro infinitis Parabolis superioribus & curvis agnatis est $x' = y^n$ (§. 519 *Analys. finit.*).

Quare

$$ydx = x^{r+n} dx$$

$$\frac{xydx}{sxydx} = \frac{x^{(r+n)} dx}{nx^{(r+2n)} dx}$$

$$\frac{sxydx}{fydx} = \frac{1}{r+2n}$$

$$\frac{fydx}{sxydx} = \frac{n}{r+n} x^{(r+n)}$$

$$\frac{sxydx}{fydx} = \frac{r+n}{r+2n} x = AL.$$

E. g. in Paraboloide cubicali, $r = 3, n = 1$.

Ergo $AL = \frac{4}{7} AQ$.

In Paraboloide biquadratico, $r = 4, n = 1$.

Ergo $AL = \frac{5}{6} AQ$.

In Paraboloide surdesolidali, $r = 5, n = 1$.

Ergo $AL = \frac{6}{9} AQ$.

In curva ad quam $x^3 = y^2$, $r = 3, n = 2$.

Ergo $AL = \frac{5}{7} AQ$.

In curva ad quam $x^4 = y^3$, $r = 4, n = 3$.

Ergo $AL = \frac{7}{10} AQ$.

PROBLEMA XXI.

164. Determinare Centrum gravitatis in curva ad quam $b^2 y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$ (§. 99 *Analys. infinit.*)

$$\frac{xydx}{sxydx} = \frac{(bx^3 dx - x^4 dx) : b^2}{x^4 : 4b - x^5 : 5b^2} = \frac{(5bx^4 - 4x^5) : 20b^2}{fydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2} = \frac{(4bx^3 - 3x^4) : 12b^2}{sxydx : fydx} = \frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)}$$

$$= \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

$$\frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)} = \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

Est adeo $20b - 15x : 15b - 12x = x : AF$.

PROBLEMA XXII.

165. Determinare Centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. I. Sit Mp ad AB normalis ipsi DP infinite propinqua; erit arcus DM infinite parvus. Sit chordæ DE arcus dati DHE diameter AB parallela, quæ instar axis consideretur, ad quem ponduscula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut $MD.PD$. (§. 153). Quoniam itaque ad radius HC , qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) bifecat, ponduscula & numero & momento æqualia utrinque disponuntur; transit is per Centrum gravitatis (§. 122). Sit jam $PC = DG = x$, $DC = a$, erit $DR = Pp = dx$. Jam cum sit angulus CDM rectus (§. 308 *Geom.*), & PDE itidem rectus (§. 230 *Geom.*), adeoque $PDC = RDM$ (§. 91 *Arithm.*), sintque etiam anguli DRM & DPC recti per construct. erit $MD : DR = DC : PD$, (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur $MD.PD = DR.DC = adx$ (§. 297 *Arithm.*). Summa ergo momentorum arcus DH est $ax = DC.DG$, quæ, divisa per arcum DH , Centri gravitatis F distantiam a Centro circuli C determinat (§. 157.). Est itaque arcus $DH : DG = DC : CK$.

Quodsi pro DH ponatur quadrans AH , & pro DG radius AC ; prodibit distantia Centri gravitatis semiperipheriæ $AC^2 : AH$, hoc est, distantia hæc CF est tertia proportionalis ad quadrantem & radius.

PROBLEMA XXIII.

166. Determinare Centrum gravitatis in sectore circuli ACB .

RESOLUTIO.

Ex antecedentibus liquet, si DC sectorem bifariam fecet, Centrum gravitatis fore in recta DC . Ducatur radio PC arcus PNM , & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam segmentum annulare est pondusculum ex centro C suspensum, & quidem simul differentiale sectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp seu Nn momentum segmenti annularis $PNMmp$, hoc est, differentiale momenti sectoris. Jam momentum arcus $ADB = 2AC.AE$, & momentum arcus $PNM = 2PC.Pn$ (§. 165), & $\triangle ACB = EC.AE$, atque $\triangle PCM = Pn.Cn$ (§. 392 *Geom.* Est igitur $\triangle ACB : \triangle PCM = EC.AE : Cn.Pn$, & momenta arcuum ADB & $PNM = AC.AE : PC.Pn$ (§. 181 *Arithm.*). Est vero $AC : PC = EC : Cn$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $\triangle ACB : \triangle PCM = AC.AE : PC.Pn$ (§. 184 *Arithm.*); consequenter momentum arcus ADB est ad momentum arcus PNM ut $\triangle ACB$ ad $\triangle PCM$ (§. 167 *Arithm.*), hoc est, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus $AD = p$, $AC = a$, $AE = b$; erit momentum arcus $ADB = 2ab$ (§. 165). Sit porro $PC = x$; reperietur, per modo demonstrata, momentum arcus $PNM = 2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero segmenti annularis $PMmp = 2bx^2 dx : a$. Hujus summa $2bx^3 : 3a$ est momentum sectoris CPM . Quare si fiat $x = a$, erit momentum sectoris $CAB = 2a^3b : 3a = \frac{2}{3}a^2b$, quo per summam ponderum seu aream sectoris $ACB = ap$ diviso,

Tab. II. viso, prodibit distantia Centri gravitatis sectoris $ACB = 2ab : 3p = 2AC$. $AE : 3AD$. Est vero $AC : AE : AD$ distantia Centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Distantia igitur Centri gravitatis sectoris a centro circuli est ad distantiam Centri gravitatis arcus ut 2 ad 3.

COROLLARIUM.

Tab. I. 167. Distantia ergo Centri gravitatis semicirculi à centro circuli C est $\frac{2}{3} AC^2 : AH$ (§. 166). Quare ut $\frac{2}{3} AH$, seu arcus 60° , ad AC ita AC ad distantiam Centri gravitatis semicirculi à centro circuli (§. 185 *Arithm.*)

PROBLEMA XXIV.

Tab. I. 168. Invenire Centrum gravitatis Fig. II. segmenti $DHED$.

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158): quod sit in L .
2. Quæratum Centrum gravitatis sectoris $DCEHD$ (§. 166); quod sit in F .
3. Cum F sit commune Centrum gravitatis trianguli DCE & segmenti $DEHD$; quæratum, ad segmentum $DEHD$, triangulum DCE & LF , quarta proportionalis FK : erit FK distantia Centri gravitatis segmenti K à Centro gravitatis sectoris F (§. 144). Exprimenda vero est ratio segmenti ad triangulum lineis recris: quod quidem accurate præstare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA XXV.

169. Invenire Centrum gravitatis Lunula $HIPPOCRATIS$ $ADBEA$.

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis semicirculi ADB (§. 167): quod sit in G . Fig. II. Fig. 13.
2. Quæratum porro Centrum gravitatis segmenti $AEBFA$ (§. 168): quod sit in H .
3. Cum adeo G sit Centrum gravitatis commune Lunulæ $HIPPOCRATIS$ $ADBEA$ & segmenti $AEBFA$; quæratum, ad Lunulam, segmentum & HG , quarta proportionalis GI : erit GI distantia Centri gravitatis Lunulæ I a Centro gravitatis semicirculi G (§. 144).

Exprimenda vero est ratio segmenti $AEBFA$ ad Lunulam $ADBEA$ lineis, nisi numeris utamur.

PROBLEMA XXVI.

170. Invenire Centrum gravitatis in Tab. I. Parabola truncata $SMNH$. Fig. 9.

RESOLUTIO.

1. Quæratum Centrum gravitatis Parabolæ MAN (§. 159): quod sit in F .
2. Quæratum item Centrum gravitatis Parabolæ SAH (§. cit.), quod sit in O .
3. Quoniam Centrum gravitatis commune Parabolæ MAN & Parabolæ truncatæ $SMNH$ in O ; quæratum porro, ad Parabolam truncatam $SMNH$, Parabolam MAN & distantiam FO , quarta proportionalis OK : erit in K Centrum gravitatis Parabolæ truncatæ (§. 144).

SCHOLIUM.

171. Patet eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illustravimus, semper inveniri Centrum gravitatis differentie duarum figurarum, quarum Centra gravitatis dantur.

PROBLEMA XXVII.

Tab. II. 172. *Invenire Centrum gravitatis in Fig. 14. Parallelogrammo & Parallelepipedo.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per Centrum magnitudinis (§. 132) adeoque & gravitatis transit (§. 141); consequenter in I est Centrum gravitatis parallelogrammi (§. 127). Eodem modo patet in K esse Centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum CBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*) utrumque per centrum gravitatis ejus transit (§. 141); adeoque communis intersectio IK est diameter gravitatis (§. 129).

2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum transiens per L & basibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 535 *Geom.*); per Centrum gravitatis transit (§. 141) adeoque in L gravitatis Centrum est.

SCHOLIUM.

173. *Attendentibus statim manifestum est, non absimili modo Centrum gravitatis in Prismatibus & Cylindris reperiri, esseque illud punctum medium rectæ Centra gravitatis basium oppositarum conjungentis. In Polygonis autem regularibus Centrum gravitatis idem esse cum centro circuli circumscribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum vero Centrum gravitatis segmentorum & sectorum, imo lunularum circuli per superiora*
 Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

inveniri potest; ita per Problema præsens constat, quomodo variorum segmentorum cylindricorum Centrum gravitatis inveniri possit; quorum nempe bases sunt circuli segmenta, sectores, annuli, lunula.

PROBLEMA XXVIII.

174. *Invenire Centrum gravitatis Tab. II. Coni & Pyramidis. Fig. 15.*

RESOLUTIO.

Centrum gravitatis Coni esse in axe AC satis claret ex superioribus. Si $AP = x$; $Pp = dx$ & pondusculum in Cono est $prx^2 dx : 2a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3 dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc summa momentorum $prx^4 : 8a^2$, quæ, per summam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analys. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis portionis AMN a vertice $A = 6a^2 prx^4 : 8a^2 prx^3 = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AP$; adeoque Coni integri Centrum gravitatis distat a vertice $\frac{3}{4}AC$.

Eodem prorsus modo invenitur distantia Centri gravitatis a vertice in Pyramide $= \frac{3}{4}AC$.

PROBLEMA XXIX.

175. *Invenire Centrum gravitatis Tab. II. Conoidis parabolici ABCD ex rotatione Parabolæ AMBC circa axem AC geniti. Fig. 16.*

RESOLUTIO.

Pondusculum Conoidis MN $= pxdx : 2r$ (§. 202 *Anal. infinit.*) adeoque momentum $= px^2 dx : 2r$ (§. 153); consequenter summa momentorum $= px^3 : 6r$, quæ, per summam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analys. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis

E por-

Tab. II. portionis conoidicæ AMPN a vertice
Fig. 16. $A = 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3}x$. Est adeo distantia Centri gravitatis a vertice in Conoide parabolico $ABD = \frac{2}{3}AC$.

PROBLEMA XXX.

176. *Invenire Centrum gravitatis Conoidis paraboloidici ex rotatione Paraboloidis cujuscunque AMBC circa axem AC geniti.*

RESOLUTIO.

Pondusculum Conoidis paraboloidici indefinitum est $px^{2+m}dx : 2r$ (§. 202 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{(2+m)m}dx : 2r$ (§. 153). Hinc summa momentorum $mpx^{(2+m)m} : (4m+4)r$, quæ, per summam ponderum $mpx^{(2+m)m} : (2m+4)r$ (202 *Anal. infinit.*) divisa, dat distantiam Centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice $A = (2m+4) mpx^{(2+m)m} :$

$$(4m+4) mpx^{(2+m)m} = \frac{m+2}{2m+2} x$$

$$= \frac{m+2}{2m+2} AP; \text{ consequenter in integro}$$

$$\text{Conoide } \frac{m+2}{2m+2} AC.$$

Sit e. gr. $m = 2$; erit $AH = \frac{2}{3}AC$.

Sit $m = 3$; erit $AH = \frac{5}{8}AC$.

Sit $m = 4$; erit $AH = \frac{3}{5}AC$.

Sit $m = 5$; erit $AH = \frac{7}{12}AC$.

PROBLEMA XXXI.

177. *Invenire Centrum gravitatis segmenti Sphæra.*

RESOLUTIO.

In segmento spherico pondusculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analys. in-*

finit.), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde summa momentorum $\frac{2}{3}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ, per summam ponderum $\frac{2}{3}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Analys. infinit.*) divisa, definit distantiam Centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3) = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Est adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc est, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Aritbm.*) ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quod si pro x substituatur r , seu semidiameter Sphæra, prodibit distantia Centri gravitatis a vertice in hemispherio $(8r^2 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo si pro x substituatur $2r$, Sphæra integræ Centrum gravitatis reperitur distare a vertice semidiametro r , hoc est, idem cum centro Sphæra.

PROBLEMA XXXII.

179. *Invenire Centrum gravitatis Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico pondusculum $= pbdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Anal. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum summa $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per summam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *Analys. infinit. cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ divisa, distantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^2 + 3pbx^4) : (6ar + 4ax) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Est adeo ut

$6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice. Constat vero esse a axem transversum Hyperbolæ genitricis, x altitudinem Conoidis, seu illius abscissam (459 Anal. fin.).

PROBLEMA XXXIII.

180. Invenire Centrum gravitatis segmenti Spheroidis elliptici.

RESOLUTIO.

In Sphæroide elliptico pondusculum $pbxdx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2 dx : 2r - pbx^3 dx : 2ar$ (§. 153.) Quare momentorum summa $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ, per summam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analys. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ divisâ, distantiam Centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Est adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc est, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$, ita x ad distantiam Centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem Ellipsis genitricis, seu ipsum axem majorem sphæroidis; x autem altitudinem segmenti, seu portionem axis inter verticem & basin interceptam.

COROLLARIUM I.

181. Quodsi pro x ponatur a , prodit pro Centro gravitatis totius Sphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Est nempe in medio axe.

COROLLARIUM II.

182. Sphæræ igitur & Sphæroidis elliptici communem axem habentium Centrum gravitatis idem est (§. 178).

COROLLARIUM III.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit distantia Centri gravitatis in dimidio Sphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in Hemisphærio (§. 178). Nam si, ut ibi, fiat $a = 2r$, erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA XXXIV.

184. Invenire Centrum gravitatis Tab. II. in Cono truncato BMND & in Pyra-Fig. 15. mide truncata.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur Centrum gravitatis Coni AMN (§. 174): quod sit in F.
2. Inveniatur quoque Centrum gravitatis Coni majoris BAD (§. cit.): quod sit in G.
3. Quærat, ad Conum truncatum BMND, Conum minorem MAN, & FG, quarta proportionalis GH, erit in H Centrum gravitatis Coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem Coni truncati BMND ad minorem MAN lineis esse exprimendam, nisi numeris utamur.

SCHOLION.

185. Eadem methodo Centrum gravitatis reperies in Conoidibus truncatis, itemque in Sphæra & Sphæroidibus truncatis. Enimvero, quamvis multa adhuc ea de re addi possent, filum tamen abrumpi consultum ducimus; cum ex hætenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant usum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum Centrum gravitatis aut punctum ipsi in superficie corporis cujuscunque respondens Mechanice explorandi, quantum ad praxin sufficit.

PROBLEMA XXXV.

186. Determinare Centrum gravitatis Mechanice in corpore quocunque.

RESOLUTIO.

Tab. II. 1. Super fune extenso, aut latere prismatis trigoni FG, corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, transit per Centrum gravitatis (§. 124).

Fig. 17.

2. Super eodem corpus, mutato situ, æquilibretur: erit MN denuo latus plani per Centrum gravitatis trans-euntis (§. cit.)

Intersectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in superficie corporis quæsitum, quod nempe est in diametro gravitatis (§. 126).

Aliter.

Tab. II. 1. Corpus datum O ita collocetur super tabula horizontali, ut, si vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).

Fig. 18.

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, sit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. cit.)

Communis adeo intersectio rectarum AB & CD in superficie corporis punctum C Centro gravitatis im-mens determinat (§. 129).

Aliter.

Laminæ Centrum gravitatis invenies, si cuspidi alicujus styli eam imposueris, & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo sustentatur, Centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

187. Corporis adeo humani in directum extensi Centrum gravitatis, vi modi primi, observante BORELLO (a), inter nates & pubim existit. Quare totius Corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura concessit locum.

SCHOLIUM.

188. Quoniam subinde etiam in applicatione methodi superioris distantia Centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in solidis, ut illic per intersectionem duorum, hic trium normalium prodeat Centrum gravitatis; ideo unum saltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus suspendendis utile etiam est nosse perimetrorum Centra gravitatis; ideo nec inconsultum videtur uno alteroque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illustrata (§. 157 & seqq.) huc applicetur.

PROBLEMA XXXVI.

189. Invenire Centrum gravitatis in spatio parabolico mixtilineo APM.

RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & semiordinata pm alteri PM infinite propinqua. Quæraturo primo distantia Centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum Elementum PMmp, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 Anal. infinit.) consideretur instar pondusculi ad axem librationis AB in P suspensi, erit momentum ejus = PMmp. $\frac{1}{2}$ PM (§. 153), Centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§. 172). Sit jam AP = x, PM = y, erit Pp = dx, adeoque PpmM = ydx, consequen-

Tab. XIII. Fig. 124.

(a) De motu animalium part. 1. Prop. 134. P. m. 167.

Tab. XIII. Fig. 124. quenter momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2 dx$. Jam in parabola $y^2 = x$, parametro existente 1 (§. 388 *Anal. finit.*) atque hinc $2y dy = dx$. Quare momentum pondusculi $\frac{1}{2}y^2 dx = y^3 dy$, eorumque summa $= \frac{1}{4}y^4$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $= \int y dx$, $= \int 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3$. Ergo $QL = \int \frac{1}{2}y^2 dx : \int y dx$ (§. 157) $= 3y^4 : 8y^3 = \frac{3}{8}y$. Quare si fiat $AD = \frac{3}{8}PM$ & ex puncto D ducatur DL ipsi AB parallela; erit in ea Centrum gravitatis spatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex Centro gravitatis O parallelogrammuli PMmp ad AR normalis OK, & consideretur instar pondusculi ad axem librationis AR suspensi, erit PMmp. OK momentum ejus $= xy dx$. Est vero in parabola $y = x^{1/2}$ (§. 392 *Analys. fin.*). Ergo momentum pondusculi $= x^{3/2} dx$, consequenter eorum summa $= \int xy dx = \frac{2}{7}x^{5/2}$. Jam area APM seu summa omnium pondusculorum $\int y dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (§. 103 *Analys. infinit.*). Ergo $DL = \int xy dx : \int y dx$ (§. 157) $= 3x^{5/2} : 5x^{3/2} = \frac{3}{5}x$. Quare si fiat $AQ = \frac{3}{5}AP$, & in Q erigatur normalis QL ipsi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L Centrum gravitatis spatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

PROBLEMA XXXVII.

190. *Invenire Centrum gravitatis perimetri Trianguli.*

RESOLUTIO.

Sit Triangulum ABC æquilaterum, vel isoscele.

1. Bisecentur rectæ in D, E & F: erunt puncta ista Centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§. 142).

2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam divisa, erit G Centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§. 145).
3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC instar ponderum consideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens; fiatque, ducta recta GF, ut $AB + AC + BC : BC = GF : GH$: erit in H Centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 148).

PROBLEMA XXXVIII.

191. *Invenire Centrum gravitatis perimetri figura irregularis cujuscunque, v. gr. Pentagona.*

RESOLUTIO.

1. Bisecentur singula latera AE, ED, DC, CB, BA, in G, F, K, I, H, erunt in istis divisionum punctis eorum Centra gravitatis particularia (§. 142).
2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque $AB + AE : AE = GH : HL$; erit in L Centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 148).
3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque $AB + AE + ED : ED = LF : LM$; erit in M Centrum gravitatis commune laterum AB, AE & ED (§. cit.)
4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque $AB + AE + ED + BC : BC = MI : MN$; erit in N Centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (§. cit.)
5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque $AB + BC + CD + DE$

Tab. XIII. Fig. 125.

Tab. XIII. Fig. 127.

Tab. XIII. Fig. 125.

Tab. XIII. Fig. 127. $+DE+EA:DC=NK:NO$; erit in O Centrum gravitatis commune totius perimetri (§. cit.).

S C H O L I O N.

192. Me non monente apparet, hac ratione determinari posse Centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomocunque in eodem plano sitorum.

T H E O R E M A XXV.

193. Omnis figura sive superficialis, sive solida, quæ motu linea aut figure generatur, æquatur factò ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis, seu lineam quam Centrum gravitatis describit.

D E M O N S T R A T I O.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in Centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale factò ex pondere moto in viam Centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ instar gravium homogeneorum considerentur; pondera ipsarum sunt ut volumina (§. 130); adeoque pondus motum est magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur factò ex magnitudine generante in viam ejus Centri gravitatis. Q. e. d.

Aliter.

Tab. XIII. Fig. 124. Idem etiam Analytice ostenditur de solido rotatione genito hoc modo. Sit $AP=x$, $PM=y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $=r:p$; erit solidum rotatione genitum $=\int py^2 dx:2r$ (§. 197 Anal. infin.). Sit jam in L Centrum gravitatis, & $pS=QL$, distantia

ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio pS descripti via rotationis Centri gravitatis. Quare cum sit $pS=\frac{1}{2}\int y^2 dx:\int y dx$ (§. 189); erit via rotationis Centri gravitatis $=\int py^2 dx:2r\int y dx$. Quare si in hanc viam ducatur planum generans $\int y dx$; erit solidum rotatione genitum $=\int py^2 dx:2r$, ut ante.

C O R O L L A R I U M I.

194. Hinc cum parallelogrammum ABDC Tab. II. describatur, si recta AB juxta ductum alterius AC motu sibi semper parallelo descendat (§. 102. & 233 Geom.) & ex Coroll. II. Theor. XXVI. (215.) independenter ab his constet, viam Centri gravitatis E æqualem esse rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc est, altitudini parallelogrammi (§. 227 Geom.); area ejusdem æquatur factò ex basi CD seu linea describente in altitudinem EF.

S C H O L I O N I.

195. Hæc consona sunt iis, quæ de parallelogrammorum arcis investigandis demonstrata sunt in Geometria (§. 370. 375. 387. Geom.)

C O R O L L A R I U M II.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC descendente describuntur, soliditatem haberi, si planum describens per altitudinem multiplicetur.

S C H O L I O N II.

197. Hæc denuo consentiunt cum iis, quæ de prismatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonstrata sunt (§. 539 & 541 Geom.).

C O R O L L A R I U M III.

198. Cum circulus describatur, si radius CL Tab. II. circa centrum C rotetur (§. 131 Geom.); Fig. 10. Centrum vero gravitatis radii CL sit in medio F (§. 142); via Centri gravitatis est peripheria

Tab.II. Fig.20. pheria circuli X. radio subduplo descripta ; consequenter area circuli æquatur factò ex radio CL in peripheriam radio subduplo CF descriptam.

SCHOLIUM III.

199. Hac iis consentanea esse, quæ in Geometria de circulo demonstrata sunt (§. 410 Geom.), statim patet consideranti, quod peripheria radio subduplo descripta sit peripheriæ integro descriptæ dimidia (§. 412 Geom.).

COROLLARIUM IV.

Tab.II. Fig.21. 200. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipsum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri superficiem describit (§. 465 Geom.). Est vero Centrum gravitatis rectæ BC in medio F (§. 142) & Centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via adeo hujus est peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF descripta. Quare superficies cylindri est factum ex altitudine BC in peripheriam circuli radio EF descriptam sive basin, ut in Geometria demonstravimus (§. 516 Geom.): soliditas vero cylindri est factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui est ipsius EF seu semidiametri cylindri subduplus, descriptam.

SCHOLIUM IV.

201. Sit altitudo plani describentis, adeoque cylindri, $BC = a$, semidiameter basis $DC = r$, erit $EG = \frac{1}{2}r$, & posita ratione semidiametri ad peripheriam $= 1 : m$, peripheria radio $\frac{1}{2}r$ descripta $= \frac{1}{2}mr$. Ducta igitur $\frac{1}{2}mr$ in aream rectanguli $AC = ar$; erit soliditas cylindri $= \frac{1}{2}amr^2$. Est vero $\frac{1}{2}mar^2 = \frac{1}{2}r. mr. a$ & $\frac{1}{2}r. mr$ area circuli radio DC descripti. Constat ergo cylindrum reperiri æqualem factò ex basi in altitudinem, ut in Geometria (§. 541) demonstratum.

COROLLARIUM V.

202. Similiter cum Centrum gravitatis

rectæ AB sit in medio M (§. 142) & superficies Coni describatur, si triangulum ABC circa axem AC rotetur (§. 467 Geom.), fitque præterea $PM = \frac{1}{2}BC$ (§. 268 Geom.), superficies Coni æqualis est factò ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, seu semidiametri baseos BC subduplo descriptam.

SCHOLIUM V.

203. Sit $BC = r$, $AB = a$, ratio radii ad peripheriam $1 : m$; erit $PM = \frac{1}{2}r$ & peripheria hoc radio descripta $= \frac{1}{2}mr$. Ducta igitur $\frac{1}{2}mr$ in latus Coni AB, prodit superficies $\frac{1}{2}amr$. Sed $\frac{1}{2}amr$ est etiam factum ex $\frac{1}{2}a$ & mr . Ergo superficies Coni producitur ex peripheria baseos in latus dimidium, ut in Geometria (§. 519) demonstratum.

COROLLARIUM VI.

204. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, Conum describit (§. 467 Geom.). Sed si CB divisa bifariam in D ducatur recta AD, fiatque $AO = \frac{2}{3}AD$; erit in O Centrum gravitatis (§. 158). Æquatur ergo Coni soliditas factò ex triangulo CAB in peripheriam radio PO descriptam (§. 193). Est vero $AD : AO = DB : OP$ (§. 268 Geom.). Sed $AO = \frac{2}{3}AD$ & $DB = \frac{1}{2}CB$ per demonstr. Ergo $OP = \frac{2}{3}DB = \frac{1}{3}CB$.

SCHOLIUM VI.

205. Sit $CB = r$, $AB = a$, ratio radii ad peripheriam $= 1 : m$; erit $OP = \frac{1}{3}r$, peripheria hoc radio descripta $\frac{1}{3}mr$, $\triangle ACB = \frac{1}{2}ar$, adeoque soliditas Coni $\frac{1}{3}mr. \frac{1}{2}ar = \frac{1}{6}amr^2$. Est vero etiam $\frac{1}{6}amr^2 = \frac{1}{2}r. mr. \frac{1}{3}a$, seu factum ex basi Coni in tertiam altitudinis partem, ut in Geometria aliunde demonstratum (§. 548 Geom.).

SCHOLIUM VII.

206. Elegans hoc Theorema, quod inter præcipua seculi superioris in Geometria inventa referri solet, jam olim PAPPUS com-

memoravit (a); sed PAULUS GULDINUS, e Soc. Jesu, expressius plurimorum exemplorum inductione ostendit (b). Usi sunt eodem Geometra, præsertim ante inventum a LEIBNITIO calculum summatorium, cum GULDINO, quemadmodum indicaverat PAPPUS, in dimetiendis solidis & superficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: sed idem usum habere adhuc potest in quibusdam casibus, ubi Calculi summatorii ope idem difficilius præstaretur. Ego in Tyronum gratiam

exemplis tritis regulam illustrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, simulque ostendi, eidem locum esse, si magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri posse a GULDINO etiam annotatum reperio (c): unde nec cum PAPPO ad solum rotationis motum Theorema restrinxi. Illustris LEIBNITIUS (d) invenit, succedere quoque negotium, si axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.

C A P U T I V.

De Quiete & Lapsu Corporum gravium.

DEFINITIO XXV.

207. **L**inea horizontalis verã est, cujus singula puncta a centro Telluris æqualiter distant.

COROLLARIUM.

208. Linea horizontalis est arcus circuli ex centro Telluris per punctum datum descripti (§. 37. 41 Geom.).

DEFINITIO XXVI.

Tab. II. Fig. 20. 209. **L**inea horizontalis apparens BD est recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

COROLLARIUM.

210. Est adeo ad semidiametrum Telluris in puncto contactus A perpendicularis (§. 308 Geom.).

DEFINITIO XXVII.

211. **L**apsus est mutatio situs vi gravitatis.

THEOREMA XXVI.

212. Si corpora gravia versus cen-

trum Terra nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem est perpendicularis, & contra.

DEMONSTRATIO.

- I. Si corpora gravia versus centrum Terræ nituntur, linea directionis eorundem semidiametro Telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 Mech. & §. 38 Anal. infin.), quam apparentem perpendicularis (§. 209). Quod erat unum. Tab. II. Fig. 20.
- II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis; semidiametro Telluris in directum jacet (§. 210). Continuata igitur in centrum Telluris incidit (§. 470 Geom.). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

213. Cum Terra sit propemodum spherica, ut in Geographia demonstratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terrestrium æquilibrium

(a) Sub finem Præfat. ad Lib. 7. Collect. Mathem.
(b) Lib. 2. & 3. de Centro Gravitatis.

(c) Lib. 2. c. 8. Prop. 3. f. 147.

(d) In Actis Erud. An. 1695. p. 493.

Tab. II. bilium superficies in omnibus suis punctis a centro Telluris æqualiter absunt (§. 470 Geom.). Quare cum experientia constet, gravia per lineas perpendiculares ad superficiem aquarum descendere; gravia niti versus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLIION.

214. Quodsi Terræ figura non sit perfecte spherica, ex descensu perpendiculari gravium concludi nequit, quod versus centrum illius nitantur: cum in solo circulo, cujus rotatione sphaera generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant (§. 38 Analyt. infinit.). Sed suo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique assumi posse citra erroris assignabilis periculum, gravia niti versus centrum Terræ. Immo in Staticis sufficit, descensum perpendicularem ad libellam aquarum experientia constare.

COROLLARIUM II.

215. Quoniam pro corpore gravi, salva gravitate, solum gravitatis centrum substitui potest (§. 125); linea directionis corporis gravis est recta ex Centro gravitatis ad lineam horizontalem sive apparentem, sive veram perpendicularis.

PROBLEMA XXXIX.

216. Data semidiametro Telluris AC vel LC una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis AD, determinare distantiam puncti extremi D à lineæ horizontali vera AL.

RESOLUTIO.

1. Quadrato semidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta CD (§. 417 Geom.).
3. Inde subtrahatur semidiameter CL: quod relinquitur, est distantia li-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

neæ horizontalis apparentis a vera DL. Tab. II. E. gr. Ponamus semidiametrum Telluris, qualis vulgo statuitur, 860 miliarium Germanicorum, & AD unius milliaris: erit

$$AC^2 = 739600$$

$$AD^2 = 1$$

$$DC^2 = 739601$$

Unde DC = 860.00057

$$CL = 860$$

$$LD = 0.00057 \text{ seu } \frac{57}{100000}$$

Aliter.

Quoniam GD : AD = AD : DL (§. 334 Geom.); erit DL = AD² : GD (§. 302 Arithm.). Est vero DL ipsius GL, seu diametri Telluris, particula admodum exigua, quippe in distantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, seu $\frac{57}{172000000}$ diametri Telluris. Quamobrem AD² : GL sensibilibiter non differt a AD² : GD. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Parisinorum seu 129600 linearum (pes enim Parisinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta PICARDUM (a) 39231564 pedum Parisinorum seu linearum 5649345216. Quodsi ergo AD² = 16796160000 per GL = 5649345216 dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

SCHOLIION.

217. Hac posteriore methodo PICARDUS (b) Tabulam construxit, quam hac transferre in usum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis AD in pedibus Parisinis; altera puncti extremi D altitudinem DL supra lineam horizontalem veram AL.

F

AD

(a) *Traité du Nivellement*, p. 196.

(b) *Loc. cit.* c. 1. p. 7.

AD	DL	AD	DL
300 ped.	0 dig. 0 $\frac{1}{3}$ lin.	3300 ped.	3 dig. 6 lin.
600	1 $\frac{1}{3}$	3600	4. 0
900	3	3900	4. 8
1200	5 $\frac{1}{3}$	4200	5. 4
1500	8 $\frac{1}{3}$	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. 9 $\frac{1}{3}$	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

COROLLARIUM.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem sensibilem pro vera assumi, consequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi potest.

PROBLEMA XL.

219. Explorare, utrum planum aliquod propositum sit horizontale, nec ne.

RESOLUTIO.

- Tab. II. 1. Ex trabeculis ligneis construatur triangulum æquicrurum FCG, continuatis cruribus in AB, quo longius, eo melius.
2. Ex vertice C suspendatur globus plumbeus D. & basis trianguli FG dividatur bifariam in E.
3. Libella sic constructa collocetur super plano dato, ita ut cruribus suis AC & CB eidem insistant.
- Dico, si filum CD transeat per punctum medium E, planum esse horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate sua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 17). Quodsi

ergo FG bifariam secet in E; erit CD Tab. II. ad FG perpendicularis (§. 184 Geom.). Fig. 23. Quoniam vero AC = CB per construct. adeoque AC:CB = CF:CG; erit $x = 0$ (§. 207 Geom.), consequenter AB ipsi FG parallela (§. 255 Geom.) & CD etiam ad AB (§. 230 Geom.), hoc est, linea directionis globi ad planum, cui libella insitit, perpendicularis. Planum adeo horizontale est (§. 212).

SCHOLIUM.

220. Figura Instrumenti variis modis mutari solet, eodem tamen semper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes Staticas plerumque sufficit; ita inferius Artem libellandi exposuimus alia libellarum genera hæc accuratiora describemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus amplissimos continuatur.

DEFINITIO XXVIII.

221. Per Basin corporis gravis in-Tab. II. telligo figuram, in cujus perimetro Fig. 24. circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipsæ incumbunt.

E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur basis ejus.

THEOREMA XXVII.

222. Si linea directionis corporis gravis intra basin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; corpus in situ suo acquiescit: sin illa extra basin cadit, vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; in eam labitur partem versus quam cadit Centrum gravitatis.

DEMONSTRATIO.

Tab.II. I. Incumbat corpus GB plano cui-
Fig.25. dam alteri firmo ac stabili AFEB,
sitque linea directionis CD. Cum hæc
ex Centro gravitatis C educatur (§.
215); Centrum gravitatis descendere
nititur per rectam CD (§. 19). Sed
juxta eandem ipsi renititur corpus, cui
incumbit, idque satis firmum ac stabile,
ut cedere nesciat, *per hypoth.* Descen-
sus adeo Centri gravitatis impeditur
(§. 75), adeoque corpus quiescit (§.
123). *Quod erat unum.*

Tab.II. II. Incumbant extrema alicujus cor-
Fig.24. poris duobus fulcris FE & CD, &
linea directionis IL intra basin FEDC
cadat. Quoniam linea directionis ex
Centro gravitatis I ducitur (§. 215);
Centrum gravitatis per rectam IL des-
cendere nititur (§. 17). Sed corpus
proprio pondere eo usque incurvari
nequit, ut a fulcris recedant ejus ex-
trema, *per hypoth.* Ergo Centrum
gravitatis impeditur, quo minus des-
cendat; consequenter corpus in hoc
situ acquiescit (§. 123). *Quod erat se-
cundum.*

Tab.II. III. Cadat linea directionis CM cor-
Fig.26. poris IL extra basin. Cum Centrum
gravitatis sit I (§. 215); id secun-
dum rectam CM descendere nititur (§.
17). Quare cum nihil secundum ean-
dem directionem ipsi resistat; actu des-
cendet; adeoque corpus labitur in
eam partem versus quam cadit Cen-
trum gravitatis (§. 211). *Quod erat
tertium.*

Tab.II. IV. Denique corpus grave duobus
Fig.24. fulcris EF & DC ita incumbat, ut

linea directionis IL intra basin FEDC Tab.II.
cadat. Quoniam linea directionis ex Fig.24.
Centro gravitatis I ducitur; Centrum
gravitatis per rectam IL descendere
nititur. Quare cum corpus proprio
pondere eo usque incurvari possit, ut
a fulcris recedat, *per hypoth.* Centrum
gravitatis actu descendit, adeoque cor-
pus labitur in eam partem, versus
quam linea directionis cadit (§. 211).
Quod erat quartum.

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur,
ut linea directionis extra basin emovea-
tur, consequenter, quo longius ea distat
a perimetro basis; eo firmitus corpus in
loco suo consistit.

PROBLEMA XLI.

224. *Invenire, utrum corpus grave
in dato situ extra lapsus periculum con-
stituatur, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Queratur Centrum gravitatis cor-
poris gravis (§. 186).
2. Ex eo dimittatur perpendicularis
in lineam horizontalem apparentem,
juxta Problema XL (§. 219), si
opus sit determinandam: quæ erit
linea directionis (§. 215).

Quodsi perpendicularum intra basin
corporis cadit, extra lapsus periculum
constituitur: sin minus, certo ruet
in eam partem, versus quam perpen-
diculum cadit (§. 222).

SCHOLIUM I.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres in-
clinatæ Bononiensis & Pisana non cor-
ruant; etsi illa anno 1110 excitata ad alti-
tudi-*

tudinem pedum 130 assurgat & perpendicularum a basi intervallo 9 pedum recedat; hæc vero anno 1173 exstructa altitudinem habeat cubitorum 78 & intervallum inter basin atque perpendicularum cubitorum $7\frac{1}{3}$ admittat: id quod expressius ostendit PAULUS CASATIUS (a).

SCHOLIION II.

226. Idem Problema motibus animalium explicandis inseruit: qualia inprimis dedit JOHANNES ALPHONSUS BORELLUS (b). E. gr. Cum Centrum gravitatis in homine inter nates & pubim existat; linea directionis intra spatium calcaneis interjectum adeoque intra basin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento insistit: quare in hoc situ firmiter consistit. Enimvero si pes alteruter elevetur, basis definitur spatio, quod pes unus occupat (§. 221). Cadit adeo linea directionis extra basin, nempe versus dexteram, si pes dexter elevetur, consequenter homo super solo pede sinistro stare non poterit (§. 222), nisi corpus in latere sinistro incurvet, quo linea directionis in pedem sinistram retrahatur. Enimvero talia suscipere prosequi non est nostri instituti: apprimè autem observanda sunt in Picturis & Sculpturis.

SCHOLIION III.

227. Immo hinc ratio reddi potest multorum in structura corporis animalis occurrentium. E. gr. Cum homo erectus stare ac incedere debeat, necessarium utique fuit, ut planum per medium transiens corpus divideret ipsum in partes utrinque equiponderantes. Unde partes geminatas, quales sunt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent; quæ sui similes non habent, ut frons, nasus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram,

(a) *Mechanic. Lib. 1. c. 9. p. 50. & seqq.*

(b) *De motu Animalium c. 18. usque ad 23. p. 165. & seqq. conf. CASATIUM Mechan. Lib. 1. c. 11. p. 162. & seqq.*

ut in partes æquales & similes, adeoque in equiponderantes, dividi possint.

DEFINITIO XXIX.

228. Centrum motus est punctum, Tab. II. circa quod grave, aut plura gravia Fig. 27. commune Centrum gravitatis habentia rotari possunt.

E. gr. Si pondera P & Q rotari possint circa punctum N, ita ut descendente P ipsum Q ascendat; dicetur N centrum motus.

THEOREMA XXVIII.

229. Distantia IN Centri gravitatis ponderis particularis a Centro gravitatis communi aut centro motus N, est ad lineam directionis Ip perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis Ip corporis p transeat per Centrum gravitatis ipsius (§. 215) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto Centrum gravitatis corporis existat (§. 78); distantia Centri gravitatis corporis p a Centro motus, vel Centro gravitatis communi N, eadem est quæ distantia ipsius N a linea directionis. Sed distantia ipsius N a linea directionis Ip est perpendicularis NI (§. 225 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI est distantia Centri gravitatis corporis p a puncto N. Q. e. d.

PROBLEMA XLII.

230. Dato Centro gravitatis C, una Tab. cum pondere corporis AB; determinare III. vires in A & B requisitas, ut in situ Fig. 28. horizontali sustentetur.

RESOLUTIO.

Tab. I. Quærat, ad summam distantiarum III. virium in A & B applicatarum a Centro gravitatis corporis sustentati C, pondus ejusdem G & distantiam vis in B applicatæ BC, numerus quartus proportionalis: Dico, hunc esse vim in A applicandam.

2. Quare si is subtrahatur a pondere G, relinquetur vis in B applicanda. Sit ex. gr. $G = 300$ librarum, $AC = 5'$, $CB = 8'$: erit $AC + CB = AB = 13'$, adeoque vis in A applicanda = $G \cdot CB : AB = 300 \cdot 8 : 13 = 184 \frac{2}{13}$; consequenter vis in B = $115 \frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB sustentatur a viribus A & B per hypoth. necesse est ut eadem vi renitentur; quantum illud deorsum nititur (§. 75). Nititur autem corpus AB deorsum tota vi gravitatis, hoc est, quanta est ponderis G eidem æqualis & ex Centro gravitatis C suspensi (§. 125). Ergo vires A & B junctim sumtæ ponderi huic æquantur; consequenter eorum Centrum gravitatis commune in C (vi §. cit.). Sed cum linea AB sit horizontalis, per hypoth. adeoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (§. 215) vires autem in A & B secundum eandem directionem renitentur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares, & hinc a Centro gravitatis communi C distant intervallis AC & CB (§. 229). Est adeo $AC + CB : CB = G : A$ (§. 148). Q. e. d.

COROLLARIUM.

231. Corpus adeo AB gravitat in fulcra a quibus sustentatur, in ratione re-

ciproca distantiarum a Centro gravitatis ipsius.

SCHOLIUM.

232. Ne mirentur Tyrones, nos ad vires resistentes quascunque & grave sursum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorsum nitentibus demonstrata sunt: eodem enim manente effectu, pondera H & I facili negotio, si ita visum fuerit, substitui possunt.

PROBLEMA XLIII.

233. Dato Centro gravitatis F cor- Tab. II. poris IH, una cum gravitate ipsius; de- Fig. 18. terminare punctum M, quod si plano horizontali incumbat, pondus datum G in L appensum corpus IH ex situ horizontali dimovere nequit.

RESOLUTIO.

Concipiatur in Centro gravitatis F appensum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 125), & quærat, ejusdem atque ponderis dati G Centrum gravitatis commune M (§. 149). Quod si enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus IH e situ suo dimovere nequit (§. 124). Q. e. i. & d.

Sit ex. gr. baculi Centrum gravitatis F, situla aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, $LF = 18''$. Reperietur $LM = LF \cdot F : (G + F) = 18 \cdot 2 : 26 = 18 : 13 = 1'' 4''$ fere. Mirum ergo non est (quod Statices ignari mirantur) situlam baculo IH supra mensam posito appensam non decidere.

PROBLEMA XLIV.

234. Dato corporis AB Centro gra- Tab. vitatis C, una cum pondere ejus G; de- III. terminare puncta L & M, in quibus Fig. 28. supponenda sunt fulcra MN & LO, ut in data ratione premantur.

RESOLUTIO.

Tab. III. Sumantur in linea horizontali AB, quæ per Centrum gravitatis C transit, Fig. 28. rectæ MC & CL in data ratione. Quodsi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis supponas, ea premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodsi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus supponant operarii; pondus portare poterunt, si viribus eorum proportionatum. Unde patet, quo-

modo onus ferendum in data ratione distribui possit.

SCHOLIUM.

236. Si pondus ferendum ex longurione extra Centrum gravitatis ipsius suspendatur; quarendum est Centrum gravitatis commune ponderis atque longurionis, & supposito in eodem pondere utrique equali, reliqua peraguntur ut in resolutione Problematis. Exempla specialia, quibus Problemata hæc illustrantur, dedit STEVINUS (a).

(a) Stat. Lib. 2. Prop. 7. 8. Operum f. 474. & seqq.

CAPUT V.

De Motu Rectilineo composito.

DEFINITIO XXX.

237. **M**otus simplex est, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO XXXI.

238. *Motus compositus* est, qui efficitur a viribus pluribus conspirantibus. Dicuntur autem *vires conspirare*, si directio unius non est opposita directioni alterius; veluti cum radius circuli circa centrum rotari, & interea punctum per eam recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus est compositus (§. 74).

DEFINITIO XXXII.

240. *Angulus directionis* est, quem lineæ directionis duarum virium conspirantium comprehendunt.

THEOREMA XXIX.

241. Si mobile A duplici vi urgeatur, altera quidem secundum directionem AB, altera vero secundum directionem AC, ita ut celeritates sint ut latera AB & AC; motu composito diagonalem parallelogrammi AD describit. Tab. II.
Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Si mobile A sola vi secundum AB impressa moveretur, momento primo foret in aliquo puncto rectæ AB, veluti in H, & ad rectam HL ipsi AC parallelam accederet. Si sola vi secundum AC impressa progredieretur, eodem momento foret in aliquo puncto ipsius rectæ AC, veluti in I, & ad rectam IL ipsi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium sibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, adeoque eodem momento mobile accedet tum ad HL,

tum

Tab. II. tum ad IL; consequenter erit in puncto
Fig. 19. L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam
vero celeritates sunt ut AB ad BD, *per*
hypoth. & spatia AH & HL eodem tem-
pore descripta sunt ut celeritates (§. 33),
consequenter $AH:HL = AB:BD$; erit
AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*),
consequenter AL pars diagonalis AD
(§. 337 *Geom.*). Eodem modo patet,
ductis KM & MG ipsis AB & AC pa-
rallelis, quod mobile momento secun-
do futurum sit in M, tandemque in
D. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

242. Quodsi ergo concipiamus rectam
AC motu æquabili sibi semper parallelo
juxta ductum alterius rectæ AB moveri, ac
interea punctum motu æquabili in eadem
descendere; punctum representabit cor-
pus, quod duplici vi, juxta directiones AB
& AC, celeritatibus quæ sunt ut AB &
AC, movetur, adeoque motu composito
describetur triangulum ABD.

SCHOLIUM.

243. Solent igitur nonnulli in demonst-
rando Theoremate presente punctum in linea AC
descendens, dum ipsa interea juxta ductum
rectæ AB promovetur, pro corpore sumere,
quod duplici vi juxta hypothesein Theorema-
tis movetur: id quod etiam ad juvandam
imaginationem utiliter sumi potest, cum sic
pateat possibilitas hypotheseos intuitiva ra-
tione.

COROLLARIUM II.

244. Mobile motu composito eodem
tempore describit diagonalem AD, quo
motu disjuncto describeret latera paral-
logrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM III.

245. Cum circa quamlibet rectam AD
parallelogrammum aliquod ABDC constru-

possit, constructis nempe triangulis æqua- Tab. II.
libus ACD & ABD tanquam super basi Fig. 19.
communi (vi §. 337. 205. *Geom.*); omnis
motus rectilineus, ubi ad demonstrandum
utile fuerit, in compositum resolvi potest.

COROLLARIUM IV.

246. Quoniam vero laterum AC & CD
ratio varia esse potest, pro diversitate an-
gulorum CAD & DAB; motu quoque va-
riis modis composito eadem recta AD
describi (§. 245); adeoque & idem motus
rectilineus in varios compositos resolvi
potest.

THEOREMA XXX.

247. In motu composito uniformi, ve-
locitas a viribus conspirantibus produc-
ta est ad velocitatem alterutrius, ut
diagonalis AD parallelogrammi ABDC,
juxta cujus latera agunt separate, ad
latus alterutrum AB vel AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una
conficit latus parallelogrammi AB &
altera AC sigillatim, conjunctæ confi-
ciunt diagonalem AD (§. 241). Est
ergo diagonalis AD spatium a viribus
conspirantibus dato tempore descrip-
tum (§. 12). Sed in motu uniformi
celeritates in eodem tempore sunt ut
spatia (§. 33). Est ergo celeritas a viri-
bus conspirantibus orta ad celeritatem
a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel
AC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

248. Datis itaque viribus conspiranti-
bus, hoc est, data celeritatum ratione, per
rectas AB & AC magnitudine datas, &
directione per easdem rectas positione da-
tas, aut per angulum directionis; datur
motus obliqui celeritas & directio; quia diago-

Tab. II. diagonalis & magnitudine & positione da-
Fig. 19. tur (§. 339 & seqq. *Geom.*)

COROLLARIUM II.

249. Non tamen vice versa motu obli-
quo dato dantur simplices; quia idem ex di-
versis simplicibus componi potest (§. 245).

COROLLARIUM III.

250. Motus adeo simplex per diagona-
lem AD, celeritate ut AD, æquipollet moti-
bus per latera AB & AC, celeritatibus ut AB
& AC conjunctis; hoc est, perinde est, si ve
mobile juxta directionem AD celeritate ut
AD, si ve simul juxta directiones AB & AC
celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241,
246.)

THEOREMA XXXI.

Tab. III. 251. In motu composito ab iisdem vi-
ribus producto major est velocitas, si
Fig. 30. angulus directionis minor: illa autem
minor, si hic major.

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC,
minor FAC. Quoniam vires eadem
sunt, per *hypoth.* erit AC utrique pa-
rallelogrammo AFEC & BACD com-
munis, & præterea AB = AF. Evi-
dens est in hypothese anguli majoris
describi diagonalem AD, in hypothese
minoris vero ipsam AE, & quidem eo-
dem tempore, ob AB = AF, (§. 244).
Sunt igitur celeritates ut AD ad AE
(§. 33). Quare cum AD < AE; ve-
locitas in hypothese anguli majoris mi-
nor est, quam in hypothese minoris.
Q. e. d.

COROLLARIUM.

252. Cum datis cruribus AC & CE cum
angulo intercepto ACE, angulus CEA
(§. 40 *Trigon.*) & inde porro AE (§. 36
Trig.) reperitur; data virium conspiran-

tium celeritate & angulo directionis; in
casu quocunque speciali celeritas motus
compositi inveniri; consequenter ratio ce-
leritatum, ab iisdem viribus, sub diversis
directionum angulis, productarum definiti
potest.

THEOREMA XXXII.

253. Si mobile a duabus viribus se-
cundum directiones AB & AC trahitur,
Fig. 29. que æquipolent tertia trahenti secundum
directionem AD; erunt sollicitationes
ad motum inter se reciproce ut sinus
angulorum, quos linea directionis BA
& AC cum linea directionis tertia AD
comprehendunt, & alterutra earum erit
ad sollicitationem a media pendentem, ut
sinus anguli quem linea directionis alte-
rius cum linea directionis tertia compre-
hendit ad sinum anguli BAC.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipsi AC & DC ipsi
AB parallela (§. 258 *Geom.*); erit an-
gulus BDA = DAC & ADC = BAD
(§. 255 *Geom.*), ac BACD paralle-
logrammum (§. 102 *Geom.*). Quo-
niam vires secundum directiones AB &
AC trahentes in sollicitando mobili ad
motum, seu quatenus mobile ad mo-
tum urgent (§. 110), æquipolent vi
mobile secundum directionem AD tra-
henti, per *hypoth.* sollicitationes latera-
les sunt ut AB & BD = AC (§. 335
Geom.) media vero sollicitatio ut AD
(§. 250). Erunt igitur (§. 33 *Trigon.*)
laterales ut sinus angulorum BDA &
BAD, & lateralis secundum directio-
nem AB trahens ad mediam secundum
directionem AD trahentem ut sinus
anguli BDA seu DAC ad sinum anguli
ABD

Tab. II. ABD seu BAC (§. 233 Geom. & §. 5 Fig. 29. Trigon.), lateralis vero agentis secundum directionem AC sive BD ut sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC. Q. e. d.

SCHOLIUM.

254. Sollicitationes sunt in ratione composita massarum & celeritatum initialium (§. 110. 22), consequenter celeritatum in motu æquabili, ubi c est ut dc. Rectæ, per quas exponuntur motus in resolutione compositi in simplices, sunt ut celeritates (§. 250). Quare si per eas exponuntur sollicitationes, massæ corporum, in quibus concipiuntur vires, supponendæ sunt æquales (§. 181 Arithm.) id quod semper facere licet, cum corpori, cuicumque data celeritate lato, vel data celeritate initiali instructo, dari possit aliud eidem in sollicitatione ad motum æquivalens, quod habet massam datam (§. 146), quia celeritates initiales sunt ut distantia a centro motus. Atque hæc ratio est, cur in præsentè tractatione, præcisâ massæ corporum, ea consideramus instar punctorum, in quibus non spectatur nisi celeritas initialis.

DEFINITIO XXXIII.

255. Per Tendentiam intelligimus rectam velocitatis & directionis repræsentatricem. Et Tendentia media vocatur, quæ in motu composito pluribus datis simul substitui potest.

PROBLEMA XLII.

Tab. XIII. Fig. 28. 256. Si mobile A urgetur secundum directiones BA, CA, DA, EA celeritatibus ut AB, AC, AD, AE; determinare directionem & celeritatem mobilis in motu composito, qui ex simplicibus istis resultat: seu datis quotcunque tendentiis AB, AC, AD, AE; invenire mediam AK.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

RESOLUTIO.

1. Per Centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiæ mediæ ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A. Tab. XIII. Fig. 128.
2. In hanc ex A transferatur AG toties, quot sunt tendentiæ datæ. Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex singulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares Bb, Cc, Dd, Ee, Gg; tendentiæ BA æquivalentur laterales Bb & bA, secundæ CA laterales Cc & cA, tertiæ DA laterales Dd & dA, quartæ EA laterales Ee & eA (§. 250, 255). Jam cum directiones Bb, Cc, Dd & Ee sibi mutuo non sint contrariæ, tendentiæ cognomines in determinanda media sunt attendendæ: ex adverso cum directiones bA & cA sint contrariæ directionibus dA & eA, sintque velocitates versus partem S majores velocitatibus versus partem R per hypoth. excessus tendentiarum versus S supra tendentias versus R attendendus erit in media determinanda. Jam si parallelogrammum AgGH compleatur; tendentiæ perpendiculares Bb, Cc, Dd & Ee æquivalentur mediæ 4AH & excessus contrariarum fortiorum supra debiliores $Ae + Ad - Ab - Ac$ æquivalent tendentiæ mediæ parallelæ 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero si AH continuetur in I, donec fiat $AI = 4AH$ & ducatur IK parallela

G

parallela

Tab. XIII. Fig. 128. rallela ipsi HG, erit etiam $IK = 4HG$ & $AK = 4AG$ (§. 268 Geom.). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleanat diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque AB, AC, AD & AE tendentiæ AK æquipollent, adeoque ipsa AK media est (§. 255). Q. e. d.

SCHOLIUM.

257. Ex Demonstratione adeo Problematis presentis patet, si mobile ad motum urgeatur viribus B, C, D & E eo modo, ut, si B sola ageret, mobile A progrediretur secundum directionem AB celeritate ut AB; si sola C ipsum impelleret, secundum directionem AC

Tab. XIII. Fig. 128. celeritate ut AC; si sola vis D mobile urgeret, secundum directionem AD celeritate ut AD, si denique sola vis E mobile A ad motum concitaret, secundum directionem AE celeritate ut AE; idem mobile A viribus B, C, D, E una agentibus moveri secundum directionem AK celeritate ut AK. Patet vero eodem prorsus modo tendentiam mediam determinari, si plures quotcumque dentur. Opus autem est in Demonstratione resolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonstrari possit, AK esse directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas sit ut 4 AG absque ea patet (§. 156).

CAPUT VI.

De Descensu Gravium in plano inclinato.

DEFINITIO XXXIV.

258. **P**lanum inclinatum est, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XXXV.

259. *Gravitatem absolutam* voco, qua corpus descendit libere in medio non resistente, seu in descensu libero ad motum sollicitatur.

DEFINITIO XXXVI.

260. *Gravitatem respectivam* appello, qua corpus descendit, parte aliqua ad superandam resistantiam impensa, seu qua in descensu per resistantiam impedito ad motum sollicitatur. Talis est, qua descendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad resistantiam plani vincendam impenditur, seu qua ad motum sollicitatur super plano inclinato.

THEOREMA XXXIII.

261. Si grave in plano inclinato consistit, gravitas respectiva est ad gravitatem absolutam ut altitudo plani AB ad longitudinem AC. Tab. III. Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D secundum directionem AC descendere nitatur in plano inclinato, libere autem descenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212); si erigatur in D, DG perpendicularis ad AC, & ducatur GF ipsi AC parallela occurrens ipsi DH in F, exponet DF gravitatem absolutam, DG vero partem, quæ resistantiam plani vincit, & FG gravitatem respectivam (§. 250, 260). Quodsi parallelogrammum DGF E compleatur; erit

Tab. III. erit $EF = DG$ & $FG = ED$ (§. 335 *Geom.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ut DF ad FG sive DE . Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares existant, *per hypoth.* inter se parallelæ sunt (§. 256 *Geom.*), adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti sunt, *per hypoth.* erit $DF : DE = CA : AB$ (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas absoluta ad respectivam ut CA ad AB (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

262. Cum adeo globus D super plano inclinato gravitate tantum respectiva gravitet; pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, si fuerit ad ipsum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC .

COROLLARIUM II.

263. Quodsi longitudo plani CA sumatur pro sinu toto, erit AB sinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ponderis super plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipsum sustentans, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM III.

264. Hinc gravitates respectivæ ejusdem corporis super diversis planis inclinatis sunt inter se ut sinus anguli inclinationis. Est enim ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas absoluta ad respectivam super eodem (§. 263) & ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas absoluta ad respectivam super hoc plano (§. cit.). Quare ut sinus anguli inclinationis planorum, ita sunt gravitates re-

spectivæ ejusdem corporis super iisdem Tab. III. (§. 196 *Arithm.*). Fig. 31.

COROLLARIUM IV.

265. Major ergo gravitas respectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa est, quo minor hic existit: cum crescentibus angulis crescant, decrescantibus decrescant sinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2. *Trigon.*).

COROLLARIUM V.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas respectiva degenerat in absolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas respectiva prorsus expirat, hoc est, grave secundum longitudinem plani nullum nisum exercet.

COROLLARIUM VI.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipsi æqualis est: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA XLIII.

268. *Invenire sinum anguli inclinationis plani, super quo data vi pondus datum sustentari possit.*

RESOLUTIO.

Fiat ut pondus datum D ad vim datam L , ita sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani (§. 262).

E. gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum: reperietur angulus inclinationis $2^\circ 52'$

$$\text{Log. } 1000 = 30000000$$

$$\text{Log. } 50 = 16989700 \}$$

$$\text{Log. Sin. tot. } 100000000 \}$$

Log. Sin. inclin. = 8 6989700, cui in tabulis quam proxime respondent $2^\circ 52'$.

THEOREMA XXXIV.

269. *Si pondus L juxta directionem perpendicularem AB descendit, & pondus*

Tab. III. Fig. 3 I. D juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut sinus anguli inclinationis C ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Ascendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam ascendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari descendat, per hypothesis erit altitudo, per quam ipsum descendit, ipsi CD æqualis. Altitudo igitur ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut DH ad CD. Enimvero si CD sumatur pro sinu toto, DH est sinus anguli inclinationis C (§. 2 Trigon.). Sunt ergo altitudines prædictæ ut sinus anguli inclinationis & sinus totus. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

270. Est igitur altitudo descensus CD ponderis L ad altitudinem ascensus DH ponderis D, ut reciproce pondus D ad pondus L ipsi æquiponderans (§. 263).

COROLLARIUM II.

271. Quare cum sit CD. L = DH. D (§. 297 Arithm.), & nilus atque renilus æquiponderantium D & L æquales sint (§. 75); momenta ponderum D & L sunt in ratione composita massarum & altitudinum, per quas in plano, sive inclinato sive perpendiculari, vel ascendunt vel descendunt (§. 159 Arithm.).

THEOREMA XXXV.

Tab. XIII. Fig. 129. n. 1. 2. Si pondera E & D trahentia rectam AB habeant Centrum gravitatis commune in C; erunt ea inter se in ratione reciproca distantiarum CH & CI, nempe $E : D = CI : CH$.

DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendiculares, & ex Centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipsi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac si planis inclinatis BD & AE incumbere; perinde erit ac si in B suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod est ad D ut FB ad BD, & in A suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod est ad E ut AG ad AE (§. 261). Sit pondus prius P; alterum Q: erit $P : D = BF : BD$ & $Q : E = AG : AE$. Enimvero, propter parallelismum linearum GE & DF atque AB, angulus $GEA = HAC$ & $FDB = ABD$ (§. 233 Geom.). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I sint recti per construct. erit $BF : BD = CI : CB$ & $AG : AE = CH : CA$ (§. 267 Geom.), consequenter $P : D = CI : CB$ & $Q : E = CH : CA$ (§. 167 Arithm.). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem sint in æquilibrio per demonstr. erit $P : Q = AC : CB$ (§. 144), consequenter $P : E = CH : CB$ (§. 200 Arithm.), & hinc tandem $D : E = CH : CI$ (§. 199 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

273. Quoniam pondera D & E sibi invicem æquilibrantur, si sub obliqua quacunque directione rationem reciprocam distantiarum habuerint, hoc est, si $D : E = CH : CI$ (§. 272); est vero $E. CH = D. CI$ (§. 297 Arithm.); vires æquiponderantium etiam sub directionibus obliquis æstimandæ

mandæ sunt per factum ex massa in distantiam a Centro gravitatis.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 27. 274. Si pondera sive ex Centro gravitatis communi, sive ex alio quocunque extra illud posito suspendantur; momenta sunt in ratione composita massarum & distantiarum a puncto suspensionis N: nempe in eo situ, quo Centrum gravitatis ipsius P descendit per altitudinem IK & Centrum gravitatis alterius ponderis Q ascendit per altitudinem OH, ut Q. ON & P. IN (§. 146. 271. 273). Sed cum verticales ad N sint æquales (§. 156 Geom.), & lineæ directionum KI & HO sint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); ON : NI = HO : IK (§. 267 Geom.). Quare momenta ponderum Q & P sunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc est, in ratione composita massarum & altitudinum, per quas perpendiculariter Centrum gravitatis vel ascendit, vel descendit. Superior igitur (§. 146. 273) constituta virium æstimatio cum præfente consentit.

COROLLARIUM III.

275. Vires adeo æquales sunt, quæ pondera elevant per altitudines ipsis reciproce proportionales.

SCHOLIUM I.

276. Hoc principium ad demonstrandas machinarum vires sine demonstratione assumit CARTESIUS (a). Ait enim, quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli potest, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

SCHOLIUM II.

277. Hinc etiam ratio patet, cur carrus onustus difficilins trabatur super plano inclinato, quam super horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ est ad pondus totum ipsius in ratione altitudinis ad

longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilins trabatur in via lutosa & arenosa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si enim recta FD sit longitudini plani AE parallela, hoc est, linea directionis curvus, atque FC altitudini ED parallela ope perpendiculari definiatur, & ex C ducatur perpendicularis DC ad FD, erit $y = 0$ & $0 = x$ (§. 233 Geom.) hincque $y = x$. Quare ob rectos D & B, FC : FD = EA : EB (§. 267 Geom.).

Tab. III. Fig. 32.

THEOREMA XXXVI.

278. Vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & velocitatum.

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, sed non actu moveant pondera, sunt vires mortuæ (§. 9); adeoque in quacunque directione in ratione composita massarum & distantiarum a centro motus (§. 146. 273). Enimvero si ponamus Centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æqualiter, eodem tempore describent arcus distantis proportionales (§. 138. 412 Geom.): qui cum sint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 185 Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

279. In conatu jam adest celeritas initialis de, elementum ejus, quæ moveretur mobile, si motus actu sequeretur. Quare cum celeritas sit ut elementum ejus de; mirum non est, quod vires hic sint in ratione celeritatum producturarum & massarum composita. Sunt nempe in ratione composita massarum & celeritatum initialium, quibus

(a) In Tract. de Mechanica (qui inter Posthuma habetur) pag. 13.

instruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, consequenter distantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.

COROLLARIUM.

280. Quodsi ergo massæ æquales sunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA XXXVII.

Tab. III. Fig. 33. 281. Pondera E & F super planis inclinatis AC & CB ejusdem altitudinis CD æquiponderantia sunt ut longitudo planorum AC & CB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant, per hypoth. eadem vis, quæ pondus E super plano inclinato AC sustentare valet, etiam alterum F super plano inclinato CB sustentabit, & hæc dicatur V. Est vero $V:E = DC:AC$ & $V:F = DC:CB$ (§. 262). Ergo $E:F = AC:CB$ (§. 196 Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

Tab. III. Fig. 34. 282. SIMON STEVINUS (a) ingeniosam affert hujus Theorematis demonstrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo GIH, illud per se patet, partes GK & HK æquilibrari: æquipollet enim GKH catenæ in punctis G & H suspensæ. Quodsi jam IH non æquiponderet ipsi GI, pars præponderans prævalebit, & motus perpetuus catenæ circa GIH orietur; qui cum sit absurdus, patet partes catenæ IH & GI, adeoque pondera quævis alia, quæ itidem sunt ut longitudo planorum IH & GI æquiponderare. Supponit adeo

(a) Element. Static. Lib. 1, Prop. 19. f. 448. Опетит.

motum perpetuum esse absurdum, seu id Axiomatis instar sumit.

COROLLARIUM.

283. Quodsi communis planorum altitudo CD sumatur pro sinu toto, CB & CA sunt cosecantes angulorum inclinationis A & B (§. 11 Trigon.). Pondera igitur F & E super planis inclinatis CB & CA æquiponderantia sunt ut cosecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut sinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 Trigon.).

THEOREMA XXXVIII.

284. Grave super plano inclinato descendit motu uniformiter accelerato.

DEMONSTRATIO.

Gravitas respectiva est ad absolutam in constante ratione (§. 261), cumque adeo hæc non mutetur, (§. 78), illa quoque omni descensus tempore eadem. Quare cum eodem semper modo vis gravitatis grave ad motum sollicitet (§. 25); singulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato descendit (§. 67). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

285. Sunt igitur spatia descensus in ratione duplicata temporum (§. 80), itemque velocitatum (§. 81).

COROLLARIUM II.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus crescunt secundum numeros impares (§. 84).

COROLLARIUM III.

287. Tempora vero sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem ratione existunt (§. 83.)

COROLLARIUM IV.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato descendente decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM V.

289. Descensus adeo gravium super planis inclinatis iisdem legibus adstringitur, quibus descensus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLIUM.

290. Hinc GALILÆUS leges illas exploraturus experimenta sumsit in planis inclinatis (§. 89): tardior enim, ut in Theoremate sequente demonstratur, est descensus in plano inclinato, & hinc spatia facilius notari possunt.

THEOREMA XXXIX.

291. Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati est ad celeritatem quam perpendiculariter descendens eodem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatam descendit, producuntur a gravitate respectiva, dum vero perpendiculariter descendit, ab absoluta. Si celeritates sint ut C & c; tempusculum dt, massa mobilis m, gravitas absoluta & respectiva ut G & g, erit

$$G : g = \frac{m d C}{dt} : \frac{m d c}{dt} \quad (\S. 112),$$

$$= dC : dc \quad (\S. 181 Arithm.) = C : c \quad (\S. 187 Arithm.).$$

Sed G ad g ut longitudo plani ad altitudinem ipsius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis t celeri-

tates C & c sunt ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato descendentis est in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis (§. 263).

THEOREMA XL.

293. Spatium a gravi in plano inclinato confectum AD est ad spatium AB quod eodem tempore in perpendiculari percurret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in descensu perpendiculari in fine temporis dati. Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in D constitutum habet, duplum ipsius AD spatium confecisset (§. 288). Similiter si ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in B habet, duplum ipsius AB confecisset (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur spatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percursa, per hypoth. ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB sunt ut eadem celeritates (§. 181 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

294. Est igitur spatium in plano inclinato percursum ad spatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari descenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 291), itemque ut sinus anguli inclinationis B ad sinum totum (§. 292).

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 35. 295. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit $AC:AB = AB:AD$ (§. 330 *Geom.*). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter descendit in B, super plano inclinato perveniet in D (§. 294).

COROLLARIUM III.

296. Dato igitur spatio descensus perpendicularis in altitudine plani AB, habetur spatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, si ex B ad AC perpendicularis dimittatur.

COROLLARIUM IV.

297. Similiter dato spatio in plano inclinato percurso AD, invenitur spatium AB per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidisset, si ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 36. 298. Cum in semicirculo anguli D, E, F, C, recti sint (§. 317 *Geom.*); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore descendit, quo nempe per diametrum AB, si ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 296).

PROBLEMA XLIV.

Tab. III. Fig. 35. 299. Dato spatio AD in plano inclinato AC percurso; determinare spatium quod in alio plano inclinato AF eodem tempore percurreret.

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B: erit AB spatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§. 297).
2. Quare si ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE

spatium quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A in B (§. 296); consequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. Q. e. i. & d. Tab. III. Fig. 35.

COROLLARIUM.

300. Cum sit AB ad AD ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis C & AB ad AE ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis F (§. 294); spatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diversis planis inclinatis percurrere valet, sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F (§. 196 *Arithm.*) & reciproce ut gravia per eadem plana descendunt (§. 283); consequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AC & AF æque-altorum (§. 281). Et hinc Probema per calculum variis modis solvitur.

THEOREMA XLI.

301. *Velocitates, quæ in diversis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, sunt ut spatia eodem tempore percursa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE; erunt AD, AB & AE spatia eodem tempore percursa (§. 299). Cum adeo sit, ut AB ad AC ita velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam, & ut AB ad AF ita velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam (§. 291), consequenter ob $AB:AC = AD:AB$ & $AB:AF = AE:AB$ (§. 330 *Geom.* & §. 169 *Arithm.*), velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam

Tab. III. Fig. 35. fitam ut AD ad AB & velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AE ad AB (§. 167 *Arithm.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquisitæ sunt ut spatia AD & AE isto tempore percurfa (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Velocitates in diversis planis inclinatis eodem tempore acquisitæ sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera per ista plana descendencia, necnon reciproce ut eorundem planorum æque altorum longitudines AC & AF (§. 300).

THEOREMA XLII.

303. Si grave per planum inclinatum AC ad lineam horizontalem CB pervenit; eandem celeritatem acquisivit quam in descensu perpendiculari AB usque ad eandem lineam horizontalem CB acquireret.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD spatium eodem tempore percursum, quo percurritur AB (§. 296), adeoque celeritas per AB acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquisita est ad celeritatem per AD acquisitam in ratione subduplicata ipsius AC ad AD (§. 287) = $\sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum sit $AC : AB = AB : AD$ (§. 330 *Geom.*), adeoque AC ad AD in ratione duplicata $AC : AB$ (§. 216 *Arithm.*) = $AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arithm.*), consequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} = AC : AB$; erit
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

celeritas per AC acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 167 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquisita est celeritati per AB acquisitæ æqualis (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

304. Grave igitur per diversa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

COROLLARIUM II.

305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 304). Quare si per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac si statim ab initio in plano inclinato HK motum fuisset.

COROLLARIUM III.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior sit quam per perpendicularum IM (§. 291), grave per LI & IK descendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam si constanter per LM perpendiculariter descendisset (§. 90 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

307. Quodsi grave descendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodsi ergo ubi ad M pervenit, motum suum continnet per MN, nec flexus in M motui officiat, nisi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. cit.). Quamobrem si ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum est, quam acquireret per OQ, seu QR (§. cit.). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquireret celeritatem, ac si perpendiculariter per QR descendisset.

COROLLARIUM V.

Tab. 308. Cum itaque curvæ ex rectis in-
III. finite parvis componantur; grave per
Fig. 38. curvam QS descendens eandem adipiscitur
celeritatem, quam ex casu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA XLIII.

Tab. 309. Tempus descensus per planum
III. inclinatum AC est ad tempus descensus
Fig. 35. perpendicularis per AB, ut longitudo plani
AC ad altitudinem AB: tempora
vero descensuum per diversa plana inclinata æque-alta AC & AG sunt ut
longitudines planorum.

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquisita (§. 288), & tempus per AB æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquisita (§. 9). Sed celeritates istæ dimidiæ æquales sunt (§. 303). Tempora igitur sunt ut AC & AB (§. 32). Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, tempora descensuum per AC & AG esse ut AC & AG. Quod erat alterum.

THEOREMA XLIV.

Tab. 310. Si diameter circuli AB fuerit
III. ad lineam horizontalem LM perpendicularis;
Fig. 36. grave ex quovis peripheriæ puncto D, E vel C eodem tempore descendit in B, quo nempe diametrum AB percurrit.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC: erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut BG ad

BC (§. 309). Tempus vero, quo GB Tab. III. percurritur, est ad tempus, quo AB percurritur, in ratione subduplicata BG ad AB (§. 87), hoc est, cum sit $BG : BC = BC : AB$ (§. 330 Geom.) in ratione BG ad BC (§. 216 Arithm.). Tempus adeo descensus per GB ad tempus descensus per BC & per diametrum AB eandem rationem habet (§. 167 Arithm.). Ergo tempus quo percurritur BC æquale est tempori, quo AB percurritur (§. 177 Arithm.). Q.e.d.

THEOREMA XLV.

311. Descensus per semicycloidem DEF Tab. III. & per quemcunque ejus arcum DG sunt æquidistanti. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infinitesimas resolutus, quarum una sit Mm, & semicyclois DEF in numero totidem divisa, quarum una Ee: erit $DG : DF = Mm : Ee$ (§. 171 Arithm.). Concipiamus porro semicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut sit $DF : DG = DE : DM = Ee : Mm$ (§. 167 Arithm.). Ducantur denique semiordinatæ TE, te, NM, nm, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam $DF = 2AD$, $DE = 2DB$, $DM = 2DO$ & $DG = 2DL$ (§. 168 Analys. infinit.), & $DF : DE = DG : DM$, per hypoth. erit $DA : DB = DL : DO$ (§. 181 Arithm.), & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 260 Arithm.). Quoniam vero $DA : DB = DB : DT$ (§. 330 Geom.); erit $DA^2 : DB^2 = DA : DT$ (§. 216. 259 Arithm.). Similiter quia $DA : DL = DL : DH$ & $DA : DO = DO : DN$; erit $DA^2 : DL^2 = DA$.

Tab. III. Fig. 39. $\text{DA} : \text{DH} \& \text{DA}^2 : \text{DO}^2 = \text{DA} : \text{DN}$
 (§. cit. Arith.), consequenter $\text{DL}^2 : \text{DO}^2$
 $= \text{DH} : \text{DN}$ (§. 196 Arithm.). Quamobrem ulterius $\text{DA} : \text{DT} = \text{DH} : \text{DN}$
 (§. 167 Arithm.), & $\text{AT} : \text{DT} = \text{HN} : \text{DN}$
 (§. 193 Arithm.), adeoque $\text{AT} : \text{HN} = \text{DT} : \text{DN}$
 (§. 173 Arithm.) & $\sqrt{\text{AT}} : \sqrt{\text{HN}} = \sqrt{\text{DT}} : \sqrt{\text{DN}}$
 (§. 260 Arithm.). Sed ut $\sqrt{\text{AT}}$ ad $\sqrt{\text{HN}}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 307. 87), ita etiam DB ad DO (§. 310. 301), immo DE ad DM (§. 168 *Analys. infinit.* & §. 181 Arithm.). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut Ee ad Mm per demonstr. consequenter cum tempus per Ee sit ut spatium Ee per velocitatem in E divisum, & tempus per Mm ut spatium Mm per velocitatem in M divisum (§. 37); tempus per Ee æquale est tempori per Mm (§. 185, 149 Arith.), & hinc tempus per omnia Ee, hoc est per DF, æquale est tempori per omnia Mm, hoc est per DG. (§. 88 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 40. 312. Si plana DC & FH cum horizontalibus CK & HI æquales efficiunt angulos; similiter inclinata sunt.

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum efficiunt obliquum (§. 258); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus suis efficiunt, distingui potest eorum inclinatio (§. 476 Geom.). Jam anguli æquales sunt similes (§. 174 Geom.), adeoque per eos planorum inclinatio distingui nequit (§. 24 Arithm.). Ergo plana, quæ cum suis horizonta-

libus angulos efficiunt æquales, similiter inclinata sunt (§. cit.). Q. e. d.

Tab. III. Fig. 40.

COROLLARIUM.

313. Cum in planis inclinatis similibus DC & FH anguli C & H sint æquales (§. 312) & demissis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 78 Geom.); erit $\text{CD} : \text{FH} = \text{DK} : \text{FI}$ (§. 267 Geom.), hoc est, altitudines longitudinibus proportionales sunt.

THEOREMA XLVII.

314. Si duo gravia per duo aut plura plana AB, BC & EG, GH similiter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe sit $\text{AB} : \text{BC} = \text{EG} : \text{GH}$; tempora descensus erunt in subduplicata ratione longitudinum AB, BC & EG, GH.

DEMONSTRATIO.

Sit $\text{AB} : \text{BC} = a : b$; erit ob $\text{AB} : \text{BC} = \text{EG} : \text{GH}$, per hypoth. $\text{EG} = ma$ & $\text{GH} = mb$. Cum plana AB & EG sint similiter inclinata, per hypoth. non aliter quam partes ejusdem plani percurruntur, adeoque tempus per AB est ad tempus per EG ut \sqrt{a} ad \sqrt{am} (§. 287). Eodem modo ostenditur, esse tempus per BC ad tempus per GH ut \sqrt{b} ad \sqrt{mb} , & ita porro, si plura fuerint plana. Quare tempus per $\text{AB} + \text{BC}$ est ad tempus per $\text{EG} + \text{GH}$ ut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma} + \sqrt{mb}$ (§. 192 Arithm.), hoc est, ut $1 : \sqrt{m}$ (§. 181 Arith.) seu ut $\sqrt{a+b}$ ad $\sqrt{ma+mb}$ (§. 178 Arithm.): quæ ratio subduplicata planorum $\text{AB} + \text{BC}$ & $\text{EG} + \text{GH}$. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

315. Quoniam $\text{AB} : \text{EG} = \text{AP} : \text{EQ}$ & $\text{CB} : \text{GH} = \text{BN} : \text{GO}$ (§. 313) sunt propor-

Tab. III. portiones inter se similes, ob $AB : EG = CB : GH$ per *hypoth.* erit $AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO$ (§. 192 *Arithm.*) = [ob $AP + BN = DM + MK = DK$ & $EQ + GO = FL + LI = FI$, (§. 226 *Geom.*)] $DK : FI$. Tempus igitur per plana similia & proportionalia AB, BC & EG, GH , cum sit in ratione subduplicata $AB + BC$ & $EG + GH$ (§. 314), in

ratione quoque subduplicata altitudinum DK & FI existit.

COROLLARIUM II.

316. Et quia superficies curvæ AB & DE similes ac similiter positæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & similibus constant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione subduplicata AB ad DE .

Tab. III. Fig. 41.

CAPUT VII.

De Ascensu Gravium, cum Perpendiculari, tum in plano inclinato.

THEOREMA XLVIII.

317. *SI grave, in medio non resistente, vi impressa, sive perpendiculariter sive per planum inclinatum ascendit; motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impressa perpendiculariter ascendit, a vi gravitatis absolutæ secundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum ascendit, a vi gravitatis respectivæ secundum directionem plani (§. 260) continuo deorsum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam absolutæ, quam respectivæ in omnibus locis, per quæ grave descendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), consequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

318. Grave igitur, sive perpendiculariter sive per declivem, in medio non resistente ascendens spatium percurrit subduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi describeret cum ea celeritate quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM II.

319. Ejusdem igitur spatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decrescunt ut numeri impares 7, 5, 3, 1, (§. 98); adeoque ascensus tandem sistitur: consequenter ubi vis impressa fuerit absumta, corpus vi gravitatis rursus descendit.

COROLLARIUM III.

320. Sunt adeo inverse ut spatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e.g. tempus in quatuor partes divisum; momento primo grave A descendit per spatium 1, B ascendit per 7; secundo A descendit per 3, B ascendit per 5; tertio A descendit per 5, B ascendit per 3; ultimo A descendit per 7, B ascendit per 1 (§. 86. 319).

COROL.

COROLLARIUM IV.

321. Unde grave vi impressa ascendens ad eam altitudinem ascendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua sursum propellitur.

COROLLARIUM V.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim ascendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non resistente.

PROBLEMA XLV.

323. Dato tempore quo grave impetu impresso ad altitudinem datam ascendit; determinare spatia singulis momentis confecta.

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem descendisse, & quærantur spatia singulis momentis percurra (§. 94): hæc enim inverso ordine sumta eadem sunt cum spatiis ascensus quæsitis (§. 320).

Ex. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 secunda ascendit per interval- lum 240 pedum. Quærantur spatia singulis temporibus confecta? Quodsi corpus descendisset, primo minuto descendisset per 15 pedes, secundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque ascendit per 105, secundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15. pedes.

PROBLEMA XLVI.

324. Dato tempore quo grave vi impressa ad datam altitudinem ascendit; determinare tempus quo ad altitudinem aliam datam pervenit.

RESOLUTIO.

Quæratum tempus, quo grave per altitudinem desideratam decidere potest

(§. 95): eodem enim ad eandem ascendet (§. 320. 322).

Vide supra exemplum Probl. II. (§.95).

THEOREMA XLIX.

325. Vires corporum vivæ sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Corpus E cadendo per AB acquirit vim ascendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiscitur, qua per altitudinem CD elevari potest (§. 322). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur, in ratione composita altitudinum AB & CD atque massarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ consumuntur. Sed AB & CD sunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per istas altitudines acquisitarum (§.86). Ergo vires E & F sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote, non solo nisu, sed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Constat igitur vires vivas esse in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Q. e. d.

Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM.

326. Quare si massæ fuerint æquales; vires sunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 Arithm.)

SCHOLIUM I.

327. Errant qui promiscue vires omnes in ratione composita massarum & velocitatum esse statuunt, propterea quod mortuæ in eadem

dem deprehenduntur (§. 278). *Errorem communem detexit & emendavit (a) Vir illustris LEIBNITIUS. Aliam Theorematis Leibnitiani demonstrationem invenit, & per litteras mecum pro humanitate sua communicavit Celeberrimus BERNOULLIUS, quam ipsis Viri ingeniosissimi verbis huc transcribo.* „Concipe, inquit, corpus C

Tab. IV. „ moveri oblique in elastrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP „ Fig. 43. „ existente 30 gr. cujus nempe sinus CP „ est semissis radii CL. Suppono autem „ eam esse resistentiam in elastro, ut ad „ illud tendendum requiratur præcise „ unus velocitatis gradus in illo corpore, „ si perpendiculariter impingeret. Quid „ ergo jam fiet post incursionem obliquam „ corporis C in elastrum L? Quoniam „ motus per CL componitur, ut notum „ est, ex duobus collateralibus per CP „ & PL (vide §. 245), & cum CP, secundum quam corpus directe impingit in „ elastrum L, exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, consumetur hic „ motus per CP, tenso elastro (perinde „ enim esset ac si corpus C celeritate CP „ perpendiculariter incurreret in elastrum, „ quod per hypothesein eam celeritatem „ destruere potest), remanente corporis „ celeritate & directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit = PL = $\sqrt{3}$ „ (ponitur enim CL = 2), & applicato in „ M alio simili elastro faciente cum LM „ angulum LMQ, cujus sinus LQ = CP = 1; „ per eandem rationem manifestum est, „ corpus C post tensionem elastri L ten- „ surum esse elastrum M, amisso motu per „ LQ & servato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat MN = QM „ = $\sqrt{2}$, ibique substituto elastro simili „ tertio constitente cum MN angulum „ MNR semirectum, quo scilicet MR iterum sit = CP = 1; patet similiter „ motum per MR totum impendi in „ tensionem elastri N, corpore interim

(a) Acta Eruditorum, An. 1686. p. 161. & 1699.

1. „ moveri pergente directione & celeritate „ RN = 1. Denique si hac celeritate resis- „ dua impingat perpendiculariter in el- „ strum O, huic flectendo totam suam vim „ reliquam dabit; ipsum itaque corpus „ ad quietem redigetur. Hicce ita præ- „ missis; patet nunc potentiam corporis „ C tantam fuisse, ut per se solum ten- „ dere possit præcise quatuor elastra talia, „ ad quæ singula seorsim tendenda requi- „ ritur dimidia velocitas corporis æqualis „ ipsi C; adeoque cum effectus illius qua- „ druplo major sit quam effectus hujus, „ evidens est quoque vim corporis velo- „ citate 2 gr. quadruplam esse vis corpo- „ ris ejusdem vel æqualis velocitate 1 gr. „ Haud absimili modo demonstrarem cor- „ pus C, velocitate 3 gr. tendere posse 9 „ elastra, ad quorum unum tendendum „ unus velocitatis gradus in eo corpore „ requiritur, & tandem in genere nume- „ rum elastrorum tensorum semper esse „ quadratum numeri graduum velocitatis. „ Unde igitur sequetur, vires corporum „ æqualium esse in duplicata ratione celi- „ ritatum. Q. e. d.

Tab. IV. Fig. 43.

SCHOLIUM II.

328. *Prodiit nuper Parisiis Tractatus Mathematici hujus eminentis (b), in quo hanc virium mensuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnatum multo apparatus stabilit. Præterea Viri celeberrimi GRAVESANDIUS (c), HERMANNUS & BÜLFINGERUS (d) eandem mensuram aliis modis demonstrarunt, & POLENIUS (e) experientis confirmavit. Ego in Principiis Dynamicis (f) Analyti vere Dynamica eandem virium mensuram erui. Quæ vires vivas a mortuis non distinguant, vires promiscue*

(b) *Dissertation sur les Loix de la Communication du Mouvement*, à Paris 1727.

(c) In *Element. Phys.* Tom. I. p. 111. Edit. postea.

(d) In *Comment. Acad. Scient. Petropoliensis* PP. 1. 45.

(e) In *Tractatu de Castellis*, p. 65. Sc. 1699.

(f) In *Comment. Acad. Scient. Petropoliensis* p. 251.

miscue æstimant per celeritatem in massam ductam.

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 39. Si grave vel perpendiculariter per AD, vel per quamcunque superficiem FED. descendat & impetu concepto per aliam DC rursus ascendat; in punctis æque-altis veluti in G, H & Q, eandem vim eandemque celeritatem habebit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave, vi cadendo per AD vel FD acquisita, ad C usque ex D per DGC ascendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipsi superest vis, qua ad C usque ascendere valet. Sed eandem vim adipiscitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q

(§. cit.). In punctis adeo æque-altis Tab. III. G, H & Q eandem vim habet. Quod Fig. 39. erat unum.

Sunt autem vires cadendo acquisitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales sint, per demonstr. celeritatum quoque quadrata, consequenter ipsæ celeritates æquales sunt. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

330. Quodsi adeo grave per superficiem quamcunque FED descendat & per aliam similem ac æqualem similiterque positam DGC rursus ascendat; idem omnino est, ac si eadem linea eadem velocitate singulis sui partibus bis percurreretur (§. 329). Unde tempora descensus & ascensus per æqualia spatia æqualia sunt (§. 25).

CAPUT VIII.

De Descensu & Ascensu Corporum in Lineis Curvis.

DEFINITIO XXXVII.

331. CURVA Isochrone dicitur, in qua grave sine acceleratione descendit, hoc est, æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva Isochrone tempora descensus sunt ut altitudines ejusdem.

SCHOLIUM.

333. Problema de Curva Isochrone inveniendi proposuit LEIBNITIUS (a), & suppressa analysi demonstrationem syntheticam

(a) *Nouvelles de la République des Lettres*, Septembre 1687.

dedit (b). Dedit autem solutionem ope Calculi differentialis tunc temporis nascentis JACOBUS BERNOULLI (c): dedere post eum alii alias.

PROBLEMA XLVII.

334. Invenire Curvam Isochronam. Tab. XIII.

RESOLUTIO.

Sit linea horizontalis BC, altitudo per quam grave ad eandem descendit AC, Curva Isochrone GMB. Sit AP = x, PM = y; erit, ducta pm ipsi PM infinite propinqua, Pp = dx, mR = dy

(b) In *Actis Erudit.* An. 1689. p. 196. & seqq.
(c) In *Actis Erudit.* An. 1690. p. 217. & seqq.

Tab. XIII. Fig. 130. $= dy$ & $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam in Curva Isochrone tempora descensus sunt ut altitudines, per quas descenditur (§. 332); erit tempus per Mm ut Pp , adeoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquisita eadem est cum celeritate in P acquisita (§. 308), adeoque in ratione subduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arcus infinite parvus Mm percurritur, $= \sqrt{x}$. Jam cum per arculum Mm grave motu æquabili feratur, erit ipse tanquam spatium a mobili percursum (§. 12) $= dx\sqrt{x}$ (§. 34). Est itaque in Curva Isochrone

$$\frac{dx\sqrt{x} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{x dx^2 = dx^2 + dy^2}$$

hoc est $\frac{dx^2(x-1) = dy^2}{dx\sqrt{(x-1)} = dy}$

Fiat $x-1 = v$
erit $dx = dv$

$$\frac{dx\sqrt{(x-1)} = dy}{dx\sqrt{(x-1)} = dv\sqrt{v} = v^{1:2}dv}$$

adeoque $v^{1:2} dv = dy$

$$\frac{\frac{2}{3}v^{3:2} = y}{\frac{4}{5}v^3 = y^2, \text{ sive } v^3 = \frac{5}{4}y^2}$$

Apparet adeo, Curvam Isochronam esse e numero Paraboloidum quadratico-cubicalium (§. 519 *Analys. finit.*), cujus abscissa $= u$, semiordinata $PM = y$, parameter $\frac{5}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, est x , sed $v = x-1$; curva BMG lineam verticalem AC non secat in A , sed in G ; consequenter mobile cadere debet per altitudinem AG , antequam in curva GMB descendere possit. Et quia $AG = 1$, parameter vero $= \frac{5}{4}$;

Tab. XIII. Fig. 130. si fit parameter $= p$, erit $p = \frac{5}{4}AG$, adeoque $\frac{4}{5}p = AG$, hoc est, altitudo AG , per quam descendere debet grave antequam per curvam ita descendere potest ut altitudines descensus sint tempori proportionales, est quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile adeo non ex quiete descensum inchoat, sed ea celeritate quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem.

SCHOLIUM.

335. *Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter se parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero Problema in hypothese directionum convergentium solvit VARI-IGNONIUS (a). Labet igitur solutionem in eadem hypothese subjungere.*

PROBLEMA XLVIII.

336. *Invenire Lineam Isochronam in hypothese directionum in Centro Telluris convergentium.*

RESOLUTIO.

Sit distantia AC puncti horizontalis A , unde grave cadit, a centro Telluris $C = b$, $AP = x$ ut ante, AN arcus radio AC descriptus $= y$, quia ad AC perinde ac in Problemate præcedente semiordinate ad eandem altitudinem perpendicularis (§. 38 *Analys. infinit.*). Sit porro radius Cn ipsi CN infinite propinquus, & radiis CP atque Cp particula infinite parva Pp differentibus describantur arcus concentrici PM & pm ; erit $MR = Pp = dx$, $Nn = dy$ &

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scienc. An. 1699.* p. 1. & seqq.

Tab. & ob similitudinem sectorum CN & XIV. a. CmR (§. 138, 412 Geom.).

Fig. CN: Nn = Cm: mR

131. $b : dy = b - x :$

adeoque $mR = (b - x) dy : b$.

Porro ob angulum ad R rectum (§. 38 *Analys. infinit.*).

$MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*)
adeoque $Mm^2 = dx^2 + (b - x)^2 dy^2 : b^2$

$= (b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2) : b^2$

Enimvero, vi *Analyseos* præcedentis (§. 334)

$Mm^2 = x dx^2$

Ergo $x dx^2 = (b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2) : b^2$

$\frac{b^2 x dx^2 - b^2 dx^2}{b dx \sqrt{(x - 1)}} = \frac{(b - x)^2 dy^2}{(b - x) dy}$

$\frac{b dx \sqrt{(x - 1)}}{b - x} = dy$

$\int \frac{b dx \sqrt{(x - 1)}}{b - x} = y$

Cum y sit arcus AN, & eo dato determinetur punctum M, ducto ex centro C radio CN & intervallo CP ob $AP = x$ noto, seu $= b - x$, arcu PM; non alia re opus est, quam ut arcus AN ex assumpta AP sive x determinetur: id quod fit ope curvæ BQD. Si enim Elementum ejus $PpQq$ ponatur $= b dx \sqrt{(x - 1)} : (b - x)$; cum sit $Pp = dx$, erit semiordinata $PQ = b \sqrt{(x - 1)} : (b - x)$. Quare si area BPQ dividatur per $AB = 1$; prodibit recta arcui AN æqualis. Construatur itaque parallelogrammum rectangulum ABLK, æquale areæ BPQ, cujus altitudo constans $AB = 1$; erit $BL = AK = AN$ arcui; qui adeo circuli quadratura præsupposita determinari potest. Apparet ita-

que Curvæ Isochronæ in præsentī casu Tab. XIV. a. constructionem pendere a quadratura curvæ BQD & quadratura circuli. Fig. 131.

Ut curvæ BQD natura investigetur fiat

$$\frac{PQ = b \sqrt{(x - 1)} : (b - x) = 0}{\text{erit } x - 1 = 0}$$

$$x = 1$$

Patet adeo, semiordinata PQ evanescente, x degenerare in $AB = 1$, sive in B, ubi $PQ = 0$, esse AB adhuc $= 1$. Fiat porro $PQ = b \sqrt{(x - 1)} : (b - x) = \infty$

$$\frac{\text{erit } b - x = 0}{b = x}$$

Ergo ubi $AP = x$ degenerat in $AC = b$, semiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis est asymptotus curvæ BQD.

Ut curvæ BQD constr. & o detegatur, fiat $BP = v$, erit, ob $AP = x$ & $AB = 1$,

$$\frac{x = v + 1}{x - 1 = v}$$

$$PQ = \frac{b \sqrt{(x - 1)}}{b - x} = \frac{b \sqrt{v}}{b - v - 1}$$

Quoniam \sqrt{v} est semiordinata parabolæ, cujus vertex B, abscissa BP, parameter $AB = 1$ (§. 392 *Anal. finit.*); construatur circa axem BC parabolæ BHS, erit $PH = \sqrt{v}$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectæ AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*).

$CP : PH = CA : AV$

$b - v - 1 : \sqrt{v} = b : \frac{b \sqrt{v}}{b - v - 1}$

I

Est

Tab. XIV. a. Fig. 131. Est igitur $AV = PQ$, adeoque punctum curvæ Q , a qua constructio Isochronæ pendet, habetur si parallelogrammum $PAVQ$ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum, si sit $VQ = AP = y$ & $AV = PQ = x$, $AB = a$; erit

$$x = \frac{b\sqrt{(ay - a^2)}}{b - y}$$

$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b - y)^2}$$

$$x^2(b - y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

seu ob $(b - y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$

$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0$$

Si fiat $x = 0$

$$\text{erit } a^2b^2 - ab^2y = 0$$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

Est igitur semiordinata AB in origine abscissarum $A = a$, quod convenit cum superioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Analys. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Anal. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad Curvam Isochronam in hypothesi directionum convergentium eruatur, fiat præter $AB = 1$, $BP = v$, arculus mR , radio $CP = CR$ descriptus $= dz$, cum sit $Pp = dv$, erit $Mm^2 = dz^2 + dv^2$

(§. 417 *Geom.*). Est vero $Mm^2 = xdx^2$ Tab. XIV. a Fig. 131. vi superioris *Analys.* Quare cum fit

$$x = v + 1$$

$$\text{erit } dx = dv$$

$$\frac{dx^2 = dv^2}{x dx^2 = (v + 1) dv^2}$$

$$= v dv^2 + dv^2$$

Habemus itaque

$$\frac{dz^2 + dv^2 = v dv^2 + dv^2}{dz^2 = v dv^2}$$

$$\frac{dz = v^{1/2} dv}{z = \frac{2}{3} v^{3/2}}$$

$$\frac{\frac{2}{3} z^2 = v^2}{\frac{2}{4} z^2 = v^2}$$

hoc est, $\frac{2}{4} AB \cdot PM^2 = BP^2$

Quoniam PM est arcus circuli radio CP descriptus, Curva Isochrona BMC in hypothesi directionum convergentium transcendens est (§. 380 *Analys.*).

Ut Curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$ seu

$$\frac{dz}{dv} = \sqrt{v}$$

$$v = 0$$

$$\text{erit } \frac{dz}{dv} = 0$$

$$dv = \infty$$

Est vero in B , $v = 0$ & $dv = \infty$. Axis igitur CB curvam BMC in C tangit, adeoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quod si fiat $CP = 0$, arculus quoque radio CP descriptus $mR = dz = 0$: punctum ergo M coincidit cum C , adeoque curva BMC cum axe in C concurrat,

quæ

Tab. XIV. a. Fig. 131.
 quæ in B eam tangit. Necessè igitur est ut ibidem sit ad axem concava, consequenter punctum flexus contrarii habet.

Jam in puncto flexus contrarii M est $Mm^2 = CP. dPp$ (§. 309 *Anal. infin.*). Fiat igitur $CB = c$; cum sit $BP = v$, erit $CP = c - v$, adeoque $Pp = -dv$. Jam

$$dz = v^{1/2} dv$$

$$\text{adeoque } v^{-1/2} dz = dv$$

$$-v^{-1/2} dz = -dv$$

$\frac{1}{2} v^{-3/2} dz dv = -ddv = dPp$, ob constantem dz ,

$$\frac{1}{2} (c - v) v^{-3/2} dz dv = CP. dPp$$

Porro $Mm^2 = dz^2 + dv^2 = v dv^2 + dv^2$

Habemus itaque

$$v dv^2 + dv^2 = \frac{1}{2} (c - v) v^{-3/2} dz dv = \frac{1}{2} (c - v) v^{-1} dv^2$$

$$v + 1 = (c - v) : 2v$$

$$v^2 + v = \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} v$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v = \frac{1}{2} c$$

$$v^2 + \frac{3}{2} v + \frac{9}{16} = \frac{1}{2} c + \frac{9}{16}$$

$$v + \frac{3}{4} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16}\right)}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{9}{16}\right)} - \frac{3}{4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)} - \frac{3}{4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} AC. AB + \frac{1}{16} AB^2\right)} - \frac{3}{4} AB$$

ob $c + 1 = AC$.

Sit Cl ultimum elementum curvæ, erit $bl = dz$ & $bC = dv$, & ob rectum ad b (§. 38 *Anal. infin.*), bl ad bC ut sinus anguli bCl ad sinum anguli bC

(§. 33 *Trigon.*), adeoque $dv : dz = \sin. bCl : \sin. bC$. Si Cl sit ultimum curvæ elementum, punctum l infinite parvo intervallo ab axe AC distat, seu cum eo coincidit, atque adeo punctum l est in axe AC & angulus bCl idem cum ACG , intra quem curva BMC comprehenditur. Quare $dv : dz = \sin. ACG : \text{Cofin. ACG}$. Est vero $dz = dv \sqrt{v}$, adeoque $dz : dv = \sqrt{v} : 1 = \sqrt{BC} : \sqrt{AB}$. Est igitur sinus anguli ACG , intra quem curva continetur, ad ejus cofinum, in ratione subduplicata rectarum CB & BA (§. 159 *Aritb.*). Et per hoc Theorema, angulus ACG , consequenter arcus AG , determinatur, qui Curvæ Isochronæ toti construendæ sufficit.

Denique in æquatione $dz = dv \sqrt{v}$ substituatur valor ipsius $v = x - 1$, erit $dz = dx \sqrt{x - 1}$.

Fiat $dz = 0$

erit $dx \sqrt{x - 1} = 0$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$= AB$$

Quare cum x denotet altitudinem, per quam grave cadit, seu motus acceleratricem, & dz in puncto B sit $= 0$, ubi axis BC Curvam tangit, per demonstrata; grave non ex quiete motum in curva BMC incipere debet, sed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem AB .

Angulus, intra quem continetur Curva Isochrona in hypothesi directionum convergentium, determinatur, si super AC , hoc est recta inter locum A , un-

Tab. XIV. a. de descensus incipit, & Centrum
 Telluris C interjecta, describatur semicirculus; & in B, ubi Curva axem tangit, erigatur perpendicularis BD, factaque BE = BA ducatur ex C recta ED parallela CF perpendiculari BD ultra semicirculum continuata in F occurrens: est enim ACF angulus quaesitus, consequenter arcus AG ex centro C radio CA descriptus curvæ construendæ sufficit. Etenim AB:BD = BD:BC (§. 327 *Geom.*). Quare AB ad BD, in ratione subduplicata AB ad BC (§. 216, 159 *Arithm.*), seu AB:BD = $\sqrt{AB}:\sqrt{BC}$; consequenter $\sqrt{BC}:\sqrt{AB} = BD:AB$ aut BE (§. 169 *Arithm.*). Quoniam, FC parallela ipsi DE per construct. erit BD:BE = BF:BC (§. 268 *Geom.*), adeoque $\sqrt{BC}:\sqrt{AB} = BF:BC$ (§. 167 *Arithm.*). Est vero etiam BF:BC = Sin. BCF. Sin. CFB (§. 33 *Trig.*) = Sin. ACG: Cosin. ACG. Ergo Sin. ACG: Cos. ACG = $\sqrt{BC}:\sqrt{AB}$ (§. 167 *Arithm.*). Est igitur ACG angulus quaesitus.

Quodsi super AH = $\frac{1}{2}$ AC semicirculus AIH describatur, & in B perpendicularis excitetur, ductisque AI & IH fiat IK = AL = $\frac{1}{4}$ AB & LO = KA, erit O punctum axis, cui punctum flexus contrarii respondet. Est enim AB:AI = AI:AH sive $\frac{1}{2}$ AC (§. 330 *Geom.*), adeoque AI = $\sqrt{\frac{1}{2} AC \cdot AB}$ (§. 377 *Geom.*). Quare cum angulus AIK sit rectus (§. 317 *Geom.*), erit AK = $\sqrt{(\frac{1}{2} AC \cdot AB + \frac{1}{16} AB^2)}$. Et quia LB = $\frac{3}{4} AB$ & LO = AK per construct. erit BO = $\sqrt{(\frac{1}{2} AC \cdot AB + \frac{1}{16} AB^2)} - \frac{3}{4} AB$.

Quare in O est punctum axis, quod puncto flexus contrarii respondet.

SCHOLIUM I.

337. Atque ita Calculo analytico eruiamus præcipuas Curvæ Isochronæ proprietates in hypothesis directionum convergentium, quæ præsentis instituto inserviunt. Constat enim, quomodo sit construenda, supposita quadratura curvæ cujusdam per parabolam construendæ & quadratura circuli. Constat præterea, quænam sint puncta, quibus ductus curvæ determinatur, nempe quod in B axem tangat, eique convexitatem obvertat, punctum O respondeat flexui contrario, ita ut curva portioni axis OC concavitatem obvertat, in C denique eadem cum axe concurrat: tota autem intra angulum ACG contineatur. Quoniam tamen curva ista & rectificabilis, & quadrabilis est, quadraturam & longitudinem in Corollariis determinare libet.

COROLLARIUM I.

338. Quoniam $Mm = dx \sqrt{x}$ (§. 336) Tab. XIV. a. Fig. 131. Tab. XIII. Fig. 133. $= x^{1.2} dx$, erit arcus curvæ BM = $\frac{2}{3} x^{1.2}$ $= \frac{2}{3} x \sqrt{x}$. Sed $x = v + 1$ (§. cit.). Ergo BM = $(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}v) \sqrt{v+1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{AP \cdot \sqrt{AP}}{AB} - \frac{2}{3} AB$. Quare si super

AP describatur semicirculus & erecta in B perpendiculari BC & in D (est autem AD = $\frac{2}{3} AP$) perpendiculari DE ducatur recta AE occurrens ipsi DE in E, tandemque ex EA resecetur EG = $\frac{2}{3} AB$: erit AG longitudo arcus. Est enim AP:AC = AC:AB (§. 330 *Geom.*), adeoque AC = \sqrt{AP} , ob AB = 1. Porro, cum ED ipsi BC parallela (§. 256. *Geom.*), AB:AC = AD:AE (§. 268 *Geom.*). Ergo AE = $\frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{2}{3} \frac{AP \cdot \sqrt{AP}}{AB}$.

Quare cum GE = $\frac{2}{3} AB$, per constr. erit utique recta AG arcui curvæ æqualis.

COROL.

COROLLARIUM II.

Tab. 339. Quoniam Elementum areæ est XIV. a. sector infinite parvus $CmR = mR. \frac{1}{2} CR$

Fig. $= v^{1/2} dv (\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v) (\S. 336) = \frac{1}{2}cv^{1/2} dv$

131. $-\frac{1}{2}v^{3/2} dv$; erit area BMC $= \frac{1}{5}cv^{5/2} - \frac{1}{7}v^{7/2}$
 $= (\frac{1}{5}cv - \frac{1}{7}v^2) \sqrt{v} = (5cv - 3v^2) \sqrt{v} : 15$
 $= \frac{(5CB \cdot BP - 3BP^2) \sqrt{BP}}{15AB}$, ob $AB = 1$.

Quodsi fiat $v = c$, erit area integra $= (5c^2 - 3c^2) \sqrt{c} : 15 = \frac{2}{15}c^2 \sqrt{c} = \frac{2}{15}BC^2 \sqrt{BC} : AB$, denuo ob $AB = 1$.

SCHOLION II.

340. Quoniam $v = BP$, & area curva incipit in puncto B, non opus est, ut de quantitate adjicienda solliciti simus. Sed cum in Corollario primo origo ipsius x in A, curva autem in B: ideo pro x substitui debebat v ut constaret de quantitate adjicienda.

COROLLARIUM III.

341. Si CM ad PM perpendicularis ($\S. 38$ Anal. infinit.) fiat infinite magna, erit ea axi AC parallela & PM arcus, itidemque alter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrat ($\S. 82, 256$ Geom.). Quare cum x five AP, intuitu infinitæ b five AC, $= 0$; erit $b - x = b$, adeoque æquatio

$y = \int \frac{bdx \sqrt{(x-1)}}{b-x}$ ($\S. 336$) degenerat in sequentem $y = \int bdx \sqrt{(x-1)} : b$

$= \int dx \sqrt{(x-1)}$; qui est casus Leibnizianus ($\S. 334$).

SCHOLION III.

342. Cum Centrum Terræ ingenti admodum intervallo distet, & altitudines in quibus gravium descensus nobis usui esse potest, respectu illius distantie, sint admodum exigue; casus directionum parallelarum praxi satisfacit, qui etiam ob faciliorem curvæ descriptionem sese commendat ($\S. 334$ Mech. & $\S. 581$ Analys.). In illo igitur acquiescere.

poteramus, nisi nobis quoque propositum esset speciminibus illustribus docere, quomodo principis Mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in solvendis Problematis arduis sit utendum, & quo ordine ratiocinia sint concatenanda ut non perturbato animi statu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget de solutione generali Problematis in duplici hypothese hætenus considerati nonnulla addere. Nimirum solvimus Problema de curva Isochrone in hypothese accelerationis Galilæana, propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea capere licet, satisfacit, ita ut in locum hypotheseos naturæ quoad nos surrogari possit ($\S. 85$ & seqq.). Enim vero cum aliæ quoque hypotheses non sint impossibiles, atque Geometra sit Problema in omni hypothese solvere, quamdiu ignoratur quanam illarum sit hypothese naturæ; ut ostendamus restat quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem adeo solutionem hic imprimis admittimus, in usum Artis inveniendi; ut appareat progressus a solutionibus particularibus ad generales.

PROBLEMA XLIX.

343. Invenire Curvam Isochronam in quacunque accelerationis hypothese.

RESOLUTIO.

Quodsi acceleratio alia statuatur, Tab. XIV. a. quam quæ in hypothese Galilæana obtinet, directionibus parallelis manentibus, Curvæ Isochronæ BMC accedat curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem descripta, cujus semiorinatæ PN, GE expriment celeritates per abscissas iisdem respondentes AP, AG acquisitas.

Sit itaque $AP = x, PM = y, PN = v,$

I. 3.

repe-

Fig. 134.

Tab. XIV. a. Fig. 134. reperitur, eodem profus quo supra (§. 334) modo, $Mm = vdx$, ut adeo habeamus

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= v^2 dx^2 \\ \hline dy^2 &= v^2 dx^2 - dx^2 \\ \hline dy &= dx \sqrt{(v^2 - 1)} \end{aligned}$$

Quodsi jam fit $v = \sqrt{x}$, quemadmodum in hypothefi *Galileana*: prodibit $dy = dx \sqrt{(x - 1)}$, profus ut supra (§. cit.). Solutio itaque particularis convertitur in universalem, aut potius specialis in generalem, si pro \sqrt{x} pones v , id quod regulis Logicis, quas stabilivimus, ad amuffim congruit (§. 710 *Log.*).

Tab. XIV. a. Fig. 135. Quodsi magis arriferit ope loci sollicitationum centralium, seu Scalæ gravitatis IQO Problema solvere; pari facilitate idem præstatur. Accedat enim porro ad Curvam Isochronam BMC & curvam celeritatum ANE, Scala sollicitationum centralium IQO; & sit communis absciffa AP in altitudine acceleratrice $AP = x$, $PM = y$, $PN = v$, $PQ = g$; erit $v^2 = 2 \int g dx$ (§. 113). Quare si pro v^2 hunc valorem substituās, prodibit $dy = dx \sqrt{(2 \int g dx - 1)}$. Quodsi jam supponas, quemadmodum id obtinet in hypothefi *Galileana* (§. 112), gravitatem constantem, quæ adeo fit ut 1; erit $dy = dx \sqrt{(2 \int dx - 1)} = dx \sqrt{(2x - 1)}$, vel, cum hic sola ratio attendatur, minime autem magnitudo absoluta, $dy = dx \sqrt{(x - 1)}$, ut supra (§. 334).

SCHOLIUM.

344. In Curva Isochrone tempora descensus sunt ut altitudines per quas descenditur (§. 332). Inveniri autem possunt etiam Curvæ aliæ, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque constantem vel quomodocunque assignabilem habet. Quamobrem, in gratiam Artis inveniendi, solutionem Problematis generalem apponimus, sub quo Curva Isochrone tanquam casus particularis continetur.

PROBLEMA L.

345. Invenire Curvam, in qua grave descendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem per quam descendit relationem datam; seu ut tempora descensus habeant inter se relationem ex datis altitudinibus dato modo assignabilem; suppositis quacunque accelerationis lege, & directionibus sive parallelis, sive convergentibus.

RESOLUTIO.

Non differt resolutio Problematis præsentis a resolutione præcedentis, nisi quod circa axem communem describatur, præter curvam descensus BMC, curva celeritatis ANE, etiam curva temporis ASH. Nimirum grave in curva BMC ea lege descendit, ut in M sit celeritas ut semiordinata PN, tempus vero ut PS.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PS = t$, $PM = y$; erit $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, itemque, ob suppositum per Mm motum æquabilem, vdt , ut supra (§. 334).

Tab. XIV. a. Fig. 136.

$$v dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{v^2 dt^2}{v^2 dt^2 - dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}$$

$$dy = \sqrt{\frac{v^2 dt^2 - dx^2}{v^2}}$$

$$y = \int \sqrt{v^2 dt^2 - dx^2}$$

Quod si ergo, in dato casu speciali, v exprimatur per x & dt per dx , prodit æquatio curvæ descensus respondens.

Sit ex.gr. $v = \sqrt{x}$ & $t = x$, quemadmodum in Curva Isochrone, supposita accelerationis lege Galileana; erit $dt = dx$, adeoque $y = \int \sqrt{xdx^2 - dx^2} = \int dx \sqrt{x - 1}$, ut supra (§. 334).

Quod si quis in casu directionum convergentium Problema resolvere velit, non novo calculo opus est, sed in æquatione prima paulo ante (§. 336) inventa, pro $x dx^2$ substitui debet $v^2 dt^2$: quo factò habemus

$$v^2 dt^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{b^2}$$

$$\frac{v^2 b^2 dt^2}{v^2 b^2 dt^2 - b^2 dx^2} = \frac{b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2}{(b-x)^2 dy^2}$$

$$dy = \frac{b \sqrt{v^2 dt^2 - dx^2}}{b-x}$$

Quod si etiã hic, in dato casu speciali, v & t per x determinantur, æquatio curvæ descensus prodit.

Ex.gr. Sit ut ante $v = \sqrt{x}$, $t = x$, quemadmodum pro Curva Isochrone supposuimus; erit

$$dy = \frac{b \sqrt{xdx^2 - dx^2}}{b-x} = \frac{bdx \sqrt{x-1}}{b-x}$$

ut supra (§. 336).

SCHOLIUM.

346. Ubi adeo Problema in casu particulari

solutum, veluti in casu LEIBNITII, non difficilis est solutio universalis, quamcunque universalitatem eidem donare volueris: id quod etiã in aliis Problematis similiter obtinet. Enimvero ubi solutio generalis ad casum specialem applicanda, plus difficultatis oritur; quatenus nempe formulæ, qua per substitutionem prodeunt, vel summanda, vel ad quadraturas aut reëctificationes simpliciorum curvarum reducenda. Atque ea ratio est, cur Geometra eminentes Artem inveniendi sive Analysin promoturi parum solliciti fuerint de solutionibus generalibus, modo particulares dare possent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.

DEFINITIO XXXVIII.

347. Curva Isochrone paracentrica dicitur, per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiã Curva accessus & recessus æqualis.

Sit BMC curva quaesita, D punctum fixum in axe datum, DM esse debet ut tempus descensus ab A in M.

SCHOLIUM.

348. Problema de Curva Isochrone paracentrica inveniendâ primum propositum est a LEIBNITIO (a); sed cum solutu difficiliter sit priore, dudum intactum reliquerunt Geometra, donec tandem solutionem daret Jacobus BERNOULLI (b), & simul solutiones LEIBNITII Fratrisque Joannis (c) eliceret. Generalius deinde idem Problema solvit VARIGNONIUS (d). Labet hic dare solutionem præcedenti, quantum licet, asseruimus.

PROBLEMA LI.

349. Invenire Curvam Isochronam paracentricam.

RESO-

(a) In Actis Erudit. A. 1689. p. 198.
 (b) In Actis Erudit. A. 1694. p. 277.
 (c) Ibid. p. 371. 394.
 (d) In Comment. Academ. Reg. Scient. A. 1699. p. 9. & 1699.

RESOLUTIO.

Tab. XIV.b. Fig. 137. Sit A punctum, unde descensum in choat grave; D punctum, a quo vel recedit, vel ad quod accedit, prout casus tulerit. Radius AD describatur semicirculus ANF, ductisque ad punctum curvæ M rectis DM & Dm infinite propinquis, agantur ad axem normales NQ & PM, itemque nq, quæ erit ipsi NQ infinite propinqua. Ducatur NT tangens circulum in N (§. 38 Anal. infin.) & nO normalis ad NQ, tandemque radio DM arcus MR ex centro D.

Sit jam DN = DA = DF = a, DQ = z, DM = t, erit mR = dt, Qq = nO = dz, & QN = $\sqrt{a^2 - z^2}$ (§. 417 Geom.). Quærat jam, ut in Problemate anteriore de Curva Isochrone (§. 334 & 336) arcus Mm duplici modo, nempe 1°. ex principiis pure Geometricis, 2°. & ex principiis Mechanicis, seu conditione Problematis.

I. Quoniam TN circulum tangit in N, per construct. angulus TND rectus est (§. 38. Anal. infin.), adeoque $\triangle DNQ \sim \triangle QNT$, seu angulus DNQ = QTN (§. 329 Geom.). Sed, ob parallelismum rectarum nO & QT (§. 256 Geom.) angulus OnN = QTN (§. 233 Geom.). Ergo OnN = DNQ (§. 87 Arithm.). Quare cum DQN & nON sint recti, per construct. erit (§. 267 Geom.)

$$NQ : DN = nO : Nn$$

$$\sqrt{a^2 - z^2} : a = dz :$$

$$\text{Ergo } Nn = adz : \sqrt{a^2 - z^2}$$

Porro ob sectores DN & DRM miles (§. 138, 412 Geom.)

$$DN : Nn = DM : MR$$

$$a : \frac{adz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = t :$$

$$\text{Ergo } MR = t dz : \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$\text{Hinc } MR^2 = t^2 dz^2 : (a^2 - z^2)$$

$$\text{Sed } mR^2 = dt^2$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo } Mm^2 &= \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2 \\ &= \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2} \end{aligned}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum Mm æquabilis supponitur, erit spatium Mm in ratione composita temporis & celeritatis in M acquisitæ (§. 34). Sed tempus est ut mR five dt (§. 347), & celeritas in M acquisita in hypothesi Galileana seu gravitatis constantis ut \sqrt{AP} (§. 87). Ergo $Mm = dt \cdot \sqrt{AP}$. Est vero, ob parallelas QN & PM (§. 268 Geom.)

$$DN : DQ = DM : DP$$

$$a : z = t :$$

$$\text{Ergo } DP = tz : a$$

$$AP = AD + DP$$

$$= a + tz : a$$

$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

Unde $Mm = dt \cdot \sqrt{AP}$, per demonstr.

$$= dt \cdot \sqrt{a^2 + tz} : \sqrt{a}$$

$$Mm^2 = \frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{1 \cdot a}$$

hoc est, sumta a pro unitate;

$$Mm^2 = \frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2 dt^2 + tz dt^2}{a^2} = \frac{a^2 dt^2 - z^2 dt^2 + t^2 dz^2}{a^2 - z^2}$$

Tab.
XIV.b.
Fig.
137.

$$a^2 dt^2 + a^2 tz dt^2 - a^2 z^2 dt^2 - tz^2 dt^2 = a^2 dt^2 - a^2 z^2 dt^2 + a^2 t^2 dz^2$$

$$a^2 tz dt^2 - tz^2 dt^2 = a^2 t^2 dz^2$$

$$dt \sqrt{(a^2 z - z^3)} = adz \sqrt{t}$$

$$dt \sqrt{(a^3 z - az^3)} = adz \sqrt{at}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3 z - az^3)}}$$

h.c. $a^{-1:2} t^{-1:2} dt = adz : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$

$$2a^{-1:2} t^{1:2} = a f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$$

$$2a^{1:2} t^{1:2} = a^2 f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$$

Atque hæc est æquatio, quam dedit LEIBNITIUS pro Curva Isochrone paracentrica (a). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2 f(dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis absolute summari nequit. Dari autem potest constructio, sive per quadraturam, sive per rectificationem aliqujus curvæ. Dabimus primo constructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3 dz : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$ est elementum arcus, erit semiordinata $v = a^3 : \sqrt{(a^3 z - az^3)}$ (§. 98 Anal. infinit.)

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$\begin{aligned} v &= \infty \\ \text{erit } \sqrt{(a^3 z - az^3)} &= 0 \\ a^3 z - az^3 &= 0 \\ a^2 - z^2 &= 0 \\ z &= a \end{aligned}$$

Quando itaque z fit a, hoc est, DQ degenerat in DC, semiordinata CR fit infinita. Est adeo CR asymptotus curvæ.

(a) In *Actis* loc. cit. p. 371. & 372.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

Tab.
XIV. a.
Fig.
138.

Fiat $z = 0$
erit $v = \frac{a^3}{0}$

Quare ubi z fit 0, seu evanescit, semiordinata DS est Asymptotus curvæ. Quoniam $v = a^3 (a^3 z - az^3)^{-1:2}$

erit $dv = -\frac{1}{2} a^3 (a^3 z - az^3)^{-3:2} (a^3 dz - 3az^2 dz)$

Si jam fiat $dv = 0$,
erit

$$-\frac{1}{2} a^3 (a^3 z - az^3)^{-3:2} (a^3 dz - 3az^2 dz) = 0$$

$$a^3 dz = 3az^2 dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} a^2} = z$$

Quando itaque $DQ = \sqrt{\frac{1}{3} a^2}$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analys. infin.*)

Quoniam $v = \frac{a^3}{\sqrt{(a^3 z - az^3)}} = \frac{a^3}{\sqrt{(a^2 - z^2)} \sqrt{az}}$

erit $\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : \frac{a^2}{\sqrt{az}} = a : v$$

Est vero \sqrt{az} semiordinata GQ parabolæ DGB, cujus parameter = a & abscissa DQ = z (§. 392 *Anal.*) & $\sqrt{(a^2 - z^2)}$ semiordinata QF circuli AFC radio DA = a descripti (§. 377 *Anal.*). Curva igitur quadranda ita constructur. Circa communem axem AC describatur semicirculus AFC radio AD = a, & parabola DGB cujus vertex in D centro semicirculi, parametro a radio semicirculi æqua-

Tab.
XIV.b.
Fig.
138.

K

æqua-

Tab. æquali. Fiat deinde $DI = GQ$ & DO
 XIV.b. $= DA$, itemque $DL = QF$, ductisque
 Fig. OK ipsi AI & KT ipsi LO parallelis; erit
 138. $DT = QN$. Est enim

$$DI : DA = DO : DK$$

$$\sqrt{az} : a = a : \frac{a^2}{\sqrt{az}}$$

$$DL : DO = DK : DT$$

$$\sqrt{(a^2 - z^2)} : a = \frac{a^2}{\sqrt{az}} : \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - z^2)}\sqrt{az}}$$

Demisso itaque ex T perpendiculari
 TN ad QN ; punctum N est in curva
 quaesita. Quod si tandem spatio $SDQN$
 fiat æquale rectangulum $ADZV$, erit
 ob $AD = a$, $DZ = a^2 f(dz : \sqrt{(a^2 z$
 $- az^3))$.

Habemus ergo $DZ = 2 \sqrt{at}$

$$\frac{\frac{1}{4} DZ^2 = at}{\frac{DZ^2}{4a} = t}$$

Unde rectæ t , quibus puncta in Iso-
 chrona paracentrica determinantur, fa-
 cile inveniuntur. Nimirum fiat Db
 $= \frac{1}{4} DZ$ & ducatur bc ipsi ZA parallela;
 Tab. erit (§. 268 *Geom.*) $DA : DZ = Db :$
 XIV.b. Dc , consequenter $Dc = t$. Quare si ex
 Fig. centro D radio Dc describatur arcus se-
 137. cans DN in M ; erit punctum M in iso-
 chrona paracentrica.

Videamus jam porro, quomodo sum-
 matio formulæ $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{fadz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$
 reducatur ad rectificationem arcus cu-
 jusdam. Quoniam $adz : \sqrt{(a^2 z - z^3)}$
 est elementum arcus, per *hypoth.* erit

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 z - z^3)}}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectifican-
 dæ dx & dy per z dari debent, quadra-
 tum $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ seu ejus mul-
 tiplum dividendum est in duo alia,
 quorum latera, si fieri potest, sunt sum-
 mabilia. Quamobrem cum numerator
 $a^2 dz^2$ debeat esse aggregatum duorum
 quadratorum, evidens est requiri, ut
 quadrata non modo diversa habeant
 signa, verum etiam tales denomina-
 tores, qui in se invicem ducti produ-
 cunt $a^2 z - z^3$. Enimvero cum $a^2 z - z^3$
 in istiusmodi factores resolvi nequeat,
 fieri autem id possit, si mutetur, in
 $a^2 z^2 - z^4$, cum tunc factores sint $az + z^2$
 & $az - z^2$ (§. 86 *Anal.*); fractio
 $a^2 dz^2 : (a^2 z - z^3)$ ducatur in z ut
 habeatur $a^2 z dz^2 : (a^2 z^2 - z^4)$. Qua-
 re si laterum numeratores dicantur in-
 terea q & w ; erunt latera $qdz : \sqrt{(az$
 $+ z^2)}$ & $w dz : \sqrt{(az - z^2)}$. Ex differenti-
 andi regulis constat, fore latera summa-

bilia, si fiat $q = \frac{a + 2z}{2}$ & $w = \frac{a - 2z}{2}$,

adeoque ipsa latera fiant $\frac{(a + 2z) dz}{2 \sqrt{(az + z^2)}}$,

$$\& \frac{(a - 2z) dz}{2 \sqrt{(az - z^2)}}$$

Videamus itaque, an quadratorum
 summa $= \frac{a^2 dz^2}{a^2 z - z^3}$. Quoniam itaque

$$dx = \frac{(a + 2z) dz}{2 \sqrt{(az + z^2)}} \& dy = \frac{(a - 2z) dz}{2 \sqrt{(az - z^2)}}$$

$$\text{erit } dx^2 = \frac{(a^2 + 4az + 4z^2) dz^2}{4az + 4z^2} \& dy^2$$

$$= \frac{(a^2 - 4az + 4z^2) dz^2}{4az - 4z^2}, \text{ seu reductione}$$

ad eandem denominationem facta:
 $dx^2 = (4a^2z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$
 & $dy^2 = (4a^2z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)dz : (16a^2z^2 - 16z^4)$, adeoque $dx^2 + dy^2 = 8a^2zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^2dz^2 : (2a^2z - 2z^3)$,
 feu multipulum quadrati dividendi, consequenter $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz \sqrt{a^2 : (2a^2z - 2z^3)}$.

$$\begin{aligned} \text{Est vero } \frac{dt}{\sqrt{t}} &= \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}} \\ \frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} &= \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} \\ \frac{adt}{\sqrt{2at}} &= \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} \\ \frac{at^{-1:2} dt}{\sqrt{2a}} &= \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}} = dv \\ \frac{2at^{-1:2}}{\sqrt{2a}} &= \sqrt{2at} = v \\ 2at &= v^2 \end{aligned}$$

$$t = v^2 : a$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipsius t inveniri potest; pro construenda Curva Isochrone paracentrica prius construi debet curva, in qua altera coordinata est $\sqrt{(az + z^2)}$ seu semiordinata hyperbolæ æquilatere, cujus axis transversus $= a$, abscissa $= z$ (§. 507 *Analys.*), altera $\sqrt{(az - z^2)}$, seu semiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abscissa $= z$.

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(az + z^2)} & y &= \sqrt{(az - z^2)} \\ \text{erit } x^2 &= az + z^2 & y^2 &= az - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}a^2 + x^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)}} &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + az + z^2}{\frac{1}{2}a + z} \\ z &= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)} - \frac{1}{2}a \\ az &= a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a^2 \\ z^2 &= x^2 + \frac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{4}a^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ az - z^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2 \\ y^2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 + a^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 &= 4a^2x^2 + a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 &= 2a^2x^2 - x^4 \\ \text{Est itaque curva tertii generis (§. 382 } & \text{Analys.).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fiat } x &= 0 \\ \text{erit } y^4 + 2a^2y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fiat } y &= 0 \\ \text{erit } 2a^2x^2 - x^4 &= 0 \\ 2a^2 &= x^2 \\ \sqrt{2a^2} &= x \end{aligned}$$

In vertice ergo D est origo utriusque Tab. indeterminatæ x & y . Quando ergo XIV.b. $DG = x = \sqrt{2a^2}$, semiordinata y evanescit, adeoque curva secat axem in G. Fig. 139.

Porro si æquatio differentietur, erit $4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy = 4a^2xdx - 4x^3dx$

$$\begin{aligned} \text{Quare si fiat } dy &= 0, \text{ erit} \\ 4y^2xdx &= 4a^2xdx - 4x^3dx \\ y^2 &= a^2 - x^2 \\ y &= \sqrt{(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

quæ est maxima applicata (§. 63 *Analys. infinit.*). Quoniam vero

Tab. XIV. b. Fig. 139.

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$ est semiordinata circuli III (§. 477 *Anal.*), maxima applicata circulo in I, ubi circulus ex centro D radio DI = a descriptus curvam secat.

Ponamus in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipsius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habebimus

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2 \\ 2a^2 - x^2 &= 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ a &= \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} \\ a^2 &= x^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ \frac{3}{4}a^2 &= x^2 \\ a &= \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \text{III} \end{aligned}$$

Quodsi ponamus abscissarum originem in G & CQ = c, erit DQ = a - c, & adeoque æquatio, ob $c = \sqrt{\frac{4}{3}a^2}$, in hanc degenerat

$$\begin{aligned} a^2 - (c + x)^2 &= (a - c)^2 + 2c^2 + 2cx + x^2 \\ \text{Sed jam } c &= \frac{2}{\sqrt{3}}a, \text{ ergo } 2cx = 2x\frac{2}{\sqrt{3}}a \\ \text{est } a^2 - c^2 - x^2 &= a^2 - \frac{4}{3}a^2 - x^2 = \frac{1}{3}a^2 - x^2 \\ \frac{1}{3}a^2 - x^2 &= \frac{1}{3}a^2 + 2cx + x^2 \\ \frac{1}{3}a^2 - x^2 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}ax + x^2 \\ \text{consequenter} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^2 - x^2 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}ax + x^2 \\ \text{h. e. } \frac{1}{3}a^2 - x^2 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}ax + x^2 \end{aligned}$$

Cum itaque valor ipsius x non fiat imaginarius, restant sicut CQ sicut abscissa quam CQ, seu axis curvæ est DI, curva ita a D conchoamur, adeoque se in duas partes in D, hinc est, curva necesse in c) habet. Ex constructione autem patet, partem imaginariam sive priorem tantam.

Ita determinatur angulus, sub quo curva axis in D fit, investiganda est, ut supra (§. 362) ratio laterum imaginæ partium Dp & Dq. Quodsi

enim Df sumatur pro situ toto, f9 sit Tab. XIV. b. Fig. 139. nus, Dg cosinus anguli quæsit. Quodsi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genericium abscissa sumatur dz, semiordinata hyperbolæ erit $\sqrt{(adz + dz^2)}$ (§. 507 *Analys.*), circuli vero $\sqrt{(adz - dz^2)}$ (§. 377 *Analys.*), hoc est, cum dz² differentiale secundi gradus respectu primi adz evanescat, utrobique = \sqrt{adz} . Quoniam itaque per constructionem Dg est semiordinata hyperbolæ & qf semiordinata circuli; erit ad verticem qf = qD, adeoque qDf angulus curvæ cum axe semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus curvæ rectus est.

Potest idem etiam aliis modis ostendi. Nimirum

$$\begin{aligned} qD &= dz = \frac{(x + 2c)dz}{2\sqrt{(x^2 + c^2)}} \\ qf &= d\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{(x - 2c)dz}{2\sqrt{(x^2 - c^2)}} \end{aligned}$$

Sed in casu instantis evanescunt x & c. Quare si pro c substituat dz, erit

$$\begin{aligned} qD &= \frac{adz + dz^2}{2\sqrt{(a^2 - dz^2)}} \\ qf &= \frac{adz - dz^2}{2\sqrt{(a^2 - dz^2)}} \end{aligned}$$

Sed vero dz respectu a = a. Ergo per ea, quæ modo diximus,

$$\begin{aligned} qD &= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 - dz^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2} \\ qf &= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 - dz^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2} \end{aligned}$$

Ergo qD = qf, ut erat. Idem inveniri debet, si in æquatione differentiali ad curvam pro x substituat

Tab. XIV. b. Fig. 139. tur dx & pro y ponatur dy . Aequatio enim $a^2 x dx - x^2 dx = y^2 dy + x^2 y dy + a^2 y dy$ facta substitutione in sequentem degenerat:

$$a^2 dx^2 - dx^4 = dy^4 + dx^2 dy^2 + a^2 dy^2.$$

Quare fit $dx^4 = 0, dy^4 = 0, dx^2 dy^2 = 0$
erit $a^2 dx^2 = a^2 dy^2$

$$\frac{dx^2 = dy^2}{dx = dy}$$

hoc est, $qD = gf$, ut ante.
Immo potest etiam in aequatione ad curvam $2a^2 x^2 - x^4 = y^4 + 2y^2 x^2 + 2a^2 y^2$ pro x substitui dx & in locum ipsius y surrogari dy : quo facto habemus,
 $2a^2 dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2 dy^2 dx^2 + 2a^2 dy^2$
Sed $dx^4 = 0, dy^4 = 0, 2 dy^2 dx^2 = 0$
Ergo $2a^2 dx^2 = 2a^2 dy^2$
 $dx = dy$, ut ante.

Ut tandem etiam intelligatur natura Isochronæ paracentricæ, cum pro ea sit,

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} = dv$$

seu $t = v^2 : 2a$,
si fiat $dz = 0$
erit $dv = 0$
adeoque $t = 0$

Curva itaque axem in D fecat.
Ex ipsa autem constructione apparet, si $DQ = z$ fiat $= a$, seu DN, rectam DM in O cadere, atque adeo curvam axem ibidem secare, ultra eum ex altera parte continuandam. Est vero tum $v = DFIG$, adeoque $DO = (DFIG)^2 : 2a$.
Patet idem ex valoribus x & y . Etiam si sit,

Tab. XIV. b. Fig. 139.

$$z = a$$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)}$
 $= \sqrt{2a^2} = DG$
& $y = \sqrt{(az - z^2)}$
 $= \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$
adeoque $DO = t = v^2 : 2a$
 $= (DFIG)^2 : 2a$

Habemus hinc
 $DO : DFIG = DFIG : 2a$

Quoniam vero curva Isochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, se mutuo in O partes secant.

SCHOLIUM.

350. Poterat quoque Problema præsens ad modum præcedentis variis modis universaliter resolvi, nimirum in quacunq; gravitatis hypothesis, cum in solutione Galilæanam supposuerimus, sumentes celeritatem acquisitam in ratione subduplicata altitudinis. Sed non opus est, ut istiusmodi solutionibus immoremur.

DEFINITIO XXXIX.

351. Curva Tautochrona dicitur, in qua mobile per quoscunq; arcus eodem tempore descendit.

COROLLARIUM.

352. Quoniam descensus per Cycloidem & quemcumque ejus arcum sunt æquidistanti (§. 311); Cyclois Curva Tautochrona est (§. 351).

PROBLEMA LII.

353. Determinare tempus descensus per curvam, in quacunq; gravitatis hypothesis, siue directiones supponantur parallele, siue convergentes.

Tab.
XIV.b.
Fig.
140i

RESOLUTIO.

Sit altitudo AP, per quam descendit grave, AMB curva descensus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquisita, C centrum gravium. Radiis CM & Cm infinite propinquis describuntur arcus PM & pm, sitque AP = x, PM = y: erit Pp = MR = dx, Rm = dy, adeoque Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quoniam motus per M æquabilis, erit Mm = dt. PN (§. 34); consequenter $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dt. PN$

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{PN}$$

Si punctum C infinite distet, arcus PM & pm evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodsi, ex hypothefi gravitatis speciali, substituatur valor ipsius PN, sive celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypothefi. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam substituatur valor ipsius y per x; prodibit tempus in casu speciali dato.

In hypothefi Galileana, PN = \sqrt{x} , sive, si parameter parabolæ quæ curva celeritatum ANR, fuerit a, PN = \sqrt{ax} (§. 87). Ergo tempus per Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$, adeoque $dt^2 = (dy^2 + dx^2) : ax$.

Sit jam curva descensus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AQ; erit, in hypothefi directionum parallelarum, AQ = PM = y, QM = AP = x, adeoque (§. 388 *Analys.*).

$$\begin{aligned} x^2 &= ay \\ \hline 2x dx &= a dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 dx^2 : a^2 &= dy^2 \\ \text{Ergo } dt^2 &= \frac{(4x^2 dx^2 + a^2 dx^2) : ax}{a^2} \\ &= \frac{(4x^2 + a^2) dx^2}{a^3 x} \\ \hline dt &= \frac{dx \sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{a^3 x}} \end{aligned}$$

Quoniam $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri. Elementum arcus parabolici Mm = $dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a$ (§. 146 *Anal. infin.*) dividendo per celeritatem in M acquisitam = \sqrt{ax} .

Est igitur $t = f(dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : a \sqrt{ax}) = PO$.

Quodsi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum construi debet, dividendo spatium APN per quantitatem constantem a; erit Elementum illius curvæ PNmp = $dx \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$.

Quare cum sit Pp = dx; erit semiordinata ejus PN = $\sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$, seu, si a = 1, PN = $a \sqrt{(4x^2 + a^2)} : \sqrt{ax}$. Est vero \sqrt{ax} semiordinata parabolæ, cujus abscissa AP = x, parameter = a (§. 392 *Analys.*); $\sqrt{(4x^2 + a^2)}$ abscissa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis transversus = 2a, semiordinata = 2x (§. 147 *Anal. infin.*). Curva igitur, a cujus quadratura pendet constructio curvæ temporum, ita construitur. Circa communem axem AX construatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§. 472 *Analys.*), cujus centrum in C, axis dimidius AC = a, qui simul parabolæ AMT parameter. Ducta semiordinata parabolæ PM;

Tab.
XIV.b.
Fig.
140i

Tab.
XIV.b.
Fig.
141.

Tab. XIV.b. Fig. 141. PM, fiat $CQ = 2AP = 2x$, erit ex Q erecta ad CQ perpendiculari $QO = \sqrt{4x^2 + a^2}$. Ducatur TF parallela ipsi CX per punctum M, & AH parallela ipsi QG, erit $TL = CA = a$ & $TC = PM = \sqrt{ax}$. Fiat $TG = QO = \sqrt{4x^2 + a^2}$ & ducatur FG parallela ipsi LC, erit (§. 268 Geom.)

$$TC : TL = TG : TF$$

$$\sqrt{ax} : a = \sqrt{4x^2 + a^2} :$$

$$TF = \frac{a\sqrt{4x^2 + a^2}}{\sqrt{ax}}$$

Quod si ergo MP continuetur in N, donec $PN = TF$, erit punctum N in curva per cujus quadraturam curva temporum construi debet.

Si curvæ temporum constructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$dx \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{a\sqrt{ax}} = \sqrt{dz^2 + dy^2}$$

$$\text{erit } \frac{a^2 dx^2 + 4x^2 dx^2}{a^3 x} = dz^2 + dy^2$$

$$\text{Fiat jam } dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$$

$$dy^2 = \frac{4x^2 dx^2}{a^3 x}$$

$$= \frac{4x dx^2}{a^3}$$

$$\text{erit } \frac{a^{-1:2} x^{-1:2} dx = dz}{2a^{-1:2} x^{1:2} = z}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = z$$

$$dy = 2x^{1:2} a^{-3:2} dx$$

$$y = \frac{4}{3} x^{3:2} a^{-3:2}$$

$$= \frac{4x\sqrt{x}}{3a\sqrt{a}}$$

Si sit $a = 1$; erit

$$z = 2\sqrt{ax} \quad y = \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$$

$$z^2 = 4ax \quad \frac{9}{16}ay^2 = x^3$$

Æquatio prima est ad parabolam Apollonianam (§. 388 Anal.) cujus parameter $4a$, abscissa x , semiordinata z : altera vero ad parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{9}{16}a$, abscissa ad parabolam exteriorem relata $= x$, semiordinata $= y$, seu abscissa $= y$, semiordinata $= x$ (§. 519 Analyf.)

Construenda igitur est parabola, parametro $4a$, AMR (§. 393 Anal.) & alia Tab. XIV.b. Fig. 142. secundi generis, cujus parameter $\frac{9}{16}a$, ANT (§. 581 Analyf.): erit $PM = z$ abscissa, $PN = AQ = y$ semiordinata curvæ, a cujus rectificatione pendet constructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, substituatur in æquatione $x^3 = \frac{9}{16}ay^2$ valor ipsius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus, erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam

$$\frac{z^6}{64a^3} = \frac{9}{16}ay^2$$

adeoque $z^6 = 36a^4 y^2$ quæ est curva quinti generis (§. 382 Analyf.) ex familia parabolæ, seu paraboliformium (§. 519 Analyf.).

Sit DMA quadrans circuli, cujus Tab. XIV.a. Fig. 143. radius $CA = a$, $CP = x$, erit $Mm = a dx : \sqrt{a^2 - x^2}$ (§. 153 Anal. infin.), adeoque $dt = a dx : \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{ax}$, quod elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda Curva Isochrona paracentrica reperimus;

perimus; quæ ad ejus summationem spectant, ibidem relegenda sunt.

Tab. III. Sit CMD Cyclois, AOD semicirculus genitor, DN = x, AD = a, erit Fig. 39. AN = a - x. Quare cum Mm = dx√a: √x (§. 168 *Analys. infin.*); erit

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}\sqrt{x}} \\ &= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-x^2)}} \\ &= \frac{adx\sqrt{a}}{a\sqrt{(ax-x^2)}} \\ t &= \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{adx}{\sqrt{(ax-x^2)}} \end{aligned}$$

Enimvero $\int (adx : \sqrt{(ax-x^2)})$ = arcui DO (§. 157 *Analys. infin.*). $\sqrt{a} = \sqrt{AC}$, & $a = AD$. Ergo tempus descensus per arcum MC = \sqrt{AD} . DO : AD.

Quodsi ergo x, sive DN, degeneret in a, sive AD; erit tempus descensus per semicycloidem CMD = \sqrt{AD} . DOA : DA.

PROBLEMA LIII.

Tab. XIV.b. Fig. 140. 354. Determinare tempus descensus in convexitate curvæ in quacunque gravitatis hypothesis, sive directiones sint parallela sive convexa.

RESOLUTIO.

Sit ANR curva per quam grave descendit, AP = x, PN = y, erit Nn = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit celeritas in P acquisita = v, erit ut in Probl. præced. (§. 353), si elementum temporis fuerit dt, $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : v$.

In hypothesi Galileana, $v = \sqrt{x}$. Tab. XIV.b. Fig. 140. Ergo $dt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$. Quare si ex æquatione ad curvam descensus substituatur ut ibidem valor ipsius dy^2 ; prodibit æquatio ad curvam temporis. Sit ANR parabola; erit (§. 21 *Anal. infin.*)

$$\begin{aligned} adx &= 2ydy \\ \frac{adx}{2y} &= dy \end{aligned}$$

$$dy^2 = a^2 dx^2 : 4y^2 = a^2 dx^2 : 4ax$$

Quare

$$\begin{aligned} dt &= \sqrt{(dx^2 + \frac{a^2 dx^2}{4ax})} : \sqrt{x} \\ &= \frac{dx \sqrt{(4ax + a^2)}}{\sqrt{4ax} \sqrt{x}} \\ &= \frac{dx \sqrt{(4ax + a^2)}}{2 \sqrt{ax^2}} = \frac{dx \sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}}{x \sqrt{a}} \\ t &= \int dx \sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)} : x \sqrt{a} \end{aligned}$$

Quare si hic valor sumitur pro spatio curvilineo per \sqrt{a} diviso; erit semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)} : x$. Est vero $\sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter = a, si abscissæ a foco, cujus distantia a vertice = $\frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analys.*) computentur. Quare curvæ quadrandæ vertex est in foco parabolæ & assumpta parametro a pro unitate, semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, est quarta proportionalis ad parabolæ abscissam a centro computatam, semiordinatam & parametrum. Sit semiordinata hujus curvæ = v, erit

$$\begin{aligned} v &= a\sqrt{(4ax + a^2)} : 2x \\ vx &= \frac{1}{2}a\sqrt{(4ax + a^2)} \\ \frac{v^2x^2}{v} &= a^2x + \frac{1}{4}a^4 \end{aligned}$$

Est igitur curva tertii generis (§. 382 *Analys.*), sed facillimæ, quemadmodum apparet, constructionis.

Quodsi constructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$, abscissa scilicet existente z , semiordinata y ; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$\begin{aligned} dz^2 &= \frac{4axdx^2}{4ax^2} & dy^2 &= \frac{a^2dx^2}{4ax^2} \\ &= dx^2 : x & &= adx^2 : 4x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= x^{-1/2} & \frac{dy}{dx} &= \frac{dx\sqrt{a}}{2x} \\ \hline z &= 2x^{1/2} & y &= \int \frac{dx\sqrt{a}}{2x} \\ &= 2\sqrt{x} & & \end{aligned}$$

Est vero \sqrt{x} semiordinata parabolæ, cujus parameter $= 1$, (§. 392 *Anal.*) & $\int \frac{dx}{x}$ spatium hyperbolicum asymptoticum, cujus latus potentia $= 1$ (§. 120 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis constructio, construetur, si abscissæ fiant semiordinatis parabolæ duplis, semiordinatæ autem spatiis hyperbolicis dimidiis per \sqrt{a} divisæ æquales, axe parabolæ existente simul asymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempora descensus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit Cyclois, & diameter circuli genitoris $= 1$, erit $Nn = dx : \sqrt{x}$ (§. 168 *Analys. infin.*), adeoque $dt = dx : x$. Pendet adeo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120 *Analys. infin.*): Et quoniam $t = \int dx : x$, sed $\int dx : x$ logarithmus ipsius x sumtus in logarithmica, cujus subtangens $= 1$ (§. 243 *Analys. infin.*), tempus descensus per convexitatem Cycloidis etiam per Logarithmos determinari potest.

Tab. XIV. b. Fig. 140.

DEFINITIO XL.

355. *Curva Brachystochrona* est, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam, descendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *Curva celerrimi descensus*.

SCHOLION.

356. *Problema hoc* proposuit Joannes BERNOULLI. *Analysi suppressa Cycloidem esse monuerunt* LEIBNITIUS (a) & HOSPITALIUS (b). *Solutionem integram exhibuit* Jacobus BERNOULLI (c), *Methodo Synthetica ex natura descensus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam Cycloidi convenire postea ostendit.* Joannes vero (d) *ex fundamentis Dioptricis id solvit, propterea quod advertit eam eandem esse cum curvatura radii per medium uniformiter densum propagati. Equidem solutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus descensus per arculum Mm infinite parvum sit minimum; hoc vero sit* $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : \sqrt{x}$ *in hypothesi Galilæana (§. 354), non alia re opus esse videbatur.*

(a) In *Actis Eruditorum*. A. 1697. p. 203.
 (b) *Ibid.* p. 217.
 (c) *Ibid.* p. 212.
 (d) *Ibid.* p. 207. & seqq.

tur, quam ut ejus differentiale ponatur nibilo aequale (§. 63 *Analys. infin.*). Enimvero tentanti apparebit, sic nos delabi ad equationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam Joannis BERNOULLI, sine supposita identitate Brachystochronæ cum curvatura radii per medium non uniformiter densum.

PROBLEMA LIV.

357. *Invenire Curvam Brachystochronam, sive celerrimi descensus.*
 RESOLUTIO.

Sint semiordinate PM, pm & Qn infinite propinquæ, & Pp = pQ; erunt arcus Mm & mn infinite parvi, & demissis perpendicularibus MR & mO, erectaque perpendiculari nS ipsi pm continuatæ in S occurrente, erit MR = mO = nS, & RS respectu arcus Mm constans.

Sit jam AP = x, PM = y; erit Pp = pQ = MR = nS = dx, mR = dy, & Mm = √(dx² + dy²). Sit RS = b; erit mS = On = b - dy, adeoque mn = √(dx² + b² - 2bdy + dy²).

Quoniam motus per Mm est æquabilis, erit toto tempusculo descensus celeritas constans, nempe ea quæ descensu per altitudinem AP acquisita. Ex eadem ratione celeritas in descensu per arculum mn constans est, nempe ea, quæ descensu per altitudinem Ap acquisita. Sit prior = c, posterior = C, erit tempus descensus per Mm = √(dx² + dy²) : c & tempus per mn = √(dx² + b² - 2bdy + dy²) : C (§. 39); consequenter tempus descensus per Mm + mn = dt = $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c} + \frac{\sqrt{dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2}}{C}$

Quoniam tempusculum minimum est, & dx constans, dy vero variabilis, erit (§. 63 *Anal. infin.*).

Tab. XIV. b. Fig. 144.

$$ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} + \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2}}$$

hoc est

$$\frac{dy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{dx^2 + b^2 - 2bdy + dy^2}}$$

five

$$\frac{mR}{c.Mm} = \frac{mS}{C.mn}$$

$$C.mn.mR = c.Mm.mS$$

adeoque

$$Mm : mn = C.mR : c.mS$$

Jam in hypothesi Galileana, C = √Ap, & c = √AP (§. 87). Quare Mm : mn = mR. √Ap : mS. √AP.

Quæ est proprietas Curvæ Brachystochronæ a Jacobo BERNOULLI alia via eruta.

Quod si fiat Mm = mn, erit C.mR = c.mS, adeoque

$$c : C = mR : mS$$

$$\& c : mR = C : mS$$

hoc est, elementa semiordinatarum mR & mS, five nO, sunt ut celeritates acquisitæ, seu ad has celeritates in ratione constante: id quod est fundamentum solutionis Joannis BERNOULLI ex dioptriciis principiis ab ipso derivatum.

Quod si jam arcus Mm = √(dx² + dy²) sumatur constans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquisita = v, & ratio constans ipsius dy ad eandem = Mm : a, erit

dy:

$$\begin{aligned} dy : v &= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : a \\ \frac{ady}{a^2 dy^2} &= \frac{v \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{v^2 dx^2 + v^2 dy^2} \\ \frac{ady^2}{a^2 dy^2} - \frac{v^2 dy^2}{v^2 dy^2} &= \frac{v^2 dx^2}{v^2 dx^2} \\ \frac{dy^2}{a^2 - v^2} &= \frac{v^2 dx^2}{v^2 dx^2} \\ dy &= \frac{v dx}{\sqrt{(a^2 - v^2)}} \end{aligned}$$

Formula hæc generalis est & in omni hypothesi gravitatis, etiam utcumque variabilis, obtinet. Quodsi jam substituaturs valor ipsius v ex data gravitatis hypothesi, prodibit formula specialis.

Sit itaque in hypothesi gravitatis constantis

$$v^2 = ax, \text{ adeoque } v = \sqrt{ax}$$

$$\begin{aligned} \text{crit } dy &= \frac{dx \sqrt{ax}}{\sqrt{(a^2 - ax)}} \\ &= \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}} \\ &= \frac{xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}} \end{aligned}$$

Est vero $xdx : \sqrt{(ax - x^2)}$ differentia inter $adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ & $(adx - 2xdx) : 2\sqrt{(ax - x^2)}$. Ergo

$$\begin{aligned} dy &= \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \frac{(adx - 2xdx)}{2\sqrt{(ax - x^2)}} \\ y &= \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \int \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} \\ &= \int \frac{adx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} - \sqrt{(ax - x^2)} \end{aligned}$$

Tab. XV. Fig. 145. Est vero $\sqrt{(ax - x^2)}$ semiordinata circuli DH diametro CB = a descripti (§. 377 *Analys.*) & $\int (adx : 2\sqrt{(ax - x^2)})$ arcus CH (§. 157 *Anal. infin.*). Quam-

obrem $y =$ arcui CH — DH = PM. Est vero in Cycloide MH = arcui BH (§. 575 *Analys.*) & AC = PM + MH + HD = arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analys.*). Ergo in eadem arc. CH = PM + HD, consequenter PM est æqualis differentia inter arcum CH & ejus sinum HD.

Tab. XV. Fig. 145.

Curva igitur celerrimi descensus sive Brachystochrona est Cyclois, adeoque eadem cum Tautochrone (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in Cycloide PM = arc. CH — HD (§. 357) ; si utrumque æquationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium = $\frac{1}{2} OC$, prodibit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} OC. PM &= \frac{1}{2} OC. \text{arc. CH} - \frac{1}{2} OC. HD \\ \frac{1}{2} OC. \text{arc. CH} &= \text{Señ. COH} (\S. 435 \text{ Geom.}) \\ \frac{1}{2} OC. HD &= \Delta COH (\S. 392 \text{ Geom.}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} OC. PM = \text{Señ. COH} - \Delta COH = \text{segmento HIC} (\S. 436 \text{ Geom.})$$

Est adeo Cyclois externa segmentorum circularium representatrix.

SCHOLIUM I.

359. Eleganter hanc Cycloidis proprietatem, etsi ad Mechanicam non spectet, hic tamen annotari consultum fuit, ubi ex demonstratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus HC = $adx : 2\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 157 *Anal. infin.*), qui in $\frac{1}{2} CO = \frac{1}{4} a$ ductus producit elementum sectoris = $a^2 dx : 8\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 435 *Geom.*). Quodsi porro DH altitudinem $\Delta COH = \sqrt{(ax - x^2)}$ in basin ejus dimidiam $\frac{1}{2} CO = \frac{1}{4} a$ ducas, prodibit area $\Delta COH = \frac{1}{4} a \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 392 *Geom.*), cujus adeo elementum = $(a^2 dx - 2ax dx) : 8\sqrt{(ax - x^2)}$.

Tab. XV. 145. *Quare si hoc elementum trianguli ab elemento sectoris auferas, relinquetur elementum segmenti HIC = $axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 436 Geom.). Est vero elementum ipsius PM = $xdx : \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 357). Quodsi ergo idem in $\frac{1}{2}a$ seu $\frac{1}{2}CO$ ducas, prodibit $axdx : 4\sqrt{(ax - x^2)}$ elementum sectoris modo repertum, consequenter sector = $\frac{1}{4}al (xdx : \sqrt{(ax - x^2)}) = \frac{1}{2}CO. PM$.*

SCHOLIUM II.

360. *Quodsi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime descendere debet, Cyclois describenda est per duo puncta data. Quamobrem ut Problema ad praxin transferri possit, ostendendum adhuc erit, quomodo Cyclois per data duo puncta describatur.*

PROBLEMA LV.

Tab. XV. 146. 361. *Describere Cycloidem per data duo puncta A & C transeuntem.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Describatur Cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B secet.
3. Fiat deinde AB : AC = ED : FG, erit FG diameter circuli genitoris Cycloidis per puncta A & C transeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG describi potest (§. 573 Anal.).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonstrandum, esse AB : AC = ED : FG; quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter se parallelæ (§. 256 Geom.). Et quoniam HA,

DE & GF perpendiculares ad AF per constr. erunt quoque eadem inter se parallelæ (§. cit. Geom.). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 Geom.), consequenter (§. 268 Geom.) AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ, ob EP = AS & AT = FQ (§. 168 Arithm.). Sed SB = arc. EN — PN & TC = arc. FR — QR (§. 357). Ergo EP : FQ = arc. EN — PN : arc. FR — QR (§. 167 Arithm.), consequenter DE. EP : FG. FQ = segm. EN : segm. FR (§. 185 Arithm.), quia scilicet $\frac{1}{2}DE$ (arc. EN — PN) = segm. EN & $\frac{1}{2}FG$ (arc. FR — QR) = segm. FR (§. 436 Geom.). Est vero DE : EN = EN : EP & FG : FR = FR : FQ (§. 330 Geom.), adeoque DE. EP = EN² & FG. FQ = FR² (§. 377 Geom.), consequenter EN² : FR² = segm. EN : segm. FR (§. 167 Arithm.). Sunt itaque segmenta EN & FR similia (§. 406 Geom.), & hiic etiam arcus cognomines similes sunt, consequenter EP : FQ = ED : FG (§. 12 Trigon.). Quare cum sit AB : AC = EP : FQ per demonstrata; erit etiam AB : AC = ED : FG (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

Aliter.

Potest idem multo brevius ex principiis nostris similitudinis ostendi, alibi propositis (a); scilicet cum omnes Cycloides sint inter se similes, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC sunt chordæ arcuum cycloïdiorum eandem basin

Tab. XV. Fig. 146.

Tab. XV. Fig. 146. basin AF sub eodem angulo secantes, adeoque eodem modo determinatæ, & diametri circulorum genitorum sunt rectæ ex medio basium normaliter erectæ, consequenter itidem eodem modo determinatæ. Patet ergo esse diametros circulorum genitorum ED & FG ipsas AB & AC proportionales. Q. e. d.

SCHOLIUM I.

362. Patet hinc præstantia principiorum nostrorum similitudinis, ob quam merentur quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipsis aditum aperuimus. Sanè si quis Analysin similitudinis invenire vellet, ex istis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero Analysin, quæ ad similitudinem spectant, multo facilius reperirentur, quam per Analysin magnitudinum qua nunc sola utimur in Geometria.

SCHOLIUM II.

363. Supposuimus in demonstratione, segmenta circulorum similia esse in ratione duplicata chordarum, nempe $EN^2 : FR^2 = \text{segm. EN} : \text{segm. FR}$, vi principiorum Geometria, ex quibus id facile colligitur. Quodsi quis non videat, quomodo idem inde inferatur, demonstrationem hic subijcere licet per modum Lemmatis, & quidem multo universalius.

LEMMA I.

364. Sæctores similes & segmenta similia circuli habent rationem duplicatam radiorum, subtensarum & ipsorum arcuum: immo segmenta similia curvarum similium habent rationem duplicatam subtensarum & ipsorum arcuum, aliarumque linearum quarumcumque eodem modo determinatarum.

DEMONSTRATIO.

Sæctor FOR æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus FR, altitudo radius FO: & sæctor ENQ æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus EN, altitudo radius EQ (§. 415 Geom.). Est vero sæctor FOR similis sæctori ENQ per hypoth. quare cum sæctores per rationem arcuum ad radios discerni possint, erunt arcus FR & EN radiis suis FO & EQ proportionales (§. 24 Arithm.), consequenter triangula, quibus sæctores æquales sunt, inter se similia sunt (§. 183 Geom.). Sunt igitur sæctores in ratione duplicata radiorum & arcuum (§. 398 Geom.). Quod erat unum.

Quoniam arcus FR & EN similes sunt, cum alias segmenta per eorum ad peripheriam rationem discerni possent, contra hypothesein (§. 24 Arithm.), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines sunt æquales (§. 141 Geom.), consequenter cum utrobique crura sibi invicem sint æqualia (§. 40 Geom.), ipsa triangula similia sunt (§. 183 Geom.), adeoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 Geom.). Est igitur sæctor FRO: sæct. ENQ = $\Delta FRO : \Delta ENQ$ (§. 167 Arithm.), consequenter sæct. FRO — ΔFRO : sæct. ENQ — ΔENQ = sæct. FRO: sæct. ENQ (§. 189 Arithm.). Ergo cum sæct. FRO — ΔFRO = segmento FR, & sæct. ENQ — ΔENQ = segmento EN, quod per se patet, segmento FR: segmento EN = sæctor FRO: sæct. ENQ (§. 168 Arithm.). Sunt vero

Tab. XV. Fig. 146. sectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonstr.* Ergo & segmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum sunt (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Arcus FR & EN sunt similes *per hypoth.* Ergo eorum sinus (§. 12 *Trigon.*), consequenter & sinum duplæ (§. 2 *Trigon.*) chordæ sunt arcubus proportionales (§. 178 *Arithm.*). Sunt vero sectores atque segmenta in ratione duplicata arcuum. *per demonstra.* Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167, 260 *Arithm.*).

Idem vero multo universalius de quibuscunque curvarum similium segmentis similibus demonstratur.

Tab. XV. Fig. 147. Si curvæ fuerint similes, rectæ constantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter se rationem habent, cum alias per eam distingui possent, (§. 24 *Arithm.*). Quare si porro segmenta similia esse debent, necesse est ut abscissæ AP & Ap ad rectas illas constantes *a* & *b* utrobique in eadem sint ratione (§. *cit.*), consequenter $AP : Ap = a : b$. Quare si $AP = x$; erit $Ap = bx : a$. Et quoniam semiordinate PM & pm, chordæ AM & am, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit $AM : am = \text{arc. } AM : \text{arc. } am = PM : pm = AP : ap = a : b$ (§. 120 *Geom.*).

Quare si $PM = y$; erit $pm = by : a$. Est vero Elementum curvæ AMP $= ydx$, alterius amp $= b^2 ydx : a^2$ (§. 98 *Anal. infin.*), adeoque curvilineum $AMP : amp = \int dx : \frac{b^2}{a^2} \int ydx = a^2 : b^2 = AM^2 : am^2$

Tab. XV. Fig. 147. $= PM^2 : pm^2 = AP^2 : ap^2$. Porro quia $AP : PM = ap : pm$ per demonstr. & anguli ad P & p recti *per construct.* $\triangle APM \sim \triangle apm$ (§. 183 *Geom.*), consequenter $\triangle APM : \triangle apm = AM^2 : am^2$ (§. 398 *Geom.*). Cum itaque sit $APM : apm = \triangle APM : \triangle apm$ (§. 167 *Arithm.*), erit segment. $AM : \text{segm. } am = APM : apm$ (§. 189 *Arithm.*) $= AM^2 : am^2 = PM^2 : pm^2 = AP : ap^2 = \text{arc. } AM^2 : \text{arc. } am^2$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti si ex P & p demittantur in AM & am perpendiculara PL & pl, rectarum PL & pl, per demonstrata. *Quod erat tertium.*

SCHOLIUM.

365. Qui ad demonstrationem partis ultima Lemmatis præsentis attendit, is fecunditatem & utilitatem principiorum nostrorum similitudinis abunde perspiciet: quæ in Philosophia prima tanquam sede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus (a).

DEFINITIO XLI.

366. Curva Synchrona est, ad cuius singula puncta D, m, M eodem tempore minimo grave pervenit. Tab. XV. Fig. 148.

SCHOLIUM.

367. Curvam hanc primus invenit Joannes BERNOULLI (b). Ex hætenus autem traditis mira facilitate eam deducere licet.

PROBLEMA LVI.

368. Construere curvam Synchronam DmM, data altitudine perpendiculari CD, per quam grave dato tempore descen-

(a) Ontolog. §. 215. & seqq.

(b) Vid. *Acta Eruditorum* An. 1697.

Tab. XV. *descendit quo ad singula puncta Syn- chrona pervenit.*
Fig. 148.

RESOLUTIO.

1. Describantur Cycloides quocunque CM, Cm &c. commune initium in C habentes (§. 573 *Analys.*)
2. Erigatur in communi initio C ad basin CA perpendicularis CD, quæ sit altitudini datæ æqualis per quam grave dato tempore descendit, seu, quod perinde est, per quam datur tempus, quo grave ad singula puncta D, m, M Synchronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur basi AC parallela NM secans Cycloidem in M: erit punctum in M Synchrona.

Eodem modo in Cycloidibus ceteris Cm determinantur puncta in Synchrona, ope circulorum genitorum ipsis respondentium.

DEMONSTRATIO.

$$AB : \text{arc. AN} = \text{arc. AN} : CD \text{ per constr.}$$

$$\frac{AN = \sqrt{AB} \cdot \sqrt{CD}}{AN \cdot \sqrt{AB} = AB \cdot \sqrt{CD}}$$

$$\frac{AN \cdot \sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}$$

Est vero AN. \sqrt{AB} : AB tempus descensus per arcum Cycloidis CM (§. 353) & \sqrt{CD} tempus descensus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D descendit. Quoniam itaque eodem modo ostenditur,

quod ad quodvis punctum m eodem tempore perveniat, quo per CD descendit; curva DmM est Synchrona (§. 366).

Tab. XV. *Fig. 148.*

DEFINITIO XLII.

369. *Curva Æquilibrationis dicitur, in qua existens pondus vel sacoma semper æquilibrium faciat cum ponte sublicio circa axem convertibili.*

SCHOLIUM.

370. *Problema hoc solverunt (a) Marchio HOSPITALIUS & Jacobus BERNOULLI diversa ratione. Joannes BERNOULLI (b) identitatem curvæ æquilibrationis cum Cycloide descripta ex circumvolutione rotæ super rotâ æquali demonstravit, & Problema generalius per communem Geometriam solvit.*

PROBLEMA LVII.

371. *Invenire Curvam Æquilibrationis.*

Tab. XV. *Fig. 149.*

RESOLUTIO.

Sit pons sublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem A versatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera M sacoma sustinet. Cum potentiæ laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipolleant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (§. 241. 280); si CA exponit pondus pontis absolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad descensum sollicitetur juxta directionem CK & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; si CM consideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet poten-

(a) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 56. & 65.
(b) In *Actis Erudit.* An. 1695. p. 60.

Tab. XV. Fig. 149. potentia ut BC, integrum pondus M erit ut CK (§§. cit.). Quare si fit quaedam recta b ut pondus absolutum M, erit $CK:CM = b:BC$.

Sit jam $CP = x$, $PM = y$, $BC + CM = a$; erit $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$ & hinc $BC = a - \sqrt{x^2 + y^2}$. Est vero subnormalis $PK = ydy:dx$ (§. 35 *Anal. infinit.*) & hinc $CK = CP + PK = x + ydy:dx = (xdx + ydy):dx$. Quare cum fit $CK:CM = b:BC$ per demonstr.

$$\frac{xdx + ydy}{dx} : \sqrt{x^2 + y^2} = b : a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xdx + ydy : dx\sqrt{x^2 + y^2} = b : a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{bdx\sqrt{x^2 + y^2} = axdx + aydy}{- xdx\sqrt{x^2 + y^2} - ydy\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - xdx - ydy$$

$$bx = a\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

quæ est æquatio ad curvam æquilibriumis, cui, si libuerit, etiam quantitas quaedam constans addi, vel ab eadem demi potest (§. 95 *Analys. infin.*).

Ut curva hæc construatur, radio $CD = a$ describatur semicirculus FDE & ducatur DG ad FE normalis. Fiat $CG = z$, erit $GD = \sqrt{a^2 - z^2}$ (§. 377 *Anal.*) & (§. 268 *Geom.*).

$$CG:CD = CP:CM$$

$$z:a = x:$$

$$\text{Est itaque } \frac{z \cdot CM}{a} = x$$

$$\text{Porro } CD:DG = CM:PM$$

$$a:\sqrt{a^2 - z^2} = CM:y$$

$$\frac{CM \cdot \sqrt{a^2 - z^2}}{a} = y$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{2}x^2 = z^2 \cdot CM^2 : 2a^2$$

$$\frac{1}{2}y^2 = (a^2 - z^2) \cdot CM^2 : 2a^2$$

Quod si hi valores in æquatione ad curvam substituantur, prodibit

$$a \cdot CM = \frac{bx \cdot CM}{a} + \frac{z^2 \cdot CM^2}{2a^2} + \frac{a^2 \cdot CM^2 - z^2 \cdot CM^2}{2a^2}$$

$$= \frac{bx \cdot CM}{a} + \frac{1}{2}CM^2$$

$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facile determinatur, cum non alia re opus sit, quam ut ad radium circuli CD seu longitudinem funis $BC + CM$, duplum rectæ illius, quæ pondus absolutum facomatis exponit, & rectam CG pro lubitu assumendam quærat, ac ex diametro circuli FE auferatur.

Si fit $a = b$, erit $CM = 2a - 2z = 2GE$: qui est casus omnium simplicissimus.

Quando CM degenerat in CN , hoc est, quando fit a , curva semicirculum in N secat, tumque est

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$0 = a - 2bz : a$$

$$\frac{a}{2b} = z$$

Patet adeo, CG esse tertiam proportionalem ad $2b$ & a , si curva peripheriam circuli secat.

Tab. XV. Fig. 149.

Quo-

Tab. XV. (§. 20 Anal. infin.) & vi superiorum Fig. 149.

$$dx = \frac{aydy - ydy\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax}$$

$$ydx = \frac{ay^2 - y^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}{(b+x)\sqrt{(x^2 + y^2)} - ax}$$

Quare si $CM = \sqrt{(x^2 + y^2)} = a$

$$\text{erit } \frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - ay^2}{(b+x)a - ax} = 0$$

Ergo ubi curva peripheriam circuli secat, subtangens evanescit, adeoque semiordinata eam tangit, consequenter N est punctum infimum, sicque in nostro casu Mechanico arcus CN sufficit.

Tab. XV. Fig. 150. Quodsi in situ pontis horizontali Al longitudo funis $IC = CE = CN = a$ & præterea $b = a$, vel $b > a$; tota curvæ portio CMN sufficit; si vero $CI < CN$, & in situ horizontali pondus jam fuerit in M, satisfacit portio, MN, quoniam tum CM est differentia inter CN & CI.

Si fit $CI = c$, reliqua sint ut ante, erit

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a} = a - c$$

$$a + c = \frac{2bz}{a}$$

$$\frac{a^2 + ac}{2b} = z$$

Punctum adeo M determinatur, si fiat $CG = (a^2 + ac) : 2b$, quæ est quarta proportionalis ad $2b$, a & $a + c$, hoc est, ad duplam lineam, quæ pondus M exprimit, radium circuli CE seu funis integri longitudinem ob $IC + CM = CE$ & compositam ex radio & portione funis IC.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Sit $CM = 0$
 erit $2a - 2bz : a = 0$

$$\frac{a^2 - bz = 0}{a^2 : b = z}$$

Habemus itaque $b : a = a : z$. Quare si $b = a$; erit $a = z$, adeoque punctum D cadit in E, consequenter diameter FE curvam in centro C tangit.

Si $b > a$, etiam $a > z$ (§. 149 Arithm.), n. 2. recta igitur CD definiens punctum curvæ C adhuc in peripheriam EN cadit; consequenter curva ultra centrum continuari potest, adeoque in centro C axem FE secat.

Quando itaque CD coincidit in E, erit $z = a$, adeoque cum sit

$$x = z \cdot \frac{CM}{a}$$

$$= z \sqrt{(x^2 + y^2)} : a$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 = x^2 + y^2$$

$$y = 0$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem secat in K. Quare cum ex constructione appareat, ab altera parte describi posse partem similem, curva in centro C nodum habet.

Si in æquatione ad curvam $a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{2}x^4 + bxy^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4$ fiat $y = 0$

$$\text{erit } a^2x^2 = b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{2}x^4$$

$$a^2 = b^2 + bx + \frac{1}{2}x^2$$

$$a = b + \frac{1}{2}x$$

$$2a = 2b + x$$

Quando itaque $b > a$; erit

$$x = 2b - 2a$$

M

Unde

Tab. XV. Fig. 151. n. 1.

Unde intelligitur, punctum K a centro distare intervallo $2b - 2a$.

Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b$$

Tab. XIV, Fig. 151. n. 3.

Ex quo apparet, curvam secare axem infra centrum C in L, ita ut CL fit $2a - 2b$.

Quodsi in æquatione ad curvam valor ipsius x sumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit distantia puncti F a centro C, ubi axem secat. Nimirum cum ob $y = 0$; fit

$$a^2 = b^2 + bx + \frac{1}{4}x^2$$

erit ob valorem ipsius x negativum.

$$a^2 = b^2 - bx + \frac{1}{4}x^2$$

$$a = \frac{1}{2}x - b$$

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= x \\ &= CF \end{aligned}$$

Curva igitur in omni casu in se redit.

Quodsi maxima curvæ latitudo determinanda, cum fit

$$\frac{aydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - ydy = bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

erit ob $dy = 0$. (§. 63 Anal. infin.)

$$\frac{bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{b+x} = CM$$

Ut igitur CM in casu maximi inveniri possit, valor ejus, quem supra reperimus $= 2a - 2bx : a$, exprimitur etiam hic per z , ita ut pro x substituatur valor ipsius per z expressus. Est vero juxta superiora $CM = ax : z$. Quare cum hic fit $CM = ax : (b+x)$; erit

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

$$CM = \frac{ax}{x} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$\text{-----} 2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \frac{1}{2}a^2$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{-----} \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

$$\left. \begin{aligned} z - \frac{a^2}{4b} \\ \frac{a^2}{4b} - z \end{aligned} \right\} = \frac{a}{4b} \sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$$z = \frac{a^2 + a\sqrt{(a^2 + 8b^2)}}{4b}$$

$$\begin{aligned} \text{Quodsi } a=b, \text{ erit } z &= \frac{a^2 + a\sqrt{(a^2 + 8a^2)}}{4b} \\ &= \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

Quando in hoc casu $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a = a$, cum sit $a = CE$, curva axem in centro tangit juxta superiora. Ergo in casu maximi satisfacit radix falsa, nempe $z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a = -\frac{1}{2}a$: quod indicio est, valorem ipsius z sumi debere ex altera parte, nempe versus F in recta CF.

Quando $b > a$, curva KCF duplicem habet maximam semiorinatam, alteram nempe infra centrum, alteram supra idem, adeoque radix utraque servit, affirmativa intra centrum, negativa supra idem.

Tab. XIV, Fig. 151. n. 3.

Tab. XIV, Fig. 151. n. 1.

n. 2.

In

Tab. XIV. In casu demique tertio, ubi $a < b$, radix positiva est major radio. Sed cum $z = CG$ radio CE major fieri nequeat, *vi construct.*; radix negativa hic iridem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum versus F.

SCHOLIUM.

372. Illud hic notatu dignum est, quod pro diversa relatione quantitatum constantium a & b , quæ æquationem ingrediuntur, curvæ ductus admodum variet, ita ut oculorum judicio pro curvis non haberentur, quæ per eandem æquationem definiuntur.

THEOREMA LI.

Tab. XV. 373. Si circulus X super alio equali Y rotetur, ita ut punctum rotationis vel sit in ipsa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis; curva hoc puncto descripta erit Curva æquilibrationis.

DEMONSTRATIO.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione describitur, esse curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit & recta SM, in qua est punctum describens M producat, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, mensuræ angulorum R & S (§. 57 Geom.), æquales sunt per genesin curvæ CMN; erit $RH = HS$ (§. 184 Geom.). Fiat $RC = SM$ & ex centro C

radio $CD = RV = SO$ describatur circulus & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in constructione curvæ æquilibrationis fecimus (§. 371). Fiat porro ut ibidem $RV = OS = CD = a$, $SM = RC = b$, $CG = z$. Quoniam $RH = HS$ per demonstr. & $RC = SM$ per constr. erit etiam $CH = HM$ (§. 91 Arithm.), adeoque $HC : HM = HR : HS$, consequenter angulus $GCD = HRT$ (§. 183 Geom.). Quare cum porro ob $RT = TS$ & $HR = HS$ angulus ad T rectus sit (§. 179, 147 Geom.), & ad G itidem rectus per construct. erit (§. 267 Geom.).

$$CG : CD = RT : RH$$

$$z : a = a :$$

Est itaque $RH = a^2 : z$, adeoque

$$CH = RH - RC = \frac{a^2}{z} - b.$$

Porro ob ang. $HCD = \text{ang. HRS}$ per demonstrata; erit CM ipsi RS parallela (§. 255 Geom.), adeoque (§. 268 Geom.)

$$HR : RS = HC : CM$$

$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b : CM$$

$$\text{sive } a^2 : 2a = a^2 - bz : CM$$

$$\text{Ergo } CM = \frac{2a^2 - 2abz}{a^2}$$

$$2a - \frac{2bz}{a}$$

Est itaque punctum M in Curvæ æquilibrationis, consequenter Curvæ rotationis circuli X super circulo Y puncto M descripta Curvæ æquilibrationis (§. 371).

Tab. XV. Fig. 152.

Tab. XV. Fig. 152. Idem eodem modo ostenditur in iis casibus, ubi punctum describens O fuerit in peripheria, vel punctum describens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA LVIII.

Tab. XV. Fig. 153. 374. Data curva AB, invenire curvam aliam LM, super qua, in quocunque puncto, pondus M datum sit in æquilibrio cum pondere alio B dato.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos secans. Quoniam CH est linea verticalis per hypoth. erit KO linea horizontalis (§. 210). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata constituuntur, quæ dicantur B & M; erit I Centrum gravitatis ponderum

constans commune (§. 124). Quare $B : M = EI : IK$ (§. 144). Est vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (§. 156 *Geom.*), $ME : KB = EI : IK$ (§. 267 *Geom.*). Quare $B : M = ME : KB$ (§. 167 *Arithm.*). Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe PM & BH; erit $EM = IP$ & $KB = IH$ (§. 226 *Geom.*), adeoque $B : M = IP : IH$ (§. 167 *Arithm.*). Quare si per hanc analogiam reperiat recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C intersecetur; erit in M punctum Curvæ æquilibrationis quaesitum.

Quod si æquatio ad curvam AB datur; facile reperiri potest æquatio ad Curvam æquilibrationis per communes Algebrae regulas.

Tab. XV. Fig. 153.

CAPUT IX.

De motu Pendulorum.

DEFINITIO XLIII.

376. **P**endulum est grave quodlibet, ita suspensum, ut circa punctum aliquod, vi gravitatis, ascensus & descensus reciprocos continuare possit. Ascensus ille & descensus reciprocos *Oscillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO XLIV.

Tab. IV. Fig. 44. 377. Pendulum simplex est quod constat unico pondere instar puncti

considerato, & linea inflexili gravitatis experte circa centrum C convertibili AC appenso.

DEFINITIO XLV.

378. Pendulum compositum est quod pluribus ponderibus constat, eandem distantiam, tum inter se, tum a centro circa quod oscillationes fiunt, constanter servantibus.

DEFI-

DEFINITIO XLVI.

379. *Axis oscillationis est recta lineæ horizontali apparenti parallela transiens per centrum, circa quod pendulum oscillatur.*

THEOREMA LII.

Tab. 380. *Pendulum in B adductum per IV. arcum circuli BA descendit, & ad punctum aequæ altum D per arcum æqualem ascendit; inde denuo in A descendit ac ad B ascendit; sicque reciprocos ascensus & descensus continuat.* Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipsi parallela. Si globus A, quem instar puncti consideramus, cum folius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex Centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit extra basin, quæ est in puncto C. Globus igitur in hoc situ quiescere nequit, sed descendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH descendere possit, per arcum circuli BA descendit (§. 131 *Geom.*). Ubi Centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus instruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 308); adeoque ipsum ad altitudinem æqualem elevare potest (§. 322). Quare cum filum impediatur, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipsi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) ascendit. Vi igitur, quam cadendo acquisiverat, omni absorpta, per eundem arcum DA relabitur, vi gravitatis ascensus ex A in B; & ita porro. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

381. *Experientia Theorematis non contradicit, etsi sine sine continuata oscillationes ei parum respondeant. Aëris enim resistentia & frictio circa centrum C partem aliquam ejus vis absument, quæ cadendo acquisita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præcise altitudinem elevetur globus, ex qua delapsus. Quoniam itaque ascensus continua capit decrementa; oscillatio tandem sistitur, & pendulum in situ CA, in quo Centrum gravitatis infimum occupat locum, quiescit.* Tab. IV. Fig. 44.

THEOREMA LIII.

382. *Si pendulum simplex inter duas semicycloides CB & CD suspendatur, quarum circuli generatores habent diametrum CF dimidia longitudini filii CA æqualem, ita ut filum oscillans iis circumplicetur; oscillationes omnes, utcumque inæquales, erunt isochronæ, seu æquidiurnæ, in medio non resistente.* Tab. IV. Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE semicycloidi BC circumplicetur, a Centro gravitatis globi E, qui instar puncti consideratur (§. 377), ex evolutione Cyclois BEAD describitur (§. 330 *Analys. infinit.*). Sed omnes descensus & ascensus in Cycloide sunt æquidiurni (§. 311). Ergo oscillationes penduli sunt æquidiurnæ (§. 376). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

383. *Quodsi longitudine penduli CA describatur circulus ex centro C; cum portio Cycloidis prope verticem A eodem fere motu describatur, arcus exiguus circuli cum Cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oscillationes pendulorum sunt ad sensum isochronæ, utcumque in se inæquales.*

COROLLARIUM II.

384. Quo longiora itaque sunt pendula in arcibus circuli oscillantia; eo majores oscillationes isochronæ sunt.

SCHOLIUM I.

385. *Experientia non abluat.* Quod si enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oscillando excurrat; in oscillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.

SCHOLIUM II.

386. *Penduli inter duas semicycloides oscillantis tam theoria, quam praxis debetur illustri HUGENIO (a).*

PROBLEMA LIX.

387. *Determinare durationem oscillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 46. Sit diameter circuli genitoris seu altitudo totius Cycloidis $AB = a$; HB altitudo, ex qua descendit pendulum per arcum illius $QB = 2r$, $HP = x$, erit $PB = 2r - x$. Sit porro tempus per $QB = t$, & super HB describatur semicirculus HNB, ducanturque PM atque pm infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit $PN = \sqrt{(2rx - xx)}$, $Pp = NO = Rm = dx$, & celeritas in P, adeoque & in M (§. 308), acquisita $= \sqrt{x}$ (§. 83), consequenter, cum infinitesima Mm motu uniformi percuratur, tempus per Mm $= dt = Mm : \sqrt{x}$ (§. 39). Constat vero (§. 131 *Analys. infinit.*) esse $Mm : mR = BS : BP$ & $AB : BS = BS : BP$ (§. 330 *Geom.*). Est itaque BS ad BP in ratione subduplicata AB ad BP, (§. 216 *Arithm.*), hoc

(a) Vide Horologium Oscillatorium sive Demonstrationes de motu Pendulorum ad horologia aptato Geometricas.

est, ut \sqrt{AB} ad \sqrt{PB} ; consequenter $Mm : mR = \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ (§. 167 *Arithm.*). Unde $Mm = mR \cdot \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$, & $dt = dx \sqrt{a} : \sqrt{(2rx - x^2)} = 2r dx \sqrt{a} : 2r \sqrt{(2rx - x^2)}$. Est vero $rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = Nn$ (§. 157 *Analys. infinit.*) Ergo $dt = 2\sqrt{a} \cdot Nn : 2r$ & $\int dt = \int Nn \cdot 2\sqrt{a} : 2r$. Jam quando $\int dt$ sive t tempus denotat, quo grave per arcum Cycloidis QB descendit, $\int Nn$ in semiperipheriam circuli HNB degenerat. Quare ut $2r$, seu diameter circuli, ad semiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum QB; consequenter cum $2\sqrt{a} = 2a : \sqrt{a}$ denotet tempus descensus perpendicularis per AB (§. 39, 92, 83); patet tandem (§. 168 *Arithm.*) sequens

Theorema: Tempus integræ oscillationis per arcum quemcunque Cycloidis QMB est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris AB, ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo consequitur, quod jam superius aliunde demonstratum (§. 311), tempus descensus per quoslibet arcus Cycloidis esse æquiditurnum; oscillationes item in omnibus arcibus Cycloidis esse æquiditurnas.

THEOREMA LIV.

389. *Gravitatis actio minor est in iis Terra regionibus, ubi oscillationes ejusdem penduli sunt tardiores; major vero, ubi eadem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oscillationum in Cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris

ut

ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), adeoque in ratione constante (§. 413 *Geom.*). Quare si oscillatio ejusdem penduli fit tardior, descensus quoque graviam perpendicularis tardior evadit: si ille redditur celerior; hic quoque celerior fit necesse est. In primo igitur casu minus spatium cadendo conficit grave, quam in altero; adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero; consequenter gravitas minor est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum adeo Experientia docuerit, oscillationes ejusdem penduli esse tardiores prope Æquatorem, quam in remotioribus versus Polum regionibus; gravitas corporum minor est versus Æquatorem, quam versus Polos.

SCHOLIUM.

391. Observavit hoc primus RICHERIUS An. 1672, itinere in Insulam Cayennæ, quæ ab Æquatore 5 fere gradibus distat, facto; ubi pendulum Parisiense singulis minutis secundis oscillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum $8\frac{2}{3}$, minuendum erat linea una cum quadrante, ut adhuc oscillationes singulis minutis secundis absolveret. (a). An. 1677, HALLEIUS ad Insulam S. Helenæ navigans reperit Horologium suum ibi tardius moveri, quam Londini, sed differentiam non notavit. Similes observationes habuere An. 1682, VARIN & DES HAYES; An. 1697, COUPLET filius; & An. 1704, FEUILLE B. (b).

THEOREMA LV.

Tab. III. Fig. 47. 392. Si duo pendula CA & EF in arcus similes DAB & GFH excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum CA & EF.

(a) *Acta Eruditorum*, An. 1695, p. 30.

(b) Vid. NEWTONUM in *Principiis*, Lib. III. Prop. 12, p. m. 419.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad Tab. III. Fig. 47. tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arithm.*); consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF per *hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & 170 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA LVI.

394. Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt.

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus *a* numerus oscillationum penduli unius = *b*, alterius = *mb*. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidistantur; erit tempus quo pendulum primum oscillationem unam conficit = *a* : *b*, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, = *a* : *mb* (§. 302 *Arithm.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut *a* : *b* ad *a* : *mb*, hoc est, ut *amb* ad *ab* (§. 178 *Arithm.*), seu ut *mb* ad *b* (§. 181 *Arithm.*). Sed ut *mb* ad *b* ita est numerus oscillationum penduli secundum ad primum. Sunt itaque numeri oscillatio-

lationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum.
Q. e. d.

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos, excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumptorum (§. 393).

THEOREMA LVII.

396. Longitudines pendulorum intra Cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum quibus singula oscillationes sunt.

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam, ita tempus descensus per altitudinem Cycloidis, seu dimidiam penduli longitudinem, ad tempus unius oscillationis (§. 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudes ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86.) Ergo etiam altitudines, hoc est pendulorum longitudes dimidiæ, consequenter & integræ (§. 178 *Arithm.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per Cycloides absolvuntur (§. 167 *Arith.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumptorum (§. 394).

COROLLARIUM II.

398. Tempora oscillationum in Cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA LX.

399. Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum; invenire longitudinem alterius penduli quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.

RESOLUTIO.

Quærat ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati, & longitudinem penduli dati, numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsitæ (§. 397).

E. gr. Juxta HUGENIUM (a) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60, & ejus longitudo 881 linearum dimidiarum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsitæ = $3600 \cdot 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{645}{1000}$ lin.

PROBLEMA LXI.

400. Dato numero oscillationum quæ a pendulo datae longitudinis in dato tempore absolvuntur; invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datae eisdem longitudinis in dato tempore conficiendarum.

RESO-

(a) In *Horolog. Oscillat.* part. 4. Prop. 25. f. 152.

RESOLUTIO.

1. Quæratnr numerus quartus proportionalis ad longitudes pendulorum inverse sumtas, & quadratum numeri oscillationum quæfiti (§.397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæfitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum = $\sqrt{(88100.3600 : 7929)}$
 = $\sqrt{40000} = 200.$

THEOREMA LVIII.

Tab. III. Fig. 36. 401. Celeritas penduli in puncto infimo B est ad celeritatem cadendo per duplam longitudinem AB acquisitam, ut chorda arcus quem describit EB ad diametrum circuli AB.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquisita æquatur celeritati per PB acquisitæ (§.308). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione subduplicata BP ad BA (§.87). Sed BA:BE=BE:BP (§.330 Geom.), adeoque BA ad BE est ratio subduplicata BA ad BP (§.216, 159 Arithm.). Ergo celeritas per arcum BE est ad celeritatem per BA acquisitam, ut chorda BE ad BA (§.167 Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM.

402. Cum adeo sit celeritas per arcum EB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda EB ad AB, & celeritas per arcum DB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda DB
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

ad AB (§.401); celeritates per arcus EB & DB acquisitæ sunt ut chordæ cognomines (§.195 Arithm.).

Tab. III. Fig. 36.

SCHOLIUM.

403. Alia adhuc Theoremata non inlegantia de Pendulis habet NEWTONUS (a): quæ analytice facillime demonstrantur ex superioribus. Eum igitur in finem sequens addimus Problema.

PROBLEMA LXII.

404. Determinare tempus oscillationis dimidia per arcum exiguum, in hypothesis gravitatis uniformis, sed massa minime proportionalis.

RESOLUTIO.

Sit in C centrum, circa quod pendulum oscillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oscillatur, seu oscillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo, & BNA semicirculus ex centro C descriptus; dicatur

Tab. XVI. Fig. 154.

$$CA = a, AP = x, AQ = b,$$

$$\text{erit } AB = 2a, QP = b - x;$$

$$\text{\& } (\S. 330 \text{ Geom.})$$

$$AB : AN = AN : AQ$$

$$2a : AN = AN : b$$

$$AB : AM = AM : AP$$

$$2a : AM = AM : x$$

adeoque

$$AM = \sqrt{2ax}, AN = \sqrt{2ab}.$$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter subtensæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$, & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, consequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale

(a) Princip. Lib. I. Sect. X. Prop. 50. & seq. & Lib. 2. Sect. VI. Prop. 24. & seq.

Tab.
XVI.
Fig.
154.

tiale mM reperitur $= -\frac{1}{2}x^{-1/2} dx \sqrt{2a}$
 $= -dx \sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, massa $= m$.
 Quoniam gravitas uniformis, seu constans per hypoth. erit celeritas in M utpote cadendo per altitudinem $QP = b-x$ acquisita $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum mM æquabilis, erit tempusculum dt , directe ut spatium seu arculus mM , & reciproce ut celeritas in m acquisita (§. 39); consequenter

$$dt = \frac{mM}{\text{Cel. per NM.}}$$

$$= \frac{-dx \sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

$$t = \int \frac{-dx \sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

Est vero $-bdx : 2\sqrt{(bx - x^2)}$ Elementum arcus QR , radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AQ$ descripti, cujus sagitta $QP = b-x$, ob valorem negativum (§. 157 *Analys. infim.*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx - x^2)} =$ Elemento arcus AR per $\frac{1}{2}AQ$ diviso. Fiat itaque

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx - x^2)}} = dz$$

erit $\frac{-dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{2dz}{b}$

$$\text{adeoque } dt = \frac{-dx \sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx - gx^2)}}$$

$$= \frac{dz \sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z \sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\text{arc. QR. } \sqrt{AB.} \sqrt{m}}{AQ. \sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat $QP = QA$, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA , eritque t tempus dimidiæ oscillationis; hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore

$$t = \frac{QRA. \sqrt{AB.} \sqrt{m}}{AQ. \sqrt{g}}$$

Patet, $QRA : AQ$ designare rationem semiperipheriæ ad diametrum, & \sqrt{AB} esse ut tempus descensus perpendicularis per AB seu altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem (§. 87). Quare si fuerit g ut m , seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galilæana* (§. 114), erunt

Theorema: Oscillationes pendulorum in arcibus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem seu circuli diametrum, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per diametrum, ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA LIX.

405. Tempora sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum, atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l , tempora oscillationum T & t , massæ M & m , gravitates G & g ; erit

$$T = \frac{QRA. \sqrt{2M. L}}{AQ. \sqrt{G}}$$

$$\& t = \frac{QRA. \sqrt{2m. l}}{AQ. \sqrt{g}} \text{ (§. 404), adeoque}$$

$T : t$

Tab.
XVI.
Fig.
154.

Tab. XVI. Fig. 154.

$$T:t = \frac{QRA.\sqrt{2ML}}{AQ.\sqrt{G}} \cdot \frac{QRA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m.l}}{\sqrt{g}} \text{ (§.181 Arithm.)}$$

$$= \sqrt{M.L}\sqrt{g} : \sqrt{m.l}\sqrt{G} \text{ (§.178 Arithm.)}. Q. e. d.$$

THEOREMA LX.

406. Quantitates materie in corporibus funependulis quorum longitudines aequales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in Theoremate præcedente; erit

$$T:t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

adeoque $T^2:t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§.260 Arithm.)

Et hinc $T^2G:t^2g = ML:ml$ (§.184 Arithm.).

Quare cum sit $L=l$ per hypoth. erit $T^2G:t^2g = M:m$ (§.183 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$; hoc est, si tempora sunt æqualia, quantitates materie sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM II.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§.183 Arithm.), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM III.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§.151 Arithm.), adeoque $G : g = t^2 : T^2$.

T^2 (§.299 Arithm.), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM IV.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$; vi demonstr. præf. si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§.183 Arithm.), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM V.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§.185.178 Arithm.), hoc est massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLIUM I.

412. His Principiis usus est NEWTONUS (a) in comparandis corporibus inter se, quoad quantitatem materie in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis, se semper invenisse fatetur quantitatem materie in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis.

COROLLARIUM VI.

413. Quodsi fuerit $M = m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§.151 Arithm.); consequenter $T^2:t^2 = gL : Gl$ (§.299 Arithm.), adeoque $T : t = \sqrt{g}\sqrt{L} : \sqrt{G}\sqrt{l}$ (§.260 Arithm.); hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa longitudinum pendulorum & reciproca gravitatum subduplicata.

COROLLARIUM VII.

414. Quodsi fuerit $M = m$ & $T = t$, erit $gL = Gl$ (§. præf.); consequenter $G : g = L : l$, hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM VIII.

415. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $T^2G = t^2g$ (§.413); consequenter $T^2 : t^2 = g : G$.

N 2

(a) Vid. Princip. Lib. 2. Prop. 24. Cor. 7. p. m. 295.

$= g$; G (§. 299 *Aritbm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Aritbm.*); hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM IX.

416. Quodsi fuerit $M = m$ & $G = g$, erit $T \cdot l = t \cdot L$ (§. 413) consequenter $T^2 : t^2 = L : l$, adeoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLIUM II.

417. Cum in pendulis vis ponderis, qua sollicitatur, in uno puncto concentrata concipiatur, (§. 377), neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat; si pondera massis proportionalia sunt, adeoque æquales quantitates materia seu massæ æquales a gravibus eodem modo animentur, nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde, in hac natura consentanea hypothesi, valent quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.

THEOREMA LXI.

418. Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directâ subduplicata gravitatum massas animantium.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex

rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L} \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{g}$ ad $\sqrt{l} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directâ subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N : n = \sqrt{L} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{G} : \sqrt{l} \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{g}$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

419. Quodsi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{L} \cdot \sqrt{G} : \sqrt{l} \cdot \sqrt{g}$, hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directâ subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM II.

420. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$, erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$; hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directâ virium pendula agitantium.

SCHOLIUM I.

421. Si cui libuerit, is ex analogia $N : n = \sqrt{G} \cdot \sqrt{l} \cdot \sqrt{m} : \sqrt{g} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M}$ plura Theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.

SCHOLIUM II.

422. Quæ hætenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum ex quo pondus suspenditur gravitate careat, & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in præxi filo utendum est tenui, & globo exiguo, sed ex materia

materia quantumvis gravi conflat. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum: perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enim-

vero non sufficit, quemadmodum supra in æquipo-
ponderantibus, invenire Centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus Caput sequens.

C A P U T X.

De Centro Oscillationis.

DEFINITIO XLVII.

423. **C**entrum oscillationis est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Eius itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO XLVIII.

425. *Pes horarius* est tertia pars longitudinis pendulii simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA LXII.

Tab. IV. Fig. 48. 426. Si plura pondera D, F, H, B , quorum gravitas in punctis D, F, H, B , concipiatur collecta, in virgæ inflexili AB eandem inter se & a puncto suspensionis A distantiam constanter conservent, & circa A oscillationes suas perficiat pendulum hoc modo compositum; prodibit

distantia Centri oscillationis O a puncto suspensionis A , si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur. Tab. IV. Fig. 48.

DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus dD, fF, gH & bB , distantis a puncto suspensionis Ad, Af, Ag, Ab proportionales. Patet adeo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse Centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC , summa ponderum in Centro oscillationis O applicata arcum OP describet (S. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B , quo in summam

Tab. mam eorundem O, nisi retinaculum AB
 IV. obfaret; fingula per spatiola ipfi OP
 Fig. 48. æqualia transferrentur, quia motus in
 instanti est uniformis, adeoque celeri-
 tates spatiolis proportionales (§. 33).
 Quare si KN per P ipfi DB parallela du-
 catur; DK, FL, HM, BN (cum arcus
 infinite parvi a chordis eorum non dif-
 ferant exponent celeritates à ponde-
 ribus D, F, H & B in instanti acqui-
 rendas, si libere descenderent. Gra-
 vitas vero cum solo nisu agat (§. 4),
 vis mortua est (§. 9); consequenter
 vires motuum acceleratrices sunt in
 ratione composita ponderum & celeri-
 tatum (§. 278). Deperditur itaque
 in E vis ut D. EK, & in F vis ut
 F. GL; contra vero in H accrescit vis
 ut H. MI, & in B vis ut B. NC; seu
 quod perinde est, ob decrementum
 virium in D & F vi in B aliquid accre-
 scit, sed incrementum in H accremen-
 to in B rursus aliquid detrahit. Cum
 autem sit vis in D ad vim in B, uti AB
 ad AD; vis in F ad vim in B, uti AB
 ad AF; vis denique in H ad vim
 in B, uti AB ad AH (§. 153); re-
 periuntur accrementa virium in B ut
 (D. EK. AD) : AB, & (F. GL. AF) :
 AB, quod vero inde rursus detrahitur
 ut (H. MI. AH) : AB. Habemus adeo

$$B.NC = (D.EK.AD + F.GL.AF - H.MI.AH) : AB.$$

& hinc

$$B.AB.NC + H.MI.AH = D.EK.AD + F.GL.AF.$$

Jam cum GL ipfi EK & MI ipfi
 NC sit parallela, ob rectos, E, G, I, C

(§. 38 *Analys infinit.*) & EG = DF, Tab.
 GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt IV.
 EK & GL ipfis OD & OF, MI & NC Fig. 48.
 ipfis OH & OB proportionales (§. 268
Geom.); consequenter substitutis pro
 EK, GL, MI, NC proportionalibus
 OD, OF, OH, OB; erit

$$B.AB.OB + H.OH.AH = D.OD.AD + F.OF.AF.$$

Denique cum sit

$$\begin{aligned} H.AH^2 &= H.HA.HO + H.HA.AO \\ B.AB^2 &= B.BA.BO + B.BA.AO \\ D.OA.DA &= D.AD.AD + D.OD.AD \\ F.OA.FA &= F.FA.FA + F.OF.FA. \end{aligned}$$

Si utrinque addantur in æquatione
 inventa D.DA² + F.FA² + H.AO.HA
 + B.AO.BA, prodibit

$$D.DA^2 + F.FA^2 + H.AH^2 + B.AB^2 = (D.DA + F.FA + H.HA + B.BA)AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D.DA^2 + F.FA^2 + H.HA^2 + B.BA^2}{D.DA + F.FA + H.HA + B.BA}$$

Q. e. d.

SCHOLIUM I.

427. Quod si non evidens videatur, esse
 $AB^2 = AB.BO + AB.AO$, & $HA^2 = HA.HO$
 $+ HA.AO$; itemque $OA.DA = AD.AD$
 $+ DA.OD$, & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$;
 idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit
 $HA = HO + OA$ (§. 86. *Arithm.*), erit
 $HA^2 = HO^2 + 2HO.OA + OA^2$ (§. 261
Arithm.). Et quoniam $HA = AO + OH$
 (§. 86. *Arithm.*); erit $HA.HO = (AO$
 $+ OH)HO = HO.OA + HO^2$, & $HA.AO$
 $= (AO + OH)AO = AO^2 + OH.AO$
 (§. 93

Tab. IV. Fig. 48. (§. 93 Arithm.); consequenter $HA^2 = HA \cdot HO + HA \cdot AO$ (§. 87 Arithm.). Similiter cum sit $AB^2 = AO^2 + 2 AO \cdot OB + OB^2$, & $AB \cdot BO = (AO + OB) OB = AO \cdot OB + OB^2$, & $AB \cdot AO = (AO + OB) AO = AO^2 + AO \cdot OB$; erit $AB^2 = AB \cdot BO + AB \cdot AO$. Et quia $OA = AD + OD$ (§. 86 Arithm.), erit $OA \cdot DA = (AD + OD) DA = AD \cdot AD + AD \cdot OD$ (§. 93 Arithm.). Similiter quia $AO = AF + FO$; erit $OA \cdot FA = AF \cdot AF + AF \cdot FO$.

SCHOLIION II.

428. Joannes BERNOULLI (a) ex simplicissimis principiis mechanicis Theoriam de Centro oscillationis ab HUGENIO (b) inventam, & à Jacobo BERNOULLI Fratre (c) ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit & ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Opera igitur pretium nos facturos existimamus, si Viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.

PROBLEMA LXIII.

429. Determinare Centrum oscillationis in pendulo composito.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 155. Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quocunque C, D &c. in distantis quocunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est Centrum oscillationis Z, seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur à gravitate naturali G; erit pondus in C = G. C, & momentum

ejus G. C. AC, quod *vires agitativam* penduli appellat BERNOULLIUS. Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G. D. AD & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P, & quæratum tum massa ponderis, tum gravitas a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, adeoque ipsi C substitui possit.

Nimirum cum gravitates, seu vires acceleratrices massarum, sint ut celeritates quas producant in instanti; celeritates autem, in tempusculo infinite parvo quo per angulum infinite parvum ex AL in A (L) movetur pendulum, sint ut C (C) ad P (P) (§. 33), consequenter ut AC ad AP (§. 138, 412 Geom.); erit ut AG ad AP, ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius C subrogandum; consequenter

gravitas in P = $\frac{AP \cdot G}{AC}$. Quod si massa hujus ponderis ponatur P; erit pondus = $\frac{G \cdot P \cdot AP}{AC}$, & momentum = $\frac{G \cdot P \cdot AP^2}{AC}$, quod cum sit æquale momento ponderis in C, erit $\frac{G \cdot P \cdot AP^2}{AC} = G \cdot C \cdot AC$.

$$\text{Unde } P = \frac{C \cdot AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorsus modo reperitur pondus in P substituendum ponderi in D: nimirum massa ejus = $\frac{AD^2 \cdot D}{AP^2}$; gra-

vitas qua animanda, = $\frac{AP \cdot G}{AD}$.

(a) In *Actis Erudit.* A. 1714. p. 257. & seqq.
 (b) In *Horolog. oscillat.* Part. 4. f. 91. & seqq.
 (c) In *Actis Erudit.* A. 1691. p. 317.

Tab. XVI. Est itaque pondus, quod in P substitui debet pro pondere, quod Fig. 155. est in C, $\frac{AP \cdot G}{AC} \times \frac{C \cdot AC^2}{AP^2} = \frac{AC \cdot C \cdot G}{AP}$

& pondus, quod pro D in P substituendum = $\frac{AP \cdot G}{AD} \times \frac{AD^2 \cdot D}{AP^2} = \frac{AD \cdot D \cdot G}{AP}$

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur; invenienda est porro gravitas communis quæ animat uniformiter massarum seu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas = x : erit

$$\frac{AC^2 \cdot Cx}{AP^2} + \frac{AD^2 \cdot Dx}{AP^2} \&c.$$

$$= \frac{AC \cdot C \cdot G}{AP} + \frac{AD \cdot D \cdot G}{AP} \&c.$$

$$\frac{AC^2 \cdot Cx + AD^2 \cdot Dx + \&c.}{(AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.) AP \cdot G}$$

$$x = \frac{(AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.) AP \cdot G}{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.}$$

hoc est, gravitas communis reperitur dividendo ponderum summam per summam massarum.

Cum adeo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia

$$\left(\frac{AC \cdot C + AD \cdot D}{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D} \&c. \right) AP \cdot G \text{ sit}$$

composito AL isochronum, pendula vero simplicia isochrona habeant gravitates longitudinibus proportionales (§. 414); longitudo penduli simplicis AZ fictitio AL isochroni & a gravitate naturali G animandi reperitur, si fiat:

$$\frac{(AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.) AP \cdot G}{(AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.) AP \cdot G} = AP : AZ$$

Erit enim (§. 178, 181, 183 *Arithm.*) Tab. XVI. Fig. 155. $(AC \cdot C + AD \cdot D \&c.) : (AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D \&c.) = 1 : AZ$

consequenter

$$AZ = \frac{AC^2 \cdot C + AD^2 \cdot D + \&c.}{AC \cdot C + AD \cdot D + \&c.}$$

quæ est regula *Hugeniana* (a) in Propositione præcedente demonstrata; sed in eo casu, ubi pondera, quæ pendulum componunt sunt in eadem recta, aut saltem in eodem plano, in quo est axis oscillationis.

Ponamus jam pondera C, D &c. Tab. XVI. Fig. 156. non esse in eadem recta, seu in plano in quo est axis oscillationis, sed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem A oscillante disposita, ita tamen ut situm non mutant. Sit AM linea verticalis plani & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, adeoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus cC, & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam qua impellitur radius AC, in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, adeoque

$$AC : RC = G : \frac{G \cdot RC}{AC}$$

$$\text{Est ergo vis agitativa in C} = \frac{G \cdot RC}{AC}$$

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in D = $\frac{G \cdot DS}{AD}$. Et, si gravitas

(a) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oscillat. f. 98.

Tab. XVI. Fig. 156. vitas absoluta in P=M, respectiva
ibidem $\frac{M. PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumptum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C, idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp, fore

$$AC : AP = \frac{G. RC}{AC} : \frac{M. QP}{AP}$$

adeoque $AC^2 : AP^2 = G. RC : M. QP$
(§. 185 *Arithm.*).

$$AP^2. G. RC = AC^2. M. QP$$

$$\frac{AP^2. G. RC}{AC^2. QP} = M$$

Quod si N denotet gravitatem absolutam qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2. G. DS}{AD^2. QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi = T. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC. C. G = \frac{T. AP^2. G. RC. QP}{AC^2. QP}$$

$$C = \frac{T. AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C. AC^2}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

& gravitate N animandi = $\frac{AD^2. D}{AP^2}$ Tab. XVI. Fig. 156.

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T. M + V. N + \&c.}{T + V}$;

vi antecedentium cum fit

$$T. M = \frac{C. AC^2. AP^2. G. RC}{AP^2. AC^2. QP} = \frac{C. G. RC}{QP}$$

$$\& V. N = \frac{D. AD^2. AP^2. G. DS}{AP^2. AD^2. QP} = \frac{D. G. DS}{QP}$$

$$T + V = \frac{AC^2. C + AD^2. D}{AP^2}$$

$$\text{erit } \frac{T. M + V. N}{T + V}$$

$$= \frac{AP^2. C. G. RC + AP^2. D. G. DS}{QP. AC^2. C + QP. AD^2. D}$$

$$= \frac{C. RC + D. DS}{C. AC^2 + D. AD^2} \times \frac{AP^2. G}{QP}$$

Habemus adeo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variables in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

$$\frac{C. RC + D. DS}{C. AC^2 + D. AD^2} \times \frac{AP^2. G}{QP} : G = AP : AZ$$

$$(C. RC + D. DS) AP : (C. AC^2 + D. AD^2) QP = 1 : AZ \text{ (§. 185 } *Arithm.*)$$

Quamobrem

$$AZ = \frac{C. AC^2 + D. AD^2}{C. RC + D. DS} \times \frac{QP}{AP}$$

quæ est longitudo penduli fictitii in instanti composito isochroni, ob RC, SD, QP variables.

O

Sit

Tab. XVI. Sit jam in F Centrum gravitatis, erit ob parallelas FE & PQ (§.268 *Geom.*).

$$PQ : AP = FE : AF$$

$$\text{adeoq. } AF = \frac{AP \cdot FE}{PQ} = \text{quantit. const.}$$

Erit etiam, ob Centrum gravitatis in F (§.153)

$$(C+D)EF = RC \cdot C + SD \cdot D;$$

adeoque si AP transit per Centrum gravitatis F, hoc est, si sit *Linea centri* phrasi *Hugeniana*; erit

$$AZ = \frac{C \cdot AC^2 + D \cdot DA^2 \&c.}{(C+D \&c.)AF}$$

Atque hæc est regula *Hugeniana* pro inveniendò centro oscillationis in pendulo quocunque composito, quam ipsius verbis enunciat sequens

Theorema. Si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam Centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

COROLLARIUM I.

Tab. IV. Fig. 48. 430. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe $D = F = H = B \&c. = P$ & numerus ponderum n ; erit

$$AO = \frac{P \cdot DA^2 + P \cdot FA^2 + P \cdot HA^2 + P \cdot BA^2 \&c.}{n \cdot P \cdot AR}$$

$$\text{hoc est } AO = \frac{DA^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \&c.}{n \cdot AR}$$

COROLLARIUM II:

431. Quoniam D. AD est momentum ponderis D (§.153); si momenta considerentur ut pondera ad rectam AB applicata, centrum oscillationis coincidet cum Centro gravitatis communi horum ponderum (§.429), adeoque momentis in ponderum locum surrogatis eodem modo determinatur centrum oscillationis, quo supra Centrum gravitatis commune investigavimus (§.157.)

Tab. IV. Fig. 48.

COROLLARIUM III.

432. Si figura plana circa axem RI ita oscilletur, ut is semper maneat in plano oscillante seu (quod perinde est) ordinatis figuræ MN constanter sit parallelus; singulæ pondusculi cujuscunque MN partes ab axe oscillationis RI æqualiter distant (§.81 *Geom.*), nec aliter oscillatur e.gr. particula G ac si in puncto L suspenderetur. Est adeo momentum integri pondusculi MN (§.157) = $2yx^2 dx$, consequenter distantia centri oscillationis ab axe = $2fyx^2 dx : 2f y x dx$ (§.157) = $fyx^2 dx : fyx dx$. Quodsi adeo ex æquatione speciali ad figuram aliquam datam valor ipsius y substituitur, & elementa debita ratione integrentur; prodibit distantia centri oscillationis ab axe in terminis ordinariis.

Tab. L. Fig. 9.

PROBLEMA LXII.

433. Determinare centrum oscillationis in linea recta AB.

Tab. L. Fig. 2.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $AD = x$; erit particula infinite parva $DP = dx$, momentum hujus pondusculi $x dx$; consequenter distantia centri oscillationis in parte AD a puncto suspensionis A = $\int x^2 dx : \int x dx = \frac{1}{3}x^3 : \frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x$. Quodsi pro x substituitur a , prodibit distantia centri oscillationis in recta integra $AB = \frac{2}{3}a$.

SCHO-

SCHOLIION.

434. Hac ratione definitur centrum oscillationis sili ferrei circa alterum extremum oscillantis.

PROBLEMA LXIII.

Tab. I. Fig. 9. 435. Determinare centrum oscillationis rectanguli RIHS in puncto medio A lateris RI suspensi & circa axem RI oscillantis.

RESOLUTIO.

Si fuerit $RI = SH = a$, $AP = x$; erit $Pp = dx$ & elementum areæ, consequenter unum pondusculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 432.) $\int ax^2 dx : \int ax dx = \frac{1}{3} ax^3 : \frac{1}{2} ax^2 = \frac{2}{3} x$ indefinite exprimit distantiam centri oscillationis ab axe oscillationis in segmento RCDI. Quodsi igitur pro x substituatur integri rectanguli altitudo $RS = b$; prodibit distantia centri oscillationis ab axe $= \frac{2}{3} b$.

PROBLEMA LXIV.

436. Determinare centrum oscillationis trianguli equicruri SAH circa axem RI basi SH parallelum oscillantis.

RESOLUTIO.

Sit altitudo $AE = a$, $AP = x$, $EH = \frac{1}{2} b$, $PV = y$; erit (§. 268 Geom.)

$$AP : PV = AE : EH$$

$$x : y = a : \frac{1}{2} b$$

$$ay = \frac{1}{2} bx$$

$$y = bx : 2a$$

$$\text{Hinc } \int yx^2 dx = \frac{\int bx^3 dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yx dx = \frac{\int bx^2 dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

$$\& \frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx} = \frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8} x = \frac{3}{4} x.$$

Quodsi pro x substituatur altitudo Tab. I. integra $AE = a$, prodibit distantia Fig. 9. centri oscillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice A $= \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} AE$.

PROBLEMA LXV.

437. Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri SAH circa basin SH oscillantis.

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in Problemate præcedente, erit $PE = a - x$. Unde

$$\int yx^2 dx = \frac{\int bx dx}{2a} (a-x)^2 = \int (\frac{1}{2} abx dx - bx^2 dx + \frac{bx^3 dx}{2a}) = \frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yx dx = \frac{\int bx dx}{2a} (a-x) = \int (\frac{1}{2} bxdx - \frac{bx^2 dx}{2a}) = \frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$$

$$\frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx} = \frac{(\frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a}) : (\frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a})}{\frac{24a^2 bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a} : \frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a}} = \frac{12a^2 bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8bx^3} \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$$

Habemus adeo distantiam centri oscillationis ab axe in segmento SZVH.

Quodsi pro x substituatur a , prodibit distantia centri oscillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2) : (6a - 4a) = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AE$.

PROBLEMA LXVI.

Tab. I. Fig. 9. 438. Determinare centrum oscillationis in triangulo æquicruo SAH, quod filo inflexile & gravitatis experie Ah suspensum circa axem in basi SH parallelum oscillatur.

RESOLUTIO.

Sit $Ab=c$, reliqua sint ut supra (§. 436): erit $Ph=c+x$. Unde

$$\int yx^2 dx = \int \frac{(c+x)^2 bxdx}{2a} = \int \left(\frac{bc^2 xdx}{2a} + \frac{bcx^2 dx}{a} + \frac{bx^3 dx}{2a} \right) = \frac{bc^2 x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2 x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a} = \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$$

$$\int yx dx = \int \frac{(c+x) \cdot bxdx}{2a} = \int \left(\frac{bcx dx}{2a} + \frac{bx^2 dx}{2a} \right) = \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a} = \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}$$

$$\frac{\int yx^2 dx}{\int yx dx} = \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{3bcx^2 + 2bx^3} = \frac{6bc^2 x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{12a} \cdot \frac{12a}{6bcx^2 + 4bx^3} = \frac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x}$$

stantiæ centri oscillationis ab axe ri in segmento trianguli AZV.

Quodsi pro x substituatür trianguli altitudo $AE=a$, prodibit distantia centri oscillationis ab axe oscillationis ri in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

SCHOLIUM.

439. Ex unico hoc exemplo intelligitur, Tab. I. quid in casu simili aliarum figurarum factu Fig. 9. opus sit.

PROBLEMA LXVII.

440. Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem RI basi SH parallelum oscillantibus.

Quoniam (§. 163)

$$\int yx dx = \int x^{(r+n):n} dx = \frac{x^{(r+2n):n}}{r+2n}$$

$$\text{erit } \int yx^2 dx = \int x^{(r+2n):n} dx = \frac{x^{(r+3n):n}}{r+3n}$$

$$\& \frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx} = \frac{(x+2n)x^{(r+3n):n}}{(r+3n)x^{(r+2n):n}} = \frac{r+2n}{r+3n} x$$

E. gr. In parabola Apolloniana, $r=1$, $n=2$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{2}{7}$ AE.

In paraboloido cubicali, $r=1$, $n=3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{7}{10}$ AE.

In paraboloido biquadratico, $r=1$, $n=4$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{9}{17}$ AE.

In curva ad quam $ax^2 = y^2$, $r=2$, $n=3$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{8}{11}$ AE.

In curva ad quam $ax^3 = y^2$, $r=3$, $n=5$. Ergo distantia centri oscillationis ab axe = $\frac{17}{18}$ AE.

PROBLEMA LXVIII.

441. Invenire centrum oscillationis in parabola SAH circa basin SH agitata.

RESOLUTIO.

Sit $AE=b$, $AP=x$, $MP=y$; erit $ydx = x^{1/2} dx$, $EP=b-x$ & distantia centri oscil-

Tab. I. ofcillationis = $\int x^{1:2} dx (b-x)^2 : \int x^{1:2} dx (b-x)$.

Fig. 9. Quoniam itaque $\int x^{1:2} dx (b-x)^2$

$$= \int b^2 x^{3:2} dx - \int 2bx^{5:2} dx + \int x^{7:2} dx$$

$$= \frac{2}{5} b^2 x^{5:2} - \frac{4}{7} bx^{7:2} + \frac{2}{9} x^{9:2}$$

$$= \frac{70b^2 x^{5:2} - 84bx^{7:2} + 30x^{9:2}}{105} \&$$

$$\int x^{1:2} dx (b-x) = \int bx^{3:2} dx - \int x^{5:2} dx$$

$$= \frac{2}{5} bx^{5:2} - \frac{2}{7} x^{7:2} = \frac{10bx^{5:2} - 6x^{7:2}}{15}$$

erit distantia centri ofcillationis

$$= \frac{15 (70b^2 x^{5:2} - 84bx^{7:2} + 30x^{9:2})}{105 (10bx^{5:2} - 6x^{7:2})}$$

$$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2}{35b - 21x}$$

$$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2}{35b - 21x}$$

Quod si fiat $x=b$, erit distantia centri ofcillationis totius parabolæ SAH à basi SH.

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$

$$= \frac{8b^2}{14b} = \frac{4}{7}b = \frac{4}{7}AE.$$

Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA LXIX.

442. Invenire centrum ofcillationis in infinitis parabolis SAH circa basim SH agitatis.

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis

$$y^m = x \quad (\text{S. 519 Analyf.})$$

$$y = x^{1:m}$$

$$\frac{y dx}{y} = \frac{x^{1:m} dx}{x^{1:m}}$$

$$x^2 y dx = x^{1:m} dx (b-x)^2$$

$$= x^{1:m} dx (bb - 2bx + xx)$$

$$= b^2 x^{1:m} dx - 2bx^{1+m} dx + x^{2+1:m} dx$$

$$\int x^2 y dx = \frac{m}{m+1} b^2 x^{1+1:m} dx - \frac{2m}{2m+1} bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1} x^{3+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2 x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int xy dx = \int bx^{1:m} dx - \int x^{1+1:m} dx = \frac{m}{m+1} bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1} x^{2+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2 y dx}{\int xy dx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2 x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^2(2m+1)^2 x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$

$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)xx}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quod si fiat $x=b$, cum sit
 $(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$
 $(2m+2)(3m+1) = 6m^2 + 8m + 2$
 $(m+1)(2m+1) = 2m^2 + 3m + 1$
 $(m+1)(3m+1) = 3m^2 + 4m + 1$
 reperietur distantia centri ofcillatio-

nis in infinitis parabolis a basi

$$SH = \frac{2m^2 b^2}{(3m^2 + m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1} AE$$

Sit jam $m=2$, prodibit eadem distantia $= \frac{4}{7}AE$, ut ante (S. 441).

LEMMA II.

Tab. XVI. 443. Si in triangulo quocunque
 Fig. erit $AM^2 \times PN + AN^2 \cdot PM = AP^2 \cdot MN + PM \cdot PN \cdot MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o = P$ (§. 156 Geom.), & ang. $MAD = MND$ (§. 315 Geom.), erit $AM:AP = ND:NP$ (§. 267 Geom.), adeoque $AM \cdot NP = AP \cdot ND$ (§. 297 Arithm.).

Similiter $u = y$ (§. 156 Geom.), & ang. $ANM = ADM$ (§. 315 Geom.), consequenter (§. 267 Geom.) $AN:AP = MD:MP$; adeoque $AN \cdot MP = AP \cdot MD$ (§. 297 Arithm.):

Est vero $MN \cdot AD = AM \cdot ND + AN \cdot MD$ (§. 324 Analyf.).

Quare cum fit $AD = AP + PD$ (§. 86 Arithm.); erit etiam $MN \cdot AP + MN \cdot PD = AM \cdot ND + AN \cdot MD$, consequenter $MN \cdot AP^2 + MN \cdot PD \cdot AP = AM \cdot ND \cdot AP + AN \cdot MD \cdot AP$ (§. 93 Arithm.). Quare cum fit, per demonstrata

$$ND \cdot AP = AM \cdot NP$$

$$MD \cdot AP = AN \cdot MP$$

atque $AP \cdot PD = MP \cdot PN$ (§. 381 Geom.); erit $MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot PN = AM^2 \cdot NP + AN^2 \cdot MP$. Q. e. d.

SCHOLIUM.

444. Utimur hoc Lemmate in determinando centro oscillationis in figuris, quæ in latus agitantur, hoc est, circa axem ad planum figure normalem. Ejus enim determinatio difficilior est in hoc casu, quam in precedente, ubi agitatio fit in planum: quemadmodum videre est apud HUGENIUM (a). Calculum dif-

(a) In Horolog. oscillat. part. 4. f. 91, & seqq.

ferentialem ad hoc negotium applicavit Jacobus BERNOULLI (b). Nos primum regulam generalem demonstrabimus, eamque deinde ad Problemata specialia applicabimus, quemadmodum in casu precedente factum.

PROBLEMA LXX.

445. Determinare centrum oscillationis in figuris in latus agitatis.

Tab. XVI. Fig. 158.

RESOLUTIO.

Ponamus Figuram AMN agitari in latus, hoc est, ita ut planum figurae sit ad axem oscillationis normale. Consideremus primum duo puncta M & N tanquam pondera æqualia, aut sumantur pro punctis potius rectarum MP & PN portiones infinite parvæ; erit eorum centrum gravitatis commune, ob $MP = PN$, in P (§. 145), atque adeo pondus in P = M + N (§. 125), consequenter distantia centri oscillationis penduli hujus compositi = $\frac{M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2}{(M + N) AP}$

(§. 429). Est vero $M = N$ & $MP = PN$ per hypoth. Ergo distantia centri oscillationis = $\frac{PN \cdot AM^2 + PM \cdot AN^2}{(M + N) AP}$.

Est vero $PN \cdot AM^2 + PM \cdot AN^2 = MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot PN$ (§. 443), consequenter $M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2 = MN \cdot AP^2 + MN \cdot MP \cdot PN$, hoc est, ob $M = N$, & $PM = PN$, adeoque $MN = PM + PN$, $\frac{M \cdot AM^2 + N \cdot AN^2}{P \cdot AP}$.

= $\frac{P \cdot AP^2 + P \cdot MP \cdot MP}{P \cdot AP}$. Jam cum recta MN in innumera istiusmodi ponduscula

(b) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1703. p. m. 96. 327.

Tab. XVI. & N = dp; si PM fumatur variabilis & dicatur y, AP vero x, summa pondusculorum duorum M & N = dp; erit pro duobus pondusculis distantia centri oscillationis $\frac{x^2 dp + y^2 dp}{x dp}$; consequenter pro omnibus pondusculis secundum rectam MN constitutis distantia centri oscillationis = $\frac{2fx^2 dp + 2fy^2 dp}{2fx dp}$ = $\frac{fx^2 dp + fy^2 dp}{fx dp}$. Enimvero cum ponduscula dp sint parallelogrammula, quorum latitudo est differentiale dy, altitudo differentiale abscissæ, adeoque dp = dx dy & dx respectu dy constans est; erit fdp = dx fdy. Similiter quia y variabilis est respectu x, quod ejus intuitu pro constante habetur; erit $fx^2 dy = x^2 y$ & $fy^2 dy = \frac{1}{3} y^3$ & $fx dy = xy$, consequenter si jam y fumatur pro integra semiordinata PM; erit distantia centri oscillationis in integra figura plana oscillante MAN = $\frac{fx^2 y dx + \int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xy dx}$.

Non alia igitur re opus est, quam ut pro y ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y & y².

COROLLARIUM I.

446. $\frac{fx^2 y dx}{\int xy dx}$ exprimit distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata (§. 432). Quare si distantia centri oscillationis in figura in latus agitata desideretur; ad illam nonnisi adjicienda $\int \frac{1}{3} y^3 dx$, ubi data vel jam inventa præsupponitur.

COROLLARIUM II.

447. Liquet etiam hinc, distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, siquidem ita visum fuerit, una reperiri posse.

PROBLEMA LXXI.

448. Determinare centrum oscillationis rectanguli RIHS ex puncto medio A lateris RI suspensi & in latus agitati. Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si fuerit RI = SH = a, AP = x, erit distantia centri oscillationis ab axe sive a puncto A pro agitatione in planum = $\frac{2}{3} x$, seu pro integro rectangulo = $\frac{2}{3} b$, & ob y = a, $\int xy dx = \int ax dx = \frac{1}{2} ax^2$ (§. 435) & $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{1}{3} a^3 dx = \frac{1}{3} a^3 x$. Quare $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xy dx}$, seu particula adjicienda ut prodeat distantia centri oscillationis rectanguli in latus agitati (§. 446), = $\frac{2a^3 x}{3ax^2} = \frac{2a^2}{3x}$, seu, si porro fiat x = b, = $\frac{2a^2}{3b}$. Est igitur distantia quaesita = $\frac{2}{3} b + \frac{2a^2}{3b}$.

PROBLEMA LXXII.

449. Determinare centrum oscillationis trianguli aequicruri SAH ex vertice suspensi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE = a, AP = x, EH = $\frac{1}{2} b$, PV = y; erit distantia centri oscillationis in planum agitati trianguli = $\frac{1}{4} x$, aut totius trianguli = $\frac{1}{4} a$, $\int xy dx = \frac{bx^2}{6a}$ & $y = \frac{bx}{2a}$ (§. 436).

Quare

Tab.I.
Fig. 9. Quare $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{b^3 x^3 dx}{24a^3} = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$,

consequenter particula adjicienda $\int \frac{1}{3} y^3 dx$

$$= \frac{b^3 x^4}{96a^3} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3 x^4}{96a^3 bx^3} = \frac{b^2 x}{16a^2}$$

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri ex vertice suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2}x + b^2 x : 16a^2$. Quod si fiat $x = a$; erit distantia centri oscillationis trianguli æquicruri $= \frac{1}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA LXXIII.

450. Determinare centrum oscillationis trianguli æquicruri SAH in medio basis SH suspensi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit $PE = a - x$, $\int xy dx = \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$, & distantia centri oscillationis trianguli in planum agitati $= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$, aut integri trianguli $= \frac{1}{2}a$. Sed $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$ (§. 449). Ergo pars addenda $= \frac{24ab^3 x^4}{96a^3(6abx^2 - 4bx^3)} = \frac{3b^2 x^2}{72a^3 - 48a^2 x}$; consequenter, si fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{3a^2 b^2}{72a^3 - 48a^3} = \frac{3b^2}{24a} = \frac{b^2}{8a}$. Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri in medio basis suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$.

PROBLEMA LXXIV.

451. Determinare centrum oscillationis parabola ex vertice suspensa & in latus agitata.

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{2}{3}x$, & si parameter $= 1$, $y^2 = x$ adeoque $y^3 = x^{3/2}$ & $\int xy dx = \frac{2}{3}x^{5/2}$ (§. 440). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{2}{3} x^{3/2} dx = \frac{2}{15} x^{5/2}$; erit pars adjicienda $= \frac{2}{15} x^{5/2} : \frac{2}{3} x^{5/2} = \frac{1}{5}$. Est nempe parameter unitas, adeoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ si dicatur b , erit pars adjicienda $= \frac{1}{3}b$. Habemus adeo distantiam centri oscillationis a vertice parabola in latus agitata $= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}b$.

PROBLEMA LXXV.

452. Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice suspensis.

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis, distantia centri oscillationis a vertice est

$$\frac{r+2n}{r+3n} x, \int xy dx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$$

& quia $y = x^{r:n}$, $y^3 = x^{3r:n}$ (§. 439).

$$\text{Quoniam itaque } \int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{n}{3(3r+n)}$$

$$x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)} x^{(3r+n):n};$$

erit pars adjicienda

$$= \frac{n}{9r+3n} x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$$

$$= \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(3r-n):n}. \text{ Est itaque di-}$$

stan-

tantia centri oscillationis in infinitis parabolis aliisque curvis in latus agitatis

$$\frac{r+2n}{r+3n} x + \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(2r-n):n}$$

Quoniam in parabola Apolloniana $r=1$, $n=2$; erit $\frac{r+2n}{r+3n} = \frac{1+4}{1+6} = \frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n} = \frac{1+4}{9+6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n} = \frac{2-2}{2} = 0$, adeoque $x^{(2r-n):n} = x^0 = 1$. Est adeo, in parabola Apolloniana, distantia centri oscillationis a vertice $\frac{5}{7} x + \frac{1}{3} b$, si nempe parameter $= b$, prorsus ut in Problemate precedente (451).

PROBLEMA LXXVI.

Tab.I. 453. Determinare centrum oscillationis parabola ex dimidia basi suspensa & in latus agitata.

RESOLUTIO.

In parabola SAH circa basin SH in planum agitata distantia centri oscillationis a basi est $\frac{4}{3} b$, seu $\frac{4}{3} AE$ & si parameter $= 1$, $y^2 = x^{3:2}$ & $\int xy dx = 10bx^{3:2} - 6x^{5:2}$ (§. 441). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3} y^2 dx = \frac{2}{15} x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3} y^2 dx : \int xy dx$, seu pars ad-

$$\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}} = \frac{x}{5b - 3x}$$

$=$ (si parameter 1 fiat $= a$) $\frac{ax}{5b - 3x}$;

consequenter si fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $= \frac{ba}{5b - 3b} = \frac{1}{2} a$.

Est igitur distantia centri oscillationis parabola ex dimidia basi suspensa & in latus agitata $= \frac{4}{3} b + \frac{1}{2} a$.

PROBLEMA LXXVII.

454. Invenire centrum oscillationis in figuris solidis rotatione genitis.

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut, in formula superiori $\frac{\int x^2 dp + \int y^2 dp}{\int x dp}$, figuris

Tab. XVI. Fig. 158.

solidis convenienter explicetur valor pondusculi dp . Designat autem dp elementum solidi, quod habetur ducendo in se invicem differentialia abscissae PQ & semiordinatae QK atque semiordinatam QK. Sit PQ $= y$, AP $= x$, QK $= v$, erit elementum $v dy dx$; consequenter cum $\int v dy$ exprimat segmentum PQKL, quod concipitur instar pondusculi in QP collectum, si PM sit $= y$, $\int v dy$ exprimit integrum semicirculum in lineam rectam MN collectum instar ponderis. Sit adeo ratio radii ad semiperipheriam $= r : p$; erit semiperipheria radio PM $= y$ descripta $= \frac{py}{r}$,

consequenter area semicirculi $= \frac{py^2}{r}$, adeoque pondusculum dp in valore $\int x^2 dp$ substituendum $= \frac{py^2 dx}{r}$; unde

$$\int x^2 dp = \frac{\int p x^2 y^2 dx}{r} = \frac{p}{r} \int x^2 y^2 dx.$$

Quod si idem valor substituatur in $\int x dp$; reperietur idem $\frac{p}{r} \int x y^2 dx$. Substituatur

valor ipsius dp etiam in formula $\int y^2 dp$; erit pondusculum puncto Q respondens $y^2 v dy dx$; consequenter ponduscula respondentia lineae QP $= dx \int y^2 dy$.

Tab. XVI. Fig. 158. Dicatur radius circuli PN = t : erit $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, adeoque $svy^2 dy = sy^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)}$. Est vero $sy^2 dy \sqrt{(t^2 - y^2)} = \frac{1}{4} t^2 sdy - \frac{1}{2} yv^3$ (§. 455. *infr*). Ergo omnia ponduscula respondentia lineæ QP sunt $\frac{1}{4} t^2 dx sdy - \frac{1}{2} yv^3 dx$. Jam sdy exprimit segmentum circuli PQKL, adeoque degenerat in semicirculum radio PM descriptum, quando PQ efficitur ipsi PM æqualis, adeoque $t = y$. In eo igitur casu cum area semicirculi sit $\frac{PQ^2}{r}$, est $\frac{1}{4} t^2 dx sdy = \frac{PQ^2 dx}{4r}$. Et

quoniam in M semiordinata QN evanescit, erit $v = 0$, adeoque etiam $\frac{1}{2} yv^3 = 0$. Prodit adeo tandem

$$\frac{sx dp + sy^2 dp}{sx dp + sy^2 dp} = \frac{prsx^2 y^2 dx + \frac{1}{2} prsy^4 dx}{prsx^2 y^2 dx}$$

ut adeo in casu speciali non alia re opus sit, quam ut pro y substituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione solidum generatur, quemadmodum Problemata sequentia docent.

SCHOLIUM I.

455. Diximus, si t sit constans quantitas & $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$, esse $svy^2 dy = \frac{1}{4} t^2 sdy - \frac{1}{2} yv^3$. Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum; quo facto restituitur differentiale ad integrandum propositum (§. 92. *Analys. in fin.*). Quodsi ergo $\frac{1}{4} t^2 sdy = \frac{1}{4} yv^3$ differentietur, cum t constans sit, prodit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} v^3 dy - \frac{1}{2} yv^2 dv$. Jam quia $v = \sqrt{(t^2 - y^2)}$ per hypoth. $vdv = -y dy$ & $v^2 = t^2 - y^2$. Quare his valoribus in $\frac{1}{4} yv^3$ & $\frac{1}{4} v^3 dy$ substituatis;

differentiale emergit $\frac{1}{4} t^2 v dy - \frac{1}{4} t^2 v dy + \frac{1}{4} v y^2 dy + \frac{1}{4} y v^2 dy = \frac{1}{4} v y^2 dy = v y^2 dy$, quod erat elementum ad integrandum propositum.

SCHOLIUM II.

456. Quoniam solida rotatione figurata circa axem fixum genita eodem modo agitantur, in quamcunque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia, qualem in figuris planis inter agitationem in planum & in latum consideravimus, adeoque in omni casu eadem formula satisfacit.

PROBLEMA LXXVIII.

457. Determinare centrum oscillationis in cylindro ex centro basis suspensa.

RESOLUTIO.

Sit altitudo cylindri AB = a , CB = b , AP = x . Quoniam omnes circuli basi paralleli æquales sunt, erit in cylindro PM = CB, hoc est, $y = b$. Unde habemus (§. 454):

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= b^2 x^2 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} b^4 dx \\ xy^2 dx &= b^2 x dx, \end{aligned}$$

adeoque $sx^2 y^2 dx = \frac{1}{3} b^2 x^3$
 $sy^4 dx = \frac{1}{4} b^4 x$
 $sy^2 dx = \frac{1}{2} b^2 x^2$

Quare distantia centri oscillationis à puncto suspensionis = $\frac{\frac{1}{3} b^2 x^3 + \frac{1}{4} b^4 x}{\frac{1}{2} b^2 x^2}$
 $= \frac{2}{3} x + \frac{b^2}{2x}$. Quodsi fiat $x = a$; prodit distantia centri oscillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3} a + \frac{b^2}{2a}$.

SCHOLIUM.

458. Equidem DECHALES (a) centri oscillationis distantiam in Cylindro ex centro basis suspensi tantummodo facit $\frac{2}{3} a$; sed ipse non diffusetur suo tempore Theoriam centri oscillationis nondum fuisse excultam: immo vix fando quid audiverat de regula Hugeniana, quae in Horologio Oscillatorio demonstratur (b).

PROBLEMA LXXIX.

459. Determinare centrum oscillationis in cono ex vertice suspensio.

RESOLUTIO.

Tab. Si altitudo coni $AC = a$, radius II. basis $BC = b$, $AP = x$, $PM = y$; erit Fig. 15. $y = bx : a$ (§. 268 Geom.). Quare (§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= b^2 x^4 dx : a^2 \\ \frac{1}{2} y^4 dx &= \frac{1}{2} b^4 x^4 dx : a^4 \\ xy^2 dx &= b^2 x^3 dx : a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{adeoque } \int x^2 y^2 dx &= b^2 x^5 : 5a^2 \\ \int \frac{1}{2} y^4 dx &= b^4 x^5 : 20a^4 \\ \int xy^2 dx &= b^2 x^4 : 4a^2 \end{aligned}$$

Distantia igitur centri oscillationis a puncto suspensionis = $\left(\frac{b^2 x^5}{5a^2} + \frac{b^4 x^5}{20a^4} \right) :$

$$\frac{b^2 x^4}{4a^2} = \frac{4}{5} x + \frac{b^2 x}{5a^2} \text{ . Quodsi jam porro}$$

fiat $x = a$: prodit distantia centri oscillationis pro cono integro = $\frac{4}{5} a + \frac{b^2}{5a}$.

PROBLEMA LXXX.

460. Determinare centrum oscillationis Sphæra.

(a) In *Atandi Mathematici* Tom. I. Sect. Lib. 3. Prop. 65. f. m. 312.
(b) Vide Prop. præc. 64.

RESOLUTIO.

Si diameter Sphærae = $2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377 *Analyf.*), adeoque $y^4 = 4r^2 x^2 - 4rx^3 + x^4$.

Habemus adeo (§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= 2rx^3 dx - x^4 dx \\ \frac{1}{2} y^4 dx &= r^2 x^2 dx - rx^3 dx + \frac{1}{2} x^4 dx \\ xy^2 dx &= 2rx^2 dx - x^3 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{2} rx^4 - \frac{1}{5} x^5 \\ \int \frac{1}{2} y^4 dx &= \frac{1}{3} r^2 x^3 - \frac{1}{4} rx^4 + \frac{1}{10} x^5 \\ \int xy^2 dx &= \frac{2}{3} rx^3 - \frac{1}{4} x^4 \end{aligned}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis = $\frac{\frac{1}{2}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{1}{10}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}$
= (multiplicando per 12 & dividendo per x^2) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{6}{5}x^3}{8r - 3x}$
= $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodsi

fiat $x = 2r$, prodit distantia centri oscillationis pro Sphæra integra $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14r}{10} = \frac{7}{5}r$.

Si pro r ponatur diameter d , quia $d = 2r$, adeoque $\frac{1}{2}d = r$, erit eadem distantia = $\frac{7}{5}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat $x = r$, prodit distantia centri oscillationis in hemisphæra $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{25}$ ubi nempe ex vertice facit suspensum.

PROBLEMA LXXXI.

462. Determinare centrum oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.

RESOLUTIO.

Si parameter parabolaë generatricis a ; erit $y^2 = ax$ (§. 388. *Analys.*), adeoque $y^4 = a^2 x^2$. Habemus adeo (§. 454.)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= ax^3 dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} a^2 x^2 dx \\ xy^2 dx &= ax^3 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{adeoque } \int x^2 y^2 dx &= \frac{1}{4} ax^4 \\ \int \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{12} a^2 x^3 \\ \int xy^2 dx &= \frac{1}{4} ax^4 \end{aligned}$$

Quamobrem distantia centri oscillationis à vertice

$$= \frac{\frac{1}{4} ax^4 + \frac{1}{12} a^2 x^3}{\frac{1}{4} ax^4} = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} a.$$

Si diameter basis fuerit b , & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391. *Analys.*). Quodsi ergo x degenerat in c ; prodit distantia centri oscillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{1}{4} c + \frac{1}{4} b^2 : 4c$.

PROBLEMA LXXXII.

463. Determinare centrum oscillationis in omnibus Conoidibus parabolicis in infinitum circa verticem agitati.

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1 , pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{2m}$ (§. 519. *Analys.*), adeoque $y^2 = x^{4m}$ & $y^4 = x^{8m}$.

Habemus itaque (§. 454)

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= x^{2+2:4m} dx \\ \frac{1}{4} y^4 dx &= \frac{1}{4} x^{4:4m} dx \\ xy^2 dx &= x^{1+2:4m} dx \end{aligned}$$

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{m}{3m+2} x^{3+2:4m}$$

$$\int \frac{1}{4} y^4 dx = \frac{m}{4m+16} x^{4:4m}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{m}{2m+2} x^{2+2:4m}$$

Est igitur distantia centri oscillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitati.

$$\frac{2m+2}{3m+2} x + \frac{2m+2}{4m+16} x^{-1+2:4m}$$

$$= \frac{2m+2}{3m+2} x + \frac{m+1}{2m+8} x^{-1+2:4m}$$

Ponatur $m=2$, prodit $\frac{6}{5} x + \frac{3}{12} x^{-6}$, hoc est, ob $x^0=1$ (§. 55. *Analys.*), $\frac{2}{5} x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam posuimus $= 1$, fiat a ; erit distantia centri oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{2}{5} x + \frac{1}{4} a$, prodit ut ante (§. 462).

PROBLEMA LXXXIII.

464. Determinare centrum oscillationis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.

RESOLUTIO.

Quoniam planum describens est hyperbola, si axis transversus dicitur a ,

parameter b , erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (§. 459

Analys.), adeoque $y^4 = b^2 x^2 + \frac{2b^2 x^3}{a}$

$+ \frac{b^2 x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454)

$$x^2 y^2 dx = bx^3 dx + \frac{bx^4 dx}{a}$$

$$\frac{1}{2} y^4 dx = \frac{1}{2} b^2 x^2 dx + \frac{b^2 x^3 dx}{2a} + \frac{b^2 x^4 dx}{4a^2}$$

$$xy^2 dx = bx^2 dx + \frac{bx^3 dx}{a}$$

adeoque

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{4} bx^4 + \frac{bx^5}{5a} = \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$

$$\int \frac{1}{2} y^4 dx = \frac{1}{12} b^2 x^3 + \frac{b^2 x^4}{8a} + \frac{b^2 x^5}{20a^2}$$

$$= \frac{160a^2 b^2 x^3 + 240ab^2 x^4 + 96b^2 x^5}{12a \cdot 160a}$$

$$= \frac{10a^2 b x^3 + 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{4a} = \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2 y^2 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{3 \cdot 5abx^4 + 3 \cdot 4bx^5}{5 \cdot 4abx^3 + 5 \cdot 3bx^4}$$

$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$

$$\frac{\int \frac{1}{2} y^4 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{10a^2 b^2 x^3 + 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{10a \cdot 4abx^3 + 10a \cdot 3bx^4}$$

$$= \frac{10a^2 b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Est adeo distantia centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico

$$\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2 b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Quodsi fiat $x = a$, prodibit distantia Centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi transverso æqualis,

$$\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2 b + 15a^2 b + 6a^2 b}{40a^2 + 30a^2}$$

$$= \frac{27}{35} a + \frac{17}{70} b.$$

PROBLEMA LXXXIV.

465. Determinare centrum oscillationis in Spheroidæ ellipticæ ex vertice, seu altero axis majoris extremo, suspensæ.

RESOLUTIO.

Si axis transversus fuerit a , parameter b ; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (§. 420 *Analys.*);

adeoque $y^4 = b^2 x^2 - \frac{2bx^3}{a} + \frac{b^2 x^4}{a^2}$.

Reperitur adeo, uti in Problemate præcedente (§. 564),

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$

$$\int \frac{1}{2} y^4 dx = \frac{10a^2 b^2 x^3 - 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12a}$$

adeoque $\frac{\int x^2 y^2 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{2} y^4 dx}{\int xy^2 dx} = \frac{10a^2 b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Est igitur distantia centri oscillationis à vertice

$$\frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Quodsi fiat $x = a$, prodit distantia centri oscillationis a vertice pro integro Sphæroide circa axem majorem agitato

$$\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{16a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2}$$

$= \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$. Si fiat axis minor $= c$, erit $b = c^2 : a$ (§. 423 *Analys.*), adeoque distantia centri oscillationis in

$$\text{Sphæroide} = \frac{3a}{5} + \frac{c^2}{10a}$$

PROBLEMA LXXXV.

466. Determinare centrum oscillationis in Cono ex centro basis suspensò.

RESOLUTIO.

Sit semidiameter basis $BC = b$, Tab. II. Fig. 15. $CP = x$, $AC = a$, erit $AP = a - x$, consequenter ob $AC : BC = AP : PM$ (§. 268 *Geom.*), $PM = y = (ab - bx) : a$

$$= b - bx : a, y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}, \& y^4 = b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$$

Habemus adeo (§. 454):

$$x^2 y^2 dx = b^2 x^2 dx - \frac{2b^2 x^3 dx}{a} + \frac{b^2 x^4 dx}{a^2}$$

$$\frac{1}{2} y^4 dx = \frac{1}{2} b^4 dx - \frac{b^4 x dx}{a} + \frac{6b^4 x^2 dx}{4a^2} - \frac{b^4 x^3 dx}{a^3} + \frac{b^4 x^4 dx}{4a^4}$$

$$xy^2 dx = b^2 x dx - \frac{2b^2 x^2 dx}{a} + \frac{b^2 x^3 dx}{a^2}$$

$$\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{3} b^2 x^3 - \frac{b^2 x^4}{2a} + \frac{b^2 x^5}{5a^2} = \frac{10a^2 b^2 x^3 - 15ab^2 x^4 + 6b^2 x^5}{30a^2}$$

$$\int \frac{1}{2} y^4 dx = \frac{1}{2} b^4 x - \frac{b^4 x^2}{2a} + \frac{b^4 x^3}{2a^2} - \frac{b^4 x^4}{4a^3} + \frac{b^4 x^5}{20a^4} = \frac{5a^4 b^4 x - 10a^3 b^4 x^2 + 10a^2 b^4 x^3 - 5ab^4 x^4 + b^4 x^5}{20a^4}$$

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{2} b^2 x^2 - \frac{2b^2 x^3}{3a} + \frac{b^2 x^4}{4a^2} = \frac{6a^2 b^2 x^2 - 8ab^2 x^3 + 3b^2 x^4}{12a^2}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20a^2 x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4 b^2 - 30a^3 b^2 x + 30a^2 b^2 x^2 - 15ab^2 x^3 + 3b^2 x^4}{30a^4 x - 40a^3 x^2 + 15a^2 x^3}$$

Quodsi fiat $x = a$, erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Cono integro

$$= \frac{20a^3 - 30a^3 + 12a^3}{30a^2 - 40a^2 + 15a^2} + \frac{15a^4 b^2 - 30a^4 b^2 + 30a^4 b^2 - 15a^4 b^2 + 30a^4 b^2}{30a^5 - 40a^5 + 15a^5} = \frac{3}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$$

Si al

Si altitudo Coni fuerit semidiametro basis æqualis, erit $a = b$, adeoque $b^2 : a = a$. Unde distantia centri oscillationis in Cono rectangulo a puncto suspensionis $\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = a$.

PROBLEMA LXXXVI.

467. Determinare centrum oscillationis in Hemisphærio ex centro basis suspensio.

RESOLUTIO.

Quoniam abscissæ hic computantur a centro, si radius circuli sit r , erit $y^2 = r^2 - x^2$ (§. 377 Anal.) & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$. Habemus itaque (§. 454):

$$\begin{aligned} x^2 y^2 dx &= r^2 x^2 dx - x^4 dx \\ \frac{2}{3} y^4 dx &= \frac{2}{3} r^4 dx - \frac{4}{3} r^2 x^2 dx + \frac{2}{3} x^4 dx \\ x y^2 dx &= r^2 x dx - x^3 dx \end{aligned}$$

$$\frac{\int x^2 y^2 dx = \frac{1}{3} r^2 x^3 - \frac{1}{5} x^5}{5 r^2 x^3 - 3 x^5} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{\int \frac{2}{3} y^4 dx = \frac{2}{3} r^4 x - \frac{4}{15} r^2 x^3 + \frac{2}{15} x^5}{15 r^4 x - 10 r^2 x^3 + 3 x^5} = \frac{60}{60}$$

$$\frac{\int x y^2 dx = \frac{1}{2} r^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4}{2 r^2 x^2 - x^4} = \frac{4}{4}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$\frac{20 r^2 x - 12 x^3}{30 r^2 x - 15 x^3} + \frac{15 r^4 - 10 r^2 x^2 + 3 x^4}{30 r^2 x - 15 x^3}$$

aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x ,

$$\frac{10 r^2 x^2 - 9 x^4 + 15 r^4}{30 r^2 x - 15 x^3}$$

Quodsi fiat $x = r$, prod. bit. distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in Hemisphærio integro:

$$\frac{10 r^4 - 9 r^4 + 15 r^4}{30 r^3 - 15 r^3} = \frac{16}{15} r$$

SCHOLIUM.

468. Non absimili modo inveniri potest centrum oscillationis Conoidis & Spheroidis dimidii ex centro basis suspensi. Potest etiam punctum suspensionis h. exera figuram assumi, ut distantia pondusculi P ab axe oscillationis sit Ph, atque ab abscissa figura AP differat quantitate Ah, veluti si figura oscillans ex filo suspendatur: quo in casu HUGENIUS reperit in Sphæra ex filo tenui suspensa distantiam centri oscillationis esse longitudinem filii & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compositam ex semidiametro sphæra ac longitudine filii & semidiametrum ipsam

Tab. I. Fig. 9.

(a), hoc est, si filum = l , radius = r , $l^2 + r^2 = \frac{2r^2}{5(l+r)}$

PROBLEMA LXXXVII.

469. Determinare quantitatem pedis horarii.

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas semicycloides suspensio, & singulas oscillationes singulis minutis secundis aut eorum semiffibus absolvente (§. 382) instructum, & secunda temporis scrupula indice peculiari monstrans ad motum stellarum ea ratione componatur quæ inferius in *Astronomia* exponitur.
2. Globus plumbeus ex filo tenui suspensus (§. 377) leniter impellatur, ut non nisi exiguos arcus describat, quo singulæ oscillationes sint isochronæ (§. 383), & tamdiu augeatur vel minuatur filii longitudo, donec oscillationes singulis minutis secundis absolvantur.

3. Quo-

(a) In *Horolog. Oscilat.* Part. IV. Prop. 22. fol. 142.

3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertie proportionalis ad compositam ex semi-diametro & longitudine fili atque semidiametrum ipsam definiunt distantiam centri oscillationis ab axe (§. 468); eandem pars tertia quantitatem pedis horarii constituit. (§. 425).

SCHOLIUM I.

470. HUGENIUS (a) hoc modo invenit, pedem horarium esse ad Parisiensem ut 881 ad 864, hoc est, longitudo penduli simplicis oscillationes singulas singulis minutis secundis absolvens esse trium pedum Parisiensium cum octo lineis & dimidia. Monet autem pedem Parisiensem ad Rhenum esse ut 144 ad 139, hoc est, quinque suis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.

SCHOLIUM II.

471. Quodsi gravitas omnibus in locis eadem esset; pedes horarii mensura foret universalis & perpetua, quemadmodum HUGENIUS contendit: sed cum eandem variari nunc constat pro diversa Equatore distantia (§. 390); non nisi iis in locis eadem penduli simplicis minuta secunda merentis longitudo, quorum latitudines non nimis discrepant. Quo itaque mensura vere universalis haberetur, opus præterea esset, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diversis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorsus indignum censeri debet; hætenus nec per experimenta constare, nec demonstratum esse, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot seculorum decursum, gravitas non mutetur.

(a) Horolog. Oscillat. Part. IV. Prop. 25. fol. 152. & 153.

THEOREMA LXIII.

472. Spatium descensus perpendicularis gravium intra minutum secundum temporis est ad semissem longitudinis penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis respondent, in ratione duplicata peripherie ad diametrum circuli.

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius tertium sumtus, seu longitudo penduli simplicis cujus oscillationes minutis secundis horariis respondent (§. 425) = a , tempus descensus per dimidiam illam longitudinem = t , altitudo quaesita = x , ratio diametri ad peripheriam = $d : p$; erit $t = d : p$ (§. 387). Est vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2} a : x$ (§. 87), adeoque $t^2 x = \frac{1}{2} a$, hoc est, si valor ipsius t modo inventus substituitur, $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2} a$, seu $d^2 x = \frac{1}{2} ap^2$. Ergo $x : \frac{1}{2} a = p^2 : d^2$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d : p = 113 : 355$ (§. 427 Geom.) & $a = 3' 8\frac{1}{2}''$, seu 737 linearum dimidiarum pedis Parisiensis (§. 470); erit $x = ap^2 : 2d^2 = 737. 126025 : 25538 = 1818'' = 15' 1'' 8''$ seu $15' 1''$ quam proxime.

SCHOLIUM.

474. Hac cum experimentis accuratissimis prorsus convenire observavit HUGENIUS (b).

CAPUT

(b) In Horolog. Oscillat. Part. IV. Prop. 26. fol. 155.

C A P U T XI.

De Motu Projectorum.

DEFINITIO XLIX.

475. **G**rave perpendiculariter projecti dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO L.

476. Grave horizontaliter projecti dicitur, si impellitur secundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO LI.

477. Grave oblique projecti dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO LII.

Tab. IV. Fig. 50. 478. Angulus elevationis RAB est, quem efficit linea directionis corporis projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA LXIV.

479. Si corpus grave perpendiculariter projecti, perpendiculariter ascendit.

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur secundum lineam directionis, quæ est ad horizontalem perpendicularis (§. 475). Quare cum gravitas secundum eandem directionem vi impressæ resistat (§. 215); directionem mutare nequit, sed motum

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter ascendit (§. 71). Q. e. d.

THEOREMA LXV.

480. Si corpus grave horizontaliter projecti, motu suo parabolam describit in medio non resistente. Tab. IV. Fig. 49.

DEMONSTRATIO.

Corpus enim projectum vi impressa uniformiter urgetur secundum rectam AR (§. 71); sed vi gravitatis secundum rectam AC, quæ ad rectam AR, lineæ horizontali (ex hypothesi) parallelam perpendicularis (§. 215). Jam si vi impressa corpus pervenisset in Q, vi gravitatis descendit interea per QM, adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus secundum directionem AR semper est uniformis, per demonstr. spatia AQ & Aq sunt ut tempora (§. 32). Sed spatia QM & qm, sunt ut temporum quadrata (§. 86.). Est ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc est, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (§. 257 Geom.). Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm est parabola (§. 402 Analys. fin.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

481. Equidem cum gravia versus centrum Telluris tendant (§. 213), rectæ QM & qm in eodem concurrere debent, adeoque parallele non sunt (§. 82 Geom.). Enim-

Q

vero

Tab. vero si tota altitudo AC, per quam decedit
 IV. grave secundum directionem AR projectum,
 Fig. 49. sit exigua admodum pars distantia a centro
 Telluris (§. 216.); pro parallelis, citra
 errorem experimento ullo definiendum, ha-
 beri possunt.

THEOREMA LXVI.

Tab. 482. Si corpus grave oblique, sive
 IV. sursum, sive deorsum, projicitur in
 Fig. 50. medio non resistente; motu suo para-
 bolam describit.

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis sur-
 sum projecti AR. Cum corpus pro-
 jectum, si gravitatis actio cessaret, ean-
 dem uniformiter describeret (§. 71);
 positis AQ, Qg, qb & bR æqualibus,
 erunt AQ & Ag ut tempora (§. 32).
 Quodsi AB sit linea horizontalis, &
 QM, qm &c. ita ducantur, ut conti-
 nuatæ in T, t &c. sint ad AB perpen-
 diculares; erunt QM, qm &c. altitudi-
 nes, per quas vi gravitatis descendit
 interea corpus projectum, dum ex A
 in Q, q &c. pervenisset (§. 215). Quare
 si AS ducatur ad AB perpendicularis;
 erit rectis QM, qm &c. parallela (§. 256
 Geom.). Ductis porro PM, pm &c. ipsi
 AR parallelis; erit $PM = AQ$, $pm = Ag$
 &c. $AP = QM$, $Ap = qm$ &c. (§. 257
 Geom.), adeoque $AP : Ap = PM^2 : pm^2$,
 (§. 86). Est igitur AMB parabola,
 cujus diameter AS (§. 416. *Analys. finit.*).
Quod erat unum.

Tab. II. Sit similiter linea directionis
 IV. corporis deorsum projecti AR in par-
 Fig. 51. tes æquales AQ, Qg &c. divisa & RS
 linea horizontalis. Ducta AS ad RS

perpendiculari & QM, qm &c. eidem Tab.
 AS; PM vero, pm &c. ipsi AR paralle- IV.
 lis: eodem, quo ante, modo demonst- Fig. 51.
 tratur, esse $AP : Ap = PM^2 : pm^2$. Qua-
 re AMm denuo est parabola, cujus
 diameter AS (§. cit. *Analys. finit.*).
Quod erat alterum.

COROLLARIUM I.

483. Est ergo parameter diametri pa-
 rabolæ AS tertia proportionalis ad AP &
 PM: sive QM & AQ (§. cit. *Analys. finit.*),
 hoc est, ad spatium, per quod grave
 dato tempore descendit, & ad celerita-
 tem spatio, quod vi impressa eodem tem-
 pore describit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM II.

484. Cum spatium uno minuto secun-
 do à gravi quocunque perpendiculariter
 cadendo confectum notum sit, nempe
 $15 \frac{1}{2}$ pedum Parisiensium (§. 473); para-
 meter diametri parabolæ describendæ in-
 venit, si spatii, quod uno minuto se-
 cundo projectile vi impressa percurrit,
 quadratum per $15 \frac{1}{2}$ pedum Parisiensium
 dividatur (§. 302. *Aritbm.*)

COROLLARIUM III.

485. Si ergo velocitas projectorum ea-
 dem, spatia eodem tempore vi impressa
 descripta æqualia sunt (§. 33); conse-
 quenter eadem parabolæ, quas motu
 composito percurrunt, parameter inve-
 nitur (§. 177 *Aritbm.*)

COROLLARIUM IV.

486. Si a parametro diametri subtra-
 hatur ipsius altitudinis AP quadruplum,
 parameter axis relinquitur (§. 416 *Analys.*
finit.), cujus quarta pars est distantia ver-
 tice axis a foco parabolæ (§. 396 *Analys.*
finit.). Parabola igitur describi potest, data
 celeritate projectorum (§. 400 & 401
Analys. finit.) & (§. 484 *Mech.*)

COROL.

COROLLARIUM V.

487. Linea directionis projectilis AR parabolam in A tangit (§. 414, 415 *Analys. finit.*)

DEFINITIO LIII.

488. *Semita* est Parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum describit.

DEFINITIO LIV.

Tab. IV. Fig. 50. 489. *Amplitudo* (scilicet semitæ) est recta horizontalis AB semitam AMB subtendens.

THEOREMA LXVII.

490. *Projectile temporibus aequalibus per aequalia spatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB semita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Qq &c. divisa. Demittantur perpendiculares QT, qt, &c. erunt AT, Tt &c. spatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes semitæ AM, Mm, &c. percurrit. Quoniam projectile vi sola impressa uniformiter describeret rectas AQ, Qq &c. (§. 71); AQ, Qq &c. sunt ut tempora (§. 32). Est vero AQ:Qq = AT:Tt (§. 268 *Geom.*). Ergo AT & Tt sunt ut tempora; consequenter temporibus æqualibus etiam AT & Tt æquantur. Q. e. d.

PROBLEMA LXXXVIII.

491. Dato angulo elevationis RAB, una cum amplitudine AB; invenire parametrum diametri AS semitæ AMS.

RESOLUTIO.

Sit sinus anguli elevationis = x , cosinus = b , sinus totus = t , amplitudo AB = c , parameter = x . Si AR sumatur pro sinu totæ, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis RAB (§. 3, 11, *Trigon.*) adeoque

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = c : \frac{ac}{b}$$

Est itaque BR = AS (§. 257 *Geom.*) = $ac : b$.

$$\text{Porro } b : t = AB : AR$$

$$b : t = c : \frac{tc}{b}$$

Est itaque AR = SB (§. cit.) = $tc : b$.

Quare ob x . AS = SB² (§. 416 *Analys. finit.*)

$$acx : b = c^2 t^2 : b^2$$

$$ax = ct^2 : b$$

$$x = ct^2 : ab$$

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c : x$. Est vero $\frac{t^2}{b}$

secans anguli elevationis RAB (§. 26 *Trigon.*). Habemus itaque sequens

Theorema. Amplitudo semitæ AB est ad parametrum diametri AS, ut sinus anguli elevationis RAB ad ejus secantem.

COROLLARIUM I.

492. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§. 491), adeoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 93 *Aritbm.*) erit etiam $2abx : 2t^2 = c$; consequenter $t : \frac{2ab}{c} = \frac{1}{2}x : c$. Est vero $2ab : c$ sinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325 *Analys. finit.*).

Q 2

Ergo

Ergo semiparameter est ad amplitudinem AB ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM II.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem est (§. 485.). Quare cum sit semiparameter semitæ in uno casu ad amplitudinem, ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis; & semiparameter semitæ in altero casu ad amplitudinem, ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis (§. 492); amplitudines sicut ut sinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum existente eadem (§. 196 Arithm.), & ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc casu constans est (§. 173 Arithm.).

THEOREMA LXVIII.

494. Si eadem maneat projectilis celeritas; amplitudo AB maxima est sub angulo elevationis 45° ; æquales vero sunt amplitudines sub angulis elevationis a semirecto æqualiter differentibus.

DEMONSTRATIO.

Cum ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem constans sit, celeritate projectilis existente eadem (§. 493); crescente sinu anguli dupli elevationis crescit amplitudo. Quare cum sinus anguli elevationis 45° dupli sit radius; quo major sinus non datur; maxima sit necesse est amplitudo sub sinu anguli elevationis 45° . Quod erat unum.

Jam cum idem sit sinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5 Trig.), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, si sin-

pli a semirecto differant æqualiter; amplitudines eo in casu æquales sint necesse est (§. 493). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut sinus totus ad sinum anguli elevationis dupli, ita semiparameter ad amplitudinem (§. 492), & sinus totus sinui anguli elevationis dupli æqualis, si is 45° ; sub angulo elevationis 45° amplitudo semiparametro æquatur.

PROBLEMA LXXXIX.

496. Data amplitudine maxima; determinare amplitudinem sub angulo elevationis alterius cujuscunque; celeritate manente eadem.

RESOLUTIO.

Quoniam sinus totus est sinus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (§. 494); fiat ut sinus totus ad sinum anguli dupli elevationis cujuscunque alterius, ita amplitudo maxima ad quæsitam (§. 493).

E. g. Sit jactus maximus, seu semirectus alicujus tormenti 6000 passuum; & queratur longitudo jactus graduum 30. Reporietur 5196 passuum.

Log. sin. tot.	1000000000
Log. sin. 60	99375306
Log. 6000	37781512

Log. quæsit. $+37781512$, cui in tabulis respondet 5196.

PROBLEMA XC.

497. Data celeritate projectilis; invenire amplitudinem maximam.

RESO.

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per spatium, quod vi impressa, dato tempore, e. gr. uno secundo minuto, percurrere valet: non alia re opus est, quam ut parameter semitæ inveniatur (§. 484). Hujus enim semissis est amplitudo quæsitæ (§. 475).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum secundum 1000 pedes Parisienses, seu 12000", conficere valeat. Quodsi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter semitæ maximæ 795580" seu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum constituta sunt, projectile attingere potest.

PROBLEMA XCI.

498. Data amplitudine maxima, invenire celeritatem projectilis, seu spatium horizontale intra minutum secundum conficiendum.

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ sit parameter semitæ (§. 495); inter duplum amplitudinis maximæ & spatium quod intra minutum secundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe, 181 digitorum, qualium 12 est pes Parisiensis, quæratür numerus medius continue proportionalis (§. 302 Arithm.) Is enim erit spatium à projectili intra unum minutum secundum conficiendum (§. 495).

Si amplitudo maxima 500 pedum Parisiensium; erit parameter maxima 1000 pedum, seu 12000 digitorum; & hinc spatium quæsitum = $\sqrt{(12000 \cdot 181)} = 120$ pedum Parisiensium cum 9 uncis seu digitis.

PROBLEMA XCII.

499. Determinare altitudinem maximam *tm*, ad quam grave oblique projectum ascendit. Tab. IV. Fig. 50.

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $BR = b$, $AT = x$; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 Geom.) Porro (§. 268 Geom.)

$$AB : BR = AT : TQ;$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (§. 416. *Analys. finit.*)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$

$$a^2 + b^2 : \frac{a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

$$\text{Quare } TM = bx : a - bx^2 : a^2.$$

Cum vero *tm* sit maximum aliquod, per *hypoth.* erit (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$

$$ab - 2bx = 0$$

$$ab = 2bx$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo *AB* bifariata dividatur in *t*, & ex puncto *t* erigatur perpendicularis *tm*; erit *tm* altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem *AR* projectum ascendit.

THEOREMA LXIX.

500. Si altitudo maxima *tm*, ad quam grave juxta directionem *AR* projectum ascendit, continuetur usque ad lineam directionis *AR*; erit recta *qm* inter semitam *Amb* & lineam directionis *AR* intercepta eidem equalis: & si, in extremitate semitæ erigatur perpendicularis *BR*; erit $tm = \frac{1}{4}BR$.

DEMONSTRATIO.

Tab. IV. Quoniam $AB : At = AR : Aq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 499); erit etiam $Aq = \frac{1}{2} AR$. Est vero $AR^2 : Aq^2 = BR : gm$ (§. 416 *Analys. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4} AR^2$, per demonstrat. erit quoque $gm = \frac{1}{4} BR$. Quod erat unum.

Sed, ob $AB : At = BR : tq$ (§. 268 *Geom.*), & $At = \frac{1}{2} AB$ (§. 499) $tq = \frac{1}{2} BR$, hinc $\frac{1}{2} tq = \frac{1}{4} BR$. Est vero $gm = \frac{1}{2} BR$ per demonstrat. Ergo $gm = \frac{1}{2} tq$ (§. 87 *Arithm.*) = tm . Quod erat alterum.

PROBLEMA XCIII.

501. Data amplitudine AB & angulo elevationis BAR ; determinare altitudinem jactus maximam tm .

RESOLUTIO.

Si AR sumatur pro sinu toto, erit BR sinus, AB cosinus anguli elevationis BAR (§. 3, II *Trigon.*) Quare si fiat ut cosinus anguli elevationis ad sinum ejusdem, ita amplitudo AB ad quartum; reperietur BR , cujus quarta pars est altitudo jactus maxima tm (§. 500).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate, projectilis amplitudo maxima (§. 497), & inde porro amplitudo sub angulo elevationis quocunque invenitur (§. 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri potest (§. 501).

THEOREMA LXX.

503. Altitudo jactus tm est ad octavam parametri partem, ut sinus versus anguli dupli elevationis ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli elevationis $BAR = a$, Tab. cosinus = b , sinus totus = t , parameter IV. = x ; erit amplitudo $AB = abx : t^2$ (§. Fig. 50. 492) & (§. 501.)

$$b : a = AB : BR$$

$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4} BR$ (§. 500) = $a^2x : 4t^2 = 2a^2x : 8t^2$. Est vero $(b^2 - a^2) : t$ cosinus anguli dupli elevationis (§. 325 *Analys. finit.*), & hinc sinus versus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 - a^2) : t$ (§. 2 *Trigon.*) = $(t^2 - b^2 + a^2) : t$ consequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem sinus versus = $2a^2 : t$. Est adeo ut t sinus totus ad $2a^2 : t$ sinum versus anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem tm . Q. e. d.

COROLLARIUM I.

504. Quoniam ut sinus totus ad sinum versus anguli dupli elevationis in uno casu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus, & ut sinus totus ad sinum versus anguli dupli elevationis in altero quocunque casu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503.); velocitate autem existente eadem parameter quoque in diversis angulis elevationis eadem est (§. 484); erunt altitudines jactus sub diversis angulis elevationum ut sinus versus eorumdem angulorum duplorum (§. 196 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

505. Si sinus anguli elevationis in uno casu a , in altero c , velocitate existente eadem, altitudines jactus sunt ut $a^2x : 4t^2$ ad $c^2x : 4t^2$ (§. 503), hoc est ut a^2 ad c^2 (§. 181 *Arithm.*); adeoque in ratione duplicata sinuum angulorum elevationum.

PRO-

PROBLEMA XCIV.

Tab. IV. Fig. 50. 506. Data celeritate projectilis, altitudine feriendi In, & ejus distantia horizontali AI; invenire jactus angulum elevationis.

RESOLUTIO.

Cum, data celeritate projectilis, parameter diametri AS detur (§. 483); fit ea = a. Sit præterea In = b, AI = c, sinus totus = t, tangens anguli quaesiti = x. Quodsi AI sumatur pro sinu toto, erit b I tangens anguli b AI (§. 7 Trigon.) Est itaque

$$t : x = AI : Ib$$

$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo bn = Ar = cx : t - b, & rn² = acx : t - ab (§. 416 Anal. fin.). Est vero etiam rn² = Ab² = AI² + Ib² (§. 417 Geom.) = c² + c²x² : t². Quare

$$c^2 + c^2 x^2 : t^2 = acx : t - ab$$

$$\frac{c^2 x^2 : t^2 - acx : t}{\frac{1}{4} a^2} = \frac{-ab - c^2}{\frac{1}{4} a^2}$$

$$\frac{c^2 x^2 : t^2 - acx : t + \frac{1}{4} a^2}{\frac{1}{4} a^2} = \frac{\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2}{\frac{1}{4} a^2}$$

$$cx : t - \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2\right)}$$

$$cx : t = \frac{1}{2} a + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2\right)}$$

$$x = \left(\frac{1}{2} a + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2\right)}\right) t : c$$

Est igitur ut c ad $\frac{1}{2} a + \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2\right)}$ ita sinus totus t ad tangentem anguli elevationis quaesitum RAB.

COROLLARIUM I.

507. Si $ab + c^2 = \frac{1}{4} a^2$, seu $\frac{1}{4} a^2 = b + c^2 : a$ erit $x = at : 2c$, adeoque in hoc casu est $2c : a = t : x$, hoc est, ut dupla distantia

objecti feriendi AI ad parametrum, ita Tab. IV. Fig. 50. sinus totus ad tangentem anguli elevationis.

COROLLARIUM II.

508. Si $ab + c^2 > \frac{1}{4} a^2$; $\sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - ab - c^2\right)}$ radix imaginaria evadit (§. 71 Anal. fin.); adeoque valor ipsius x est impossibilis (§. cit.). Quare in hoc casu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA LXXI.

509. Tempora jactuum sub diversis elevationis angulis, velocitate existente eadem, sunt ut sinus angulorum elevationis.

DEMONSTRATIO.

Sit sinus totus = t, sinus anguli elevationis BAR = a, cosinus = b, parameter semitæ = x; erit secans anguli elevationis = t² : b, adeoque $\frac{t^2}{b} : a = x :$

AB (§. 491); consequenter AB = abx : t². Quare cum sit (§. 33 Trigon.)

$$b : t = AB : AR$$

$$b : t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t}$$

adeoque AR = ax : t; erit ut sinus totus t ad sinum anguli elevationis in casu uno, ita parameter ad AR; & ut sinus totus ad sinum anguli elevationis in casu alio, ita parameter ad AR in casu alio. Quoniam vero celeritas in utroque casu eadem, per hypoth. parameter quoque eadem est (§. 485). Ergo ut sinus angulorum elevationis, ita sunt rectæ AR in diversis elevationum angulis (§. 196 Arithm.). Enimvero rectæ AR sunt spatia, quæ projectilia eadem

Tab. eadem celeritate uniformiter descri-
 IV. bunt, cessante gravitatis actione (§. 71).
 Fig. 50. Tempora igitur jactuum sunt ut ista
 spatia (§. 32); consequenter ut sinus
 angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA XCV.

§ 10. Data celeritate projectilis, una
 cum angulo elevationis RAB ; invenire
 amplitudinem AB , altitudinem jactus
 tm & semitam AmB describere.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB eri-
 gatur perpendicularis AD , quæ sit
 altitudo, unde projectile cadendo
 celeritatem datam acquirere valet
 (§. 92).
2. Super AD describatur semicircu-
 lus AQD , lineam directionis AR
 secaturus in Q .
3. Per Q ducatur ipsi AB parallela
 Cm fiatque $CQ = Qm$.
4. Ex puncto m demittatur ad AB
 perpendicularis mt .
5. Denique per verticem m descri-
 batur parabola AmB parametro
 $4CD$. (§. 393 *Analys. fin.*)
 Dico hanc esse semitam quæsitam,
 $4CQ$ ejus amplitudinem & tm jactus
 altitudinem.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & m sint recti
 per *constr.* & verticales ad Q æquales
 (§. 156 *Geom.*), fit etiam $CQ = Qm$
 per *constr.* erit $qm = AC$ (§. 251
Geom.). Est vero $tm = AC$ (§. 257
Geom.). Ergo $qm = mt$ (§. 87 *Arithm.*);
 consequenter tm est altitudo jactus

(§. 500.), & projectile parabolam
 AmB describit, cujus adeo amplitudo
 $AB = 2 At$ (§. 499) $= 2 Cm = 4CQ$,
 ob $CQ = Qm$, per *constr.* Quod erat
 primum, secundum & tertium.

Denique quia $At = Cm$ (§. 257
Geom.) $= 2CQ$; $At^2 = 4CQ^2 =$
 $4DC \cdot AC$ (§. 327, 377 *Geom.*) $=$
 $4DC \cdot tm$, per *demonstr.* Ergo $4DC$
 est parameter parabolæ in vertice m
 (§. 388 *Analys. finit.*). Quod erat ul-
 timum.

COROLLARIUM I.

§ 11. Data igitur projectilis celeritate,
 dantur amplitudines & altitudines om-
 nium jactuum, qui fieri possunt, eadem
 opera. Ducta enim EA , erit, sub angulo
 elevationis EAB , altitudo AI , amplitudo
 $4IE$; sub angulo elevationis FAB , altitudo
 AH , amplitudo $4HF$ (§. 510).

COROLLARIUM II.

§ 12. Cum AB sit ad AD perpendicula-
 ris, per *hypoth.* circulum in A tangit (§. 304
Geom.); & hinc angulus ADQ angulo ele-
 vationis RAB æqualis (§. 323 *Geom.*);
 consequenter AIQ est duplus anguli eleva-
 tionis (§. 313 *Geom.*). Est itaque CQ
 quarta pars amplitudinis (§. 510) sinus
 rectus; AC altitudo jactus (§. *cit.*) sinus
 versus anguli dupli elevationis (§. 2
Trigon.).

SCHOLIUM.

§ 13. Hinc facili opera deducuntur, quæ
 supra per *analysin* invenire docuimus, ut
 ejus in hisce usum ostenderemus.

PROBLEMA XCVI.

§ 14. Data altitudine jactus tm , aut
 amplitudine AB , una cum angulo eleva-
 tionis

Tab.
 IV.
 Fig. 50.

Tab. *variationis* RAB; *invenire* *projectilis* *celeritatem* *qua* *ab* *initio* *fertur*, *hoc* *est*, *altitudinem* AD, *unde* *cadendo* *istiusmodi* *celeritatem* *acquirere* *valet*.

RESOLUTIO.

Cum AC = *tm* sit sinus versus, CQ = $\frac{1}{4}$ AB (§. 512) sinus rectus anguli AIQ (§. 2 Trig.), quem esse anguli elevationis RAB duplum. ex demonstratione Problematis 95 (§. 510) constat: quærat ad sinum versus anguli dupli elevationis, sinum totum & altitudinem jactus: vel ad sinum rectum anguli dupli elevationis, sinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ sive IA, cujus duplum AD est altitudo quæsitæ (§. cit.)

SCHOLIION.

515. Potuisset quoque Curva projectionis analyticè investigari & quidem in omni gravitatis hypothese possibili: quod ut appareat, sequens subjungere lubet Problema.

PROBLEMA XCVII.

516. Invenire Curvam projectionis, directionibus gravium suppositis parallelis, in medio non resistente.

RESOLUTIO.

Tab. I. Ponamus corpus grave horizontaliter projici secundum directionem AR, AMm esse Curvam projectionis, AQ abscissam, QM semiordinatam, aut, si mavis AP abscissam, PM semiordinatam. Sit AP = QM = *x*, AQ = PM = *y*. Intelligatur semiordinata *pm* alteri PM infini-
Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

te propinqua: erit arculus curvæ Tab. infinite parvus $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ IV. adeoque $Mm^2 = dx^2 + dy^2$ (§. 144 Fig. 49. *Analyf. infin.*) Quoniam projectile in medio non resistente movetur per *hypoth.* motus, quo vi impressa movetur, æquabilis (§. 71). Porro cum grave, dum motu composito per Mm fertur (§. 241), per spatium infinite parvum MO (recta MO parallela & = Pp) descendens isto tempusculo etiam æqualiter moveatur; erit tam MO, quam Om in ratione composita celeritatis & temporis (§. 34). Quodsi ergo ponamus AQ sive PM exponere tempus (§. 31); erit tempusculum, quo projectile per arculum Mm defertur, = *dy*. Fiat celeritas projectili impressa, quæ constans est, 1; erit Om ut *dy*. Sit porro celeritas a gravi cadendo in M acquisita = *v*; erit MO ut *vd y*. Habemus itaque Mm^2 ut $dy^2 + v^2 dy^2$, consequenter

$$dy^2 + v^2 dy^2 = dx^2 + dx^2$$

adeoque $v^2 dy^2 = dx^2$

$$v dy = dx$$

$$dy = dx : v$$

$$y = \int v^{-1} dx$$

Data igitur celeritate *v* a gravi in M acquisita per *x*; reperietur æquatio ad Curvam projectionis.

Jam, in hypothese GALILÆI, $v = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 87).

Ergo $dy = x^{-1:2} dx$
hoc est $y = 2x^{1:2} = 2\sqrt{x}$

$$y^2 = 4x$$

R

Est

Tab. IV. *Fig. 49.* Est ergo in hypothefi *Galilaana* Curva projectionis parabola, cujus parameter 4 (§. 388 *Anal. fin.*): quemadmodum superius demonstratum (§. 480). Quoniam $x : y = y : 4$, hoc est, $AP : PM = PM : 4$, five $QM : AQ = AQ : 4$; parameter curvæ projectionis est tertia proportionalis ad spatium, quod in tempore quocunque grave cadendo conficit, & spatium, quod vi impressa describit: quemadmodum supra reperimus (§. 480).

Sit in hypothefi *Baliana* (§. 102) v ut x : erit

$$dy = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$$

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

$$= lx \text{ (§. 243 } \textit{Analys. infin.})$$

Sunt igitur abscissæ AQ , Aq &c. ut logarithmi semiordinatarum QM , qm &c. consequenter curva projectionis est Logarithmica, cujus subtangens = 1 (§. 553 *Analys. finit.*)

Tab. IV. *Fig. 50.* Quodsi directio AR fuerit ad horizontem AB obliqua, seu si grave oblique projiciatur (§. 477), eodem modo solutio procedit. Ducatur pm ipsi AR parallela & intelligatur alia eidem infinite propinqua. Fiat $Aq = pm = y$, $qm = Ap = x$; erit arcus infinite parvus curvæ projectionis semiordinatis istis interceptus = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; adeoque quadratum ejusdem = $dx^2 + dy^2$ ut ante. Sit celeritas constans qua mobile fertur = r , celeritas vero per

$qm = Ap$ acquisita = v ; tempusculum per arcum infinite parvum consumto in spatiolis dy & dx , erit $dy : dx = 1 : v$ (§. 38), adeoque in hypothefi *GALILÆI* $dy : dx = 1 : x^{1/2}$. prodit; igitur ut ante

$$\frac{dx}{x^{1/2}} = x^{-1/2} dx = dy$$

$$2x^{1/2} = 2\sqrt{x} = y$$

$$4x = y^2$$

Unde patet in hoc quoque casu curvam projectionis esse parabolam; quemadmodum supra ostendimus (§. 482).

SCHOLIUM.

517. Supposuimus directiones parallelas; propterea quod linea in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi possunt citra errorem assignabilem in iis distantis, in quibus experimenta capere licet. Quod si tamen desideraveris Problema solvi in hypothefi linearum directionis convergentium; solutionem dudum dedit Vir summus *NEWTONUS* (a): dederunt deinde *Geometra celeberrimus HERMANNUS* (b), aliique ab eodem laudati (c). Nos sequentem subjungimus, ne quid in hoc argumento desiderari possit.

PROBLEMA XCVIII.

518. Invenire Curvam projectionis; in hypothefi gravitatis cujuscunque, directionibus in centro Telluris convergentibus.

RESOLUTIO.

Sit Curva projectionis AMR , & linea Tab. directionis ex centro Telluris C ducta *XVI*. *CN.* *Fig. 160.*

(a) In *Princip. Philos. Natur. Mathem.* Prop. 41. Lib. 1.

(b) In *Phoronomia* Lib. 1. Prop. 23. §. 162.

(c) *Loc. cit.* §. 164.

Tab. CN. Intelligatur Cn radius ipsi CN XVI. infinite propinquus, radio $CA = CN$ Fig. $= Cn$ descripto arcu AB . Ducantur 160. porro radiis CM & Cm arcus concentrici PM & pm . Sit denique AH altitudo, per quam grave cadendo acquirit eam celeritatem, qua vi impressa movetur, ac deinde per curvam AMR descendat vi impressa & velocitate vi gravitatis quomodocunque accelerata. Dicatur jam $AH = a$, $AP = x$, $AC = b$, arcus $AN = y$; erit $Pp = RM = dx$, $Nn = dy$, $PC = MC = mC$ (§. 4 *Analys. infin.*) $= b - x$. Porro, propter sectores similes CNn & CRm , erit (§. 142, 412 *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$

$$b : b - x = dy$$

$$\text{adeoque } Rm = (b - x) dy : b$$

$$mR^2 = (b - x)^2 dy^2 : b^2$$

$$MR^2 = dx^2$$

$$Mm^2 = \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile urgetur per MR vi gravitatis, seu qua cadendo per altitudinem AP acquiritur, $= z$; altera vero, qua per arcum mM motu composito fertur, seu qua cadendo per HP acquiritur $= v$. Quoniam in spatiolis infinite parvis Mm & RM motus æquabilis, $MR : Mm = z : v$ (§. 33), consequenter

$$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2 \text{ (§. 260 } *Arithm.*)$$

$$\text{hoc est, } dx^2 : \frac{b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$$

$$b^2 dx^2 : b^2 dx^2 + (b - x)^2 dy^2 = z^2 : v^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 = b^2 z^2 dx^2 + (b - x)^2 z^2 dy^2$$

$$v^2 b^2 dx^2 - b^2 z^2 dx^2 = (b - x)^2 z^2 dy^2 \text{ Tab. XVI.}$$

$$\frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)} = zdy(b - x) \text{ Fig. 160.}}{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}} = \frac{zdy(b - x)}{z(b - x)}$$

$$dy = \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b - x)}$$

$$y = \int \frac{bdx \sqrt{(v^2 - z^2)}}{z(b - x)}$$

Quodsi jam valor ipsius v atque z exprimatur per x ex hypothesi gravitatis; prodibit æquatio ad curvam projectionis specialem.

In hypothesi *Galilæana*, $v = \sqrt{HP} = \sqrt{(a + x)}$, & $z = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$ (§. 87). Substitutis itaque hisce valoribus in æquatione differentiali generali; prodit specialis

$$dy = \frac{bdx \sqrt{(a + x - x)}}{(b - x) \sqrt{x}} = \frac{bdx \sqrt{a}}{(b - x) \sqrt{x}}$$

Pendet adeo constructio hujus Curvæ a quadratura alterius curvæ, cujus abscissa x , semiordinata vero $ab\sqrt{a} : (b - x)\sqrt{x} = a^2 b : (b - x) \sqrt{ax}$. Nimirum si area hujus Curvæ dividuntur per a , seu rectam AH , unde projectile acquirit celeritatem qua a vi impressa movetur; prodeunt arcus respondentes AN eo modo, quem jam exposuimus, cum de Curva *Isochrone* in hypothesi directionum in centro Telluris convergentium ageremus (§. 336). Construitur autem curva, a cujus quadratura pendet constructio Curvæ projectionis, ope parabolæ circa axem AC , parametro AH descriptæ, ut semiordinata abscissæ AP respondens sit $\sqrt{ax} = PS$. Est enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam proportionalem, & ut CP ad CA ita

Tab. XVI. *Fig. 160.* tertia hæc proportionalis ad femiordinatam Curvæ quadrandæ;

Fiat $b = \infty$: quo in casu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x , respectu $b, = 0$, adeoque $b - x = b$, consequenter

$$\begin{aligned} dy &= \frac{bdx \sqrt{a}}{(b-x) \sqrt{x}} = \frac{bdx \sqrt{a}}{b\sqrt{x}} \\ &= \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1/2} x^{-1/2} dx \\ y &= 2a^{1/2} x^{1/2} = 2\sqrt{ax} \\ \hline y^2 &= 4ax \end{aligned}$$

Est igitur Curva projectionis in hoc casu Parabola (§. 388 *Analys. fin.*), quemadmodum antè reperimus (§. 516), & parameter $4a$ est quadrupla altitudinis AH unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem qua projicitur; prouti supra demonstratum fuit (§. 516).

SCHOLIUM.

519. Curva projectionis Trajectoria appellari solet, qua denominatione quoque nuntur NEWTONUS.

CAPUT XII.

De Motu Corporum ex Percussione.

DEFINITIO LV.

520. **C**orpus perfecte durum est, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO LVI.

521. Corpus molle est, quod ab ictu figuram pristinam amittit; ut argilla, sebum, cera.

DEFINITIO LVII.

522. Corpus elasticum est, quod ab ictu figuram quidem mutat, sed vi propria in eandem rursus restituitur. Talis est ensis, qui ad ictum incurvatur, sed statim resilit in figuram pristinam.

DEFINITIO LVIII.

523. Corpus unum in alterum directe impingere dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

524. Sphæra igitur A directe in alteram Tab. B impingit, si linea directionis centra IV. utriusque jungit (§. 38 *Analys. infinit.*). *Fig. 53.*

DEFINITIO LIX.

525. Corpus unum in alterum indirecte vel oblique impingere dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum obliquam.

DEF.

DEFINITIO LX.

526. *Centrum percussiois est punctum in quo ictus est maximus.*

AXIOMA VIII.

527. *Actioni aequalis, sed contraria est reactio.*

SCHOLIUM.

528. *Hoc Legum motus principium ab Experientia petitur & a celeberrimo NEWTONO (a) his exemplis illustratur. „ Si quis, „ inquit, lapidem digito premit, premitur „ & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur „ etiam & equus æqualiter in lapidem: „ nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem ac lapidem versus equum, „ tantumque impedit progressum unius, „ quantum promovet progressum alterius. „ Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodo- „ cunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutæ) „ subibit.*

THEOREMA LXXII.

529. *Effectus pleni sunt Viribus causarum suarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit (§. 25); Vis determinata indifferens non est, adeoque ipsi determinata effectus quantitas ex necessitate respondet. Quare si vis V ut V, seclusa omni vi alia, sive adjuvante, sive impediante, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E

(a) Princip. Mathem. Philos. Natural. pag. 13. Conf. Cosmologia nostra generalis, §. 316, 346.

ut E producet, consequenter vis mV ut mV (ubi m notat multipulum aut submultipulum ipsius V) producet effectum mE ut mE. Est igitur $V : mV = E : mE$ (§. 149 Arithm.) hoc est, Effectus pleni sunt Viribus suarum causarum proportionales. Q. e. d.

COROLLARIUM.

530. *Vires igitur motum producentes, si fuerint æquales, eandem motus quantitatem producant (§. 530), addendum mobili secundum eandem directionem progredienti (§. 76), subtrahendum vero, si secundum contrariam progredi nittatur (§. 77).*

THEOREMA LXXIII.

531. *Si corpus unum A in alterum Tab. B, vel quiescens, vel tardius motum secundum eandem directionem, vel etiam Fig. 53. secundum contrariam ipsi obvium factum, impingat; summa motuum in corporibus secundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias, eadem erit ante & post ictum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem; sitque quantitas motus ipsius $A = a$, ipsius $B = b$: erit summa motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipsius B juxta ejusdem directionem in conflictu; incrementum quoddam motus efficit (§. 22). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 528); ob contrarias virium æqualium directiones, tantum motus subtrahitur ex A, quantum additur ipsi B (§. 531). Unde si

quantitas motus ipsius B fuerit post ictum $\equiv b+c$; erit quantitas motus ipsius A post ictum $\equiv a-c$. Summa igitur motuum $b+c+a-c \equiv b+a$, eadem post ictum, quæ ante ictum.

Si B quiescit, erit motus quantitas ante ictum $\equiv 0$, adeoque motuum summa $\equiv a$. Sed si post ictum quantitas motus ipsius B $\equiv c$, per demonstrata quantitas motus ipsius A $\equiv a-c$. Unde denuo summa motuum eadem ante & post ictum, hoc est $\equiv a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipsius B, qua efficitur motus $a+c$, destruitur quantitas motus a & efficitur motus, secundum directionem contrariam impulsus corporis A, $\equiv c$, per demonstrata. Differentia igitur motuum post ictum in corporibus B & A secundum contrarias directiones motus $\equiv b+c+a-c$, eadem est quæ summa ante ictum $a+b$.

Si $c = a$, reactione ipsius B destruitur motus in A; adeoque corpus A quiescit, & B versus eandem plagam solum progreditur. Unde denuo summa motuum post ictum $a+b+0$ æquatur summæ ante ictum $a+b$.

Si corpora A & B sibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a-b$. Sit post conflictum quantitas motus ipsius B $\equiv c$: destruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c . Reactione igitur ipsius B in A destruitur motus $b+c$, adeoque post conflictum remanet motus $a-b-c$. Quodsi $a > b+c$, progrediuntur A & B post conflictum juxta eandem directionem, estque summa motuum $a-b-c+c$, eadem quæ differentia $a-b$ ante ictum.

Quodsi $c+b > a$, destruitur reactione ipsius B $\equiv c+b$ motus a & efficitur secundum contrariam directionem motus $c+b-a$, adeoque B & A resiliunt secundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum post ictum $c-c-b+a$ eadem est, quæ fuerat ante ictum $a-b$.

Denique si $b+c = a$, reactione ipsius B destruitur motus totus in A, qui adeo post ictum $\equiv 0$. Unde summa motuum $c = a-b$, eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA LXXIII.

532. Si duo corpora A & B, pondere equalia & non elastica, equalibus celeritatibus lata, sibi mutuo occurrant, post ictum ambo quiescunt.

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B massæ atque celeritates æquales sint, per hypoth. motuum quantitates æquales sunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla est. Quodsi post ictum secundum eandem directionem progredierentur; summa motuum deberet esse nulla (§. 532): secundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum secundum contrarias se mutuo urgeant eadem vi, nec ulla sit ratio, cur a se invicem resiliant, per hypoth. secundum directiones contrarias moveri nequeunt. Post ictum ergo ambo quiescunt. Q. e. d.

THEOREMA LXXIV.

533. Si corpus elateris expers A in aliud itidem non elasticum B directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; post ictum ambo eadem celeritate moventur, secundum eandem directionem.

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B, sive quiescens, sive segnius motum; urgebit ipsum secundum directionem suam, adeoque, cum nulla adsit ratio, cur a se invicem resiliant, per hypoth. si A vincat, B necessario movebitur secundum directionem ipsius. Quod erat unum.

Quod si jam A & B secundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam insequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiscitur, quam habet ipsum A, motui ejus non amplius resistit, adeoque fugit; consequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. Quod erat alterum.

THEOREMA LXXV.

534. Si corpus elateris expers A in aliud non elasticum B quiescens directe incurrat; celeritas post ictum est ad celeritatem ante ictum, ut pondus ipsius A ad ponderum A & B summam.

DEMONSTRATIO.

Sit massa ipsius A = M, alterius B = m, celeritas prioris = C: erit quantitas motus ipsius A = MC (§. 22), ipsius B vero nulla; adeoque motuum summa post ictum = MC (§. 532); consequenter celeritas = $MC : (M + m)$.

(§. 22). Est adeo ut $M + m$ ponderum summa ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. Q. e. d.

COROLLARIUM.

535. Quod si corpora A & B fuerint ejusdem ponderis, erit $M = m$, adeoque celeritas post ictum = MC: $2M = \frac{1}{2}C$. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA LXXVI.

536. Si corpus elateris expers A in aliud non elasticum B tardius motum secundum eandem directionem directe impingat; erit celeritas post ictum equalis motuum summa per ponderum summam divisa.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & m, celeritates C & c; erit motus quantitas ante conflictum MC & mc (§. 22), adeoque summa eorundem MC + mc: quæ cum eadem sit post conflictum (§. 532), erit celeritas communis corporum A & B post eundem (MC + mc): $(M + m)$ (§. 22). Q. e. d.

COROLLARIUM.

537. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit $M = m$, adeoque celeritas post ictum $M(C + c) : 2M = (C + c) : 2$, seu semisumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA LXXVII.

538. Si duo corpora non elastica, pondere equalia, diversis celeritatibus lata, sibi mutuo directe occurrant; post conflictum feruntur celeritatum semidifferentia, qua movebantur ante ictum.

DEMONSTRATIO.

Sit massa communis = M , celeritates sint ut C & c ; erit differentia motuum $M(C - c)$; cui cum æqualis sit post confictum summa eorundem (§. 532), erit celeritas communis = $M(C - c): 2M = (C - c): 2$, hoc est, æqualis velocitatum ante impactum semidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

538. Si duo corpora non elastica A & B iis celeritatibus sibi mutuo directe occurrant, quæ sunt reciproce ut pondera eorundem; ambo post ictum quiescunt.

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m , celeritates C & c ; quoniam $M:m = c:C$, per hypoth. erit $mc = MC$; adeoque motuum differentia ante confictum nulla (§. 22). Ergo summa motuum post ictum cum nihilo æqualis sit (§. 532); nullus quoque post ictum erit motus, hoc est, ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXIX.

539. Si duo corpora non elastica A & B eadem celeritate sibi mutuo directe occurrant; erit celeritas post impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad summam eorundem.

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas = C , massæ corporum A & B ut M & m ; erit differentia motuum ante impactum $(M - m)C$ (§. 22). Huic cum æqualis sit summa

motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem = $(M - m)C:(M + m)$ (§. 22), hoc est, ut ponderum summa ad differentiam eorundem, ita celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

540. Si duo corpora non elastica A & B quacunque celeritate sibi mutuo directe occurrant; erit celeritas post ictum æqualis semidifferentiæ motuum per summam ponderum divisa.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & m , celeritates C & c ; erit differentia motuum ante ictum $MC - mc$ (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem $(MC - mc):(M + m)$ (§. 22). *Q. e. d.*

PROBLEMA XCIX.

541. Determinare partem motus in confictu amissam a fortiori.

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante confictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus ante confictum (§. 22).
2. Similiter celeritas, qua idem fertur post confictum, ducatur in massam ejus; ita habebitur quantitas motus post confictum (§. cit.)
3. Quodsi motuum quantitatem posteriorem a priori auferas, relinquetur pars amissa.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis sibi mutuo occurrant celeritatibus C & c , erit celeritas post conflictum $= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo motus quantitas post conflictum est $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Motus ergo amissus est $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Quæse motus integer ad partem amissam ut MC ad $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$, hoc est, ut $2C$ ad $C - c$, seu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLIUM.

542. *Hac ergo methode inveniri possunt Theoremata de quantitate motus in conflictu amisso & inde magnitudinem ictus æstimare licet.*

DEFINITIO LXI.

543. *Impetum cum LEIBNITIO (a) appello quantitatem motus, seu id quod efficitur ducendo massam in celeritatem (§. 22), quodque adeo vi mortuæ æquipollet (§. 278).*

AXIOMA IX.

544. *Si corpus aliquod non elasticum in obicem qui cedere nequit impingit; motus omnis cessat.*

COROLLARIUM.

545. *Si ergo corpus quoddam non elasticum in obicem cedere nescium impingit; impetum omnem amittit (§. 543.)*

SCHOLIUM.

546. *Propositio per experientiam satis manifesta, ut adeo eam instar Axiomatis sumere licuerit; nec opus sit ex nozione elateris deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA LXXXI.

547. *Centrum percussionis idem est cum centro oscillationis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

(a) In *Actis Erudit.* A. 1695. p. 174.

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percussionis est punctum, in quo colligitur impetus omnis, seu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 527). Invenitur adeo si impetus partium considerentur instar ponderum ad lineam inflexilem ac gravitatis expertem applicatorum, hoc est, dividendo summam factorum ex impetibus partium in distantias a puncto suspensionis per summam impetuum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oscillationis (§. 431). Ergo centrum oscillationis idem est cum centro percussionis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

548. *Quæ igitur supra de centro oscillationis dicta sunt, eadem quoque de centro percussionis valent, si grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA LXXXII.

549. *Centrum percussionis idem est cum centro gravitatis, si corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur, seu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim sunt facti ex ponderibus in celeritates (§. 543). Quare si æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde est ac si eorum æque-multiplicia sumas. Sed æquiponderantium æque-multiplicia quoque æquiponderant (nam si A æquiponderet ipsi B etiam $2A$ ipsis $2B$ & in genere mA ipsis mB æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis

vitatis impetus æquivalentes disponuntur, consequenter centrum gravitatis cum centro percussionis in hoc casu coincidit.

DEFINITIO LXII.

Tab. IV. Fig. 52. 550. *Angulus Incidentiæ DCA est quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C.*

DEFINITIO LXIII.

551. Quodsi post ictum corpus reflectitur, *Angulus reflexionis ECF* vocatur, quem linea directionis corporis reflexi CE efficit ad punctum contactus, unde refilit.

THEOREMA LXXXIII.

552. *Ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ DCA.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipsum obicem, si superficies plana, aut in rectam quæ eundem in contactu C tangit, si superficies curva; & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (§. 241. 245.) Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, sed tantum alteri DG; perinde est ac si corpus D tantum percuteret obicem vi secundum DG agente. Æstimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amisso (§. 541); impetus vero ex quantitate motus (§. 543); adeoque cum

corpus idem sit, ex celeritate (§. 49), consequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 247). Est adeo impetus corporis D per DC ad impetum per DG, ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, destruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonstrat.* si vero perpendiculariter seu directe impingeret, destrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc est, per DC (§. 241). Est ergo ictus perpendicularis ad obliquum, ut DC ad DG. Sed si DC sumatur pro sinu toto, erit DG sinus anguli incidentiæ DCG (§. 2 Trig.). Ictus itaque perpendicularis, ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIV.

553. *Elater est æqualis vi comprimantis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elasticum adhuc ulterius comprimi aut tendi potest, nec tamen comprimitur aut tenditur, *per hypoth.* Ergo tanta vi resistit, quanta comprimitur vel tenditur (§. 75). Resistit autem vi elateris (§. 522), adeoque elater æqualis est vi comprimantis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. *Æquatur itaque etiam vi percussantis, quæ ad corpus elasticum tendendum aut comprimendum requiritur.*

THEOREMA LXXXV.

555. *Si corpus H in obice AB quiescere desinit directe impingat, sitque vel*

Tab. *utrumque vel alterutrum elasticum* ;
 IV. *eadem celeritate reflectitur per eandem*
 Fig. 52. *rectam CH, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, tota vis corporis Bin resistentiam obicis frangendam insumeretur, motusque cessaret (§. 544). Ergo vis omnis impenditur in compressionem corporis elastici, atque adeo hoc acquirit vim elasticam isti æqualem (§. 553). Cum igitur elater, absumta vi comprimente, corpus reducat in statum pristinum, eadem vi illud repellit qua impegerat; consequenter hoc eadem celeritate resilit. Et quoniam corpus elasticum se restituit secundum directionem secundum quam compressum fuerat; (nulla enim adest ratio, quæ directionem immuter); corpus resilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXVI.

556. *Si corpus elasticum D oblique impingit in obicem AB qui cedere nescit; ita post ictum resilit, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione Theorematis 83 (§. 552) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH, & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo post ictum remaneat vis per DH five CF, & per vim elasticam recuperetur vis per DG five CH (§. 555); corpus post ictum iisdem viri-

bus urgetur per CF & CH quibus Tab. urgebatur ante confictum; adeoque IV. motu composito describet rectam CE Fig. 53. dato tempore ipsi DC æqualem (§. 241), eruntque eodem tempore HE & DH æquales, utpote ab eadem vi descriptæ. Sunt igitur $\Delta\Delta$ DCH & ECH æqualia, angulique cognomines æquales (§. 204 *Geom.*); consequenter cum $HCA = HCF$ (§. 65 *Geom.*) $DCA = ECF$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA C.

557. *Determinare angulum ECF, sub quo resiliere debet corpus in C oblique impingens, ut ex D in E via brevissima perveniat; supposita nempe reflexione in C.*

RESOLUTIO.

Demissis ex D & E perpendicularibus DG & EF; fiat $DG = a$, $EF = b$, $FG = c$, $CG = x$, erit $CF = c - x$, $DC^2 = aa + xx$, $CE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Quoniam DC + CE est minimum aliquid, per *hypoth.* fiat (§. 63 *Analys. infinit.*)

$$\sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = y$$

$$\text{erit } \frac{xdx}{\sqrt{(aa + xx)}} + \frac{xdx - cdx}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)} + (x - c)\sqrt{(a^2 + x^2)} = 0$$

$$x\sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)} = (c - x)\sqrt{(a^2 + x^2)}$$

hoc est, CG. $CE = CF$. CD
 Est itaque CG : CD = CF : CE (§. 299 *Arithm.*) Jam si punctum E supponatur

Tab. IV. *Fig. 52.* in recta ipsi AB parallela : erit EF = DG (§. 226 *Geom.*); adeoque si DC sumatur pro sinu toto, erit GC sinus anguli GDC, & si CE sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli CEF (§. 2 *Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum similium sinus (§. 12 *Trigon.*); adeoque anguli GDC & CEF (§. 141 *Geom.*), consequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§. 246 *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D post impactum in C ita reflit, ut angulus reflexionis ECF sit æqualis angulo incidentiæ DCG (§. 557); ex D in E, supposita reflexione in C, via brevissima pervenit.

PROBLEMA CI.

559. Determinare punctum C, in quod impingere debet corpus D, ut reflit in corpus L.

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendicularum = a. Dato puncto L, datur LI = b, consequenter GI = c. Fiat GC = x, erit CI = c - x. Et quia angulus LCI = DCG (§. 557), G vero & I recti, per constr. erit (§. 267 *Geom.*).

$$DG : LI = GC : CI$$

$$a : b = x : c - x$$

Ergo $a + b : a = c : x$ (§. 190 *Arithm.*) hoc est, $DG + LI : DG = GI : GC$.

THEOREMA LXXXVII.

560. Si corpus elasticum A in aliud quiescens B eidem æquale directe incurrat; post ictum quiescet A, & B movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur A.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non essent elastica, utrumque post ictum moveretur secundum eandem directionem celeritate dimidia (§. 536). Sed cum vis elastica secundum eam directionem agat, secundum quam facta est compressio, sitque vi comprimenti æqualis (§. 553); dimidia celeritate repellit A, adeoque motum ejus sistit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit adeoque motum ejus accelerat (§. 76). Fertur itaque post ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A, & A quiescit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

561. Cum adeo A omnem suam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, Crurusus in D, & D tandem in E transferre debet. Quare si fuerint plura corpora elastica pondere æqualia & se mutuo tangentia; atque A impingat in B, quiescentibus omnibus intermediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A. *Tab. IV. Fig. 54.*

THEOREMA LXXXVIII.

562. Si duo corpora elastica A & B, pondere æqualia, celeritate æquali sibi mutuo directe occurrant; utrumque resiliet ea celeritate & secundum eam directionem qua advenerat.

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, ambo quiescerent (§. 533). Omnis ergo vis in compressione consumitur. Huic adeo cum æqualis sit vis elastica, qua resiliunt secundum directionem.

directionem, qua advenerant (§. 553); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem pristinæ æqualem producit. Resiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXIX.

563. Si duo corpora elastica A & B, pondere equalia, celeritate inæquali sibi mutuo directe occurrant; post ictum celeritatibus permutatis feruntur.

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus $C + c$ & C . Quodsi eadem celeritate C concurrerent, A & B post ictum moveretur celeritate C (§. 562). Si B quiesceret, & A celeritate c in ipsum incurreret, post ictum quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo excessus celeritatis c , quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B; adeoque ipso peracto, A movetur celeritate C , B vero celeritate $C + c$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

564. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se invicem accedebant.

THEOREMA XC.

565. Si corpus elasticum A in aliud æquale B segnius motum incurrat; post ictum ambo, permutatis celeritatibus, feruntur secundum eandem, nempe, pristinam, directionem.

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate $C + c$ in B celeritate C motum. Quoniam ob ce-

leritates C & C æquales nullus fit impulsus, perinde est ac si A sola celeritate c in B quiescens impingeret. Tum vero quiesceret A, & B moveretur celeritate c (§. 560). Ergo post ictum A movebitur sola celeritate C , B vero celeritate $C + c$, & utrumque quidem secundum pristinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

566. Post ictum eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se mutuo accedebant.

THEOREMA XCI.

567. Si corpus A in alterum B incurrat; ictus idem est, qui fieret a corpore A in B quiescens cum differentia velocitatum incurrente.

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m , celeritates C & c , erit celeritas communis post impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 537), adeoque impetus ipsius $A = (M^2 C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543); consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2 C + Mmc) : (M + m) = (M^2 C + MmC - M^2 C - Mmc) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C - c$; erit celeritas post ictum $= (MC - Mc) : (M + m)$ (§. 535); adeoque impetus $(M^2 C - M^2 c) : (M + m)$ (§. 543), consequenter per ictum amissus $MC - Mc - (M^2 C - M^2 c) : (M + m) = (M^2 C - M^2 c + MmC - Mmc - M^2 C + M^2 c) : (M + m) = Mm$

$= Mm (C - c) : (M + m)$. In utroque igitur casu idem impetus amittitur, consequenter ictus idem est (§. 541).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§. 553); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA XCII.

569. Si duo corpora A & B sibi mutuo occurrant; ictus idem contingit, qui fieret a corpore A in B quiescens cum summa velocitatum impingente.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis post impactum $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540); adeoque impetus ipsius A seu fortioris $(M^2 C - Mmc) : (M + m)$, consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2 C - Mmc) : (M + m) = (M^2 C + MmC - M^2 C + Mmc) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm (C + c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C + c$, erit celeritas post ictum $= (MC + Mc) : (M + m)$ (§. 535); adeoque impetus $(M^2 C + M^2 c) : (M + m)$ (§. 543); consequenter impetus per ictum amissus $MC + Mc - M^2 C + M^2 c : (M + m) = (M^2 C + M^2 c + MmC + Mmc - M^2 C - M^2 c) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm (C + c) : (M + m)$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

570. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§. 553), in corpora A & B cum summa velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA CII.

571. Determinare celeritatem corporum elasticorum quorumcunque A & B celeritatibus quibuscunque directe concurrentium.

RESOLUTIO.

I. Si corpora A & B in eisdem plaga tendant; post ictum, vi sola impulsus, secundum eandem moventur celeritate communi $(MC + mc) : (M + m)$ (§. 537). Accedat jam vis elastica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate $C - c$ (§. 568), adeoque, cum in momento ictus A & B corpus unum constituent, eandem ita distribuit, ut celeritates post ictum à vi elastica acquisitæ sint in ratione massarum reciproca. Sit ergo celeritas ipsi B acquisita $= x$, erit

$$\begin{array}{r} M : m = x : C - c - x \\ \hline MC - Mc - Mx = mx \\ \hline MC - Mc = Mx + mx \\ \hline (MC - Mc) : (M + m) = x \end{array}$$

Hinc celeritas ipsi A acquisita $= C - c - (MC - Mc) : (M + m) = (MC - Mc + mC - mc - MC + Mc) : (M + m) = (mC - mc) : (M + m)$. Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius; celeritas hæc subtrahenda est ab ea quæ per solum impulsu acquiritur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat; celeritas hæc addenda est priori per impulsu solum acquisitæ (§. 76). Unde tandem prodit celeritas ipsius A $= (MC + mc - mC + mc) : (M + m) = (MC - mC + 2mc)$

$$2mc) : (M + m), \text{ \& ipsius B} = (MC + mc + MC - Mc) : (M + m) = 2MC + mc - Mc : (M + m).$$

Ex. gr. Sit $M = 6$ librarum, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 + 16) : (6 + 4) = \frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$, & ipsius $B = (36 + 8 - 12) : 10 = \frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B versus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit $M = 2$, $m = 6$, $C = 4$, $c = 1$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (8 - 24 + 12) : (2 + 6) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; celeritas ipsius $B = (16 + 6 - 2) : (2 + 6) = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipsius A negativa prodeat, id indicio est, celeritatem per actionem elateris acquisitam esse majorem celeritate per impulsum acquisita, adeoque corpus A resilire post ictum. Post conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia sibi mutuo occurrant, in conflictu per impulsum solum utriusque acquiritur celeritas $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540). Cum vis elastica in corpora, quæ inter se colliduntur, agat cum celeritate $C + c$ (§. 570); si celeritas ipsi B inde acquisita sit x , crit, vi superiorum,

$$M : m = x : C + c - x$$

$$\frac{MC + Mc - Mx = mx}{MC + Mc = Mx + mx}$$

$$(MC + Mc) : (M + m) = x.$$

Hinc celeritas, quæ ipsi A acquiritur, $C + c - (MC + Mc) : (M + m) = (MC + mC + Mc + mc - MC - Mc) : (M + m) = (mC + mc) : (M + m)$. Unde tandem, ut ante, prodit celeritas ipsius $A = (MC - mc - mC - mc) :$

$(M + m) = (MC - mC - 2mc) : (M + m)$; celeritas vero ipsius $B = (MC - mc + MC + Mc) : (M + m) = (2MC + Mc - mc) : (M + m)$. Quodsi $mC + 2mc > MC$; celeritas ipsius A est negativa; quod ostendit, vim elasticam esse impulsu superiore, adeoque corpus A resilire, nec progredi cum resiliente B.

Ex. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$; erit post conflictum celeritas ipsius $A = (18 - 12 - 16) : 10 = -1$, & ipsius $B = (36 + 12 - 8) : 10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A cum uno.

COROLLARIUM I.

572. Quoniam $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC + 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M + m}$
 & $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} = \frac{Mc + mc + 2MC - 2Mc}{M + m} = c + \frac{2MC - 2Mc}{M + m}$; atque $\frac{2MC - 2Mc}{M + m}$;
 & $\frac{2mC - 2mc}{M + m}$ sunt celeritates, quæ se

habent ad celeritatum differentiam ante impactum (quæ celeritas respectiva dicitur) ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum summam; si corpus elasticum A in aëre B, sive quiescens, sive tardius motum incurrat; invenitur celeritas post impactum corporis A, ubi fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius B, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ ex celeritate ipsius A ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum. Celeritas vero ipsius B reperitur, si fiat; Ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius A, ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, quæ addita celeritati ipsius B prodit celeritas hujus post impactum.

COROLLARIUM II.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$

$$\frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$$

& $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m}$

$$\frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c, \text{ atque } \frac{2mC + 2mc}{M + m} \text{ \&}$$

$$\frac{2MC + 2Mc}{M + m} \text{ sunt celeritates, quæ se ha-}$$

bent ad celeritatum ante impactum summam (quæ celeritas respectiva dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem summam; si duo corpora elastica A & B sibi mutuo occurrant invenitur post impactum corporis A celeritas, ubi fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius B, ita celeritatum ante impactum summa ad celeritatem quæ ex celeritate ipsius A ante impactum subducta relinquit celeritatem ejusdem post impactum. Celeritas vero ipsius B invenitur, si fiat: ut summa ponderum ad duplum pondus ipsius A ita summa celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua subducta celeritas ante impactum relinquit eam, quæ inest post eundem.

THEOREMA XCIII.

574. Si corpus elasticum A directe impingit in aliud quiescens B; erit celeritas ejus post conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad summam eorundem: quam vero communicat cum B, ea ad eandem est, ut duplum pondus ipsius A ad ponderum summam.

DEMONSTRATIO.

Si B non quiescit, celeritas ipsius A post ictum est $(MC - mC + 2mc)$:

$(M + m)$, (§. 571). Si vero quiescit, celeritas ejus ante conflictum nulla est, adeoque $c = 0$. Quare cum in hoc casu fiat $2mc = 0$, erit celeritas ipsius A post impactum $= (MC - mC) : (M + m)$. Est itaque ad C celeritatem ante conflictum, ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem summam. Quod erat unum.

Similiter si B non quiescit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc) : (M + m)$, (§. 571). Jam si quiescit, celeritas ejus nulla est, adeoque $c = 0$; consequenter $mc = 0$ & $Mc = 0$. Quare celeritas ipsius B post conflictum $= 2MC : (M + m)$. Est igitur ad celeritatem ipsius A ante conflictum, ut duplum ponderis A ad summam ponderum. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

575. Erit ergo, ex æquo, post conflictum velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B, ut differentia ponderum ad duplum ipsius A (§. 196 Arithm.)

THEOREMA XCIV.

576. Si duo corpora elastica A & B sibi mutuo directe occurrunt, cum celeritatibus quæ ipsorum ponderibus reciproce proportionales sunt; post conflictum eadem celeritate a se invicem resiliunt qua advenerant.

DEMONSTRATIO.

Post conflictum celeritas ipsius A est $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$, & celeritas ipsius B est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$ (§. 571). Est vero $M : m = c : C$ per hypoth. adeoque $mc = MC$ (§. 297 Arithm.) Quod si ergo, in expressione celeritatis ipsius A, pro $2mc$ substituas $2MC$, prodibit $(-mC - MC) : (M + m) = -C$. Resilit ergo A celeritate C, qua advenerat. Quod erat unum.

Quod si similiter, in expressione celeritatis ipsius B, pro $2MC$ substituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc) : (M + m) = c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. Quod erat alterum.

THEOREMA XCV.

577. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; differentia celeritatum tam ante quam post impulsum eadem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit eorum differentia $= C - c$, & corpus M, quod sequitur, in alterum m incurrit. Celeritas igitur ipsius M post conflictum $= \frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$; ipsius autem m $= \frac{mc + 2MC - Mc}{M + m}$; & quoniam post conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius m minor est; consequenter celeritatum differentia post conflictum

$$\frac{mc + 2MC - Mc - MC - 2mc + mC}{M + m} = \frac{MC - Mc - mc + mC}{M + m} = C - c.$$

Est adeo celeritatum differentia post conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. Q. e. d.

THEOREMA XCVI.

578. Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem plagam moventur, post conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum aequalis est summa celeritatum post eundem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit differentia earundem $C - c$. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur per hypoth. in alterum m incurrit, & post conflictum M & m moventur in plagas contrarias per hypoth. celeritas vi elastica producta in M major est celeritate ex ictu, utpote qua M cum m in eandem plagam progrediebatur (§. 534). Celeritas igitur in corpore M negativa est adeoque $\frac{mC - 2mc - MC}{M + m}$

& in corpore m $= \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ (§. 571); consequenter summa celeritatum post conflictum $= \frac{MC + mC - Mc - mc}{M + m} = C - c$. Est ergo summa celeritatum post conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. Q. e. d.

THEOREMA XCVII.

579. Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur; summa celeritatum ante conflictum equalis est differentia earum post eundem.

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c ; erit summa earundem $C + c$. Quoniam corpora sibi mutuo occurrunt & post conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit post conflictum celeritas corporis M

$$= \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}, \text{ \& corporis } m$$

$$= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m} \text{ (§. 571). Est}$$

vero differentia harum celeritatum

$$= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c,$$

quæ eadem cum summa celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA XCVIII.

580. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; summa celeritatum ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & m celeritates ante conflictum C & c ; erit earum summa $C + c$. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, adeoque sibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis m

$$= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m} \text{ (§. 571). Enim-$$

vero corpus M post conflictum in par-

tem ei contrariam movetur, in quam ante eundem tendebat *per hypoth.* adeoque $mC + 2mc > MC$, seu celeritas post conflictum negativa, consequenter

$$= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m} \text{ (§. cit.) Est igitur}$$

$$\text{summa celeritatum post conflictum}$$

$$= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c;$$

adeoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA XCIX.

581. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; quantitas motus ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in corpus m celeritate c motum: erit celeritas illius post conflictum

$$\frac{MC + 2mc - mC}{M + m}, \text{ \& hujus ce-}$$

$$\text{leritas } \frac{2MC + mc - Mc}{M + m} \text{ (§. 571), con-}$$

sequenter quantitas motus corporis M

$$\text{post conflictum } = \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M + m}$$

$$\text{\& corporis } m = \frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$$

Est itaque summa motuum post conflictum

$$= \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M + m}$$

$$= MC + mc \text{ (§. 22). Enimvero quan-}$$

titas utriusque corporis ante conflictum

in

in unam summam collecta erat itidem $MC + mc$ (§. cit.). Quamobrem patet quantitatem motus ante & post conflictum esse eandem. Q. e. d.

THEOREMA C.

582. Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem.

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur per hypoth. sibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M + m}$, & cum

corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, qua advenerat, erit celeritas corporis M post conflictum $= \frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$. Quare quan-

titates motuum in corporibus M & m sunt $\frac{MmC + 2Mmc - M^2C}{M + m}$ &

$\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M + m}$; consequenter eorum differentia

$= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M + m}$

$= MC - mc$. Est vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem. Q. e. d.

THEOREMA CI.

583. Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem partem, post con-

fliktum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus post conflictum est equalis summa earundem ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, corpus unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in alterum m celeritate c motum; erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$. Quo-

niam vero corpus M movetur post conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, adeoque celeritas positiva evadet $mC - 2mc - MC$ (§. 571). Sunt

igitur quantitates motus post conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M + m}$ &

$\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M + m}$; adeoq; differentia

$\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M + m} = MC + mc$.

Quare cum sit $MC + mc$ summa quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum post conflictum æqualis est summæ ante eundem.

THEOREMA CII.

584. Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in easdem moventur; summa motuum post eundem equalis est differentia eorundem ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, sibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri m celeritate c moto; erit celeritas corporis m post

$$\text{conflictum} = \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}, \text{ \& cor-}$$

$$\text{poris } M = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m} \text{ (§. 571).}$$

Sunt adeo quantitates motus post conflictum = $\frac{2MmC + Mmc - m^2c}{M + m}$ &

$$\frac{M^2C - MmC - 2Mmc}{M + m}; \text{ consequen-}$$

$$\text{ter summa motuum post conflictum} \\ = \frac{M^2C + MmC - Mmc - m^2c}{M + m}$$

= $MC - mc$. Quoniam differentia motuum ante conflictum est $MC - mc$, summa motuum post eundem est æqualis differentiæ motuum ante eundem.

THEOREMA CIII.

585. *In conflictu corporum elasticorum, hoc solo in casu eadem conservatur motus quantitas, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & post conflictum in eandem plagam moventur, aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, post eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes, post eundem in eandem tendunt. Jam in hoc solo casu, quando corpora ante & post conflictum

in eandem plagam tendunt, summa motuum ante & post conflictum eadem (§. 581. & seqq.). In hoc igitur casu solo eadem conservatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit CARTESIUS, dum hanc statuit Naturæ Legem, quod in omni corporum conflictu eadem semper conservetur motus quantitas.

SCHOLIUM.

587. *Ut idem evidentius appareat, ostendum porro erit, quonam in casu quantitas motus augetur, in quonam minuitur. Eo igitur sine addimus Theoremata proxime sequentia.*

THEOREMA CIV.

588. *In conflictu corporum elasticorum, quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum post conflictum est æqualis summx eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero summa motuum post conflictum est major differentia motuum post eundem: id quod ex terminis manifestum est (§. 61, 64 *Arithm.*). Quamobrem etiam summa motuum post conflictum major est summa eorundem ante conflictum (§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetur. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA CV.

589. *In conflictu corporum elastico-
rum, quantitas motus minuitur, quando
ante conflictum in partes contrarias, post
eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflic-
tum in partes contrarias, post eundem
in eandem feruntur; summa motuum
post conflictum æqualis est differentiæ
eorundem ante conflictum (§. 584).
Enimvero summa motuum ante con-
flictum major est differentia eorundem
ante conflictum: id quod ex terminis
manifestum (§. 61, 64 *Arithm.*). Er-
go summa motuum ante conflictum ma-
jor est summa motuum post eundem
(§. 89 *Arithm.*). Quantitas igitur mo-
tus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA CVI.

590. *Corpora elastica post conflictum
eadem celeritate a se invicem recedunt,
qua ante eundem ad se invicem accede-
bant.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in ean-
dem plagam moventur, & tardius
motum præcedit, celerius motum
sequitur, quemadmodum in conflic-
tu supponi debet; differentia celeri-
tatum ad se invicem accedunt. Quod-
si vero post conflictum itidem in ean-
dem plagam feruntur, differentia ce-
leritatum post conflictum est æqualis
differentiæ celeritatum ante eundem.

(§. 577). Quoniam itaque tardius
motum sequitur, celerius motum
præcedit, quemadmodum ex actio-
ne elateris intelligitur, qua corpora,
vi ictus, eadem celeritate secundum
eandem directionem progressura (§.
534) a se invicem separantur (§.
571), adeoque differentia celerita-
tum a se invicem discedunt; post
conflictum ea celeritate a se invicem
recedunt, qua ante eundem ad se in-
vicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in ean-
dem plagam moventur, & tardius
motum præcedit, celerius motum
sequitur; differentia celeritatum ad
se invicem accedunt. Quodsi post
conflictum in diversas plagas ten-
dunt, summa celeritatum a se in-
vicem recedunt. Quare cum in hoc
casu summa celeritatum post conflic-
tum sit æqualis differentiæ ante eun-
dem (§. 578); eadem celeritate
etiam in hoc casu post conflictum a
se invicem discedunt, qua ante eun-
dem ad se invicem accedebant. *Quod
erat secundum.*

III. Quodsi duo corpora ante conflic-
tum in partes contrarias moventur;
sibi mutuo occursura; summa cele-
ritatum ad se invicem accedunt.
Quodsi post conflictum tendant in
eandem, cum celerius motum præ-
cedat, tardius motum sequatur, vi
eorum quæ n. I. dicta sunt, differen-
tia celeritatum a se invicem rece-
dunt. Est vero differentia celerita-
tum post conflictum æqualis summae
ante eundem (§. 579). Ergo cor-
pora

pora post conflictum eadem celeritate ad se invicem accedunt, qua post eundem a se invicem recedunt. *Quod erat tertium.*

IV. Denique si duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occurrura, & post conflictum in contrarias a se invicem discedunt; summa celeritatum ante conflictum ad se invicem accedunt, post conflictum a se invicem recedunt. Est vero in hoc casu summa celeritatum ante & post conflictum eadem (§. 580). Ergo eadem celeritate post conflictum a se invicem recedunt, quo ante eundem ad se invicem accedunt. *Quod erat quartum.*

SCHOLIUM.

591. *Hoc Theorema breviter ita enunciat: In conflictu corporum elasticorum, eadem semper conservatur celeritas respectiva. Hanc Propositionem alii inter leges motus referunt, ac inde regulas motus demonstrant.*

COROLLARIUM.

592. *Equalibus igitur temporibus ante & post conflictum, æquales sunt corporum a se invicem distantie; veluti quo intervallo, uno minuto ante conflictum, corpora a se invicem distant, eodem, uno minuto post eundem, a se invicem distant.*

THEOREMA CVII.

593. *Si duo corpora elastica A & B directe concurrant, vel sibi mutuo occurrant; summa factorum ex massis in quadrata celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

In concursu directo, celeritates post conflictum sunt $(MC - mC + 2mc) : (M + m)$, vel $(mC - 2mc - MC) : (M + m)$, & $(2MC - Mc + mc) : (M + m)$ (§. 571). Hinc quadrata earundem $(M^2C^2 + 4MmCc - 4m^2Cc + 4m^2c^2 + m^2C^2 - 2mMC^2) : (M^2 + 2Mm + m^2)$, & $(4M^2C^2 + 4MmCc - 2Mmc^2 + m^2c^2 - 4M^2Cc + M^2c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2)$; consequenter prior per M , posteriore per m multiplicato, prodit summa factorum ex massis in quadrata celeritatum $(M^3C^2 + 2Mm^2c^2 + 2M^2C^2m + M^2c^2m + Mm^2c^2 + m^3c^2) : (M^2 + 2Mm + m^2) = MC^2 + mc^2$, quæ eadem est summa ex factis massarum in quadrata celeritatum ante conflictum. Idem cum eodem modo in occurfu corporum directo ostendatur, quo celeritas corporis m est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$, corporis vero M est $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$, vel $\frac{mC + 2mc - MC}{M + m}$ (§. 571); patet propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. *Eadem itaque in conflictu conservatur Virium vivarum quantitas (§. 325).*

THEOREMA CVIII.

595. *Si duo corpora elastica, celeritatibus per conflictum acquisitis, denovo in se invicem incurrere, vel sibi mutuo occurrere supponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates quas ante eundem habebant.*

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum M & m , celeritates ante primum confictum C & c , ac corpus M incurrat in alterum m : erunt post confictum celeritates eorundem corporum

$$\frac{MC - mc + 2mc}{M + m} \text{ \&}$$

$$\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} \text{ (§. 571). Quo-}$$

niam celeritas corporis m major est celeritate alterius M post confictum (§. cit.); mutatis directionibus corpus m in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A = m$, $B = M$,

$$\text{celeritas ipsius } A = V = \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$$

$$\text{\& celeritas corporis } B = v = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}.$$

Erit igitur, post alterum confictum celeritas corporis incurrentis

$$A = \frac{AV - BV + 2Bv}{A + B}, \text{ \& celeritas}$$

$$\text{alterius } B = \frac{2AV + Bv - Av}{A + B}.$$

$$\begin{aligned} AV &= 2MmC + m^2c - Mmc \\ -BV &= -2M^2C - Mmc + M^2c \\ + 2Bv &= 2M^2C - 2MmC + 4Mmc \end{aligned}$$

$$\frac{AV - BV + 2Bv}{A + B} = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$$

Recuperat igitur corpus m , post confictum alterum, celeritatem c quam ante primam habebat. *Quod erat unum.* Porro

$$\begin{aligned} 2AV &= 4MmC + 2m^2c - 2Mmc \\ + Bv &= + M^2C - MmC + 2Mmc \\ - Av &= - MmC + m^2c - 2m^2c \end{aligned}$$

$$\frac{2AV + Bv - Av}{A + B} = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$$

Recuperat itaque etiam corpus M , per confictum alterum, celeritatem C quam ante primum habebat. *Quod erat secundum.*

Utrumque eodem modo ostenditur, si corpora duo sibi mutuo directa occurrant & mutatis directionibus post confictum primum denuo sibi occurrere supponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO LXIV.

596. Si linea recta AB jungit cen- Tab. I.
tra gravitatis A & B duorum corpo- Fig. 4.
rum, & punctum C ita eandem divi-
dat, ut sit pondus corporis A ad pon-
dus corporis B , uti reciproce BC ad
 CA ; dicetur punctum C *Centrum gra-*
vitatis corporum A & B.

SCHOLIUM.

597. Ratio denominandi patet ex iis, quæ superius (§. 144) demonstrata sunt.

THEOREMA CIX.

598. *Centrum gravitatis corporum elasticorum, ante & post confictum vel quiescit, vel uniformiter seu eadem velocitate in eandem plagam movetur, & temporibus equalibus eodem intervallo ab eodem distant mobilia ante & post confictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim, sumtis temporibus ante & Tab. I.
post confictum equalibus, eadem est Fig. 4.
corporum A & B distantia, adeoque rec-
ta jungens eorum centra gravitatis AB
eadem

eadem (§. 192 *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum sit: mobilia ab eodem æquali intervallo distare debent, sumtis ante & post conflictum temporibus æqualibus. *Quod erat primum.*

Fieri autem non potest ut eadem, ante & post conflictum temporibus æqualibus, sit corporum A & B a centro gravitatis distantia, nisi aut centrum istud quiescat, aut ante & post conflictum eodem modo moveatur: quod per se patet. Ergo centrum gravitatis ante & post conflictum vel moveri eodem modo, vel quiescere debet. *Quod erat secundum.*

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius est (§. 144); cum corpore majore, seu graviore, in eandem plagam, adeoque continuo juxta eandem directionem moveatur. *Quod erat tertium.*

Denique cum corporum motus sit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a se invicem recedentibus distantia, in accedentibus vero ad se invicem subdupla, subtripla, subquadrupla (§. 31); consequenter cum distantia a centro sint in constante ratione, nimirum ratione massarum reciproca (§. 596), eadem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in casu priori, aut subduplæ, subtriplæ, subquadruplæ in posteriori evadere debent (§. 178, 181 *Arithm.*). Quamobrem si centrum gravitatis moveatur, spatia ab eo-

dem descripta temporum rationem habere, adeoque ipsam motu æquabili ferri (§. 31); consequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24) *Quod erat quartum.*

SCHOLIUM.

599. *Quod centrum gravitatis subinde quiescat, subinde moveri debeat, & quandonam quiescat, quandonam moveatur, patet ex Propositione sequente.*

THEOREMA CX.

600. *Si duo corpora elastica moveantur celeritatibus qua sint massis seu ponderibus ipsorum reciproce proportionales, sibi que mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & post conflictum quiescit: in alio autem casu quocunque, non quiescit, sed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur per hypoth. spatia descripta eodem tempore continuo sunt ut celeritates quibus feruntur (§. 33), adeoque in ratione massarum reciproca (§. 167 *Arithm.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus distat in ratione massarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a distantis anterioribus continuo partes in ratione massarum reciproca, per demonstrata; adeoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ sunt itidem in ratione massarum reciproca (§. 188 *Arithm.*); consequenter centrum gravitatis in eodem loco constanter hæret (§. 596), & hinc ante con-

& hinc ante conflictum quiescit. Enimvero post conflictum celeritates eadem prorsus sunt quæ ante eundem fuerant (§. 590), adeoque itidem massis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur, ut ante, quod distantia continuo crescant a loco centri gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione massarum reciproca (§. 187 *Arithm.*); consequenter & post conflictum quiescit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo casu, eodem, quo ante, modo patet quod distantia a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decrescant, nec post conflictum crescant in ratione massarum reciproca; consequenter a loco isto continuo non distent corpora in ratione massarum reciproca (§. 188, 187 *Arith.*). Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco est (§. 596), consequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elastica æqualia eadem celeritate sibi mutuo occurrunt, celeritates quoque massis reciproce proportionales sunt; quod per se patet. Centrum gravitatis igitur ante & post conflictum quiescit, si corpora elastica æqualia æquali celeritate sibi mutuo occurrunt.

SCHOLIUM.

602. Nimirum casus hic specialis sub generali Theorematis actu continetur, ut dici non possit præter casum Theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quiescit. Ceterum Theorema præsens ita enunciari solet: Status centri gravitatis non mutatur ab *Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.*

actione corporum in se invicem. Sunt quidam Philosophi, qui ut autoritatem CARTESII tueantur, eandem motus quantitatem conservari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & post conflictum movetur. Verum enim est quantitatem motus centri gravitatis ante & post conflictum esse eandem.

THEOREMA CXI.

603. Si corpora elastica sibi mutuo occurrunt; celeritas ab uno eorum amissa est ad celeritatem quam idem amitteret si in alterum quiescens impingeret, ut summa celeritatum utriusque ad celeritatem ipsius impingentis.

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & m celeritatibus C & c sibi mutuo occurrant, erit illius celeritas post conflictum = $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$

(§. 571); consequenter celeritas in conflictu amissa = $C - \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$

$$= \frac{MC + mC - MC + mC + 2mc}{M + m}$$

$$= \frac{2mC + 2mc}{M + m}. \text{ Jam vero si corpus}$$

M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret = $\frac{MC - mC}{M + m}$ (§. cit.) conse-

$$\text{quenter celeritas amissa foret } C - \frac{MC - mC}{M + m} = \frac{MC + mC - MC + mC}{M + m}$$

$$= \frac{2mC}{M + m}. \text{ Est igitur celeritas in casu}$$

V priori

priori amissa ad celeritatem in posteriori amittendam ut $\frac{2mC+2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m}$ $\equiv C+c:C$, hoc est, ut summa celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXII.

604. Si corpus elasticum unum in alterum incurrit; celeritas ab incurrente in conflictu amissa est ad celeritatem quam idem amitteret si in alterum quiescens impingeret, ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus m incurrit, quod celeritate c movetur, erit illius celeritas post conflictum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ (§. 571); adeoque celeritas in conflictu amissa $C - \frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ $\equiv \frac{MC+mC - MC+mC - 2mc}{M+m}$ $\equiv \frac{2mC - 2mc}{M+m}$. Enimvero si corpus M in alterum m quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $\frac{MC - mC}{M+m}$, adeoque celeritas amissa foret $C - \frac{MC - mC}{M+m} = \frac{MC+mC - MC+mC}{M+m} = \frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu

priori amissa ad celeritatem in casu posteriori amittendam ut $\frac{2mC - 2mc}{M+m}$ ad $\frac{2mC}{M+m} = C - c : C$, hoc est, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis post eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIII.

605. Si corpus elasticum majus incurrat in minus quiescens; celeritatem majorem ea qua fertur, sed dupla minorem eidem communicat.

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus m quiescens: erit celeritas corporis m post conflictum $2mC : (M+m)$ (§. 571), hoc est, si $M = m+n$, $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$. Est igitur celeritas corpori minori m communicata per conflictum a corpore M ad celeritatem hujus ante conflictum $\frac{2mC+2nC}{2m+n} : C = 2mC+2nC : 2mC+nC$ (§. 181 *Arithm.*) $= 2m + 2n : 2m+n = 2 : 1 + \frac{n}{m+n}$. Est igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, sed minor quam dupla ejusdem: nimirum si dupla foret, antecedens rationis esse deberet $2+2m : (m+n)$. Idem etiam patet si celeritatem corpori minori acquisitam $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$ dividas actu per $2m+n$; prodit

prodit enim $C + \frac{nC}{2m+n}$. Est vero

$$C + \frac{nC}{2m+n} > C \text{ (§. 84 Arithm.).}$$

$$\text{Jam vero } \frac{nC}{2m+n} : C = nC : (2m+n)C$$

$$= n : 2m+n. \text{ Sed } n < 2m+n \text{ (§.}$$

$$20 \text{ Arithm.). Ergo } \frac{nC}{m+n} < C \text{ (§.}$$

151 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA CXIV.

606. Si corpus elasticum majus in minus quiescens incurrat; minus post conflictum movetur celeritate composita ex ea qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera qua post conflictum idem incedit.

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quiescens m, sitque $M = m+n$; patet, ex demonstratione Theorematis præcedentis, corporis m celeritatem

$$\text{post conflictum esse } C + \frac{nC}{2m+n}.$$

$$\text{Enimvero celeritas corporis M post conflictum} = \frac{MC - mC}{M+m} \text{ (§. 571)}$$

$$= \frac{mC + nC - mC}{2m+n} = \frac{nC}{2m+n}.$$

Componitur adeo celeritas corporis m ex celeritate C, quam habebat majus M ante

$$\text{conflictum, \& ex celeritate } \frac{nC}{2m+n},$$

quæ est eidem post conflictum. Q. e. d.

THEOREMA CXV.

607. Si celeritas corporis elastici majoris in aliud minus quiescens incurrentis fuerit ut summa massarum utriusque corporis; minori dat celeritatem qua est ut duplum sui, amittit vero celeritatem qua est ut duplum minoris corporis.

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus m, in quod majus M celeritate C incurrit, quiescit; celeritas ejus post conflictum est $\frac{MC - mC}{M+m}$,

$$\text{\& minori dat celeritatem } \frac{2MC}{M+m} \text{ (§.}$$

$$571). \text{ Est vero } C = M + m \text{ per hypoth.}$$

Ergo celeritas majoris sive incurrentis = $M - m$, quæ differt à celeritate initiali $M + m$ quantitate $2m$. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem quæ est ut duplum corporis minoris. Quod erat unum.

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquisita erit $2M$, adeoque ea est ut duplum corporis majoris incurrentis. Q. e. d.

THEOREMA CXVI.

608. Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit; celeritate qua est ut massarum utriusque corporis summa; dat ei celeritatem qua est ut duplum sui, sed celeritatem amittit qua est ut duplum majoris.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas post conflictum $\frac{2mC}{M+m}$ &

celeritas ipsius post eundem $\frac{mC - MC}{M + m}$

(§. 571). Est vero C ut $M + m$ per hypothesis. Ergo celeritas majoris ut $2m$ seu duplum minoris; minoris vero sive incurrentis ut $m - M$. Differentia vero inter $M + m$ & $m - M$ est $2M$. Celeritas igitur in ictu amissa est ut duplum corporis M . *Q. e. d.*

THEOREMA CXVII.

609. Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit; post conflictum semper resilit eique celeritatem suam minorem dat.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrat in majus M ; erit celeritas majoris M post conflictum $\frac{2mC}{M + m}$, minoris

vero seu incurrentis $\frac{mC - MC}{M + m}$ (§.

571). Nimirum in formula generali litteræ M & m permutantur, quia ibi M percussus, hic vero m percussus est. Jam vero celeritas incurrentis ante

conflictum $C = \frac{MC + mC}{M + m}$, Quare si

ponamus $M = m + n$ (§. 20 Arithm.): erit celeritas minoris ante conflictum $= \frac{2mC}{2m + n} = nC$, majoris vero post eundem

$\frac{2mC}{2m + n}$. Est igitur velocitas majori acquisita minor celeritate incurrentis (§. cit.). Quod erat unum.

Jam cum sit $M = m + n$, erit celeritas minoris post conflictum $\frac{mC - mC - nC}{2m + n}$

$= -\frac{nC}{2m + n}$, adeoque negativa. Post

conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571). Corpus igitur minus m semper resilit post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXVIII.

610. Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit; celeritas utriusque post conflictum simul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrit in majus M , atque $M = m + n$; erit celeritas majoris post conflictum $= \frac{2mC}{2m + n}$; minoris vero, non habita-

ratione directionis $= -\frac{nC}{2m + n}$ quemad-

modum ex demonstratione Propositionis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum post conflictum est

$\frac{2mC + nC}{2m + n} = C$. *Q. e. d.*

THEOREMA CXIX.

611. Si corpus elasticum unum A incurrat in duo elastica B & C , quorum B sit majus quam A , & C vicissim majus quam B , atque corpus C mediante altero B percutit; majorem corpori C celeritatem dat, quam si idem immediate, seu corpore B non interveniente, percuteret.

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum A, B & C = M, nM & niM, celeritas incurrentis = C. Cum sit ut summa massarum ad duplam massam incurrentis ita celeritas percussientis ad celeritatem percussi (§. 574);

$$\text{erit } M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M + nM}, \text{ quæ}$$

est celeritas corpori B acquisita. Quodsi jam hac celeritate corpus B in C impingat, seu idem urgeat; erit

$$nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M + nM} :$$

$$\frac{4nM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}, \text{ quæ est ce-}$$

leritas corpori C interventu corporis B acquisita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M + niM : 2M$

$$= C : \frac{2MC}{M + niM}, \text{ quæ est celeritas cor-}$$

pori C acquirenda, si corpus A immediate seu absque interventu corporis B idem percuteret. Est adeo celeritas mediata corporis C ad immediatam

$$= \frac{4nM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{2MC}{M + niM}$$

$$= \frac{2nM}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{1}{M + niM}$$

$$= \frac{2nM^2 + 2n^2iM^2}{nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^2iM^2} = \frac{2n + 2n^2i}{n + ni + n^2 + n^2i}$$

Est vero $n + n^2i = n(1 + ni) > ni + n^2 = n(i + n)$, quia $ni > i + n$, adeoque $2n + 2n^2i > n + n^2 + n^2i + ni$ (§. 90 *Aritbm.*). Patet igitur celeritatem corporis C, interventu alterius B a corpore A percussi, esse majorem ea quam acciperet, si a corpore A immediate percuteretur.

Ex. gr. Sit massa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquisita, ad eam quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Est igitur celeritas mediata major immediata. Sit similiter $M = 2$, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$; adeoque celeritas mediata corporis C ad immediatam = $6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Est igitur denuo celeritas mediata major immediata.

THEOREMA CXX.

612. Si corpus elasticum unum A in aliud segnius motum sed majus B incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus C quiescens, sed se itidem majus; corpus C majore celeritate feretur, quam si immediate a corpore A percuteretur.

DEMONSTRATIO.

Sit massa corporis A = M, massa secundi B = nM & tertii C = niM, celeritas corporis A = C, corporis B vero = lC. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B

$$= \frac{2MC + nMC - lMC}{M + nM} \quad (\text{§. 571}).$$

Quodsi idem corpus A in tertium C quiescens incurreret, foret hujus celeritas

$$= \frac{2MC}{M + niM}$$

Incurrat jam corpus B, celeritate per conflictum cum corpore A modificata, in quiescens C; erit celeritas corporis C

$$= \frac{4nM^2C + 4n^2iM^2C - 2niM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} \quad (\text{§. cit.})$$

(S. cit.). Est igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam

$$\begin{aligned} &= \frac{4nM^2C + 4n^2/M^2C - 2n/M^2C}{(M+nM)(nM+niM)} \cdot \frac{2MC}{M+niM} \\ &= \frac{2nM + 2n^2/M - n/M}{(M+nM)(nM+niM)} \cdot \frac{1}{M+niM} \\ &= \frac{(2n + 2n^2l - nl)(1+ni)}{(n+ni)(1+n)} \\ &= \frac{2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^2il - n^2il}{n+ni + n^2 + n^2i}. \end{aligned}$$

Est vero $n + n^2i > n^2 + ni$, adeoque $2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^2il - n^2il > n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major est immediata.

Ex. gr. Sit massa corporis $A = 1$, alterius $B = 2$, tertii $C = 3$, adeoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = 2$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $4 + 16 - 4 + 24 + 96 - 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 112 : 24 = 14 : 3$. Est itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, sed $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 4 - 1 + 24 + 48 - 12 : 2 + 6 + 4 + 22 = 67 : 34$. Est adeo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA CIII.

613. Invenire corpus B interponendum inter duo alia corpora A & C, ut corpus C quiescens a corpore A data celeritate moto percussum maximam acquirat celeritatem quam ex percussione istiusmodi habere potest.

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur $= V$. Incurrat A in B quiescens; erit hujus celeritas post conflictum $= \frac{2AV}{A+B}$ (S. 571). Incurrat jam corpus B ce-

leritate hac acquisita in tertium C quiescens; erit corporis C celeritas post con-

$$\text{flictum} = \frac{4ABV}{AB+B^2+AC+BC} \text{ (S. cit.).}$$

Quoniam celeritas hæc maxima est quam corpus C ex istiusmodi percussione acquirere valet *per hypoth.* erit differentiale ejus nihilo æquale (S. 63 *Anal. infin.*). Jam cum A, C & V sine quantitates constantes, B vero sola sit variabilis, facta differentiatione (S. 19 *Analys. infin.*) reperitur $(4A^2VBdB + 4AB^2VdB + 4A^2CVdB + 4ABCVDdB - 4A^2BVDdB - 8AB^2VdB - 4ACBVDdB) : (AB + B^2 + AC + BC)^2 = 0$, hoc est,

$$4A^2CVdB - 4AB^2VdB = 0$$

$$AC - B^2 = 0$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit $A : B = B : C$ (S. 301 *Arithm.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quiescens a corpore quacunque celeritate percussum, fuerit medium proportionale inter percussens & percussum; celeritatem ei dabit maximam quam interventu cujusdam corporis ei communicare valet.

COROLLARIUM.

614. Quodsi ergo series fuerit corporum in continua proportione crescentium; ultimum acquirat celeritatem maximam quam a priori ex percussione tot corporum interventu acquirere valet quæ continuo crescunt.

SCHOLIUM.

615. Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari posse, quæ fidem omnem superare videtur, calculus probat & HUGENIUS (a) exemplo illustri docuit. Idem valet si corpora continuo decrescant.

PROBLEMA CIV.

616. Determinare motum corporum A & B oblique impingentium, sive elasticorum, sive elateris expertium, post conflictum.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Motus corporis A per AC resolvitur in duos alios secundum AE & AD, & Fig. 55. motus corporis B per BC similiter in duos alios secundum BF & BG (§. 245), suntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC, ut ipsæ rectæ AD, BF; AC, BC (§. 247). Jam cum rectæ AE & BG sint parallelæ; vires secundum has directiones agentes sibi

(a) De Motu Corporum ex Percussione, Prop. 13.

mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu insuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, seu quod perinde est, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem constituent, perinde est ac si corpora A & B solis velocitatibus, quæ sunt ut EC & GC, directe sibi mutuo occurrerent (§. 523). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta superiora. Sit ex. gr. corporis A resilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur; fiat CK=AE, & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI designabit motum corporis A post conflictum; movebitur nempe post ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241). Eodem modo reperitur, corpus B resilientis moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM=BG. Sunt adeo celeritates post ictum, ut CI ad CM. Quodsi post conflictum corpora A & B versus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC construitur.

CAPUT XIII.

De Vi Centrifuga & Centripeta.

DEFINITIO LXV.

617. **V**is centrifuga est vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.

Ex. gr. Si corpus in peripheria circuli

movetur, in quovis puncto A conatur Tab. V. progredi per tangentem AD (§. 71), & Fig. 56. si nihil obstaret, actu progredieretur; adeoque, eodem tempore quo arcum AE describit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROL-

COROLLARIUM.

Tab.V. 618. Est adeo vis centrifuga ut recta Fig. 56. DE ad AD perpendicularis, si arcus AE infinite parvus (§. 245).

DEFINITIO LXVI.

619. Vis centripeta est vis, qua mobile per rectam AG progressurum retrahitur a motu rectilineo ut in curva incedat.

COROLLARIUM I.

620. Est itaque vis centripeta ut recta DE, si arcus AE infinite parvus.

COROLLARIUM II.

621. Et hinc vis centripeta centrifuge æqualis est (§. 618.).

DEFINITIO LXVII.

622. Vires centrales communi nomine ducuntur Vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA CXXI.

623. Si duo corpora pondere equalia, eodem vel æquali tempore, motu æquali peripherias circularum inæqualium describant; erunt vires centrales ut diametri AB & HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arcus AE infinite parvus, adeoque a subtensa non differat. Quia peripherie eodem tempore describuntur; si ex centro C ducatur radius CE, erit HK arcus eodem momento descriptus, & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137 Geom.). Quod si jam ducantur tangentes AD & HI, atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, $\Delta\Delta$ ADE

& HIK eodem modo determinantur, Tab.V. Fig. 56. (§. 119 Geom.), adeoque similia sunt (§. 120 Geom.); consequenter AE:HK=DE:IK (§. 175 Geom.). Sunt vero ut DE ad IK, ita vis centralis in circulo majore ad vim centricalem in minore (§. 620). Ergo vires centrales sunt ut arcus AE & HK (§. 167 Arithm.); consequenter ut peripherie circularum quas percurrunt, per demonstrata, adeoque & ut diametri eorundem (§. 412 Geom.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

624. Quod si ergo vires centrales duorum corporum peripherias circularum inæqualium describendum fuerint ut diametri, temporibus æqualibus eadem percurrant.

THEOREMA CXXII.

625. Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis est ut arcus infinite parvi AE quadratum per diametrum AB descriptum.

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM; erit in rectangulo ADEM, $AM=DE$. Quoniam arcus infinite parvus AE a subtensa non differat; erit $BA:AE=AE:AM$ (§. 330 Geom.). Est ergo $AM=DE=AE^2:BA$ (§. 301 Arithm.). Quare cum vis centralis sit ut DE (§. 620); erit eadem ut $AE^2:BA$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquali temporali æqualibus arcibus æquales AE describat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, constanter eadem est.

THEO:

THEOREMA CXXIII.

Tab.V. Fig. 56. 627. Si duo corpora diversas peripherias motu aquabili describant; vires centrales sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 625), adeoque ut $AE^2 : HL$ ad $HK : AB$ (§. 178 *Arithm.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore describantur, per *hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

628. Si celeritates fuerint æquales; erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL . (§. 181 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

629. Si diametri AB & HL fuerint æquales; hoc est, si utrumque mobile in eadem peripheria, sed dispari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. cit. *Arithm.*)

THEOREMA CXXIV.

630. Si duorum mobilium in diversis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulatorum AB & HL in ratione duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem instanti sunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ per *hypoth.* consequenter $AE^2 : HK^2 = AB : HL$ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

LEMMA II.

631. Quantitatum proportionalium radices sunt etiam proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$, per *hypoth.* Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{m}$; erit utique $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA III.

632. Sint quatuor quæcumque quantitates proportionales, sintque totidem alia inter se quoque proportionales; si posteriores singulas per singulas priores dividas, vel contra; quoti quoque proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$, & $c : nc = d : nd$ per *hypoth.* Quodsi a per c , ma per nc , b per d , mb per nd dividas; prodibunt

$$\frac{a}{c}, \frac{ma}{nc}, \frac{b}{d} \text{ \& \ } \frac{mb}{nd}$$

Jam cum sit

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{nac}{mac} = \frac{n}{m}, \text{ \& \ } \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd} = \frac{nb}{mb}$$

$$= \frac{n}{m}; \text{ erit utique } \frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$$

Eodem modo patet, esse $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} :$

$\frac{nd}{mb}$. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXV.

633. Si duo corpora in peripheriis inæqualibus eadem vi centrali urgentur; Tab.V. Fig. 56. tempus in majori est ad tempus in minori in ratione subduplicata diametri majoris AB ad minorem HL .

DEMONSTRATIO.

Tab. V. Fig. 56. Sit $AB = D$, $HL = d$; celeritas in majori peripheria $= C$, in minori $= c$; peripheria major $= P$, minor $= p$; tempus per illam $= T$, per hanc $= t$; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), adeoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Est vero $P : p = D : d$ (§. 412 *Geom.*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 632). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ sunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus similes qui peripheriarum rationem habent (§. 170 *Arithm.*), describuntur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

634. Est igitur $T^2 : t^2 = D : d$, (§. 260 *Arithm.*); hoc est diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM II.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634); erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $T : t = C : c$ (§. 631); hoc est, tempora, quibus peripheriæ aut arcus similes percurreuntur a mobilibus eadem vi centrali impulsis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA CXXVI.

636. Vires centrales sunt in ratione composita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v ; reliqua ut in demonstratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 38); consequenter $C^2 : c^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ (§. 260 *Arithm.*); adeoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = \frac{D^2}{DT^2} : \frac{d^2}{dt^2}$ (§. 185 *Arithm.*) $= \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 231 *Arithm.*). Est igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167 *Arithm.*) $= Dt^2 : dT^2$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. E. D.*

THEOREMA CXXVII.

637. Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcibus similibus mobilia ferantur, sunt ut diametri circulorum; vires centrales sunt reciproce ut eadem diametri.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, per hypot. & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 636); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$ (§. 167 *Arithm.*); consequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 185 *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc in casu æquales.

THEO.

THEOREMA CXXVIII.

Tab.V. Fig.56. 639. Si corpus quoddam in periphēria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, quæ acquiritur per altitudinem AL cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo AL ad radium CA.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi describeret 2AL, nempe celeritate quam cadendo per AL acquisivit & qua per AE movetur (§. 92). Est igitur tempus per AE ad tempus per AL, ut AE ad 2AL (§. 32), & hinc reperitur spatium eodem tempore a gravi cadente percursum, quo percurritur AE, = AL. $AE^2 : 4AL^2 = AE^2 : 4AL$ (§. 86). Est vero vis centralis ad gravitatem in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires istæ producant (§. 280), adeoque spatiorum eodem tempore motu æquabili descriptorum (§. 33). Quare cum spatium eo instanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2 : 4AL$, vi centrali percursum sit $AE^2 : BA$ (§. 625); erit vis centralis ad gravitatem ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 : 4AL$, hoc est, ut 4AL ad BA, seu 2AL ad CA (§. 181 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

640. Quodsi adeo gravitas corporis dicatur G; erit vis centrifuga 2AL. G : CA.

THEOREMA CXXIX.

641. Si grave in periphēria circuli æquabili motu feratur, ea quidem celeritate quam acquirit cadendo per alti-

tudinem AL dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitati æqualis. Tab.V. Fig.56.

DEMONSTRATIO.

Vis centralis est 2AL.G:CA (§. 640). Quare si $AL = \frac{1}{2}CA$; eadem erit CA. $G:CA = G$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

642. Ergo si gravitati vis centralis æqualis est; grave ea celeritate in periphēria circuli fertur quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA CXXX.

643. Si vis centralis gravitati æqualis est; tempus per periphēriam integram est ad tempus descensus per dimidium radium ut periphēria ad radium.

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percursum, quæ cadendo per $\frac{1}{2}CA$ acquiritur, est in tempore æquali = CA (§. 92). Quare cum periphēria circuli eadem celeritate uniformiter percurretur (§. 642); erit tempus per periphēriam ad tempus descensus per dimidium radium ut periphēria ad radium CA (§. 32). Q. e. d.

THEOREMA CXXXI.

644. Si duo corpora in periphēriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, qua sit reciproce in ratione subduplicata diametrorum; vires centrales sunt in ratione duplicata distantiarum a centro virium reciproce sumtarum.

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & c, diametri D & d, vires V & v; erit $V:v = C^2:c^2$

$$= \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} \text{ (§. 627). Sed } C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D},$$
per hypoth. adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260 *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{4} d^2 : \frac{1}{4} D^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires sunt reciproce ut quadrata radorum seu distantiarum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXII.

645. Si duo corpora in peripheriis inequalibus celeritatibus incedunt, quæ sunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi distantiarum a centro virium.

DEMONSTRATIO.

$$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} \text{ (§. 627). Sed } C : c = d : D \text{ per hypoth. adeoque } C^2 : c^2 = d^2 : D^2 \text{ (§. 260 } \textit{Arithm.}).$$
 Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178 *Arithm.*) $= \frac{1}{8} d^3 : \frac{1}{8} D^3$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, Vires centrales reciproce sunt ut cubi radorum seu distantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXXIII.

646. Si duorum corporum in peripheriis inequalibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione subduplicata diametrorum; temporum quadrata, quibus integras peripherias aut arcus similes percurrunt, sunt in ratione triplicata distantiarum a centro virium.

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & t , celeritates C & c , diametri D & d . Cum tam periphe-

ria (§. 412 *Geom.*) quam arcus similes (§. 170 *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 38). Est vero $C : c = d : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}}$ (§. 124 *Analys. finit.*); consequenter $T^2 : t^2 = D^2 : d^2$ (§. 260 *Arithm.*) $= \frac{1}{8} D^2 : \frac{1}{8} d^2$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

647. Ergo si Vires centrales sunt in reciproca ratione distantiarum a centro subduplicata; temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus similes percurrunt, sunt in triplicata earundem distantiarum (§. 644) ratione.

THEOREMA CXXXIV.

648. Si duorum corporum in peripheriis inequalibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce; tempora sunt in ratione duplicata distantiarum a centro.

DEMONSTRATIO.

Quia $C : c = d : D$, *per hypoth.* & peripheria (§. 412 *Geom.*), atque arcus similes (§. 171 *Arithm.*) sunt ut radii, adeoque $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit

$$T : t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2 \text{ (§. 124 } \textit{Anal. finit.}) = \frac{1}{4} D^2 : \frac{1}{4} d^2 \text{ (§. 181 } \textit{Arithm.}),$$
 hoc est, tempora sunt in ratione duplicata radorum seu distantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

649. Si ergo Vires centrales sunt reciproce ut cubi distantiarum a centro virium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus similes percurreuntur, sunt ut quadrata earundem (§. 645).

SCHOLIUM.

Tab.V. Fig.56. 650. Quodsi supponamus vim centripetam urgere corpus versus centrum C, ut pro effectu ejus sumatur portio secantis EG; omnia manent ut ante, propterea quod, in casu infinite parvi, EG & DE pro equalibus haberi possint, atque adeo eadem in utroque casu eruatur mensura vis centralis. Nimirum cum CA (§. 308 Geom.) & DE per hypoth. sint perpendiculares ad AG: erunt inter se parallela (§. 256 Geom.), adeoque angulus GED = ECM (§. 233 Geom.). Quare cum etiam recti ad D & M sint equalis (§. 145 Geom.); erit GE:ED = EC:CM (§. 267 Geom.). Quoniam sagitta AM infinite parva, per hypoth. CM & CA equalis habentur (§. 4 Analys. infin.), Ergo etiam CM = CE (§. 40 Geom. & §. 87 Arithm.) Est igitur etiam GE = DE (§. 149 Arithm.). Quod vero sit etiam EG ut AE²:AB, quemadmodum supra ostendimus esse ED (§. 627), ita evincitur. AG² = NG.EG (§. 379 Geom.), hoc est, quia in casu arcus AE infinite parvi NG = NE (§. 4 Analys. infin.), NE.EG = AB.EG = AG², seu, quia arcus infinite parvus AE a portiuncula tangentis AG assignabiliter non differt, AB.EG = AE². Unde prodit EG = AE²:AB, aut quod perinde est, vis centripeta est ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum divisum.

THEOREMA CXXXV.

651. Si corpus in linea curva versus easdem partes curvæ ea lege incedat, ut radius CB ex ipso in punctum fixum

C, quod in eodem plano situm est, du-Tab.V. *Tab.V. Fig.57.* *Etus areas BAC, BEC, &c. describat* Fig.57. *temporibus proportionales, seu dato tempore aequales: corpus a vi centripeta versus punctum C urgetur.*

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus sola vi insita per rectam, seu arcum infinite parvum AB, dato minimo quovis instanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipsi AB æqualem (§. 31), & in directum sitam (§. 71). Sed per vim centripetam a BD retrahitur, & per arculum BE incedere cogitur, estque $\triangle CAB = \triangle CBE$, per hypoth. & ducta recta CD, ob $AB = DB$ per demonstrata, $\triangle CBD = \triangle CBA$ (§. 385 Geom.). Ergo $\triangle CDB = \triangle CEB$ (§. 87 Arith.), consequenter perpendiculara ex E & D in BC demissa æqualia sunt (§. 385 Geom.), & hinc DE ipsi FB parallela (§. 226 Geom.). Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 241), vis centripeta in B tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonstratur, patet vim centripetam a motu rectilineo versus C retrahere mobile. Q. e. d.

THEOREMA CXXXVI.

652. Si corpus secundum directionem rectæ AD progrediatur, & una a vi centripeta ad punctum fixum C in eodem plano situm urgeatur; curvæ describit versus C curvæ, cujus areæ

Tab.V. *quacunque duobus radiis AC & BC com-
Fig.57. prehense sunt temporibus, quibus descri-
buntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim insita vel impressa cum agat juxta BD, & centripeta juxta BF seu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis describitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis instanti directio mobilis a vi centripeta mutatur; curva describitur, eaque versus C cava: quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB versus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero, ob $AB = BD$ *per hypoth.* $\triangle ABC$ & BDC æqualia (§. 385 *Geom.*), & ob ED & BC parallelas (§. 241), $\triangle BCD$ & BCE iidem æqualia sunt (§. 385 *Geom.*); consequenter $ABC = BEC$. Quod cum eodem modo demonstraretur de triangulis quocunque aliis æqualibus tempusculis descriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus quibus describuntur proportionales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXXXVII.

653. *Si mobile in linea curva incidens vi centripeta versus centrum immobile urgetur; celeritas ejus est reciproce ut perpendicularum a centro illo in tangentem curvæ demissum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus describuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE, & in tempusculis infinite parvis motus æquabilis; erunt

celeritates in A & B, ut AB ad BE (§. 33), Tab.V. hoc est, ut bases triangulorum ACB & Fig.57. BCE. Sunt vero triangula ista æqualia *per hypoth.* adeoque bases AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393 *Geom.*), hoc est, reciproce ut perpendiculara ex centro C in bases AB & BE continuatas, quæ sunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20 *Analys. infin.*), demissa (§. 227 *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B sunt reciproce ut perpendiculara ex centro C in tangentes demissa (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

DEFINITIO LXVIII.

654. *Centrum virium diximus punctum O, ad quod mobile in linea curva revolutum a vi centripeta continuo urgetur. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur Orbis, vel Orbita, item Trajectoria.* Tab. XVI. Fig. 161.

DEFINITIO LXIX.

655. *Radius vector est recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hæere supponitur.*

COROLLARIUM.

656. Est adeo radius vector distantia mobilis a centro virium (§. 392 *Geom.*).

THEOREMA CXXXVIII.

657. *In omni curva vis centralis est in ratione composita ex directa radii vectoris, & reciproca radii osculi simplici, atque reciproca triplicata perpendiculari ex centro virium in tangentem orbis demissi.*

DEMONSTRATIO.

Tangat PN curvam in puncto M; sitque O centrum virium, OM radius vector

Tab. XVI. Fig. 161. vector & CM radius osculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius osculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ Mm haberi potest pro arcu circuli radio CM descripti (§. 313, 314 *Analys. infin.*). Vis centripeta agens versus centrum circuli erit ut mR, quæ vero agit versus centrum virium Orbis O ut mN. Quoniam radius osculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317 *Analys. infin.*), & mRN = CMN + MCR = (§. 239 *Geom.*) = CMN, ob MCR infinite parvum = 0 (§. 3 *Analys. infin.*); angulus R recto æqualis, consequenter etiam ipsi P (§. 145 *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON (§. 239 *Geom.*) = MNO, ob MON infinite parvum = 0 (§. 3 *Anal. infin.*). Ergo mR : mN = PO : MO (§. 267 *Geom.*), hoc est, vis centripeta agens versus centrum circuli osculatoris C est ad vim centripetam versus centrum virium O agentem, ut PO ad MO *per demonstrata*. Quod si celeritas, qua arcus Mm describitur, fuerit = C: erit vis centripeta agens in centrum osculi C = C² : MC (§. 627.). Est vero C reciproce ut PO, hoc est ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653); adeoque vis centripeta agens in centrum osculi C = $\frac{1}{PO^2 \cdot MC}$. Quare cum sit *per demonstrata* vis petens centrum osculi ad vim quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens versus centrum orbis O = $\frac{MO}{PO^2 \cdot MC}$,

atque adeo est in ratione composita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii osculi MC, & reciproca triplicata perpendiculari ex centro Virium Orbis in tangentem demissi PO. *Q. e. d.* Tab. XVI. Fig. 161.

THEOREMA CXXXIX.

658. Si corpus in peripheria circuli revolvatur, & vis centripeta idem urgeat versus punctum fixum O in peripheria situm; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris OM.

DEMONSTRATIO.

Tangat PR circulum in puncto dato M & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius osculi (§. 324 *Analys. infin.*). Jam cum CM (§. 308 *Geom.*) & OP *per hypoth.* sint perpendiculares ad PR; erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), consequenter o = x (§. 233 *Geom.*). Quare cum OPM sit rectus *per construct.* & MON itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit MN : MO = MO² : OP, (§. 267 *Geom.*); adeoque OP = $\frac{MO^2}{MN}$, consequenter OP³ = $\frac{MO^6}{MN}$. Est vero vis centripeta in M = $\frac{MO}{OP^2 \cdot MC}$ (§. 657). Quare si pro OP³ substituat^rur ejus valor $\frac{MO^6}{MN}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO \cdot MN^2}{MO^6 \cdot MC}$. Sunt vero MN & MC

Tab. XVI. Fig. 162. MC in omni puncto peripheriæ constantes, adeoque, ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diversis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^2}$ seu $\frac{1}{MO}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q. e. d.*

THEOREMA CXL.

659. Si corpus in peripheria circuli revoluitur, & vis centripeta ad punctum quodcumque intra circulum datum O tendat; erit ea in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 163. Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda DM; sitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P per construct. & AMD (§. 317 *Geom.*) rectus est, ac præterea $\angle O = x$ (§. 323 *Geom.*); erit $AD : AM = OM : OP$ (§. 267 *Geom.*), adeoque $OP = \frac{OM \cdot AM}{AD}$; consequenter $OP^2 = \frac{OM^2 \cdot AM^2}{AD^2}$. Est vero vis centripeta in M $= \frac{MO}{OP^2 \cdot DC}$ (§. 657 *Mech.* & §. 324 *Analyf. infin.*). Quare eadem $= \frac{MO \cdot AD^2}{AM^2 \cdot OM^2 \cdot DC}$; consequenter cum AD & DC constantes sint, seu in omni puncto curvæ eadem; vis centripeta $= \frac{1}{AM^2 \cdot OM^2}$ (§. 178, 181 *Arithm.*), hoc est, in ratione compo-

sita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q. e. d.*

THEOREMA CXXI.

660. In omni Sectione conica, vis centripeta tendens ad focum curva est reciproce in ratione duplicata radii vectoris, seu distantia a foco.

DEMONSTRATIO.

Sit AMN Sectio conica quæcunque, parabola, ellipsis vel hyperbola. Tab. XVII. Fig. 163. a. Sit focus in O, & in eo centrum virium. Tangat TM sectionem conicam in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis, & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit ob OP & MH parallelas (§. 256 *Geom.*) $POM = x$ (§. 233 *Geom.*); adeoque ob rectos ad P & R, per construct. $MO : OP = MH : MR$ (§. 267 *Geom.*); consequenter $OP = \frac{MO \cdot MR}{MH}$. Est vero MR æqualis semiparametro (§. 418, 438, 504 *Analyf. infin.*), adeoque $= \frac{1}{2}a$, si ea dicatur a . Ergo $OP = \frac{MO \cdot \frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^2 = \frac{MO^2 \cdot a^2}{8MH^2}$. Porro in omni Sectione conica radius osculi $= \frac{4MH^2}{a^2}$ (§. 322, 325, 327 *Analyf. infin.*). Quare cum vis centripeta sit ut $\frac{MO}{PO^2 \cdot MC}$ (§. 657), substitutis valoribus PO^2 & radii osculi MC reperitur ea $\frac{8MO \cdot MH^2 \cdot a^2}{4MO^2 \cdot MH^2 \cdot a^2} = \frac{2}{MO^2 \cdot a^2}$, hoc est,

Tab. ob 2 & a constantes quantitates in XVII. Fig. omni puncto curvæ, = $\frac{I}{MO^2}$ (§. 178. 163. a.

181 Arithm.). Vis igitur centripeta tendens ad focum Sectionis conicæ est reciproce ut quadratum distantiae a foco seu radii vectoris. Q. e. d.

SCHOLIION.

661. Quoniam proprietas hæc Sectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus fluit; ideo conveniens est ut generaliter ex iisdem demonstretur. Mensuram virium centripetarum ut $\frac{MO}{PO \cdot MC}$ superius demonstratam (§. 657) invenit ABRAHAMUS DE MOIVRE, Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum mensuris aliorum, quas quantitates infinite parvæ ingrediuntur, sequente Problemate ostendere lubet.

PROBLEMA CVI.

662. Invenire vim centripetam in qualibet curva.

RESOLUTIO.

Tab. Sit O centrum virium, MO radius XVI. vector, MC radius osculi, & OP ad Fig. tangentem PM perpendicularis. Describatur ex centro virium O, radio vectore MO, arcus infinite parvus MK. Fiat MC = n, MO = x; erit mK = dx. Sit porro MK = dz, & arculus curvæ Mm = ds; tempus vero per arcum Mm = dt. Quoniam hoc est ut sector OMK (§. 652); erit dt = MK. $\frac{1}{2}$ MO seu ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut MK.MO (§. 178 Arithm.), adeoque ut xdz. Porro cum angulus ad P sit re-ctus, per constr. & K re-ctus (§. 38 Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Analys. infin.), &, ob infinite parvum Tab. MOM = 0 (§. 3 Analys. infin.), PMO XVI. = MmK (§. 239 Geom.); erit Fig. Mm : MK = MO : OP 161.

$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Est igitur OP = $\frac{x^2 dz^2}{ds^2}$, & hinc, cum

$$\begin{aligned} \text{Vis centralis} &= \frac{MO}{OP^2 \cdot MC} \quad (\S. 657), \text{ erit ea} \\ &= x : \frac{nx^2 dz^2}{ds^2} \\ &= \frac{ds^2}{nx^2 dz^2} \end{aligned}$$

Est vero dt = xdz per demonstr. & hinc dt² = x²dz²

$$\text{Quare Vis centralis} = \frac{ds^2}{ndzdt^2}$$

Atque hic est character analyticus unus, quem dedit VARIGNONIUS (a).

Aliter.

Quoniam angulus CMR re-ctus (§. 337 Anal. infin.), erit MRm, ab eodem non differens nisi quantitate infinite parva MCR (§. 239 Geom.) itidem re-ctus (§. 4 Anal. infin. & §. 145 Geom.), & ex eadem ratione MmR etiam re-ctus. Quamobrem mR haberi potest pro arculo, radio Mm descripto ex centro M (§. 38 Analys. infin.). Cum adeo sit Mm = MR (§. 40 Geom.); erit RN differentia inter arcum Mm & portionem tangentis MN, seu differentia secunda arculi Mm. Unde si Mm = ds, ut ante, RN = dds. Sit porro ut ante MK = dx, MO = x, adeoque Km = dx:

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1708. p. 28. edit. Bat.

Tab. XVI. $\equiv dx$: tempusculum vero per arcum
 Fig. 161. $Mm \equiv dt$. Cum $MmK + KmC$ sit re-
 ctus (§. 38 *Analys. infin.*), & RNm
 $+ RmN$ itidem rectus (§. 241 *Geom.*);
 sit vero $KmC \equiv RmN$ (§. 156 *Geom.*);
 erit $MmK \equiv RNm$ (§. 91 *Arithm.*).

Est vero præterea NRm rectus, per
demonstr. & MKm itidem rectus (§. 38
Analys. infin.). Quamobrem (§. 207
Geom.)

$$Km : KM = NR : mR$$

$$dx : dz = dds : \frac{dds dz}{dx}$$

Porro cum CMR sit rectus, & Mm
 ad RC perpendicularis, per *demonstr.*
 erit (§. 327 *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$

$$\frac{dds dz}{dx} : ds = ds : \frac{ds^2 dx}{dz dds}$$

$$\text{Est itaque } CM = n = \frac{ds^2 dx}{dds dz}$$

Jam vis centralis ante reperta fuit
 $\frac{ds^3}{ndz dt^2}$. Quare si substituatur valor ra-

dii circuli osculatoris n modo inven-

tus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3 dz dds}{ds dx dz dt^2}$

$= \frac{ds dds}{dx dt^2}$. Atque hæc est formula

altera quam dedit VARIGNONIUS (a).

SCHOLIUM.

663. Quodsi beneficio harum formula-
 rum vis centralis in circulo & sectionibus
 conicis eruere volueris, quemadmodum ante
 factum est: multo difficilius idem fieri in-
 telliges, quam in anterioribus a nobis fac-

(a) In *Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1700*,
 p. 286.

tum est. Sufficit itaque ostendisse, quomo-
 do formula, qua nos usi sumus, in Varigno-
 nianas degeneret.

PROBLEMA CVII.

664. Data lege virium centripeta-
 rum, & concessis quadraturis; invenire
 Trajectoriam in qua mobile incedit.

RESOLUTIO.

Sit in O centrum virium, AC Tra-
 jectoria, AO ejus axis, AL arcus cir-
 culi radio AO descriptus. Ducantur ra-
 dii OL & Ol infinite propinqui, & radius
 OB ac Ob describantur arcus EB &
 eb . Fiat denique $AO = a$, $AL = z$,
 $OE = x$; erit $Ee = BN = dx$, $Ll = dz$,
 & ob sectores similes ObN ac Oll
 (§. 138, 412 *Geom.*).

$$OL : Ll = Ob : bN$$

$$a : dz = x : \frac{x dz}{a}$$

Sit celeritas qua mobile fertur in
 $B = c$, & vis centralis $= v$. Quoniam
 massa mobilis eadem existente sive
 $= 1$, elementum celeritatis dc , quod
 positivum vel negativum esse potest
 prout celeritas vel augetur vel minui-
 tur, est ut elementum temporis in vim
 sollicitantem sive centralem ductam (§.
 113); tempus vero per BN , ob mo-
 tus in spatio infinite parvo æquabili-
 tatem, ut $\frac{dx}{c}$ (§. 39); erit

$$- dc = \frac{v dx}{c}$$

$$- c dc = v dx$$

$$-\frac{1}{2} c^2 = \int v dx$$

hoc

Tab. XVII. Fig. 164. hoc est omiffa quantitate constante $\frac{1}{2}$, cum hic tantummodo rationum habeatur ratio, (§. 187 *Arithm.*), & addita constante homogenea ex lege integrationis (§. 95 *Analys. infin.*)

$$\frac{ab - c^2 = f v dx}{ab - f v dx = c^2}$$

$$\frac{ab - f v dx = c^2}{\sqrt{(ab - f v dx)} = c.}$$

Quoniam motus per Bb in tempusculo infinite parvo peractus æquabilis, erit spatium Bb = c dt (§. 34)

$$\text{adeoque } Bb = dt \sqrt{(ab - f v dx)}$$

$$\text{Sed } dt = BO. bN \text{ (§. 652)}$$

$$= \frac{x^2 dz}{a}$$

$$\text{Ergo } Bb = \frac{x^2 dz \sqrt{(ab - f v dx)}}{a}$$

$$Bb^2 = \frac{x^4 dz^2 (ab - f v dx)}{a^2}$$

$$\text{Jam } BN^2 = dx^2$$

$$bN^2 = \frac{x^2 dz^2}{a^2}$$

$$\frac{Bb^2 = dx^2 + \frac{x^2 dz^2}{a^2}}{= \frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2}}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2 dx^2 + x^2 dz^2}{a^2} = \frac{x^4 dz^2 (ab - f v dx)}{a^2}$$

hoc est, ut observetur lex homogeneorum.

$$\frac{a^2 c^2 dx^2 + a^2 c^2 x^2 dz^2 = x^4 dz^2 (ab - f v dx)}{a^2 c^2 dx^2 = x^4 dz^2 (ab - f v dx) - a^2 c^2 x^2 dz^2}$$

Tab. XVII. Fig. 164.

$$\frac{a^2 c^2 dx^2}{x^4 (ab - f v dx) - a^2 c^2 x^2} = \frac{a^2 c dx}{\sqrt{(ab x^4 - x^4 f v dx - a^2 c^2 x^2)}} = dz$$

$$z = f(a^2 c dx : \sqrt{(ab x^4 - x^4 f v dx - a^2 c^2 x^2)})$$

Hæc est æquatio generalis ad Trajectoriam, in qua mobile data vi centrali v ad punctum O urgetur, & in qua c denotat quantitatem arbitrariam constantem ex lege homogeneorum assumendam.

SCHOLIUM.

665. Equationem hanc generalem ad Trajectoriam invenit Joannes BERNOULLI, Problema inversum de Trajectoriis, in quibus vires centrales sunt reciproce ut quadrata distantiarum, soluturus; ac inde casum hunc specialem non sine artificio deduxit (a): majoris enim artis est solvere Problema in casu speciali, quam generaliter. Ut vero solutionem nostro more cum primis Matheseos principiis perspicue connectamus, Problemata quedam per modum Lemmatum præmittenda sunt.

PROBLEMA CVIII.

666. Invenire equationem ad Parabolam, abscissis a foco computatis.

Tab. XVII. Fig. 163. b.

RESOLUTIO.

Sit in Parabola QO = x, QM = y, parameter = p; erit AO = $\frac{1}{2}p$ (§. 396 *Analys. fin.*); adeoque AQ = $\frac{1}{2}p + x$, consequenter $y^2 = \frac{1}{2}p^2 + px$ (§. 388 *Analys. fin.*). Q. e. i. & d.

PROBLEMA CIX.

667. Invenire equationem ad Ellipsin, abscissis a foco computatis.

Y 2

RESO-

(*) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 691. & seqq.

Tab.
XVII.
Fig.
165.

RESOLUTIO.

Sit in F focus Ellipsis & in C centrum. Fiat $AB = m$, parameter $= p$, $FP = x$; erit $FA = \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)}$ (S. 427 *Analys. fin.*); adeoque
 $AP \approx \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x$
 $PB \approx \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} + x$

$AP \cdot PB = \frac{1}{4}pm - 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2$
 Jam ex natura Ellipseos (S. 420 *Analys. fin.*),

$$y^2 : \frac{1}{4}pm - 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - x^2 = p : m$$

Ergo

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m} \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)} - \frac{px^2}{m}. \quad Q. e. i. \& d.$$

PROBLEMA CX.

Tab.
XVII.
Fig.
163. b.

668. Invenire equationem ad Hyperbolam, abscissis a foco computatis.

RESOLUTIO.

Sit focus Hyperbolæ in O, centrum C, axis dimidius transversus CA. Sit $2AC = m$, parameter $= p$, $OQ = x$, $QM = y$; erit $AO = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m$ (S. 463 *Anal. fin.*); adeoque
 $AQ = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} - \frac{1}{2}m + x$
 $AQ + 2AC = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{1}{2}m + x$

$$AQ (AQ + 2AC) = \frac{1}{4}pm + 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2$$

Quare, cum sit ex natura Hyperbolæ (S. 459 *Analys. fin.*),

$$y^2 : \frac{1}{4}pm + 2x \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + x^2 = p : m$$

erit

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m} \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm)} + \frac{px^2}{m}$$

Q. e. i. & d.

PROBLEMA CXI.

669. Invenire Trajectoriam in qua Tab.
mobile incedit, si vis centripeta qua XVII.
urgetur fuerit reciproce in ratione du- Fig.
plicata radii vectoris. 164.

RESOLUTIO.

Quoniam in solutione generali radium vectorem diximus x , erit vis centralis $v = \frac{1}{x^2} = \frac{a^2 g}{x^2}$, servata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali substitui possit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (S. 664) in casu generali; =

$$a^2 c^2 dx$$

$\sqrt{(abx^2 - x^4)} \int dx = a^2 c^2 x^2$
 erit idem in casu speciali

$$a^2 c^2 dx$$

$$x \sqrt{(abx^2 - x^4)} \int \frac{a^2 g dx}{x^2} = a^2 c^2$$

$$\text{Sed } \int \frac{a^2 g dx}{x^2} = \int a^2 g x^{-2} dx = a^2 g x^{-1}$$

$$\text{Quare } dz = \frac{a^2 c^2 dx}{x \sqrt{(abx^2 + a^2 gx - a^2 c^2)}}$$

Cum dz , sive Ll , sit elementum arcus a forma ordinaria discédens; ut ad eam reducat, fiat

$$x = \frac{a^2}{y}$$

$$\text{erit } dz = -\frac{a^2 dy}{y^2}, \& x^2 = \frac{a^2}{y^2}$$

adeoque

Tab. XVII. Fig. 164.

$$\begin{aligned} \text{adeoque } dz &= - \frac{a^2 c^2 dy : y^2}{\frac{a^2}{y} \sqrt{\left(\frac{a^2 b}{y^2} + \frac{a^2 g}{y} - a^2 c^2\right)}} \\ &= - \frac{a^2 c^2 dy}{a^2 y \sqrt{\left(\frac{a^2 b}{y^2} + \frac{a^2 g}{y} - a^2 c^2\right)}} \\ &= - \frac{a^2 c^2 dy}{a^2 \sqrt{(a^2 b + a^2 g y - c^2 y^2)}} \\ &= - \frac{ac^2 dy}{\sqrt{(a^2 b + a^2 g y - c^2 y^2)}} \end{aligned}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2 g}{2c^2} - t^2$

erit $y^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^2 g t^2}{c^2} + t^4$

adeoque $-c^2 y^2 = -\frac{a^4 g^2}{4c^2} + a^2 g t^2 - c^2 t^4$

$a^2 g y = \frac{a^2 g^2}{2c^2} - a^2 g t$
 $dy = - dt$

Unde tandem habetur

$$dz = \frac{acdt}{\sqrt{(a^2 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} - c^2 t^2)}}$$

Fiat denique $a^2 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} = c^2 b^2$

erit $dz = \frac{acdt}{c \sqrt{(b^2 - t^2)}}$
 $\frac{dz}{a} = \frac{dt}{\sqrt{(b^2 - t^2)}}$
 $= \frac{1}{b} \frac{bdt}{\sqrt{(b^2 - t^2)}}$

Habemus adeo elementum circuli $\frac{bdt}{\sqrt{(b^2 - t^2)}}$, cujus radius b , sinus rectus t (§. 153 *Anal. infin.*), per radium b divisum, & $\frac{dz}{a}$ est itidem ele-

mentum circuli Ll per radium LO divisum vi denominationis in solutione generali (§. 664) facta. Jam dato radio datoque arcu, datur angulus (§. 57 *Geom.*), atque adeo ratio arcus ad radium; consequenter arcus per radium divisus (§. 129 *Aritbm.*), exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LOl , & $\int \frac{dz}{a}$ angulum AOL ; pariterque $\frac{bdt}{b\sqrt{(b^2 - t^2)}}$ angulum priori LOl , & $\int \frac{bdt}{b\sqrt{(b^2 - t^2)}}$ alium posteriori AOL æqualem, cujus radius b , sinus rectus t . Unde jam fluit constructio curvæ ABC istiusmodi.

Tab. XVII. Fig. 164.

Radio $b = \sqrt{\left(\frac{a^2 b}{c^2} + \frac{a^2 g^2}{4c^4}\right)}$ describatur Quadrans MKT , sumtoque arcu $AL = z$, pro arbitrio, ducatur recta OL secans quadrantem istam in K , erit arcus $KM = \int \frac{bdt}{\sqrt{(b^2 - t^2)}}$, & $Kl = t$.

Jam porro inveniri potest radius OB five OE . Quoniam enim

$$y = \frac{a^2 g}{2c^2} - t = \frac{a^2 g - 2c^2 t}{2c^2}$$

& $x = \frac{a^2}{y}$

erit $x = \frac{2a^2 c^2}{a^2 g - 2c^2 t}$

$$= \frac{2c^2}{g - 2 \frac{c^2 t}{a^2}}$$

Est igitur $a : c = c : \frac{c^2}{a}$, & $a : t = \frac{c^2}{a} : \frac{c^2 t}{a^2}$, ac denique $g - 2 \frac{c^2 t}{a^2} : c = c : \frac{c^2}{g - 2c^2 t : a^2}$

Tab. XVII. Fig. 164. Quodsi recta OB hoc modo inventa, ex centro O describatur arcus EB; interfecabit is radium OL in B, eritque punctum B in Trajectoria quaesita.

PROBLEMA CXII.

670. Invenire aequationem ad Trajectoriam, in qua vires centripetae sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium.

RESOLUTIO.

Tab. XVII. Fig. 167. Sit $OQ = \frac{a^2 g}{2c^2}$, & $OP = t$; erit $PQ = \frac{a^2 g}{2c^2} - t = y$ (§. 669). Quoniam

$OB = z = \frac{a^2}{y}$; si intra asymptotos QO & QR describatur Hyperbola GNV, latere potentiae existente = a (§. 489 *Analys. finit.*) erit $PN = x$ (§. 488 *Analys. finit.*). Fiat jam $OF = x$, $FB = y$; reliqua sint ut ante; erit (§. 268 *Geom.*)

$$OP : OS = OF : OB$$

$$t : b = x : \frac{bx}{t}$$

Sed $OB = \frac{2a^2 x^2}{a^2 g - 2c^2 t}$ (§. 669).

Ergo $\frac{bx}{t} = \frac{2a^2 x^2}{a^2 g - 2c^2 t}$

$$a^2 g b x - 2c^2 b t x = 2a^2 c^2 t^2$$

$$a^2 g b x = 2c^2 b t x + 2a^2 c^2 t^2$$

$$\frac{a^2 g b x}{2c^2 b t x + 2a^2 c^2 t^2}$$

Porro (§. cit. *Geom.*)

$$OP : PS = OF : FB$$

$$t : \sqrt{(b^2 - t^2)} = x : y$$

$$x \sqrt{(b^2 - t^2)} = t y$$

$$b^2 x^2 - t^2 x^2 = t^2 y^2$$

$$b^2 x^2 = t^2 x^2 + t^2 y^2$$

$$\frac{b^2 x^2}{x^2 + y^2} = t^2$$

Est vero etiam per demonstrata.

$$t^2 = \frac{a^4 g^2 b^2 x^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^2 b x + 4c^4 b^2 x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{b^2 x^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^4 g^2 b^2 x^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^2 b x + 4c^4 b^2 x^2}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{a^4 g^2}{4a^4 c^4 + 8a^2 c^2 b x + 4c^4 b^2 x^2}$$

$$4a^4 c^4 + 8a^2 c^2 b x + 4c^4 b^2 x^2 = a^4 g^2 x^2 + a^4 g^2 y^2$$

$$y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^2 b x}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Quæ est æquatio ad Trajectoriam quaesitam. Cum ea sit quadratica, erit ad Sectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in Trajectoria urgeatur a vi centripeta, quæ est reciproce ut quadratum distantiae a centro virium; erit Trajectoria ista aliqua Sectio conica.

Ut appareat, ad quamnam Sectionem conicam sit æquatio; comparetur ea cum æquationibus singularum sectionum conicarum, quas ante reperimus, abscissis loco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter = p, (§. 666)

$$y^2 = \frac{1}{2} p^2 + p x^2$$

Æqua-

Tab. XVII. Fig. 167.

Tab. XVII. demonstr. *Æquatio vero ad Trajectoriam per*

Fig. 167.
$$y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^2 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Ob deficientem in Parabola secundum terminum, erit

$$\frac{4c^4 b^2}{a^2 g^2} - 1 = 0$$

$$4c^4 b^2 = a^2 g^2$$

$$b^2 = \frac{a^2 g^2}{4c^4}$$

$$b = \frac{a^2 g}{2c^2}$$

Est vero per constructionem, $b = OT = OS$, & $\frac{a^2 g}{2c^2} = OQ$.

Trajectoria igitur Parabola est, si $OT = OQ$.

In calculo sumimus.

$$b = \sqrt{\left(\frac{a^2 b}{c^2} + \frac{a^2 g^2}{4c^4}\right)}$$

in casu Parabola:

$$\frac{a^2 b}{c^2} = 0;$$

adeoque $b = 0$.

$$p = \frac{8c^4 b}{a^2 g^2}$$

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$= \frac{8c^4 a^2 g}{2a^2 c^2 g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$= \frac{4c^2}{g}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo Parabolæ est tertia proportionalis ad g & $2c$.

Æquatio pro Ellipsi, abscissis a foco computatis, est (§. 667),

Fig. 167.
$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm\right)} + \frac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam per demonstrata

$$y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^2 g^2} + \frac{8c^4 bx}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo eadem, quæ in Parabola.

Porro
$$\frac{p}{m} = \frac{4c^4 b^2}{a^2 g^2} - 1$$

hoc est
$$1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4 b^2}{a^2 g^2}$$

$$a^2 g^2 - \frac{4a^2 c^2 g}{m} = 4c^4 b^2$$

$$b^2 = \frac{a^2 g^2}{4c^4} - \frac{a^2 g}{mc^2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a^2 g^2}{4c^4} - \frac{a^2 g}{mc^2}\right)}$$

In Ellipsi adeo $\frac{a^2 g}{2c^2} > b$.

hoc est, $OQ > OT$.

Quodsi ulterius desideretur valor ipsius m , fiat

$$= \frac{2p}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{8c^4 b}{a^2 g^2}$$

hoc

Tab.
XVII.
Fig.
167.

hoc est,
$$\frac{8c^2}{mg} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g}\right)} = \frac{8c^4b}{a^2g^2}$$

$$\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2m}{g} = \frac{m^2c^4b^2}{a^4g^2}$$

$$\frac{1}{4}m^2 - \frac{c^2}{g} = \frac{mc^4b^2}{a^4g^2}$$

$$\frac{a^4g^2m - 4a^4c^2g}{4a^4c^2g} = \frac{4mc^4b^2}{4a^4c^2g}$$

$$m = \frac{4mc^4b^2}{a^4g^2 - 4c^4b^2}$$

Æquatio pro Hyperbola abscissis a foco computatis est (§. 668).

$$y^2 = \frac{px^2}{m} + \frac{2px}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} + \frac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad Trajectoriam est

$$y^2 = \frac{4c^4b^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4bx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$\frac{1}{2}p = \frac{2c^2}{g}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Eadem ergo parameter in Hyperbola, quæ in ceteris Sectionibus conicis.

$$\frac{p}{m} = \frac{4c^4b^2}{a^4g^2} - 1$$

hoc est
$$\frac{4c^2}{gm} = \frac{4c^4b^2 - a^4g^2}{a^4g^2}$$

$$\frac{4a^4c^2g^2}{4a^4c^2g^2} = \frac{4c^4b^2gm - a^4g^2m}{4a^4c^2g^2}$$

$$\frac{4a^4c^2g^2 + a^4g^2m}{4a^4c^2g^2 + a^4g^2m} = \frac{4c^4b^2gm}{4a^4c^2g^2 + a^4g^2m}$$

$$\frac{4a^4c^2g + a^4g^2m}{4a^4m} = b^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{c^2m}\right)} = b$$

Jam cum $QO = \frac{a^2g}{2c^2}$ & $TO = b$, sit

que $\frac{a^2g}{2c^2} < b$; erit $QO < TO$, quando

Trajectoria Hyperbola.

Si ulterius desideretur valor ipsius m , fiat

$$\frac{2p}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{8c^4b}{a^2g^2}$$

hoc est, ob $p = \frac{4c^2}{g}$,

$$\frac{8c^2}{gm} \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{8c^4b}{a^2g^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm\right)} = \frac{mc^2b}{a^2g}$$

$$\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm = \frac{m^2c^4b^2}{a^4g^2}$$

$$m + p = \frac{4mc^4b^2}{a^4g^2}$$

hoc est, $m + \frac{4c^2}{g} = \frac{4mc^4b^2}{a^4g^2}$

$$\frac{a^4g^2m + 4a^4c^2g}{4a^4c^2g} = \frac{4mc^4b^2}{4a^4c^2g} - \frac{a^4g^2m}{4a^4c^2g}$$

$$\frac{4a^4c^2g}{4c^4b^2 - a^4g^2} = m$$

Quodli, datis m & p per literas assumptas b, c, g & a , harum valores desiderentur per m & p ; æquationum reductione facta faciliè determinantur.

Est enim $p = \frac{4c^2}{g}$ $b = \frac{a^2g}{2c^2}$

$$g = \frac{4c^2}{p}$$

$$c^2 = \frac{a^2g}{2b}$$

$$\frac{1}{2}pg = \frac{a^2g}{2b}$$

$$p = \frac{2a^2}{b}$$

$$b = \frac{2a^2}{p}$$

Si ergo p datur & c pro arbitrio assumitur, cum in omni Sectione conica sit $p = 4c^2 : g$, valor ipsius g omni Sectioni conicæ respondet. Ast cum in Parabola tantummodo sit $b = a^2 g : 2c^2$; valor ipsius b per a & p determinatus Parabolæ proprius. Unde si valores quantitatum g & b modo repertos substituas in æquatione ad Trajectoriam, in æquationem ad Parabolam, abscissis à foco computatis, eadem degenerat. Nimirum æquatio ad Trajectoriam

$$y^2 = \frac{4c^4 b^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 b x}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Porro

$$g = \frac{4c^2}{p} \quad b = \frac{2a^2}{p}$$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4 b^2}{a^4 g^2} = \frac{16a^4 c^4 p^2}{16a^4 c^4 p^2} = 1$$

Coëfficiens itaque ipsius $x^2 = 1 - 1 = 0$: atque adeo hic terminus in æquatione, quæ quaeritur, deficit.

$$\frac{8c^4 b}{a^2 g^2} = \frac{16a^2 c^4 p^2}{16a^2 c^4 p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4 p^2}{16c^4} = \frac{1}{4} p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \frac{1}{4} p^2$, quæ est ad Parabolam, abscissis à foco computatis (§. 666.).

Quodsi valor ipsius b in Ellipsi vel Hyperbola desideretur, in æquationibus.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

$$b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} - \frac{a^4 g}{mc^2} \quad \& \quad b^2 = \frac{a^4 g^2}{4c^4} + \frac{a^4 g}{mc^2}$$

substituendus est valor ipsius g . Nimirum

$$g = \frac{4c^2}{p} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo

$$b^2 = \frac{16a^4 c^4}{4c^4 p^2} - \frac{4a^4 c^2}{mpc^2} = \frac{4a^4}{p^2} - \frac{4a^4}{mp} \\ = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2}$$

$$b = \frac{2a^2}{p} \sqrt{1 + \frac{p}{m}}$$

Si denique valor ipsius b desideretur, in æquatione $a^3 b + \frac{a^4 g^2}{4c^2} = ch^2$ substituendus est valor ipsius g^2 & b^2 .

In Parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad b^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

$$\text{Unde } a^3 b + \frac{16a^4 c^4}{4c^2 p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$$

$$\text{h. e. } a^3 b + \frac{4a^4 c^2}{p^2} = \frac{4a^4 c^2}{p^2}$$

$$a^3 b = 0$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam supra reperimus.

In Hyperbola

$$b^2 = \frac{4a^4 m + 4a^4 p}{mp^2} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Z

Ergo

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$\frac{dv dt dx - t dv ddx}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dv dt dx = t dv ddx}{dx^2}$$

$$\frac{dt dx}{ddx} = t$$

Est vero $dt = dy$ (§. cit. *Analys. infin.*)

$$\text{Ergo } t = \frac{dy dx}{ddx}$$

Substituatur hic valor in expressione radii osculi seu evolutæ $MC = t dv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dv dy dx}{dx ddx} = \frac{dy dv}{ddx}$$

Porro $CMR + RMm$ est rectus (§. 317 *Analys. infin.*), & $PMC + CMR$ itidem rectus, ob MR & Pp perpendiculares ad pR alteri PM parallelam (§. 230 *Geom.*). Quamobrem $CMR + RMm = PMC + CMR$ (§. 145 *Geom.*), adeoque $RMm = PMC$ (§. 91 *Arith.*). Est vero $PMC = OMN$ (§. 156 *Geom.*). Ergo $RMm = OMN$ (§. 87 *Arithm.*). Quoniam præterea anguli O & R recti sunt per constr. erit (§. 267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : MO$$

$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}$$

Denique cum fit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2PM \cdot MN}{MC}$$

$$\text{hoc est, } \frac{dy dv}{ddx} : a = 2y : \frac{2 ay ddx}{dy dv}$$

$$\text{habebimus ob } \frac{2PM \cdot MN}{MC} + MO = MN$$

$$\text{per demonstrata, } \frac{2 ay ddx}{dy dv} + \frac{adx}{dv} = a$$

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$2 ay ddx + ady dx = ady dv$$

$$2 y ddx + dy dx = dy dv$$

Quodsi coefficientis 2 abesset, summa membri primi foret $y dx$. Sed si integrabile fieri debet, dividendum est per $2\sqrt{y}$: quo facto prodit

$$\frac{2 y ddx + dy dx}{2\sqrt{y}} = \frac{dy dv}{2\sqrt{y}}$$

$$dx \sqrt{y} = dv \sqrt{y}, \text{ quia } dv \text{ constans.}$$

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv sit differentiale arcus, dx abscissæ; adjicienda est quantitas constans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $- dv \sqrt{a}$. Habemus adeo

$$dx \sqrt{y} = dv \sqrt{y} - dv \sqrt{a}$$

$$y dx^2 = y dv^2 - 2 dv^2 \sqrt{ay} + a dv^2$$

$$\text{Sed } dv^2 = dx^2 + dy^2$$

Ergo

$$y dx^2 = y dx^2 + y dy^2 - 2 dx^2 \sqrt{ay} - 2 dy^2 \sqrt{ay} + a dx^2 + a dy^2$$

$$2 dx^2 \sqrt{ay} - a dx^2 = y dy^2 + a dy^2 - 2 dy^2 \sqrt{ay}$$

$$dx \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy \sqrt{y - dy \sqrt{a}} = dy (\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy (\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$$

$$\text{Fiat } z = 2\sqrt{ay} - a$$

$$\text{erit } dz = \frac{dy \sqrt{a}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{dz \sqrt{y}}{a} = dy$$

$$\text{Jam } z = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{y} - a$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

Z 2

five

Tab.
XVII.
Fig.
168.

$$\text{five } \frac{z+a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$$

$$\text{Porro } \frac{z}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$$

$$\text{Icu } \frac{z-a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$$

Quodsi ergo valores hastenus inventi substituuntur in formula

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$$

$$dx = \frac{dz(z+a)(z-a)}{4a\sqrt{a}\sqrt{z}}$$

$$= \frac{(z^2 - a^2) dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a} = \frac{z^2 dz - a^2 dz}{\sqrt{z}}$$

$$= z^{3/2} dz - a^2 z^{-1/2} dz$$

$$4ax\sqrt{a} = \frac{2}{5} z^{5/2} - 2a^2 z^{1/2}$$

$$2ax\sqrt{a} = \frac{1}{5} (z^2 - 5a^2) \sqrt{z}$$

$$\text{Jam } z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

Quamobrem

$$10ax\sqrt{a} = (4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2) \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a) \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

Sit $x = 0$; erit

$$2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$$

$$2y - 2\sqrt{ay} = 2a$$

$$y - \sqrt{ay} = a$$

$$\frac{1}{2}a \quad \frac{1}{2}a$$

$$y - \sqrt{ay} + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

$$\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$2y = 3a + a\sqrt{5} = 2AB$$

Fiat $y = 0$,

erit $5ax = -2a\sqrt{a^2}$

$$x = -\frac{2}{5}a$$

Curva igitur KMB continuatur ultra punctum B. Nimirum si fiat $AD = a$ & erecta perpendiculari $CD = \frac{2}{5}a$; curva huic in puncto C occurrit.

Quoniam curva verticalem ad angulos rectos secat, ubi differentiale semiordinatae = 0; ut punctum reperitur, in quo curva rectam AB secat ad angulos rectos, fiat $dy = 0$, erit ob

$$dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)} = 0$$

$$2a\sqrt{ay} - a^2 = 0$$

$$2\sqrt{ay} = a$$

$$4ay = a^2$$

$$y = \frac{1}{4}a$$

Quamobrem si fiat $AG = \frac{1}{4}a$, curva secabit AB in G ad angulos rectos.

PROBLEMA CXIV.

673. Invenire curvam, in qua mobile descendens eandem quidem constantem eadem si premis, sed qua non equalis est ponderi absoluto.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in Problemate precedente, nisi quod vis premens dicatur b. erit. (§. 672)

$$\frac{2aydx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = b$$

$$2aydx + adydx = bdydv$$

$$\frac{2aydx + adydx}{2\sqrt{y}} = \frac{bdydv}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y} = bdy\sqrt{y} - ady\sqrt{a}$$

Tab.
XVII.
Fig.
169.

$$a^2 y dx^2 = b^2 y dv^2 - 2 ab dv^2 \sqrt{ay} + a^3 dv^2$$

$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2 y dx^2 = b^2 y dy^2 + b^2 y dx^2 - 2 ab dy^2 \sqrt{ay} - 2 ab dx^2 \sqrt{ay} + a^3 dy^2 + a^3 dx^2$$

$$a^2 y dx^2 - b^2 y dx^2 + 2 ab dx^2 \sqrt{ay} - a^3 dx^2 = b^2 y dy^2 - 2 ab dy^2 \sqrt{ay} + a^3 dy^2$$

$$dx \sqrt{(a^2 y - b^2 y + 2 ab \sqrt{ay} - a^3)} = dy (b \sqrt{y} - a \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy (b \sqrt{y} - a \sqrt{a})}{\sqrt{(a^2 y - b^2 y + 2 ab \sqrt{ay} - a^3)}}$$

Fiat $b=0$, erit

$$dx = \frac{ady \sqrt{a}}{\sqrt{(a^2 y - a^3)}} = \frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$

$$x = 2 \sqrt{(ay - a^2)}$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

Est igitur in hoc casu curva, per quam mobile descendit, Parabola, cujus parameter $= 4a$. Quando vero $b=0$, perinde est ac si mobile in vacuo libere descendit. Quamobrem consensus Hypothesium presentium cum curva descensus Galileana patet (§. 482).

SCHOLIUM.

674. Monuit jam VARIGNONIUS (a) eandem Solutionem ad alia Problemata similia extendi posse: quod quomodo fiat, sequente Problemate ostendere lubet.

PROBLEMA CXV.

Tab. XVII. 168. 675. Invenire curvam, qua a ponere in ea descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum PM.

RESOLUTIO.

Si omnia sint ut in antecedentibus, erit per hypothes.

$$\frac{2 ay ddx + adx dy}{dy dv} = \frac{y^2}{a^{n-1}} \quad (\S. 672)$$

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 196.

$$2 y ddx + dx dy = y^n a^{-n} dv dy$$

$$\frac{2 y ddx + dx dy}{2 \sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{n-1.2} a^{-n} dv dy$$

$$dx \sqrt{y} = \frac{y^{n+1.2} dv}{(2n+1)a^2} = \frac{y^n dv \sqrt{y}}{(2n+1)a^2}$$

$$(2n+1) a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 = y^{2n} dv^2 = y^{2n} dx^2 + y^{2n} dy^2$$

$$(2n+1)^2 a^{2n} dx^2 - y^{2n} dx^2 = y^{2n} dy^2$$

$$dx \sqrt{(a^{2n} (2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n} (2n+1)^2 - y^{2n})}}$$

Quodsi jam fuerit $n=1$, adeoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile descendit, consequenter in ratione duplicata celeritatum (§. 86): erit

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{(9a^2 - y^2)}}$$

$$x = \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

Fiat $y=0$, relinquetur $\sqrt{9a^2} = 3a$, consequenter (§. 109 Anal. infin.)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2 - y^2)}$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Est ergo curva quaesita circulus, cujus radius est $3a$.

Sit $n=2$, hoc est, prematur curva in ratione duplicata altitudinum descensus, seu quadruplicata celeritatum (§. 86): erit

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(25a^4 - y^4)}}$$

Qua

Quæ est æquatio ad Curvam Elasticam Bernoullianam (a).

Sit $n = \frac{1}{2}$, hoc est, prematur curva in ratione subduplicata altitudinum, seu in ratione celeritatum (§. cit.); erit

$$dx = \frac{y^{1/2} dy}{\sqrt{4a-y}}$$

$$dx^2 = \frac{y dy^2}{4a-y}$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= dv^2 = \frac{y dy^2}{4a-y} + dy^2 \\ &= \frac{y dy^2 + 4a dy^2 - y dy^2}{4a-y} \\ &= \frac{4a dy^2}{4a-y} \end{aligned}$$

$$dv = \frac{2 dy \sqrt{a}}{\sqrt{4a-y}} = \frac{2 a dy}{\sqrt{4a^2 - ay}}$$

$$v = -4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Fiat $y=0$, erit residuum $= -8a$, adeoque

$$v = 8a - 4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

Quodsi diameter circuli HB $= 4a$,

HI $= y$, erit IB $= 4a - y$.

Quare IB² $= 16a^2 - 8ay + y^2$

$$IN^2 = 4ay - y^2$$

(§. 377 Anal. fin.)

Tab.
XVII.
Fig.
166.

$$BN^2 = 16a^2 - 4ay$$

$$BN = 2 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

$$2BN = 4 \sqrt{(4a^2 - ay)}$$

= arcui Cycloidis BM (§.

168 Anal. infin.)

$$2BH = BM + AM$$

$$8a = BMA$$

$$8a - 4 \sqrt{(4a^2 - ay)} = \text{arcui AM.}$$

Atque adeo patet curvam, quæ a mobili descendente prematur in ratione celeritatum, seu altitudinum subduplicata, esse Cycloidem ordinariam.

COROLLARIUM.

676. Quodsi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$, & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem est $dx = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{4a-y}}$. Quare

si diameter circuli genitoris fuerit $= a$, reliqua maneant ut ante; æquatio ad Cycloidem est $dx = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} = \frac{y dy}{\sqrt{ay - y^2}}$

consequenter area Cycloidis APM $= \int \frac{y dy}{\sqrt{ay - y^2}}$

C A P U T XIV.

De Resistentiâ Medii.

DEFINITIO LXX.

677. **P**ER Resistentiâ medii intelligitur resistentia fluidi, per quod mobile fertur.

(a) In Actis Eruditorum A. 1694. P. 271. & A. 1695. P. 531.

COROLLARIUM.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus resistit, loco pellere tenetur, arque adeo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, massa quippe manente eadem, minuitur (§. 22).

PRO-

Tab.
XVII.
Fig.
166.

PROBLEMA CXVI.

Tab. XVII. Fig. 169. 679. *Data celeritate mobilis in medio resistente motu aquabili lati; invenire celeritatem dato tempore amissam, spatium confectum, & curvam resistentia, in qua semiordinatae sunt ut celeritates amissa.*

RESOLUTIO.

Sit AB celeritas, qua mobile initio fertur = a , ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP = x amissas, PN celeritas amissa = r ; erit NM celeritas residua, quæ dicatur v . Sit jam pm alteri PM infinite propinqua; erit NK differentia positiva semiordinatarum PN & pn , seu celeritatum extinctarum = dr , eademque differentia negativa semiordinatarum NM & nm seu celeritatum residuarum = $-dv$. Unde resultat

$$I. dr = -dv.$$

Tab. XVII. Fig. 170. Sit porro curva ESI, cujus ordinatæ PS sunt ut NK (Fig. 169), seu legem resistentiæ exponunt. Quod si ergo NK divides per PS, quotus erit quantitas constans; perinde enim fere est, ac si eandem quantitatem divides per se ipsam. Sit PS = z . Quoniam NK = $\frac{dv}{dx}$, per demonstrata; erit $\frac{NK}{PS} = \frac{dv}{z dx}$. Jam cum $Pp = dx$; quia AP perinde ac in curva præcedente tempus exponit, sit constans; erit per legem homogeneorum.

$$\frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$II. -adv = zdx$$

Sit denique spatium a mobili tempusculo dx percursum = ds . Quoniam idem est vdx (§. 34), erit $ds = vdx$

adeoque III. $s = \int vdx$

SCHOLIUM.

680. *Ex formulis hisce generalibus, quas dedit VARIGNONIUS (a), deducuntur quæ de resistentia medii in hypothesis specialibus a WALLISIO, NEWTONO, HUGENIO, atque LEIBNITIO inventa sunt: quemadmodum ex sequentibus patebit.*

THEOREMA CXLII.

681. *Si mobile motu aquabili fertur per medium in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; curva resistentia totalis ANG est Logarithmica, cujus asymptotus tempus, semiordinata ad ipsum relata celeritates residuas representant.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobile resistitur in ratione celeritatum per hypothesis, seu celeritates in instanti amissæ sunt ut celeritates; si omnia sint ut in Problemate præcedente (§. 679): erit $z = v$. Est vero $-adv = zdx$, vi num. II. (§. cit.). Ergo $-adv = vdx$; consequenter $a = \frac{vdx}{dv}$. Est vero

$\frac{vdx}{dv}$ subtangens curvæ, cujus abscissæ sunt x , semiordinatæ descendentes v (§. 20 Anal. infin.). Ergo subtan-

(a) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. P. m. 503.

Tab. tangens curvæ resistantiæ totalis ANG
XVII constans est. Ipsa adeo est Logarithmica,
Fig. cujus asymptotus BF (§. 54 Anal.
169. *infin.*). Repræsentat autem BF tempus,
& semiordinatæ ad ipsum relatæ
exprimunt celeritates residuas à resi-
stentia mediæ. Q. e. d.

S C H O L I O N.

682. Si quis dubitet hanc esse Logarithmicæ proprietatem propriam, quod subtangens sit constans: hæc difficulter idem demonstratur. Sint enim z & y duæ semiordinatæ, & x ipsis respondentes abscissæ: erunt subtangentes $\frac{ydx}{dy}$ & $\frac{zdv}{dz}$, adeoque $ydx : dy = a$, & $zdv : dz = a$ (§. 54 Anal. *infin.*), consequenter $ydx : dy = zdv : dz$ (§. 87 Arithm.) Quoniam differentiale abscissæ sumitur constans; erit $dx = dv$, consequenter $y : dy = z : dz$ (§. 183 Arithm.), adeoque $y + dy : y = z + dz : z$ (§. 190 Arithm.). Habemus adeo semiordinatas in proportione geometrica. Jam ipsis respondentes abscissæ $x + dx$ & x , atque $v + dv$ & v , ob $dx = dv$, sunt equi-differentes (§. 322 Arithm.). Abscissis adeo equi-differentibus respondent semiordinatæ in geometrica progressionem; consequenter curvæ constantis subtangentiæ est Logarithmica (§. 552 Anal. *fin.*). Ceterum ANG dicitur curvæ resistantiæ totalis, ad differentiam curvæ resistantiæ instantaneæ, in qua semiordinatæ sunt ut celeritates in instanti amissæ.

THEOREMA CXLIII.

683. Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum, & tempora sumantur æqualia; erunt celeritates in principiis singulorum temporum in pro-

gressione geometrica, & partes singulis Tab. temporibus amissæ erunt iisdem propor- XVII
Fig. tionales, seu ut totæ, vel etiam ut celeritates in fine illorum temporum. 169.

D E M O N S T R A T I O.

Si enim mobili a medio per quod motu æquabili fertur, resistitur in ratione celeritatum; curvæ resistantiæ ANG Logarithmica est, cujus asymptotus BF tempus repræsentat, abscissæ vero NM celeritates residuas exhibent (§. 681). Quodsi ergo tempora sumantur æqualia, celeritates in principiis temporum sunt in geometrica progressionem (§. 552 Anal. *fin.*) Quod erat unum.

Quodsi fiat $BM = MR$, tempora; quibus amittuntur celeritates AO & NV, æqualia sunt. Est vero $AB : NM = NM : TR$, per demonstr. Ergo $AB - NM : AB = NM - TR : NM$ (§. 193 Arithm.); hoc est, $AO : AB = NV : NM$; consequenter $AO : NV = AB : NM$ (§. 173 Arithm.), seu celeritates temporibus æqualibus amissæ sunt ut totæ in principiis illorum temporum. Quod erat secundum.

Quoniam $AB : NM = NM : TR$ per demonstr. erit etiam $AB - NM : NM = NM - TR : TR$ (§. 193 Arithm.); hoc est, $AO : NM = NV : TR$, consequenter $AO : NV = NM : TR$ (§. 173 Arithm.), seu celeritates temporibus æqualibus BM & MR amissæ, sunt ut celeritates NM & TR in fine illorum temporum. Quod erat tertium.

Tab. XVII. Fig. 169. *Ultimum quoque ita ostenditur.*
 $AO : NV = AB : NM$, per num. 2. &
 $AB : NM = NM : TR$, per num. 1. Er-
 go $AO : NV = NM : TR$ (§. 167
Arithm.) *Q. e. d.*

THEOREMA CXLIV.

684. *Si mobile motu æquabili per medium fertur in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; spatia singulis temporibus descripta sunt ut celeritates amissa, & si tempora sumantur æqualia, ut celeritates tota in principio vel in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia sint ut in Problemate generali (§. 679); erit — $adv = zdx$, vi num. II. & $vdx = ds$, vi num. III. Est vero $z = v$ per hypoth. Ergo — $adv = vdx$ (§. 15 *Arithm.*); consequenter $ds = —adv$ (§. 87 *Arithm.*). Est igitur $s = a^2 — av$ (§. 95 *Anal. infinit.*), seu, ob constantem a , est s ut $a — v$ (§. 181 *Arithm.*). Sed $a — v$ est celeritas a mobili tempore x amissa. Quamobrem spatia sunt ut celeritates amissæ. *Quod erat unum.*

Quod si tempora sumantur æqualia, celeritates amissæ sunt ut totæ in principio, vel fine illorum temporum (§. 683). Sunt vero etiam ut celeritates amissæ istis temporibus, ita spatia movendo iisdem confecta per demonstrat. Ergo eadem spatia sunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167 *Arithm.*) *Q. e. d.*

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA CXLV.

685. *Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum resistitur, & tempora sumantur æqualia seu in progressionem arithmetica; erunt celeritates in instanti, seu tempusculo infinite parvo, amissa ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Curva enim resistentiæ Logarithmica est, cujus asymptotus tempora, semiordinatæ ad eandem relatæ celeritates in fine illorum temporum representant (§. 681). Quare si tempora sint x & t , semiordinatæ ipsis respondententes y & z ; erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (§. 54 *Anal. infin.*); consequenter cum tempora sumantur in progressionem arithmetica, per hypoth. fitque adeo $dx = dt$ (§. 333 *Arithm.*) $y : dy = z : dz$. Est itaque $y : z = dy : dz$ (§. 173 *Arithm.*), hoc est, celeritates in fine temporum istorum y & z sunt ut celeritates in instanti inde amissæ dy & dz . *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

686. Quoniam in curva resistentiæ Tab. XVII. instantaneæ ESI , abscissa EP est ut tempus, semiordinata PS ut celeritas in instanti amissa (§. 682); PS vero est celeritas in fine temporis EP mobili residua Fig. 170. (§. 685), & in curva resistentiæ totalis abscissis, tanquam temporibus, respondent semiordinatæ, tanquam celeritates istis amissæ (§. 682); curva resistentiæ totalis eadem quæ curva resistentiæ instantaneæ, si mobili motu æquabili lato resistitur in ratione velocitatum.

THEOREMA CXLVI.

687. Si mobile motu æquali lato resistitur in medio per quod fertur in ratione celeritatum; spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium integrum percurrendum ad spatium aliud percurrendum, ita celeritas quam initio motus habet mobile ad celeritatem residuam (§. 684). Quamobrem spatium quodlibet adhuc percurrendum est ad integrum, ut celeritas residua qua percurrendum, ad celeritatem initialem, seu quam in principio habet mobile (§. 193 *Aristot.*): quod cum de omni spatio percurrendo verum sit; erit spatium percurrendum unum ad aliud quodcumque, ut celeritas residua qua illud percurrendum, ad celeritatem residuam, qua hoc percurrendum (§. 195 *Aristot.*): hoc est, spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis quibus percurrenda proportionalia (§. 155 *Aristot.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM.

Tab. XVII. Fig. 169. 688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per spatium integrum percurrendum; cum spatia percursa sint AQ, AQ &c. (§. 684), erunt percurrenda OB, QB &c. seu applicatae NM & TR ad asymptotam BE Logisticae ANG.

THEOREMA CXLVII.

689. Si mobili motu æquali lato a medio resistitur in ratione celeritatum & spatia adhuc percurrenda sunt ut numeri;

erunt tempora infumta percursis ut illorum Logarithmi.

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenda sunt ut semiordinata Logisticae NM, TR &c. applicatae ad tempora infumta BM, BR, spatia jam percursis AO, AQ (§. 688). Enimvero si in Logistica NM, TR sumuntur ut numeri, abscissae BM, BR sunt ut eorum Logarithmi (§. 553 *Anal.*). Ergo si spatia percurrenda sunt ut numeri, tempora sunt eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA CXLVIII.

690. Si mobile æquali motu in medio resistitur in ratione celeritatum; celeritas residua tempore percursis extinguitur, & spatium percurrendum infumtum AB æquatur ad solutum, cum semper accedat ad initium.

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decrescunt ut semiordinatae Logisticae: ad asymptotam BE applicatae, & asymptotam tempus exhibet (§. 684). Quare cum AB celeritatem integram repræsentet quam mobile in principio motus habet: ea prorsus extingui nequit, nisi punctis G & F coincidentibus, seu Logistica ANG cum asymptoto BE concurrente; quod cum fieri non possit nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. infra.*) celeritas quoque nullo tempore finito extingui potest. *Quod et est primum.*

Jam cum celeritate quam in principio motus habet mobile non prorsus

extinguitur,

Tab. XVII. Fig. 169. extincta, terminum B attingere non potest; nullo quoque tempore finito eundem attingere valet; adeoque spatium percurrendum integrum AB nunquam absolvit. *Quod erat secundum.*

Quia tamen motus indefinenter continuatur, adeoque spatium celeritatibus amissis descriptum continuo crescit; mobile ad terminum suum B continuo propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHOLIUM.

691. Nemo objiciat Propositionem presentem experientia repugnare: neque enim hypothesis resistantia in ratione velocitatum naturarum conformis, quemadmodum suspicatus fuit WALLISIUS. Et si vel maxime hypothesis natura prope ad eam accederet; ex natura consuetudine motus in praxi tandem insensibilis fieri deberet, quemadmodum a LEIBNITIO (a) jam annotatum est.

THEOREMA CXLIX.

692. Si intra asymptotos reſtanguſas AB & BK describatur Hyperbola FLS &, motus initio, celeritas exponatur per reſtam AB, elapſo aliquo tempore vero per reſtam OB; tempus per aream AFL(), & ſpatium eo tempore deſcriptum per reſtam AO exprimi poteſt.

DEMONSTRATIO.

Si enim BQ & BO fuerint celeritates in fine temporum BM & BR restantes; dicaturque BQ = y, BO = z; erit $y : z = dy : dz$ (§. 685), conſequenter $y : dy = z : dz$ (§. 173 Arithm.).

Sunt vero $\frac{dy}{y}$ & $\frac{dz}{z}$ elementa ſpatii hy-

perbolici aſymptotici (§. 120 Anal. Tab. XVII. Fig. 169. *infin.*). Quamobrem elementa iſta æqualia ſunt, ſi eorum altitudines quæ ſunt abſciſſarum in aſymptoto BA ſummarum differentialia, fuerint ut celeritates in iſtanti amiſſæ. Quodſi ergo, ab initio motus uſque ad plenariam extinctionem ſumantur continuo AO, AQ ut celeritates extinctæ; ſpatium hyperbolicum aſymptoticum reſolvitur in elementa inter ſe æqualia. Atque adeo area FAOL ſucceſſiva elementorum æqualium additione gignitur, quemadmodum abſciſſa AP continua acceſſione elementorum æqualium reſultat. Enimvero abſciſſa AP exponitur tempus, quo celeritas PN, ſive AO, amittitur, per hypoth. Ergo etiam ſpatium hyperbolicum AFLO tempus deſignare debet, quo celeritas AO amittitur. *Quod erat unum.*

Jam reſtæ AO & AQ ſunt ut celeritates temporibus BM & BR amiſſæ, per hypoth. Sunt vero ſpatia temporibus BM & BR movendo confeſta ut celeritates iſdem temporibus extinctæ (§. 684). Ergo ſpatia temporibus BM & BR ſeu, quod perinde eſt per deſmonſtrata temporibus AFLO & AFHQ confeſta ſunt ut reſtæ AO & AQ. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CL.

693. Si motui æquabili in medio reſiſtitur in ratione celeritatum; decremента celeritatum ſunt incrementis ſpatiorum proportionalia.

(a) In Actis Eruditorum, A. 1689. p. 41.

DEMONSTRATIO.

Spacia enim & celeritates amiffæ eodem tempore per eandem rectam exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decremента eodem tempore, per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa spatorum & decremента celeritatum iisdem rectis proportionalia sunt; spatorum quoque incrementa celeritatum decremಂತis proportionalia sunt (§. 167 Arithm.)

Q. e. d.

SCHOLIUM I.

694. WALLISIUS, qui primus de resistētia aëris in motu corporum determinanda cogitavit (a), & resistētiā in ratione celeritatum fieri supposuit: rationem celeritatis a , quæ initio motus est, ad resistētiā, uno momento, seu tempore infinitè parvo elapso, sumit ut ad 1. Celeritas igitur residua est $\frac{a}{m}$.

Sed cum celeritates residua in progressionē geometricā arithmeticā (§. 687) per hanc seriem existēntur celeritates ab initio motus usque ad

ejus extīnctiōnem, $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}, \dots$ &c.

in infinitum, donec scilicet quod restat est respectu ipsius a infinitè parvum, adeoque nullum. Summus igitur celeritatum

$a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5} \dots$ &c.

in infinitum, ab terminatur ultimam contēnibilis partem, $= \frac{a}{m-1} + 1$ (§. 120 Anal. fin.)

$= \frac{a + m - 1}{m - 1} = \frac{ma}{m - 1}$. Jam vero, singularis

celeritatis tempore equalibus describitur singulis spatia, quæ cum sex ut celeritates, spatium integrum, celeritate profus ex-

tinēta, erit $\frac{ma}{m-1}$, seu, si $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, quemadmodum idem determinat WALLISIUS.

SCHOLIUM II.

695. NEWTONUS (b) cum deprehenderet hyperbesim resistētiā in ratione celeritatis magis mathematicam esse quam naturalem, & naturæ magis conformem censens alteram resistētiā in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege resistētiæ oriundis considerare cepit. Nostrum igitur est ut eandem hic more nostro explicemus. Ex superioribus enim formalis generatōis delincentur, quæ de eodem notanda veniant; prout ex sequentiū p. uci.

THEOREMA CLL

696. Si corpus motu equali i per medium simile feratur, ipseque resistit in velocitatis ratione duplicata; curvæ resistētiæ totalis est Hyperbola æquilatæ ANG intra asymptotas HK & KE puncto Tab. XVII. Fig. 171. B, in qua celeritas initialis AB applicatur, a centro K intervallo rectæ AB quæ celeritatem initialem exprimit distante.

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis $AB = a$, celeritas amiffa $= v$, tempus quo amittitur $= x$, decrementum celeritatis instantaneum ut z ; erit $axz = azx$ (ut mot. II. §. 679). Est vero decrementum celeritatis instantaneum in ratione duplicata celeritatis extīnctæ per hyperb. adeoque servata lege homogeneorum $a = \frac{v^2}{z}$.

Quamobrem

$$axz = \frac{v^2 dx}{z}$$

$$\frac{dx}{a^2} = \frac{dx}{z^2}$$

(a) In Algebra c. 102. l. 43. Vol. 2. Oper.

(b) In Prin. Lib. 2. Prop. 5. & seq. p. 11. 171.

Tab. XVII. hoc est, $\frac{v^{-2} dv = dx : a^2}{v^{-1} = x : a^2}$

Fig. 171. Sive, si quantitas constans in integratione adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = 0$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, adeoque

$$\frac{1}{a} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo $\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$

$$\frac{a^2 - av = vx}{a^2 = vx + av}$$

Curva igitur resistentiae totalis ANG est Hyperbola æquilatera intra asymptotos HK & KF; latere potentiae Hyperbolae existente linea recta quae celeritatem exponit, & applicata AB, quae eandem exponit, sui intervallo a centro K remota (§. 490 Anal. fin.).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræsentatur per asymptotum BF, celeritates residuae per semiordinatas NM, Hyperbola vero cum asymptoto ANG non concurrat (§. 481 Anal. fin.); celeritas, quas fertur mobile, integra non nisi infinito tempore per resistentiam medii extinguitur, seu mobile nunquam motu suo prorsus privatur.

THEOREMA CLII.

698. Si mobili motu æquali lato resistitur a medio in ratione duplicata celeritatis; celeritas residua erit ad extinctam in ea ratione quam habet latus

potentiae Hyperbolae KB ad partem asymptoti BM exponentem tempus quo celeritas extincta fuit. Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si enim potentiae Hyperbolae latus KB = BA = a, recta tempus exponens BM = x, celeritas residua MN = v, adeoque extincta PN = a - v, erit $a^2 - av = vx$ (§. 696). Est igitur $a : x = v : a - v$ (§. 299 Arithm.), hoc est, AB : BM = MN : NP, seu celeritas residua est ad extinctam, ut latus potentiae Hyperbolae ad partem asymptoti tempus exponentem quo celeritas extincta fuit. Q. e. d.

THEOREMA CLIII.

699. Si mobili motu æquali lato resistitur a medio in ratione duplicata celeritatis; spatium dato tempore est ut logarithmus rationis quam habet celeritas initialis ad residuam tempore isto elapso.

DEMONSTRATIO.

Si enim spatium sit s, reliqua sint ut ante; erit $v dx = ds$ (§. 679). Est vero in hypothese propositionis $-\frac{a^2 dv}{v^2} = dx$ (§. 696), adeoque $v dx = -a^2 dv : v$, consequenter $ds = -a^2 dv : v$. Sed $-a dv : v$ est differentiale logarithmi fractionis $a : v$ (§. 243 Analys. infim.). Quamobrem $s = at$ ($a : v$), hoc est, ob constantem a, spatium dato percursum tempore est ut $t(a : v)$, seu ut logarithmus celeritatis initialis a ad residuam v. Q. e. d.

THEOREMA CLIV.

Tab. XVII. Fig. 171. 700. Si mobili æquabili motu per medium resistens lato resistitur in ratione duplicata celeritatum; tempore quod per partem asymptoti BM Hyperbolæ ANG exponitur confectum spatium representatur per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN inter celeritatem initialem AB & residuam NM interceptum.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $BM = x$ & celeritas restans $MN = v$; erit vdx elementum areæ ABMN (§. 97 *Analys. infin.*). Sed si spatium tempore BM descriptum $= s$; erit $ds = vdx$ (§. 679). Ergo $s = \int vdx = ABMN$. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, respondens ABMN, exprimit spatium a mobili tempore isto confectum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

701. Quoniam spatia motu æquabili dato tempore confecta sunt in ratione composita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret spatium, quod est ut BM. AB (§. 159 *Arithm.*); consequenter spatium istud exponit rectangulum ABMP (§. 376 *Geom.*). Quare cum motu resistentiis in duplicata celeritatum ratione impedito, tempore BM, conficiatur spatium per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit spatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita descriptum, ad spatium quod eodem tempore in medio non resistente describeret mobile; ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN, ad rectangulum ABMP.

THEOREMA CLV.

702. Si motus æquabilis impeditur resistentiis qua sunt in ratione duplicata celeritatum; decremента celeritatum instantanea sunt in ratione composita ex celeritate residua & incremento momentaneo spatii percurfi.

DEMONSTRATIO.

Constat ex demonstratione Theorematis 151. (§. 696), esse $adv = v^2 dx : a$. Est igitur dv ut $v^2 dx$ propter constantem a^2 (§. 181 *Arith.*). Enimvero $v^2 dx = v \cdot vdx$, & v designat celeritatem residuam, $vdx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum spatii in medio resistente percursum. Ergo, in hypothesi Theorematis, decremента momentanea velocitatis $= -dv$ sunt in ratione composita celeritatum residuarum & incrementorum momentaneorum spatii percurfi. *Q. e. d.*

THEOREMA CLVI.

703. Si recta AB celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio per quod æquabiliter movetur in ratione duplicata celeritatum resistitur, & erectis perpendicularibus AC & BF describantur dua Logarithmica ANG & BOR, quarum communis est subtangens AB, altera vero BOR ad asymptotum AC, altera ANG ad asymptotum BF relata; ducta PO ipsi AB parallela, exponet MO tempus, PN celeritatem isto tempore amissam, & NM celeritatem in fine illius temporis adhuc residuam. Tab. XVII. Fig. 172.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVII. Si enim subtangens communis AB = a, tempus = x, celeritas in fine Fig. 172. ejusdem residua = v; erit

$$a^2 = vx + av \quad (\S. 696)$$

$$0 = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

Sunt adeo $\int \frac{dv}{v}$ & $\int \frac{dx}{a+x}$ duo logarithmi æquales (§. 243 *Analys. infin.*). Quare si sit BM = y & NM = v; erit $\frac{dy}{a} = \frac{dv}{v}$; adeoque

ANG Logarithmica ad asymptotum BF relata, cujus subtangens a = AB.

Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$ (§. 87 *Arithm.*)

erit itidem BOR Logarithmica ad asymptotum AC relata, cujus itidem subtangens AB (§. 54 *Anal. infin.*) Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus = x, celeritas residua = v, vi denominationis; recta MO = x tempus, NM = v celeritatem in fine ejus residuam, & PN celeritatem tempore MO amissam exponit. *Q. e. d.*

THEOREMA CLVII.

Tab. XVII. 704. Si tempus BM resolvitur in tempuscula que sunt in progressionem geometrica; spatiola istis tempusculis descripta equalia sunt, & velocitates residua sunt in eadem ratione decrescente in qua tempora crescunt quantitate quadam constante aucta.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM asymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; spatium hyperbolicum ABMN exponit spatium a mobili tempore BM in medio resistente descriptum (§. 700). Enimvero ostendimus in superioribus (§. 692), si BM resolvitur in particulas, quæ sunt in progressionem geometrica, aream ABMN resolvi in spatiola seu elementa inter se æqualia. Spatiola igitur tempusculis in ratione geometrica progredientibus descripta sunt inter se æqualia. *Quod erat unum.*

Si AB exprimat celeritatem initialem, & duæ fuerint Logisticae ANG & BOR ad asymptotos BF & AC relatae; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine istius residuam (§. 703). Sumantur jam in asymptotis abscissæ BM vel AP in progressionem arithmetica, erunt NM & PO in progressionem geometrica & quidem semiordinate NM in decrescente, semiordinate vero PO in crescente (§. 552 *Anal. fin.*). Patet igitur, temporibus MO quantitate constante AB (= PM) auctis in ratione geometrica crescentibus, celeritates residuas NM in ratione geometrica decrescere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

705. Quoniam spatia dato tempore descripta sunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum residuarum (§. 699): celeritates residua sumantur ut numeri, spatia sunt ut eorum logarithmi, & tempora etiam sunt ut numeri (§. 704).

COROL-

Tab. XVII. Fig. 171.

Tab. XVII. Fig. 172.

COROLLARIUM II.

Tab. XVII. Fig. 172. 706. Quare cum AP vel BM sit ut logarithmus MN vel PO; erit BM vel AP ut spatium tempore MO celeritate PN, utpote extincta tempore MO (§. 705), descriptum (§. 453 Anal. fin.)

SCHOLION.

707. Eadem methodo ad alias Hypotheses resistentiæ applicari poterant formula generales. Sed cum istiusmodi Hypotheses magis geometricæ, quam naturales sint; plura in præsentem non addimus: ad resistentias in motu gravium explicandas progressuri in duabus Hypothesibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in Hypothesi Galilæana, utpote experimentis in iis a Centro Telluris distantis consentiente, in quibus ea capere licet.

PROBLEMA CXVII.

Tab. XVIII. Fig. 173. 708. Invenire curvam resistentiæ, celeritatem residuam, & spatium dato tempore descriptum, in motu gravium, seu æquabiliter accelerato.

RESOLUTIO.

Exponat recta AC tempus. Fiat AP = PM; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquisitam (§. 68), & AMF erit linea recta, ac APM triangulum æquicurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per resistentiam, & MN celeritas in fine illius temporis residua; erit ANG curva resistentiæ totalis. Ducatur pm ipsi PM infinite propinqua, & demissa perpendiculari NR; erit nR particula celeritatis tempusculo Pp extincta. Fiat PS ut nR; erit ESI curva resistentiæ instantaneæ (§. 682). Denique fiat QP = NM; erit AQH curva celeritatum residuarum,

Sit jam AP = PM = x, NM = Tab. XVIII. Fig. 173. PQ = v, PS = z, PN = r; erit

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

$$I. dr = dx - dv$$

Porro ut supra (§. 679)

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$Unde \frac{dx - dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$II. adx - adv = zdx$$

quæ est æquatio ad curvam resistentiæ instantaneæ ESI.

Tandem si s spatium tempore x confectum denotet, erit ut supra (§. 679)

$$III. vdx = ds.$$

SCHOLION.

709. Ex formulis hisce generalibus, perinde ac supra, deducuntur quæ de motu gravium in medio resistente a NEWTONO, HUGENIO & LEIBNITIO inventa sunt; quemadmodum ex sequentibus intelligitur.

THEOREMA CLVIII.

710. Si gravi descendenti resistitur Tab. XVIII. Fig. 174. in ratione celeritatum; curva celeritatum residuarum AQH est Logarithmica, cujus asymptotus BF tempus exponit, semiordinata vero OQ ad asymptotum relata sunt differentia inter celeritates residuas PQ & subtangentem AB.

DEMONSTRATIO.

Si AP = x, PQ = v, AB = a; erit adx - adv = zdx (§. 708).

Et

Tab.
XVIII.
Fig.
174.

Est vero $z = v$ per hypoth.

Ergo $\frac{adx - adv = vdx}{\frac{adx - vdx = adv}{\frac{dx = \frac{adv}{a-v}}{Quæ est æquatio ad curvam AQH.$

Quæ est æquatio ad curvam AQH.

Fiat $a - v = y$

erit $a - y = v$

$dy = dv$

$\frac{ady}{y} = \frac{adv}{a-v} = dx$

Quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens = a (§. 54 *Analys. infin.*).

Sit itaque $AB = a$, $AP = BO = x$; erit $Oo = Pp = dx$. Quoniam $PQ = v$; erit $QO = a - v = y$, adeoque $QL = dy$. Quodsi ergo, sumta AB pro subtangente, describatur Logarithmica, cujus asymptotus BF ; erit

$dx = \frac{ady}{y}$ æquatio ad eandem. Est

igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF , semiordinate vero sunt differentie inter lineas quæ celeritates in fine singulorum temporum residuas exponunt, atque rectam quandam constantem AB , cui subtangens æqualis est (§. 54 *Anal. infin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

711. Quodsi fiat $PM = AP$ & $MN = PQ$; erit PN celeritas per resistantiam amissa tempore AP , consequenter ANG curva resistantie totalis (§. 682). Data igitur

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum, datur curva resistantie totalis ANG .

Tab.
XVIII.
Fig.
174.

THEOREMA CLIX.

712. Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum; spatia movendo confecta sunt ut celeritates extinctæ.

DEMONSTRATIO.

Si omnia fuerint ut in Theoremate præcedente, erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Est vero $vdx = ds$ (§. cit.). Ergo $ds = adx - adv$, consequenter $s = ax - av$. Est igitur propter constantem a spatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181 *Aritbm.*). Quoniam $PM = x$, $MN = v$; PM vero est celeritas cadendo tempore AP acquisita & MN celeritas in fine temporis in medio resistente residua, erit $PN = x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igitur spatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non resistente a gravi acquisitam est ut tempus AP (§. 68); PN vero denotans celeritatem extinctam ut spatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus insumptis proportionales, a quibus spatia movendo in medio resistente confecta si subtrahantur, relinquunt rectas NM celeritati in medio resistente a gravi acquisitæ proportionales.

THEOREMA CLX.

714. Si complementa celeritatum a gravi in medio resistente in ratione celeritatum cadendo acquisitarum ad celeritatem maximam quam corpus cadendo acquirere valet sumantur ut numeri; erunt tempora insumta ut eorum logarithmi.

DEMONSTRATIO.

Tab.
XVIII.
Fig.
174.

Si BF exponit tempus, curva AQH celeritatum residuarum est Logarithmica; cujus asymptotus BF, subtransgens AB (§. 710). Quoniam Logistica AQH cum asymptoto BF non concurret nisi infinito intervallo (§. 556 *Anal. fin.*); AB est celeritas quam in medio resistente infinito tempore grave cadendo acquirere potest, adeoque absolute maxima. Est itaque QO celeritatis tempore AP in medio resistente acquisitæ complementum ad maximam. Quamobrem si complementa celeritatum acquisitarum ad maximam sunt ut numeri; erunt tempora insumta, quæ per AP sive BO denotantur, ut ipsorum logarithmi (§. 553 *Anal. fin.*) *Q. e. d.*

THEOREMA CLXI.

715. Si grave in medio cadit quod in ratione celeritatum descensui ejus resistit; celeritatem absolute maximam nunquam acquirat.

DEMONSTRATIO.

Est enim curva celeritatum residuarum in medio resistente, seu acquisitarum si medium in ratione celeritatum resistit, AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF. (§. 710). Quoniam celeritates acquisitæ sunt semiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræsentatur per semiordinatam, quæ respondet puncto, in quo curva AQH asymptotum BF secatur. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 553 *Anal. fin.*), seu

quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem absolute maximam acquirat. Eam igitur nunquam acquirat. *Q. e. d.*

Tab.
XVIII.
Fig.
174.

THEOREMA CLXII.

716. Si grave descendit per medium in ratione velocitatum resistens; celeritatum, temporibus in progressionem arithmetica auctis, cadendo acquisitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere potest differentia in progressionem geometrica decrescunt.

DEMONSTRATIO.

Constat enim ex antecedentibus, si AQH sit Logarithmica, cujus asymptotus BF & AK eidem parallela; esse QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquisitam (§. 710), & BA celeritatem maximam quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abscissæ EO, BR ut tempora, semiordinatæ ipsis respondentes OQ & RV ut celeritatum QP & VT istis temporibus acquisitarum differentia a maxima, seu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero si in Logarithmica abscissæ crescunt in progressionem arithmetica semiordinatæ in geometrica decrescunt (§. 552 *Anal. fin.*). Ergo si grave per medium in ratione velocitatum resistens cadit, & tempora in progressionem arithmetica crescunt; celeritatum temporibus istis acquisitarum differentia a maxima in geometrica decrescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXIII.

Tab. XVIII. 717. Si gravi per medium descen-
 denti resistatur in ratione celeritatum, &
 Fig. axis AK tempora descensus representet,
 174. ANG sit curva resistentia totalis, AQH
 vero curva celeritatum acquisitearum,
 & circa axem AD ad AK normalem de-
 scribatur Parabola AIC, cujus parameter
 est ut dupla celeritas maxima quam
 corpus cadendo acquirere valet; spatium
 in medio resistente confectum est ad spa-
 tium eodem tempore in vacuo conficien-
 dum, in ratione PN ad PI, seu ut semi-
 ordinata curva resistentia totalis ad se-
 miordinatam Parabola externa ad eun-
 dem axem relata.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim spatium, in medio re-
 sistente in ratione celeritatum, moven-
 do confectum est tempore $AP = x$ ut
 $ax - av$ (§. 712); spatium vero eod-
 em tempore in vacuo conficiendum
 ut $\frac{1}{2}x^2$ (§. 80); erit istud ad hoc ut
 $ax - av$ ad $\frac{1}{2}x^2$, consequenter ut
 $x - v$ ad $x^2 : 2a$ (§. 181 Arithm.).
 Jam cum ANG sit curva resistentia to-
 talis per hypoth. erit $PN = x - v$ (§. 712),
 & quia AQH est curva celeritatum
 temporibus x acquisitearum per hypoth.
 celeritas maxima, quam corpus caden-
 do acquirere potest, est ut recta AB
 $= a$ (§. 715). Enimvero si circa axem
 AD parametro $2a$, quæ est ut dupla
 celeritas maxima a gravi acquisitu possi-
 bilis, describatur Parabola AIC, cum sit
 $QI = AP = x$; erit $AQ = PI = x^2 : 2a$
 (§. 398 Anal. fin.). Est igitur spa-

tium movendo in medio resistente con-
 fectum, ad spatium eodem tempore in
 medio non resistente conficiendum, ut
 PN ad PI. Q. e. d. Tab. XVIII. Fig. 174.

THEOREMA CLXIV.

718. Spatium a gravi per medium
 in ratione velocitatum resistens descen-
 dente confectum tempore infinito infini-
 tum est; celeritas vero tempore isto ac-
 quisita finita est.

DEMONSTRATIO.

Iisdem enim positis, quæ in antece-
 dentibus, spatium movendo confectum
 tempore AP est ut semiordinata PN.
 Quare cum crescente AP crescat etiam
 PN; ubi AP fit infinita, etiam applica-
 ta ad AP infinita evadere debet, con-
 sequenter tempore infinito percursum
 spatium infinitum est. Quod erat unum.

Jam celeritas absolute maxima, quam
 corpus in medio resistente cadendo ac-
 quirere potest, exponitur per subtan-
 gentem Logistica AQH ipsi AB æqua-
 lem, adeoque per lineam finitam; con-
 sequenter & ipsa finita est. Celeritas
 igitur tempore infinito acquisita finita
 est. Quod erat alterum.

THEOREMA CLXV.

719. Si intra asymptotos CB & BA
 rectangulas describatur Hyperbola aequi-
 latera, & recta AB vel rectangulum
 ABNE exponat celeritatem maximam
 quam corpus per medium in ratione cele-
 ritatum resistens acquirere valet; area
 AILE exponet tempus, rectangulum
 AIKE Tab. XVIII. Fig. 175.

Tab. XVIII. *AIKE celeritatem cadendo acquisitam, & EKL spatium tempore isto confectum.*

Fig. 175.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = a$, seu ut celeritas maxima quam corpus acquirere valet, $Al = v$, seu ut celeritas tempore x acquisita. & $AE = b$; erit, ob constantem b , $ab : bv = a : v$ (§. 178 *Arithm.*), adeoque etiam rectangulum $ABNE$ exponet celeritatem maximam, quam corpus cadendo in medio resistente acquirere valet, & $AIKE$ exponet celeritatem dato tempore x acquisitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium resistit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{abv}{a-v}$ (§. 712),

adeoque $b dx = \frac{abdv}{a-v}$. Quoniam

$AB = a$, $Al = v$; erit $Bl = a - v$. Est vero in Hyperbola BA . $AE = BlIL$ (§. 486 *Analyf. fin.*), adeoque $(a-v) \cdot IL = ab$, consequenter $IL = \frac{ab}{a-v}$. Est igitur $abdv : (a-v)$ elementum areæ $AILE$. Quamobrem bx æquatur areæ $AILE$, & hinc x seu $AP = AILE : AE$. Ob constantem itaque AE , tempus x est ut spatium hyperbolicum asymptoticum $AILE$ (§. 178 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Jam si tempus x exponatur per rectam AP , & celeritas eodem acquisita v per rectam Al ; spatium cadendo confectum est ut $x-v$ (§. 712). Quare si tempus exponitur per spatium hyperbolicum $AILE$, & celeritas isto tempore acquisita per rectangulum $AIKE$; spatium descensus exponitur per eorum differentiam, adeoque per trilineum hyperbolicum EKL . *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

720. Quoniam celeritas per resisten- Tab. XVIII. Fig. 175.
tiam medii in ratione celeritatis extincta est ut spatium dato tempore cadendo confectum (§. 712), spatium vero hoc est ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore $AILE$ extincta ut trilineum KLE .

COROLLARIUM II.

721. Et quia rectangulum $AIKE$ celeritatem cadendo tempore $AILE$ acquisitam exponit (§. 719); celeritas acquisita est ad celeritatem extinctam ut rectangulum $AIKE$ ad trilineum hyperbolicum EKL .

THEOREMA CLXVI.

722. Si recta dividua AB sit sub- Tab. XVIII. Fig. 176.
tangens & AC asymptoticus Logarithmicæ BOI . ductæque EF ipsi AC per altella fiat ut semiorinata Logarithmicæ OP aucta dupla subtangente AB ad OK semiorinatam. In abscissa AP ad quartam proportionalem PQ ; erit punctum Q in curva celeritatum residuarum AQH , seu abscissa AP tempus; semiorinata PQ celeritatem hoc tempore cadendo ægræ æqualem exponet. siquidem eodem resistit in ratione celeritatum duplicata.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PQ = v$; erit $adx - abv = v^2 dx$ (§. 708). Est vero $a = v^2 : a$, per hypoth. observata scilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - abv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2 dx - a^2 dx = v^2 dx$$

$$a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$$

$$dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$$

Fin

Tab. XVIII. Fig. 176.

Fiat $v = \frac{ay - a^2}{y + a}$
 erit $dv = \frac{aydy + a^2dy - aydy + a^2dy}{(y+a)^2} = \frac{2a^2dy}{(y+a)^2}$

& $v^2 = \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

adeoque $a^2 - v^2 = a^2 - \frac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{yy + 2ay + a^2}$

$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{(y+a)^2} = \frac{4a^3y}{(y+a)^2}$

Ergo $\frac{a^2dv}{a^2 - v^2} = \frac{2a^4dy}{4a^3y(y+a)^2} = \frac{\frac{1}{2}ady}{y}$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2}ady : y$, quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $\frac{1}{2}a$.

Sit itaque $AB = a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Describatur Logarithmica BOI, cujus asymptotus AC, subtangens $= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Si jam sumatur $AP = x$, erit $PO = y$, adeoque $OK = y - a$, consequenter $dx = \frac{1}{2}ady : y$ (§. 54 Anal. infin.). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, adeoque $y + a : y - a = a : v$. Est itaque $PO + AB : OK = AB : PQ$. Quare cum $PQ = v$ sit celeritas tempore x residua; recta AP tempus, PQ celeritatem residuam seu hoc tempore acquisitam exponit; consequenter AQH est curva celeritatum residuarum (§. 682). Q. e. d.

COROLLARIUM.

723. Quodsi fiat $PM = AP$, & $MN = QP$; erit punctum N in curva resistentiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM est ut celeritas cadendo in vacuo seu medio non resistente acquisita (§. 68).

Quare cum QP sit ut celeritas in medio resistente tempore AP acquisita (§. 722); si MN ipsi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas resistentia medii extincta tempore AP. Est igitur ANG curva resistentiæ totalis (§. 682).

THEOREMA CLXVII.

724. Iisdem positis qua in Propositione præcedente, dupla subtangens AB Logarithmica BOI, cujus ope curva celeritatum residuarum AQH construitur, celeritatem maximam exponit quam grave, in medio in ratione duplicata celeritatum resistente cadendo, acquirere potest; eam vero grave non acquirit nisi tempore infinito elapso, & recta BF est curva celeritatum residuarum AQH asymptotus.

DEMONSTRATIO.

Ponamus semiordinatam QP quæ celeritatem in medio resistente tempore AP acquisitam exponit, fieri ipsi AB seu subtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Est vero $PO + AB : OK = AB : PQ$ (§. 722), hoc est, $OK + 2AB : OK = AB : PQ$. Quare si PQ ipsi AB æqualis fieri debet, necesse est ut OK æqualis evadat ipsi $OK + 2AB$. Enimvero hoc fieri nequit, nisi quando $2AB$ respectu ipsius OK infinite parva evadit (§. 4 Analys. infin.), consequenter quando OK, adeoque etiam BF infinita evadit. Ergo PQ ipsi AB æqualis fieri nequit, nisi quando AC infinita evadit. Curva igitur celeritatum residuarum cum recta BF non nisi infinito intervallo concurrat, atque

Tab. XVIII. Fig. 176. adeo BF est ipsius asymptotus, & AB exponit celeritatem maximam quam corpus in medio resistente acquirere potest; cumque recta tempus repræsentans AP infinita evadat, quando fit $PQ = AB$, celeritas maxima non nisi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

725. Quoniam $OK + 2AB : OK = AB : PQ$ (§. 722); erit $AB - PQ : PQ = 2AB : OK$ (§. 193 *Aritm.*), hoc est, $KQ : QP = 2AB : OK$, seu differentia celeritatis dato tempore acquisitæ & maxima quæ in medio resistente acquiri potest, est ad celeritatem dato tempore acquisitam; ut dupla maxima quæ acquiri potest, ad semiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad asymptotum BF curvæ celeritatum in medio resistente acquiratarum AQH.

COROLLARIUM II.

726. Quoniam celeritas maxima & gravi cadente, in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit, non acquiritur nisi infinito tempore elapso (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere potest.

SCHOLIUM.

727. HUGENIUS celeritatem maximam, quam grave in medio resistente acquirere potest, celeritatem terminalem appellat (a).

THEOREMA CLXVIII.

728. Si grave descenderet in vacuo seu medio non resistente, tempore finito eam celeritatem acquireret quam in medio seu in simplici, siue in dupli-

(In Discursu de causa gravitatis p. 170.

cata ratione celeritatum resistente non nisi tempore infinito acquirere potest.

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile descendat in medio quod in ratione celeritatum simplici resistit, siue in medio cadat quod in illorum duplicata ratione descensum impedit; celeritas maxima quam cadendo acquirere potest grave est ut linea quædam data (§. 715, 724), adeoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquisitæ sint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio resistente tempore finito acquiritur in non resistente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque resistente non acquiritur nisi tempore infinito (§. 715, 726): Ergo, in medio non resistente, finito tempore acquiritur, quæ, in resistente utroque, infinito acquiritur. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXIX.

729. Spacium in vacuo celeritate terminali AB tempore AP a gravi percursum, est ad spacium eodem tempore percursum in medio siue in simplici, siue in duplicata ratione celeritatum resistente; ut rectangulum ABKP ad aream AQP. Tab. XVIII. Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur per hypoth. erit idem in ratione composita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§. 34), adeoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio resistente spacium tempore AP per-

Tab. XVIII. Fig. 176. percursum est ut area curvæ celeritatum residuarum AQP (§. 708). Est igitur spatium a gravi in medio resistente percursum, sive motus impediatur in ratione celeritatum, sive in ratione earundem duplicata, ad spatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum, ut area curvæ celeritatum residuarum AQP ad rectangulum ABKP. Q. e. d.

THEOREMA CLXX.

730. Si celeritate terminali tanquam radio describatur quadrans circuli & celeritas in medio quod in ratione duplicata celeritatum resistit a gravi cadendo acquisita exponatur per cosinum arcus; spatium in medio isto descriptum erit ut differentia logarithmorum sinus versi & excessus diametri supra eundem.

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus = x , celeritas in medio resistente acquisita = v ; erit spatium in eodem percursum $\int v dx$ (§. 708). Reperimus vero supra (§. 722) $\frac{dx}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sed $\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} - \frac{\frac{1}{2} a dv - \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)}$
 $= \frac{\frac{1}{2} dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} dv}{a+v}$ Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ per demonstrata = $\frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a+v}$. Jam $\int \frac{dv}{a-v} = -l(a-v)$, & $\int \frac{dv}{a+v} = l(a+v)$

Tab. XVIII. Fig. 176. = $l(a+v)$ quia, quantitate constante sumpta pro unitate, $a - v$ exprimit numerum unitate minorem, adeoque logarithmum habet negativum (§. 351 Arithm.). Ergo $\int v dx = -\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$. Sunt ergo spatia in medio resistente tempore x percursa ut $-\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$; consequenter, ob constantem $\frac{1}{2} a^2$, ut $-l(a-v) - l(a+v)$ (§. 181 Arithm.), hoc est, ut differentia logarithmorum quantitatum $a-v$ & $a+v$. Quod si jam celeritate terminali AB describatur quadrans BD, ducaturque recta QE ipsi PD parallela; erit AL, sinus arcus ED, seu cosinus arcus BE, = v , adeoque BL, sinus versus arcus ejusdem BE, = $a - v$, consequenter logarithmus negativus $a-v$, logarithmus sinus versi BL. Jam diameter circuli = $2a$. Quare si inde subducas $a - v$, relinquetur $a + v$. Est igitur $a + v$ excessus diametri BS supra sinum versum BL, adeoque logarithmus positivus $a+v$, logarithmus excessus diametri BS supra sinum versum BL. Jam cum $-l(a-v) - l(a+v)$ sit differentia logarithmi negativi ipsius BL & positivi LS; spatium a mobili in medio in ratione celeritatum duplicata resistente descriptum, est ut differentia logarithmorum sinus versi BL & excessus diametri BS supra sinum versum BL, si celeritate terminali describitur quadrans circuli BED, & AL cosinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP quæ celeritatem tempore AP acquiritam exponit quo spatium istud confectum est. Q. e. d.

COROLLARIUM.

Tab.
XVIII.
Fig.
176.

731. Quoniam excessus diametri supra sinum versum est hujus complementum ad diametrum, & differentia logarithmorum sinus versi & excessus ejus supra diametrum, est logarithmus sinus versi per complementum ejus ad diametrum divisi (§. 343 Arithm.); consequenter logarithmus rationis sinus versi ad complementum ejus ad diametrum (§. 129 Arithm.); si, celeritate terminali sumpta pro sinu toto, cosinus arcuum sint ut celeritates cadendo acquisitæ, erunt logarithmi rationis sinuum versorum ad eorum complementa ad diametrum, ut spatia temporibus istis descripta quibus celeritates fuere acquisitæ.

THEOREMA CLXXI.

732. Si gravis descensus impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritate terminali AB describitur quadrans circuli BED, sitque ER = AL sinus arcus ED ut celeritas in medio resistente cadendo acquisita, erit spatium percursum ut logarithmus sinus complementi EL.

DEMONSTRATIO.

Patet, ex demonstratione præcedentis Theorematis, si spatium sit s , AL = ER = v , AB = a , esse $ds = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$.

Sit EL = y : erit (§. 377 Anal. fin.)

$$\begin{array}{r} y^2 = a^2 - v^2 \\ \hline 2ydy = -2v dv \\ \hline ydy = -v dv \\ \hline a^2 y dy = -a^2 v dv \\ \hline \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2} = -\frac{a^2 y dy}{y^2} \end{array}$$

$$\text{hoc est, } ds = -\frac{a^2 dy}{y}$$

$$s = -a^2 \int \frac{dy}{y} = -a^2 ly$$

Sunt igitur spatia ut $-a^2 ly$, seu propter constantem a , (§. 181 Arithm.) ut $-ly$. Est vero $-ly$ logarithmus sinus EL, utpote negativus; quia sinus EL continuo decrescunt, crescentibus sinibus ER. Quare si velocitates residuæ sumuntur ut sinus arcuum ED, erunt spatia descripta eodem tempore quo celeritates istæ cadendo acquisitæ, ut logarithmi cosinum EL, seu sinuum complementorum arcuum ED. Q. e. d.

SCHOLION.

733. Quodsi dubites summam differentialis $-a^2 dy : y$ esse $-a^2 ly$, propterea quod quantitas constans eidem in integratione adjici possit (§. 95 Anal. infin.): adjice quantitatem constantem c ut sit $s = c - a^2 ly$. Quoniam, in casu $s = 0$ evadit $y = la$, erit $c - a^2 la = 0$. Sumatur a pro unitate, erit $c - la = 0$, adeoque $c = la$. Sed Logarithmus unitatis = 0 (§. 334 Arithm.) Ergo etiam $c = 0$. Patet igitur, si AB sumatur pro unitate, non opus esse ut quantitas quedam constans in summatione elementi cosinus EL adjiciatur.

THEOREMA CLXXII.

734. Si gravi descendenti resistitur in ratione duplicata celeritatum, & cosinus arcus EB exponit celeritatem cadendo acquisitam, radius vero AB celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem istam cadendo acquisivit grave, est ut logarithmus rationis SL ad

Tab.
XVIII.
Fig.
176.

Tab. XVIII. ad LB; seu complementi sinus versi ad diametrum ad sinum versum.

Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Si fit $AB = a$, $AL = ER = v$,
tempus descensus $= x$; erit $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$

prouti apparet ex demonstratione
Theorematis 166 (§. 722). Jam vero

$\frac{a^2 dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v}$ utpote
(facta reductione ad denominationem
eandem) =

$(\frac{1}{2}a^2 dv + \frac{1}{2}avdv + \frac{1}{2}a^2 dv - \frac{1}{2}avdv) : (a-v)(a+v)$

Ergo $\frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx.$

Quoniam $\int \frac{dv}{a-v} = -l(a-v)$

& $\int \frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v)$

$- \frac{1}{2}al(a-v)$. Sunt igitur, propter
constantem $\frac{1}{2}a$, tempora quibus cele-
ritates v acquiruntur ut $l(a+v) -$
 $l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v)$

$= l \frac{a+v}{a-v}$ (§. 343 Arithm.), hoc est,

cum fit $a+v = LS$ & $a-v = BL$,
 $l(a+v) - l(a-v) = l(LS:LB)$, qui
est logarithmus rationis LS ad LB (§.

129 Arithm.). Ergo si radius cir-
culi AB exponit celeritatem termina-
lem, & AL cosinus arcus BE celerita-
tem in medio resistente data lege ac-
quisitam; erit tempus quo celeritas
hæc a gravi cadendo acquiritur ut
logarithmus rationis complementi si-
nus versi ad diametrum LS ad sinum
versum LB. Q. e. d.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

COROLLARIUM I.

735. Patet, ex demonstratione Theore-
matis præsentis, esse tempus x ut $l \frac{a+v}{a-v}$ XVIII. Fig. 176.

si a exponat celeritatem terminalem & v
celeritatem tempore x acquisitam. Est
vero $a+v$ celeritas acquisita terminali
aucta & $a-v$ differentia ejus a termi-
nali, seu complementum ad terminalem;
consequenter $(a+v) : (a-v)$ exprimit
rationem celeritatis acquisitæ terminali
auctæ, ad ipsius complementum ad termi-
nalem. Tempus igitur est ut logarith-
mus rationis celeritatis acquisitæ termi-
nali auctæ, ad ipsius complementum ad
terminalem.

COROLLARIUM II.

736. Quoniam $QP = v$, $KQ = a-v$;
si fiat $PT = AS = AB$; erit $QT = a+v$;
consequenter logarithmus rationis TQ
ad QK ut tempus.

THEOREMA CLXXIII.

737. Si rationes inter summam ce-
leritatis terminalis & acquisita atque
differentiam acquisita a terminali su-
mantur ut numeri; & descensui gravis
resistitur in ratione duplicata celerita-
tum; erunt tempora, quibus celeritates
fuerunt acquisita, ut logarithmi.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim descensus gravis im-
peditur in ratione duplicata celerita-
tum & celeritas terminalis fuerit $= a$,
acquisita $= v$; erit summa terminalis
& acquisitæ $a+v$ & differentia acqui-
sitæ a terminali $a-v$, consequenter
ratio summæ istius ad hanc differen-
tiam $= \frac{a+v}{a-v}$ (§. 129 Arithm.).

Cc

Sunt

Sunt vero tempora, quibus celeritates istæ acquiruntur, ut $\propto \frac{a+v}{a-v}$ (§. 734).

Quare si ratio summæ terminalis celeritatis ac acquisitæ ad differentiam acquisitæ a terminali sumitur ut numerus; erit tempus quo celeritas acquisita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXIV.

Tab. XVIII. Fig. 176. 738. Si descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum, & spatia percurfa sint ut logarithmi sinuum LE arcus BE quadrantis BD celeritate terminali tanquam radio descripti; tempora insumta sunt ut logarithmi rationis inter sinum versum BL & complementum ejus ad diametrum LS.

DEMONSTRATIO.

Si enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis, & celeritate terminali AB descripto quadrante BED, cosinus arcus BE, seu arcus ED sinus LA est ut celeritas acquisita, spatia percurfa sunt ut logarithmi sinuum EL (§. 732); tempora vero insumta ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§. 734). Quamobrem quando spatia percurfa sunt ut logarithmi sinuum; tempora insumta sunt ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA CLXXV.

739. Incrementum celeritatis gravium in medio non resistente est ad incrementum acquisitæ in medio quod in ratione duplicata celeritatis resistit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus supra quadratum celeritatis acquisitæ excessum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritas gravium in medio non resistente crescit in ratione temporis (§. 68); si tempus dicatur x , erit incrementum celeritatis momentaneum, in tempusculo scilicet dx , uti dx . Jam si celeritas terminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio quod in ratione duplicata celeritatis resistit acquisita $= v$; erit $a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$, prouti patet ex demonstratione Theorematis 166 (§. 722). Est igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv sit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege resistente acquisitæ; erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio resistente, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus excessum supra quadratum acquisitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $(a^2 - v^2) = (a+v)(a-v)$; erit dx ad dv in ratione composita a ad $a+v$ & a ad $a-v$, hoc est, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum est in casu dato ad incrementum in medio resistente, in ratione composita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquisita auctam, & ejusdem celeritatis terminalis ad ipsius supra acquisitam excessum.

THEO-

THEOREMA CLXXVI.

Tab. XVIII. Fig. 177. 741. Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum, & celeritas terminalis exponitur per rectam AB = CF, qua tanquam radio describitur quadrans, eadem vero pro latere potentie Hyperbola sumta intra asymptotos AC & CD describatur Hyperbola BME, fiatque HF celeritati in medio resistente acquisita equalis; area hyperbolica APMB exprimit spatium eo tempore a gravi percursum quo celeritatem ut HF acquisivit.

DEMONSTRATIO.

Sit enim AB = AC = CF = a, HF = v; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§. 417 Geom.), $GH = PC = \sqrt{a^2 - v^2}$; consequenter ob PC. PM = AB² (§. 488 Anal. fin.) $PM = a^2 : \sqrt{a^2 - v^2}$. Jam differentiale rectæ AP = $a - \sqrt{a^2 - v^2}$

= $\frac{v dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$. Quamobrem elementum areæ APMB = $\frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$; conse-

quenter area APMB = $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Est

vero spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas v acquisita = $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Ergo spa-

tium hyperbolicum APMB exprimit spatium a gravi interea temporis percursum quo celeritas ut HF acquisita. Q. e. d.

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquisita FH in Tab. terminalem FC degenerat; semiordinata XVIII. PM cum asymptoto CD coincidit, adeoque Fig. area hyperbolica ABMP degenerat in infinitam EBACD; consequenter spatium representat infinitum a gravi percursum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit nisi tempore infinito elapso (§. 726); spatium infinitum a gravi non nisi tempore infinito percurretur.

THEOREMA CLXXVII.

743. Si intra asymptotos rectangulas DC & AC describatur Hyperbola aequaliter latera EMB, cujus latus potentie est ut celeritas terminalis, AP vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquisitam; spatium hyperbolicum ABMP exponet spatium eodem tempore a gravi in medio descriptum quod in ratione duplicata descensui resistit quo celeritas acquisita fuit.

DEMONSTRATIO.

Sit AC = a, erit etiam latus potentie Hyperbolæ = a. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acquisita = v; erit PA = $\frac{v^2}{a}$, consequenter

CP = $a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2 - v^2}{a}$.

Unde ob CP. PM = a² (§. 488 Anal. fin.), reperitur PM = $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$.

Jam differentiale abscissæ PA = $\frac{2v dv}{a}$,

consequenter elementum spatii hyperbolici ABMP = $\frac{2a^2 v dv}{a^2 - v^2}$, adeo-

Tab. XVIII. que $ABMP = 2 \int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Est igitur
 Fig. 177. area hyperbolica ABMP ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$
 propter constantem 2 (§. 181 *Arihm.*).
 Ex antecedentibus constat spatium a
 gravi, in medio data lege resistente, in-
 terea temporis descriptum dum cele-

ritatem v acquirit, esse ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ Tab. XVIII.
 (§. 730). Idem igitur spatium est ut
 spatium hyperbolicum asymptoticum
 ABMP. Fig. 177.

S C H O L I O N.

744. Patet adeo, unum idemque spa-
 tium descensus multis modis, per figuras re-
 presentari posse.

C A P U T XV.

De Machinis Simplicibus.

DEFINITIO LXXI.

745. **M**achina vocatur, quicquid
 ad motum producen-
 dum conducit, ut vel virium vel tem-
 poris compendio efficiatur.

S C H O L I O N.

746. Quoniam effectus Machinarum ex
 structura ipsarum secundum immutabiles mo-
 tuum leges consequuntur: omnes operationes
 rerum corporearum Mechanice dicuntur, quia
 agunt structura suæ convenienter & juxta
 æternas motuum leges. Hinc manifestum
 est, illum demum Mechanice Philosophari,
 qui evidenter ostendit, quomodo vi legum
 motus effectus rerum ex structura ipsarum
 consequantur. Nec difficulter hinc colligitur,
 paucos admodum esse, qui Mechanice Philoso-
 phantur. Apparet etiam, Philosophiam Me-
 chanicam liberam esse ab ea labe, quam in-
 periti eidem adspargere conantur. Immo nec
 obcurum est, sine Matheseos presidio de re-
 bus naturalibus temere Philosophari.

DEFINITIO LXXII.

747. Per *Potentiam* intelligo Vim,
 quæ Machinæ applicata ad motum
 tendit, sive actu eundem producat,
 sive non. In priore casu dicitur *Po-
 tentia movens*; in posteriore *Potentia
 sustentans*.

DEFINITIO LXXIII.

748. *Pondus* appello, quod ope
 Machinæ vel sustentatur, vel move-
 tur, vel motui producendo utcunque
 resistit.

DEFINITIO LXXIV.

749. *Vectis* est linea recta inflexi- Tab. V.
 lis & gravitatis expers AB, unico sui Fig. 58.
 puncto C fulcro firmo D innixa, circa
 quod moveri potest.

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo instrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in usu applicatur, ad Vectem revocantur; consequenter quæ de Vecte demonstrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLIUM I.

751. Ex natura Vectis adeo ratio redditur non modo structura & effectuum omnium instrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non passim in vita communi obviatorum; sed & motuum animalium: quod posterius primus docuit Joannes Alphonfus BORELLUS in peculiari De motu animalium Opere.

SCHOLIUM II.

752. In genere autem notandum est, ubi Machinarum leges investigamus, non considerari materiam ex qua constant, nec materia affectiones, neque varias figuras quæ ob certos usus inducuntur; sed tantum eorum rationem haberi, quæ Machina essentiam absolvent, ut nempe constet quæ Machina quæ tali convenient. Quodsi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obstaculum impedire, quominus Lex ista accurate observari queat; ea ex suis principiis seorsim sunt determinanda.

DEFINITIO LXXV.

753. Hypomochlium est fulcrum, cui Vectis innititur.

DEFINITIO LXXVI.

Tab.V. Fig.59. 754. Vectis Homodromus est, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentia B & hypomochlium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C.

DEFINITIO LXXVII.

755. Vectis heterodromus, est in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentia B.

DEFINITIO LXXVIII.

756. Axis in Peritrochio est circulus AB basi cylindri concentricus, & una cum ipso circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille Axis, circulus Peritrochium; radii circuli (qui subinde soli comparent) Scytale appellantur.

SCHOLIUM.

757. Proprie per Axem intelligitur virga ferrea, cui circumpositus est cylindrus ligneus scytalis instructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi (§. 746), cur definitiones ad Geometriam puram revocari consultum sit.

COROLLARIUM.

758. Axi adeo in Peritrochio locus est, quotiescunque in motu Machinae concipere licet circulum circa axem fixum descriptum, & cylindri huic circumpositi plano concentricum.

DEFINITIO LXXIX.

759. Trochlea est circulus AB circa centrum C volubilis.

DEFINITIO LXXX.

760. Cochlea est cylindrus rectus AB spirali similiter sulcatus. Describitur autem illa spiralis, si recta FG motu æquabili in superficie cylindri circumferatur, & interea punctum I ex F versus G motu itidem æquabili descendit. Cochlea mas est, si superficies convexa; Cochlea femina vero, si concava fuerit sulcata.

SCHOLIUM.

Tab.V. 761. *Mas & fœmina, si motus gigni de-
Fig.63. bet, semper conjunguntur. Loquor nimirum
de Cochleæ simplicis usu. Si enim cum Axe
in Peritrochio conjungitur, fœmina opus non
est, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc
in casu Machina composita prodit.*

DEFINITIO LXXXI.

Tab.V. 762. *Cuneus est prisma triangulare,
Fig.64. cujus bases sunt triangula æquicrura
acutangula.*

AXIOMA X.

763. *Potentia æqualis est ponderi
quod, salvo effectu, in ejus locum sub-
stitui potest.*

SCHOLIUM.

764. *Patet ex ipsa æqualitatis definitione
(§. 15 Arithm.).*

THEOREMA CLXXVIII.

765. *Si potentia B, Vecti sive homo-
dromo, sive heterodromo applicata, su-
stentat pondus in A applicatum; ratio-
nem reciprocam distantiarum ab hypo-
mochlio ad pondus habet.*

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Sit primum Vectis AB heterodro-
Fig.58. mus. Quoniam supponitur horizonti
parallelus; linea directionis utriusque
ponderis erit ad ipsum perpendicularis,
Centrumque gravitatis unius in A, alte-
rius in B (§. 215.) Quodsi ergo pro
potentia in B applicata substituatur pon-
dus æquale; habebimus duo pondera,
quorum Centra gravitatis recta AB
connectuntur, eaque in æquilibrio, cum
potentia pondus sustentet, per hypoth.

Est igitur C centrum gravitatis com-Tab.V.
mune (§. 122); consequenter pondus Fig.58.
in B, hoc est potentia, ad pondus in
A reciproce se habet, ut AC ad CB
(§. 144). *Quod erat unum.*

Si Vectis fuerit homodromus CB, Tab.V.
ponderis G non aliam partem susten- Fig.59.
tat potentia in B applicata, quam quæ
ferenda est a fulcro ibi supposito. Est
igitur ad pondus A, ut distantia ponderis
ab hypomochlio AC, ad distantiam
potentiæ CB (§. 231). *Quod erat se-
cundum.*

Si Vectis fuerit inclinatus, hoc est, Tab.V.
si linea directionis ponderis & poten- Fig.65.
tiæ cum Vecte AB angulum efficiat obli-
quum, erunt CD & CE ad lineas di-
rectionis AF & EG perpendiculares
distantiæ a centro motus C (§. 229);
consequenter eodem, quo ante, mo-
do demonstratur, potentiam sustentan-
tem quæ in B applicatur esse ad pon-
dus in A suspensum, ut DC ad CE
(§. 272). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

766. *Quodsi potentia, quæ pondus su-
stentat, augeatur; præpollebit, adeoque
dato Vecte pondus movebit.*

SCHOLIUM.

767. *Facile itaque ad Vectem ea omnia
transferuntur, quæ superius de æquiponderan-
tibus (§. 144 & seqq. itemque §. 231 &
seqq. §. 272 & seqq.) demonstrata sunt.*

PROBLEMA CXVIII.

768. *Data gravitate Vectis hetero-
dromi AB, distantia Centri gravitatis ab
hypo-*

Tab. N. hypomochlio CV, distantis ponderis at-
Fig. 58. que potentia AC & CB, una cum pon-
dere O; invenire potentiam, qua ipsum
sustentare valet.

RESOLUTIO.

1. Concipiamus Vectem gravitatis ex-
pertem & ejus loco in V appensum
pondus eidem æquale G. Quodsi
fiat ut AC ad CV, ita gravitas Vec-
tis ad quartum: reperietur pondus,
quod Vectis sustentare valet (§.
765).

2. Subtrahatur id a pondere dato;
residuum erit pondus a potentia su-
stentandum.

3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pon-
dus residuum ad quartum: & repe-
rietur potentia in B applicanda, ut
dato Vecte datum pondus sustentet
(§. 765).

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5,
G = 10 librarum, O = 300. Fiat

1 - 2 - 10	5 - 1 - 280
<u>10</u>	<u>1</u>
20	280
<u>300</u>	
20	280
<u>280</u>	56. Potentia.

PROBLEMA CXIX.

769. Datis gravitate Vectis hetero-
dromi AB, distantia Centri gravitatis
ab hypomochlio CV, distantis potentia
atque ponderis BC & CA; invenire
pondus sustentandum.

RESOLUTIO.

1. Quærat, ut in Problemate præce-
dente, pars ponderis a Vecte solo
sustentanda.

2. Quærat eadem ratione pars alte-
ra ponderis, quam potentia in B
applicata sustentare valet.

3. Jungantur partes sigillatim repertæ
in unam summam. Ita prodit pon-
dus quæsitum.

Sit ex. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5,
G = 10, potentia 56 librarum: inve-
nietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

pondus integrum = 300

PROBLEMA CXX.

770. Datis gravitate Vectis hetero-
dromi AB, pondere sustentando G, po-
tentia in B applicanda, longitudine ac
Centro gravitatis Vectis V; invenire
Centrum gravitatis commune seu cen-
trum motus C.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers,
& ejus loco in Centro gravitatis
V appensum pondus G. Quærat
Centrum gravitatis commune Z po-
tentia in B applicata & ponderis
G (§. 149).

2. Subtrahatur ZB ex AB, relinque-
tur AZ.

3. Concipiatur denique in Z appen-
sum pondus gravitati Vectis & po-
tentia junctim sumptis æquale, &
inveniat hujus ponderis & pon-
deris dati O Centrum gravitatis
commune C (§. 149); quod quære-
batur.

Ex. gr. Sit potentia in B 56, gravitas
vectis 10, pondus O 300 librarum, AB
= 6, VB = 3. Fiat

Tab.V. 66 — 10 — 3

Fig. 58.

$$\frac{3}{30}$$

$$\begin{array}{r} ZB = \frac{10}{66} = \frac{5}{33} \\ AB = \frac{66}{11} \\ AZ = \frac{61}{11} \end{array}$$

$$366 — 66 — \frac{61}{11} \quad (1 = AC)$$

PROBLEMA CXXI.

Tab.V. 771. *Datis gravitate & Centro gravitatis F Vectis homodromi CB, pondere G, distantia ejus ab hypomochlio CA, una cum distantia potentie CB; invenire potentiam qua pondus sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiatur Vectis gravitatis expers & ejus loco in F appensum pondus ei æquale, quæraturque potentia vectem solum sustentatura (§. 765).
2. Quæratur porro potentia requisita ad pondus datum G sustentandum (§. cit.).
3. Addantur potentie figillatim repetite in unam summam. Ita prodit potentia quæsitæ.

Sit ex. gr. $CA = 1$, $CF = 3$, $CB = 6$, pondus datum 300, gravitas Vectis 10 librarum. Reperietur potentia Vectem sustentatura 5, pondus vero solum sustentatura 50, adeoque potentia integra 55 librarum.

THEOREMA CLXXIX.

772. *Si potentia Velle sive heterodromo sive homodromo, pondus attollit; spatium illius est ad spatium hujus, ut hoc ad potentiam qua idem pondus tantum sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Dum pondus attollitur per arcum *Tab.V. Aa*, potentia movetur per arcum *Bb*. *Fig. 58. 59.* Sunt vero arcus *Aa* & *Bb* similes, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad *C* æquales (§. 156 *Geom.*); in homodromo, quia concentrici, consequenter $Aa : Bb = AC : CB$ (§. 138 412 *Geom.*). Sed ut *AC* ad *CB* ita potentia ad pondus, quod sustentare valet (§. 765). Ergo spatium potentie ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quæ idem sustentare valet (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

773. *Lucrum itaque virium cum temporis dispendio conjungitur & contra.*

PROBLEMA CXXII.

774. *Stateram construere; hoc est, Instrumentum quo, unico pondere mediante, diversorum corporum gravitates explorare licet.*

RESOLUTIO.

1. In virga ferrea, aut lignea, aut ex *Tab.V. quacunque materia alia parata AB*, *Fig. 66.* assumatur ad arbitrium punctum *C* & in eo perpendiculariter erigatur examen seu lingua *CD*.
2. Jugum intra trutinam seu scapum *GF* suspendatur, &
3. Brachium minus *AC* unco *AH* & lance *G* alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquibretur, aut non multum ab æquilibrio ablit.

Tab.V.4. Fig.66. Ponderus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duabus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, & notentur puncta in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipsa constructio loquitur, hoc modo, unci ponderis I ope, pondera corporum admodum differentium explorari posse (§. 765).

SCHOLIUM I.

775. Quodsi onera ingentia, quales sunt Curvus sæno onusti, ponderanda; non opus est, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illa Statera trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin sufficit, nudo oculo facile dignoscitur.

SCHOLIUM II.

776. Empirica Statera, qua utuntur artifices, divisio geometrica præferenda est, qua brachium longius BC ejusdem ubique spissitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiae conditio artificumque negligentia patitur, ut constructio satis sit accurata.

SCHOLIUM III.

777. Cum pondera non ubivis locorum æqualia sint: Statera quoque empirico modo constructa universales non sunt.

SCHOLIUM IV.

778. Utut autem commodissimus sit Statera usus, quia non multis opus est ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam præscribi præstat, quoniam venditores fraudulentum fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu sit fallaciam retegere. Ad communem itaque usum construuntur Libræ æqualium brachiorum. Sed antequam earum constructionem tradamus; fundamenta quadam theoretica sunt præmittenda.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA CLXXX.

779. Si Libra, cujus centrum motus C fuerit supra rectam e cujus extremis pendent pondera æqualia H & I, horizonti sit parallela; quiescit: sed si inclinatur; tamdiu movetur donec iterum horizonti sit parallela. Tab.V. Fig.67.

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad id sunt perpendiculares, (§. 212); adeoque brachia AL & LB coincidunt cum distantis a centro motus (§. 229). Quare cum sit $AL = LB$, erit in L Centrum gravitatis commune ponderum (§. 145). Ex hoc igitur suspensa quiescunt (§. 124). Quod erat unum.

Quodsi ex situ suo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt distantia GE & EF (§. 229), quæ cum inæquales sint, pondera non æquilibrantur (§. 765), sed alterum I præponderat (§. 152): quod cum descendat, redit Libra in statum horizonti parallelum. Quod erat alterum.

THEOREMA CLXXXI.

780. Si Libra æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus infra jugum AB, fuerit horizonti parallela; quiescit: si vero inclinatur; in statum horizontalem non revertitur, sed descendit pondus unum, donec Libra pervenerit in situm priori contrarium. Tab.V. Fig.68.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Si jugum AB fuerit horizontale, Fig.68. erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), adeoque distantia a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Est vero $AL = LB$, ex natura Libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia sint, per *hypoth.* Centrum gravitatis commune eorundem est in C (§. 145), adeoque situm non mutat (§. 124). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis, & per E recta GF eidem parallela; erunt distantia GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori distantia EG (§. 152), adeoque continuo descendit, donec A, B & L sint in eadem recta horizontali. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CLXXXII.

Tab.V. 781. Si Libra, aequalibus ponderibus Fig.69. utrimque onusta, cujus centrum motus C in ipso jugo AB, fuerit horizonti parallela; quiescit, nec quomocunque inclinata situm mutat.

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in Theoremate præcedente. Posterius ita demonstratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE distantia ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad E & D, atque verticales angulos ad C æquales (§. 156 *Geom.*), itemque $AC = CB$, ex natura Libræ, erit $DC = CE$ (§. 252 *Geom.*). Qua-

re cum pondera H & I æqualia sint per Tab.V. *hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Fig.69. Libra igitur quiescit. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXIII.

782. Libram construere, hoc est; instrumentum, in cujus extremitatibus appensa gravia aequalia æquponderant in situ horizontali.

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, Tab.V. ita ut brachia AC & CB sint eju- Fig.70. dem longitudinis; sintque tum brachia cum uncis suis A & B, tum lances D & E ejusdem prorsus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appensum, tam lancibus instructum quam sine iisdem, situm tueatur horizontalem.
2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen, sive lingua CF.
3. Jugum denique intra trutinam HI ita suspendatur, ut centrum motus C sit paulo supra jugum seu rectam AB, quæ appensionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus sit in ipsa recta AB.

Dico, si, Libra ex trutina HI suspensa, examen intra eandem abscondatur, gravia lancibus imposita esse æqualia, seu gravitatem utriusque esse eandem.

DEMONSTRATIO.

Si Libra ex I suspendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215). Quod ergo lingua

Tab.V. lingula intra eam absconditur, cum ea Fig.70. fit ad jugum AB perpendicularis, per constructionem, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C sit vel in jugo AB, vel supra jugum, per construct. pondera utrinque suspensa æqualia sunt (§. 779, 781). Q. e. d.

COROLLARIUM.

783. Si brachia sint inæqualia, Libra dolosa est.

SCHOLIUM I.

784. Præstat brachia esse longiora, quam breviora, quia idem error in divisione brachiorum admissus minorem in ponderibus producit, si brachia longiora, quam si breviora. Fac enim brachium AC esse justo longius uno scrupulo quarto, seu una decima linea. Si brachium AB = 5", erit BC : AC = 500 : 501. Si AB = 5', erit BC : AC = 5000 : 5001. In casu itaque posteriori differentia brachiorum est $\frac{1}{5000}$; in priore $\frac{1}{500}$ brevioris. Hinc & pondus majus in casu posteriore excedere debet minus $\frac{1}{5000}$ sui, in priore autem $\frac{1}{500}$ sui.

SCHOLIUM II.

785. Vulgares Libra ita construuntur, ut centrum motus sit paulo altius jugo, quo Libra ex situ horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appensis, non quiescat, nisi eidem restituta (§. 779). Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.

SCHOLIUM III.

786. Ne affricus impediatur jugi è situ horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inseritur, cylindricus sit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi perniciosior evadit, si axis in aciem desinat, qua parte trutinam

tangit. Unde & jugum leve ac tenue esse debet, quantum per materiam ponderandam fieri potest, ut minori vi e situ suo dimoveatur si que accuratius indicet æquilibrium.

PROBLEMA CXXIV.

787. Libram propositam examinare, verum accurata sit, necne.

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quod si enim maneat æquilibrium, Libra accurata est; sin minus, dolosa.

DEMONSTRATIO.

Si enim Libra dolosa est, brachia inæqualia sunt (§. 783), adeoque lance ex majori brachio suspensa levior altera (§. 765). Quare si lancem leviolem e minori, graviolem e majori brachio suspendas: præponderabit e majori brachio suspensa, adeoque æquilibrium tollitur (§. 152). Q. e. d.

PROBLEMA CXXV.

788. Libram dolosam verum pondus mercis explorare. Tab.V. Fig.70.

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collocata, notetur pondus in altera D ipsi æquilibratum.
2. Eadem translata in D, notetur pondus in E ipsi æquilibratum.
3. Pondera ista in se iavicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc esse verum mercis pondus.

Sit ex. gr. pondus in E = 10, in D = 9 librarum, reperietur verum mercis pondus

$9\frac{49}{100}$.

DEMONSTRATIO.

Tab.V. Est enim ut AC ad BC, ita merx ad pondus in D positum; & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§. 765). Ergo mercis pondus est medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 167, 156 *Arithm.*) consequenter æquale radici ex facto ponderum in se invicem extractæ (§. 501 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

89. Si verum mercis pondus inventum, ratio brachiorum non amplius latet. Est enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipsi æquilibratum (§. 765); ex gr. in nostro exemplo ut 248 ad 900, seu ut 237 ad 225 (§. 181 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

90. Data ratione brachiorum AC & CB, facile determinatur error in æquilibrio admittis (§. 765). Equiponderentur ex gr. in lancē E 100 libræ merci in altera D collocatæ. Ut habeatur questum, fiat

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 237 \\ \hline 23700 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22500 \\ \div 237 \\ \hline 95 \text{ fere} \\ 1170 \\ 1185 \end{array}$$

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM III.

91. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, indens dicit. Si enim juxta integram 1000 partium, fiat ut summa brachiorum 237 & 225 seu 462 ad majus 237, ita 1000 ad idem brachium in partibus juxta millefimis 513 fere. Sed ex auctura librarum esse debet 500: excidit ergo veram quantitatem partium 13, qualem scilicet juxta est 1000.

THEOREMA CLXXXIII.

792. Si potentia, ope Axis in Peritrochio, sustentet pondus G, sitque linea directionis AL ad peripheriam rota vel ad fixatam perpendicularis; erit ut radius axis CE ad radium rota CA seu longitudinem fixata, ita potentia ad pondus.

Tab. VI. Fig. 71.

DEMONSTRATIO.

Quod si potentia in A applicata deprimat rotam vel fixatam, perinde est ac si velle heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G sustentaret. Si vero in A applicata eandem attollit, perinde est ac si velle homodromo AEC pondus idem G sustentaret. Omnes enim machine partes reliquæ ad ponderis sustentationem nil conferunt, cum utrinque sibi mutuo æquibrentur, ut machina tanquam gravitatis experta considerari possit. Jam cum linea directionis potentie in A vel in ad AC vel in C perpendicularis, per longum & finis EG a pondere G extensus ad EC horizontalem perpendicularis similiter normalis (§. 215) erit ut CE ad CA, vel ut CE ad CA; ita potentia ad pondus (§. 765). Q. e. d.

THEOREMA CLXXXIV.

793. Si motus in F deprimat rotam juxta hanc directionem FD ad radium rota perpendicularis sed directionem perpendicularis parallelam; ad potentiam, que per hanc directionem perpendicularis AL agit, non habet rationem, quam summa motus ad summa anguli directionis DFC.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Quoniam FD perpendicularis ad AC, per hypoth. erit DC potentiae in F applicatae distantia a centro motus C (§. 229). Est ergo ut potentia in F ad pondus G, ita EC ad CD (§. 272): & ut potentia in A ad pondus G, ita EC ad CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 199 Arithm.). Sed si AC vel FC (§. 40 Geom.) sumatur pro sinu toto, erit DC sinus anguli DFC (§. 2 Trigon.). Potentia igitur in A est ad potentiam in F, ut finis totus ad sinum anguli directionis DFC. Q. e. d.

COROLLARIUM.

794. Quare cum distantia potentiae in A sit radius CA; dato angulo directionis DFC, inveniri potest distantia DC.

Sit ex. gr. $FC = 4''$ & $DFC = 48^\circ$: Calculus ita subducentur:

Log. sin. tot.	100000000
Log. FC	0.6020600
Log. sin. DFC	98710735

Log. DC 404731335
cui quam proxime respondent in Tabulis
2' 9" 7".

THEOREMA CLXXXV.

795. Potentia in diversis punctis F & K, rotam juxta directiones FD & KI perpendiculari AL parallelas deprimentes, sunt inter se ut distantia a centro motus CD & CI reciproce.

DEMONSTRATIO.

Est enim potentia in F ad pondus G, ut EC ad CD; & idem pondus G ad potentiam in K, ut IC ad CE (§. 793). Ergo potentia in F ad potentiam in K, ut IC ad CD (§. 198 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

796. Crescente adeo distantia a centro motus, potentia decrescit, & contra, pondere manente eodem.

COROLLARIUM II.

797. Quare cum radius AC sit distantia maxima, & potentiae juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quae datum pondus G sustentare valent juxta diversas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM III.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 256 Geom.). Quare si ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipsi AC parallela (§. cit.), consequenter $FM = DC$ (§. 257 Geom.). Cum adeo FM sit distantia potentiae in F applicata; in praxi facile definitur absque calculo.

THEOREMA CLXXXVI.

799. Si potentia juxta perpendicularem AL deprimit rotam & pondus G attollit; erit spatium potentia ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam quae id sustentare valet.

DEMONSTRATIO.

Dum rota semel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per spatium peripheriae axis aequale. Est itaque spatium potentiae

Tab. ad spatium ponderis, ut peripheria rotæ
 VI ad peripheriam axis; consequenter ut
 Fig. 71. radius rotæ AC ad radium axis CE
 (§. 412 Geom.). Sed ut AC ad CE, ita
 pondus ad potentiam quæ id sustentare
 valet (§. 792). Ergo spatium po-
 tentiæ est ad spatium ponderis, ut pon-
 dus ad potentiam quæ id sustentare
 valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA CXXVI.

800. *Dato pondere, distaque potentia
 ipsam sustentante; Axem in Petrochio
 esse fracte.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur radius Axis ponderi su-
 fferendo conveniens, ne scilicet
 axis frangatur.
2. Fiar ut potentia ad pondus, ita ra-
 dius axis ad radium rotæ, seu lon-
 gitudinem scytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

801. Quodsi potentia fuerit pars ponde-
 ris exigua, radius rotæ enormis prodit.
 Ex. gr. Si pondus 3000, potentia 50 li-
 brarum; erit radius rotæ ad radium axis,
 ut 60 ad 1. Hinc si radius axis non ex-
 cederet pedem dimidium, foret radius
 rotæ pedum 30.

SCHOLIUM.

802. *Hic modo modis offertur, rotas
 cum axibus multiplicando; & ut una al-
 teram circumagere valeat, dentibus vel etiam
 tympanis parvis inferendo.*

THEOREMA CLXXXVII.

Tab. 803. *Si pluribus rotis dentatis po-
 VI tentia æqua, cujus linea directionis
 Fig. 72. NL peripheriam ultimæ tæxerit, pondus
 H sustentat; erit ea in ratione compo-
 sita omnium certam quas radii axium*

*ad radios rotarum habent; nempe Tab.
 CB: CD, EF: EG, HI: HK. VI
 Fig. 72.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi concipiamus potentiam ap-
 plicari in D: erit ea ad pondus A ut
 CB ad CD (§. 792); consequen-
 ter = A. CB: CD (§. 297 Arithm.).
 Axis igitur DF tantopere gravatur,
 ac si pondus A. CB: CD appende-
 retur. Concipiamus itaque porro po-
 tentiam in G applicari, quæ hoc
 pondus, ope rotæ alterius solius, con-
 sequenter pondus A ope duarum sus-
 tenter. Cum sit ad pondus A. CB: CD,
 ut EF ad EG (§. 792); repe-
 rietur = A. CB. EF: CD. EG (§.
 297 Arithm.). Quare axis tertius GI
 tantopere gravatur, ac si pondus
 A. CB. EF: CD. EG appenderetur. Quo-
 niam potentia in K est ad hoc pon-
 dus, ut HI ad HK (§. 792); repe-
 rietur ea = A. CB. EF. HI: CD.
 EG. HK (§. 297 Arithm.), & ita
 porro, si plures fuerint rotæ. Est
 igitur potentia in K applicata ad pon-
 dus A quod ope plurimum rotarum
 sustentat, ut A. CB. EF. HI: CD.
 EG. HK ad A; hoc est, ut A. CB.
 EF. HI ad A. CD. EG. HK (§. 178
 Arithm.), adeoque & ut CB. EF. HI,
 ad CD. EG. HK (§. 181 Arithm.);
 consequenter in ratione composita
 CB: CD, EF: EG & HI: HK
 (§. 159 Arithm.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

804. Quodsi pondus ducas in factum ex
 radiis axium, & productam divides per fa-
 ctum ex radiis rotarum; potentia ipsum
 sustentatura reperitur, quæ antea idem
 attollet.

Tab. attollet. Sit ex. gr. $A = 6000$ librarum, VI. $BC = 6''$, $CD = 34''$, $EF = 5''$, $EG = 35''$, $HI = 4''$, $HK = 27''$; erit $BC \cdot EF \cdot HI = 120$. & $CD \cdot EG \cdot IK = 32130$ & hinc potentia $= 6000$. $120 : 32130 = 22\frac{1}{3} : 213$ $= 22\frac{1}{3} : 213$ $= 22\frac{1}{3}$ quam proxime.

COROLLARIUM II.

805. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum divides per factum ex radiis axium; probabit pondus quod sustentare valet. Sit ex. gr. potentia $22\frac{1}{3}$ librarum, reliqua omnia sint ut ante; reperietur pondus 6000.

SCHOLIUM.

Tab. 806. Loco ultima rota in praxi adhibetur VI. manubrium ABCD, ubi AE radio axis, CD radio rota respondet. Fig. 73.

PROBLEMA CXXVII.

807. Data potentia, datoque pondere; invenire numerum rotarum, & in unaquaque rationem radii axis ad radium rota definire, ita ut potentia peripheria rota ultima applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum sustentet.

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus dispergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium se habere ad radios rotarum ut unitatem ad radios singulos.

Sit ex. gr. pondus 3000 librarum & potentia 60, erit quotus 500, qui resolvitur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur construi possunt rotæ, in quarum una ra-

dius axis est ad radium rotæ, ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur, unitas est ad quotum, ut potentia ad pondus (§. 69 *Arithm.*). Est igitur potentia ad pondus in ratione composita unitatis ad singulos factores (§. 159 *Arithm.*). Quare si radii axium fiant ad radios rotarum, ut unitas ad eosdem factores; potentia erit ad pondus in ratione composita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus sustentare valet ope machinæ constructæ (§. 803). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

808. Quoniam in excessu peccari nequit; consultum est, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem assumere. Similiter unam, immo aliquot unitates quoto addere licet, si in factores commode dispergi nequit.

THEOREMA CLXXXVIII.

809. Si ope duarum rotarum potentia movet pondus; revolutiones tardius mota sunt ad revolutiones celerius mota, ut peripheria axis celerius mota ad peripheriam rota cui occurrit. Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius mota M unam revolutionem absolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, consequenter rota N, circumvolvitur, antequam rota M unam revolutionem absolvit, quoties peripheria axis FE in peripheria rotæ M continetur.

Sunt,

Tab. VI. Fig. 72. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ, ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

§10. Eadem igitur revolutiones sunt ut radius axis FE, ad radium rotæ DC (§. 412 Geom.).

COROLLARIUM II.

§11. Cum numerus dentium in axe FD sit ad numerum dentium in peripheria rotæ M, ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium seu paxillorum in axe ad numerum dentium in rotæ M cui iste occurrit.

THEOREMA CXXXIX.

§12. Si ope plurimum rotarum M, N, O &c. potentia movet pondus A; erunt revolutiones rotæ celerissime motæ O ad revolutiones tardissime motæ M, in ratione composita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium IG, FD &c. & peripheriarum rotarum N, M &c. quibus illi occurrunt.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N m & n , peripheriæ axium DF & GI a & b ; erit ut a ad m ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) $= m : a$ (§. 302 Arithm.). Est vero porro ut b ad n ita m : a ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) $= mn : ab$ (§. 302 Arithm.). Quare revolutiones rotæ celerissime motæ O sunt ad revolutiones rotæ tardissime motæ M, ut $mn : ab$ ad 1 , hoc est ut mn ad ab (§. 178

Arithm.), consequenter in ratione composita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI qui ipsis occurrunt (§. 159 Arithm.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

§13. Quoniam numeri dentium sunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM II.

§14. Quia peripheriæ sunt ut radii, (§. 412 Geom. revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O, in ratione composita earum quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM III.

§15. Quare si factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardissime motæ M, & productum divides per factum ex radiis axium qui ipsis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velocissime motæ O (§. 302 Arithm.). Ex gr. sit GE = 8, DC = 12, GH = 4, DE = 3, & revolutio rotæ M una; erit numerus revolutionum rotæ O = 96 : 12 = 8.

PROBLEMA CXXVIII.

§16. Datis revolutionibus rotæ velocissime circumactæ O interea absolutis, dum tardissime motæ M semel in orbem redit; invenire dentium in axibus & rotis numerum.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum dispergatur in factores.
 2. Numerus dentium seu paxillorum in axibus pro arbitrio assumptus ducatur sigillatim in singulos factores.
- Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum quibus totidem axes occurrunt.

Ex. gr. Si rota velocissime mota 40 revolutiones absolvat, dum tardissime mota semel circumagitur; resolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus esse rotis totidemque axibus dentatis qui istis occurrant. Quod si axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis instruenda, figuram sortitura pro potentia applicanda conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutions rotæ tardissime motæ, sunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis quibus occurrunt (§. 811). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ resolvitur; fitque adeo unitas ad factores hosce, ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis quibus occurrunt (§. 66 *Arithm.*); revolutiones rotæ tardissime motæ erunt ad revolutiones velocissime circumactæ, in ratione composita unitatis ad factores numeri revolutionum posteriorum dati, *Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.*

consequenter ut unitas ad ipsum hunc numerum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA CXC.

817. Si ope plurium rotarum potentia movet pondus; spatium ponderis est ad spatium potentia, ut potentia sustentans ad pondus.

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. a, b, c, &c. axium CB, DE, GH &c. d, e, f &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M semel in orbem redit = $ab : ef$ (§. 812). Jam si rota M semel circumagitur, spatium a pondere percursum æquatur peripheriæ axis BC; spatium vero potentia, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea absolutarum multiplicata. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentia, ut d, ad $abc : ef$; consequenter ut def ad abc (§. 178 *Arithm.*). Sed $d : a = CB : CD$; $e : b = DE : EG$; $f : c = GH : HK$ (§. 412 *Geom.*); adeoque $def : abc = CB. DE. GH : CD. EG. HK$ (§. 218 *Arithm.*). Ergo spatium ponderis ad spatium potentia, ut CB. DE. GH ad CD. EG. HK (§. 167 *Arithm.*); & ideo ut potentia sustentans ad pondus (§. 812). *Q. e. d.*

Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA CXCI.

819. Spatia ponderis atque potentia sunt in ratione composita revolutionum

E e

rota

rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ, & peripheriæ axis istius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardissime motæ $= m$, numerus revolutionum velocissime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria posterioris $= b$. Cum in una revolutione spatium ponderis sit a , potentia b ; erit spatium ponderis, durantibus revolutionibus m , $= ma$; spatium potentia, durantibus revolutionibus n , $= nb$. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentia, ut ma ad nb , hoc est, in ratione composita revolutionum m & n , atque peripheriæ axis rotæ tardissime motæ a & peripheriæ rotæ velocissime motæ b (§. 159 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

§20. Cum spatia ponderis & potentia sint reciproce ut potentia sustentans, ad pondus (§. 817); potentia sustentans pondus erit ad pondus, in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones velocissime motæ, & peripheriæ axis istius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA CXXIX.

§21. *Data peripheria axis rotæ tardissime motæ, cum peripheria rotæ velocissime motæ, & ratione revolutionum rotæ istius ad revolutiones hujus; invenire spatium quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur spatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardissime motæ in antecedentem, & pe-

ripheria rotæ velocissime motæ in consequentem rationis.

2. Quærat ad hæc duo facta & spatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is spatium potentia quæsitum. (§. 819).

Sit ex. gr. ratio revolutionum rotæ tardissime motæ ad revolutiones rotæ velocissime motæ $= 2 : 7$, & spatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardissime motæ sit ad peripheriam velocissime circumactæ, ut 3 ad 8. Reperietur spatium potentia $= 7$. $8 \cdot 30 : 2 \cdot 3 = 7$. $4 \cdot 10 = 280'$.

PROBLEMA CXXX.

§22. *Data peripheria rotæ velocissime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem, & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardissime motæ quam revolutionum utriusque; invenire spatium ponderis.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velocissime motæ in numerum revolutionum ejusdem; factum erit potentia spatium.
2. Ducantur quoque in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
3. Quærat ad hæc duo facta & spatium potentia modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is spatium ponderis quæsitum (§. 819).

Ex. gr. Sit peripheria rotæ velocissime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis ex quo pondus suspenditur $= 8 : 3$, numerus revolutionum $= 28$, ratio revolutionum $= 7 : 2$. Reperietur spatium ponderis $= 3$. $2 \cdot 28 \cdot 10 : 8 \cdot 7 = 3$. $10 = 30$.

PROBLEMA CXXXI.

823. *Data ratione peripheriarum rota velocissime mota atque axis rota tardissime mota, itemque revolutionum utriusque, una cum pondere; invenire potentiam qua id sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in se invicem, tam antecedentes quam consequentes datarum rationum.
2. Quærat ad factum antecedentium, factum consequentium, & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæsitæ (§. 820).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperietur potentia = 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = 214 $\frac{2}{7}$.

SCHOLIUM.

824. *Non absimili modo pondus invenitur, si potentia detur, & ratio tam peripheriarum axis rota tardissime mota & rota velocissime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA CXXXII.

825. *Datis revolutionibus rota velocissime mota interea absolvendis, dum tardissime mota semel in orbem redit, una cum spatio per quod pondus elevari debet, & periphæria rota tardissime mota; invenire tempus elevationi quæsitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat ut periphæria axis rotæ tardissime motæ ad spatium ponderis datum, ita numerus revolutionum ro-

tæ velocissime motæ datus ad quartum proportionalem, qui erit numerus revolutionum interea absolvendarum dum pondus emetitur spatium datum.

2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ, intra unius horæ spatium aut tempus datum quodcumque, absolvendarum.
3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis paulo ante inventus. Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA CXCII.

826. *Si potentia P ope Trochleæ sim-Tab.V. plicis Q pondus sustentat, ita ut linea ^{Fig.61.} directionis utriusque tangat periphæriam; erit huic equalis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentie atque ponderis periphæriam Trochleæ tangunt, per hypoth. ad radios AC & CB perpendiculares sunt (§. 304 Geom.). Jam cum ad sustentationem, præter rectam ACB, partes reliquæ nil conferant, sitque centrum motus in C (§. 759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 765). Sed CB = CA (§. 40 Geom.). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

827. Trochlea igitur simplex, si lineæ directionis potentie atque ponderum periphæriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, sed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM II.

828. Utimur ergo Trochlea, quoties potentia trahentis directio verticalis in horizontalem, aut sursum tendens in tendentem deorium, & contra mutari debet.

SCHOLIUM I.

Tab. VI. Fig. 74. 829. Hoc ipso securitati trahentium sapissime prospicitur. Fac enim pondus ingens esse ad insignem altitudinem attollendum ab Operariis funem trahentibus. Quodsi contingat funem DE abrumpi & Operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vite periculo constituuntur. Enimvero si ope Trochlea B directio verticalis AB in horizontalem BC mutatur, rupto fune DE nihil metuendum periculi.

SCHOLIUM II.

830. Hac ipsa mutatio lineæ directionis ope Trochlearum in horizontalem hunc etiam præstat usum, ut, si potentia aliqua secundum unam directionem plus virium impendere possit quam secundum alteram, vi maxima utamur; nec non ut potentiis uti liceat quæ juxta datam directionem agere non possent. Ex. gr. equus non trahit secundum directionem verticalem, trahit tamen secundum horizontalem. Verticalis igitur tractio si mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.

THEOREMA CXCIII.

Tab. VI. Fig. 75. 831. Si potentia in E applicata secundum lineam directionis BE, quæ Trochleam in B tangit & funi AD parallela est, pondus F ex centro Trochleæ C suspensum sustentet; ponderis subdupla est.

DEMONSTRATIO.

Patet enim, præter rectam AB, partes Trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F sustentationem. Cum vero

Trochlea sit circa centrum C mobilis (S. 759), in eo erit centrum motus. Et quia, tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentia BE ad AB perpendicularis per hypoth. erit potentia in E ad pondus F, ut AC ad AB (S. 765). Est vero $AC = \frac{1}{2} AB$ (S. 759). Ergo potentia ponderis F subdupla. Q. e. d.

SCHOLIUM.

832. Cum Trochlea cum unco suo & loculamento, quod in usu abesse nequit, una attollatur a potentia sursum trahente secundum directionem EB, ejus gravitas ponderi F addenda est.

THEOREMA CXCIV.

833. Si potentia in B applicata ope Polyspasti sustentet pondus F ita ut omnes funes AB, HI, GF, EL, CD sint inter se paralleli; erit potentia ad pondus, ut unitas ad numerum funium HI, GF, EL, CD, qui a pondere F trahuntur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes sunt inter se paralleli, adeoque a centris Trochlearum suarum intervallo radiorum utrinque distant; nulla est ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit, adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, si fuerint funes quatuor, perinde sit ac si tantum pars quarta ponderis ex fune CD suspenderetur. Potentia igitur in B applicata, cum æqualis sit ponderi ex fune CD suspeso (S. 826); quartam

Tab. VI. Fig. 76. quartam non nisi ponderis partem in præfenti casu sustentat, hoc est, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium quos pondus F extendit. Q. e. d.

SCHOLIUM I.

834. Ne Polyspastorum altitudo in nimium excrescat; si ex pluribus Trochleis componantur; Trochleæ ita junguntur, ut tam omnes superiores, quam omnes inferiores circa communem axem versatiles existant. Tum vero omnes inter se æquales esse debent, ut funes sint paralleli.

SCHOLIUM II.

835. Usus Trochlearum insignis est in ponderibus elevandis; tum quod machina spatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod insigni virium compendio pondus satis ingens attolli possit.

COROLLARIUM I.

836. Cum numerus Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum æqualis sit numero funium inferiores sustentantium; potentia pondus F ope Polyspasti sustentans est ad pondus, ut unitas ad numerum Trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum.

COROLLARIUM II.

837. Datis igitur Trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus sustentandum; potentia nempe per pondus multiplicatur. Sit ex. gr. potentia 50 librarum, numerus Trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLIUM III.

838. DECHALE'S (a) autor est, experientia constare, quod homo simpliciter solo insistens 150 libras elevare possit. Cum igitur 150 librarum potentia ope Polyspasti ex 6 Trochleis compositi 900 libras sustentare

(a) Mechanic. Lib. 4. prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. m. 189.

possit; evidens est, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere possit. Tab. VI. Fig. 76.

SCHOLIUM IV.

839. Mire multiplicantur Trochlearum vires, si polyspasti plures conjunguntur, tum enim potentia, in Polyspasto uno ad attollendum pondus Q applicanda, vicem subit ponderis F ex Polyspasto altero appensi. Ponamus igitur pondus Q esse 1000 librarum, & Trochleas in unoquoque Polyspasto quatuor; erit ergo pondus P ex altero Polyspasto suspensum nonnisi quarta illius pars, nempe 250, consequenter potentia quarta pars hujus, hoc est, decima sexta totius, 62½.

PROBLEMA CXXXIII.

840. Datis pondere atque potentia; invenire numerum Trochlearum ex quibus componendus est Polyspastus.

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quaesitus (§. 836).

Sit ex. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus Trochlearum 4; quarum omnium eadem diameter, si duæ in parte inferiore, duæ in superiore circa communem axem versatiles construantur (§. 834).

THEOREMA CXCIV.

841. Si potentia Trochlearum ope movet pondus; erit spatium potentia ad spatium ponderis, ut pondus ad potentiam sustentantem.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens est, funium omnium, ex quibus Trochleæ inferiores cum pondere sustentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui

debere. Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot sunt funes Trochleas inferiores sustentantes. Quare spatium ejus est ad spatium ponderis, ut numerus funium Trochleas inferiores sustentantium ad unitatem; consequenter ut pondus ad potentiam sustentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

§42. Quo minor itaque potentia pondus ope Polyspasti attollit, eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis dispendio jungatur.

THEOREMA CXCVI.

Tab. XVIII. Fig. 178. §43. Si potentia in F applicata suspendit pondus E secundum directionem obliquam BD, & hujus directio sit itidem obliqua ED, linea vero directionis Trochleæ DG per centrum C transit; erit potentia ponderi æqualis, & tam ista quam hoc ad vim qua trochlea in L retinetur, ut sinus anguli ADB ad sinum anguli dimidii.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim funes DF & DE quomocunque extensi Trochleam in B & A tangunt, si ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 308 Geom.) & AD = DB (§. 325 Geom.). Quare cum etiam sit AC = CB (§. 40 Geom.); erit angulus ADC ipsi CDB æqualis (§. 179 Geom.). Jam perinde est ac si mobile aliquod secundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus secundum directiones AD & DB trahentibus, illique æquipollenti-

bus, propter statum æquilibræ, ex hypothesi. Est adeo vis in F applicata ad pondus E, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales per demonstrata, adeoque & sinus eorum (§. 142 Geom. & §. 2 Trigon.). Quamobrem pondus potentia æquale est. *Quod erat unum.*

Jam potentia est ad vim Trochleam secundum directionem DC sustentantem, ut sinus anguli ADC ad sinum anguli ADB; & pondus E ad eandem vim, ut sinus anguli BDC ad sinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales sint, per demonstrata, adeoque dimidii anguli ADB; erit vis Trochleam sustentans, in statu æquilibræ ponderum E & F; ad horum alterutrum, ut sinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt, ad sinum anguli dimidii. *Quod erat alterum.*

THEOREMA CXCVII.

Tab. XVIII. Fig. 179. §44. Si ponderis G linea directionis DC per centrum Trochleæ transit, & Trochlea trahatur secundum directiones obliquas ED & DF; erunt hæc vires inter se æquales; earum vero alterutra ad pondus, ut sinus anguli a directionibus obliquis intercepti ADB ad sinum anguli dimidii ADC.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata litera hæc transcribi tota possit.

COROLLARIUM.

845. Quoniam sinus anguli dimidii non est dimidius totius; seu, quod perinde est, simpli anguli sinus non est dimidius dupli (§. 325 *Analys. fin.*); in casu directionum obliquarum, potentia pondus, cujus directio per centrum Trochleæ tranfit, sustentans non est ponderis dimidia.

SCHOLIUM.

846. Ex duobus hisce Theorematis deduci possunt, quæ de Trochleis in casu directionum obliquarum præterea demonstranda sunt; quæ admodum videre est apud VARIGNONIUM, qui hanc Staticæ partem diffuse pertractat (a).

THEOREMA CXCVIII.

Tab.V. 847. Si pondus vel resistentia Cochleæ Fig.62. superanda fuerit ad potentiam, ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam binarum helicum BI; potentia ponderi equipollet.

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, sunt ut spatia eodem tempore descripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI (§. 33). Sed vires mortuæ sunt in ratione composita celeritarum & massarum (§. 278). Quare cum potentia pondus æquale substitui possit (§. 763), fitque pondus potentia æquale ad pondus elevandum aut deprimendum, reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI, per hypoth. celeritates sunt ut massæ reciproce. Ergo vis potentia est ad vim

(a) *Nouvelle Mécanique, ou Statique* Tom. I. Sect. 3. p. 283. & seqq.

ponderis, ut factum ex massa potentia in massam ponderis ad factum ex massa ponderis in massam potentia (§. 159 *Arithm.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arithm.*); vires æquales sunt. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

848. Cum peripheria a potentia percursa in una Cochleæ conversione sit spatium ejus, distantia autem duarum helicum BI respondeat spatium ponderis; erit hic quoque spatium ponderis ad spatium potentia, ut reciproce potentia sustentans ad pondus.

COROLLARIUM II.

849. Virium itaque compendium cum temporis dispendio denuo conjungitur.

THEOREMA CXCIX.

850. Si distantia helicum BI minor fuerit, potentia ad eandem resistentiam superandam applicata minor est, quam si illa major fuerit.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium potentia ad helicum distantiam, ita pondus, ad potentiam (§. 847). Quod si ergo helicum distantia minuitur, spatium potentia ad eandem (§. 205 *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Est igitur potentia in casu posteriore minor, quam in priore (§. 206 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA CC.

851. Si Cochleæ mas intra feminam Tab. VI. quiescentem convertitur; minor potentia ad eandem resistentiam superandam requiritur, si scytala CD longior, quam si brevior. Fig.78.

DEMONSTRATIO.

Tab.
VI.
Fig. 78.

Ut peripheria, scytala CD tanquam radio descripta, ad helicum distantiam IK, ita resistentia superanda ad potentiam (§. 848). Sed si scytala longior, major peripheria describitur quam si brevior (§. 412 *Geom.*). Ergo in illo casu peripheria ad distantiam helicum IK (§. 203 *Arith.*), consequenter & resistentia superanda ad potentiam majorem rationem habet, quam in hoc casu. Quare cum resistentia eadem maneat, per hypoth. potentia in casu posteriore major, quam in priore (§. 189 *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA CXXXIV.

852. Data distantia potentie a centro Cochleæ CD, distantia helicum IK, & potentia in D applicata; determinare resistentiam superandam: vel hac data invenire illam.

RESOLUTIO.

1. Quærat peripheria circuli radio CD describenda (§. 429 *Geom.*).
2. Quærat porro ad distantiam helicum, peripheriam modo inventam, & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, distantiam helicum IK, & resistentiam datam numerus quartus proportionalis; erit is in priore casu resistentia superanda, in altero potentia qua ad resistentiam datam vincendam utendum (§. 847).

Ex. gr. Sit distantia helicum 3", distantia potentie a centro Cochleæ CD 25", potentia 30 librarum. Fiat

$$100 - 314 - 50'''$$

$$- \frac{50}{15700}$$

Fiat porro

$$3 - 157 - 30$$

$$1 \quad 10 \quad 10 \quad (\S. 316 \text{ Arithm.})$$

1570 pondus, cui resistentia æqualis.

Tab.
VI.
Fig. 78.

Peripheria a potentia conficienda.

PROBLEMA CXXXV.

853. Data resistentia qua data potentia superari debet; Cochleæ diametrum, distantiam helicum IK, & longitudinem scytalæ CD definire.

RESOLUTIO.

1. Distantia helicum & diameter Cochleæ pro arbitrio assumantur, si ope scytalæ convertenda est Cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad resistentiam quam superare debet, ita helicum distantia ad quartum: quæ erit peripheria a scytala CD in conversione Cochleæ describenda (§. 847).
3. Quodsi ergo quærat peripheriam hujus peripheriæ (§. 429 *Geom.*); habebitur longitudo scytalæ CD.
4. Quodsi vero Cochlea fœmina circa marem convertitur sine scytala, peripheria per n. 2. inventa eadem fere est, quæ Cochleæ, adeoque semidiameter per n. 3. reperta Cochleæ semidiameter.

Ex. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, distantia helicum 1". Reperietur peripheria a potentia percurrentia 6000: 100 = 60, adeoque longitudo scytalæ, si qua utaris, 1' 9": si nulla utaris, erit latus Cochleæ fœminæ 19".

COROL.

COROLLARIUM.

Tab. 854. Quodsi peripheria Cochleæ in VI. rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BA erigatur altitudini Cochleæ Fig. 79. æqualis, tandemque factis B 1, 1 2, 2 3 &c. distantia helicum æqualibus, ducantur rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogrammum circa cylindrum cujus peripheria rectæ BC æqualis circumvolutum helicem qua cylindrus sulcandus exhibebit.

DEFINITIO LXXXII.

Tab. 855. Cochlea infinita, seu perpetua VI. vocatur, si rotam stellatam F circum- Fig. 80. agit.

COROLLARIUM.

856. Dum Cochlea semel circumvolvitur; rota nonnisi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLIUM.

857. Dicitur autem ideo infinita, quia sine fine circumagi potest.

THEOREMA CCI.

858. Si potentia manubrio Cochleæ infinitæ AB applicata fuerit ad pondus, in ratione composita ex peripheria axis rota EH ad peripheriam manubrio versato a potentia descriptam, & revolutionum rota F ad revolutiones Cochleæ CB; ponderi æqualebit.

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ stellatæ F multiplices, prodibit spatium ponderis G. Sed si peripheria manubrio AB descripta multiplicetur per numerum revolutionum Cochleæ CB, factum est

Walsii Oper. Mathem. Tom. II.

spatium potentia. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut ista spatia (§. 33). Quare cum pondus ad potentiam sit in ratione reciproca eorundem spatiorum (per hypoth. & §. 159 Arithm.); vires sunt in ratione composita earum, quas habet spatium ponderis ad spatium potentia, & spatium potentia ad spatium ponderis (§. 278), hoc est, ut factum ex spatio ponderis in spatium potentia ad factum ex spatio potentia in spatium ponderis (§. 159 Arithm.); adeoque æquales (§. 207 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

859. Quoniam rotæ motus tardissimus (§. 856); exigua potentia ingens pondus moveri potest ope Cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM II.

860. Utimur adeo Cochlea infinita, vel si ingens admodum pondus per exiguum spatium movendum, vel si motus tardissimus efficiendus.

SCHOLIUM.

861. Commodus igitur ejus usus est in Horologiis. Unde HUGENIUS eadem vititur in Automato Planetario.

PROBLEMA CXXXVI.

862. Datis dentium numero, distantia potentia a centro Cochleæ AB, & radio axis HE, una cum potentia; invenire pondus.

RESOLUTIO.

I. Ducatur distantia potentia a centro Cochleæ AB in numerum dentium; factum

Ff

factum

Tab.
VI.
Fig. 80.

factum est ut spatium potentiaæ interea absolutum dum pondus conficit spatium peripheriaæ axis æquale (§. 413 *Geom.* & 858 *Mech.*).

2. Quæratnr numerus quartus proportionalis ad radium axis, spatium potentiaæ modo inventum, & potentiam; erit is pondus quod potentia sustentare valet (§. 858).

Ex. gr. Sit $AB = 3$, radius axis $HE = 1$, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ $F = 48$; erit pondus $= 3.48.100 : 1 = 14400$.

SCHOLIUM I.

863. Apparet hinc, Cochleam infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.

SCHOLIUM II.

864. Solent etiam Cochlea construi, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque Cochlea a singulis dentibus semel circumvolvatur, motus efficitur velocissimus. Hinc ejus usus est in Machinis, quæ ad poliendum corpora aspera, veluti ad poliendum vitra, adbibentur.

THEOREMA CCII.

Tab.V. Fig. 64. 865. Si potentia Cuneo ita applicata, ut linea directionis CD sit ad latus AB perpendicularis, fuerit ad resistentiam superandam, ut AB ad CD; resistentia æquipollet.

DEMONSTRATIO.

Ponamus Cuneum detrudi usque ad Tab.V. rectam GF ipsi AB parallelam: erit Fig. 64. DE spatium potentiaæ, FG spatium ponderis. Est vero $DE : FG = DC : AB$ (§. 268 *Geom.*). Ergo celeritates potentiaæ & ponderis sunt, ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiaæ ac ponderis sunt in ratione composita ipsorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, per *hypoth.* Ergo vires sunt ut AB. DC ad DC. AB (§. 159 *Arithm.*); adeoque æquales (§. 207 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

866. Potentia igitur dimidia resistentiaæ æquivalens est ad eam, ut AC ad DC, hoc est, ut ad sinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7 *Trigon.*).

COROLLARIUM II.

867. Cum tangens anguli minoris minor sit quam majoris (§. 7 *Trigon.*), potentia ad dimidiam resistentiam majorem rationem habet, si angulus major, quam si minor (§. 203 *Arithm.*). Unde in priori casu major est quam in posteriori (§. cit.), hoc est, Cunei acutiores magis potentiaæ vires amplificanc quam minus acuti.

SCHOLIUM.

868. Ex natura Cunei reddenda est ratio omnium fere instrumentorum quibus ad scindendum aut dividendum utimur: qualia sunt cultri, enses, secures, scisfella, aliaque instrumenta celatoria.

C A P U T XVI.

De Potentiarum ad Machinas Applicatione.

DEFINITIO LXXXIII.

869. **P**ER Potentias animatas intel-
ligo homines & animantia
bruta: per *inanimatas* vero, aërem,
aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO LXXXIV.

870. Potentia dicitur *trudendo mo-
vere*, si linea directionis tendit in pla-
gam moventi oppositam.

DEFINITIO LXXXV.

871. Potentia dicitur *deprimere*,
si linea directionis tendit a movente
deorsum.

DEFINITIO LXXXVI.

872. Potentia dicitur *trahere*, si li-
nea directionis tendit ad moventem,
seu si mobile sequitur moventem vel
ad eum accedit.

DEFINITIO LXXXVII.

873. Potentia dicitur *elevare*, si li-
nea directionis tendit sursum, seu si
mobile ascendit.

DEFINITIO LXXXVIII.

874. Potentia animata dicitur *cal-
cando* movere, si pedibus deprimat vel
protrudit mobile.

DEFINITIO LXXXIX.

875. Potentia animata *versando mo-*

vere dicitur, si eidem loco insistentis
manus per peripheriam circuli mo-
vetur.

PROBLEMA CXXXVII.

876. *Machinam construere, quam* Tab.
Homo trudendo movere possit. VII.

Fig. 81.

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter
erigatur, ita ut in punctis E & F
circa axem EF versari possit.

2. In quatuor fere pedum altitudine
infigatur vectis GI.

Quodsi enim Homo manibus continuo
protrudat vectem GH, cylindrus EF
circa axem suum circumagetur (§. 870).

SCHOLIUM.

877. Si Machina ita simplex ad pondera
attollenda adhibetur, Ergata appellari solet.

COROLLARIUM I.

878. Quodsi GH fuerit temo cum libra; Tab.
Equus vel Taurus *trahendo* Machinam VII.
movebit (§. 872). Fig. 82.

COROLLARIUM II.

879. Si annulo L alligetur funis, quem Tab.
manibusprehendat Homo, aut corpori suo VII.
circumplexet; Machinam *trahendo* move- Fig. 81.
bit (§. 872).

PROBLEMA CXXXVIII.

880. *Machinam construere, quam*
Homo versando movere possit.

RESOLUTIO.

Tab. VI. Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, Fig. 83. vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim Homo manu circa centrum radium BD circumducit; versando Machinam movet (§. 875 *Mech.* & §. 131 *Geom.*).

SCHOLIUM.

881. Si duo manubria eidem Machina applicantur, necesse est, ut situm habeant contrarium, quia dum unus manubrium ABDC deprimit, alter alterum EFGH attollere debet.

PROBLEMA CXXXIX.

882. Machinam construere, quam Homo partim trahendo, partim deprimitendo movere possit.

RESOLUTIO.

Tab. V. Talis est Axis in Peritrochio EABF. Fig. 60. Quodsi enim scyptalam A manu prehendat & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): sed ubi ulterius eandem deorsum urgeas, deprimitendo eundem axem movebis (§. 871).

Tab. VII. Loco Peritrochii sufficiunt scyptalæ solæ GH & KF: quæ si duobus in locis ad axem aptentur, duo Homines una eandem partim trahendo, partim deprimitendo movebunt.

SCHOLIUM.

883. Si Cylindrus horizontaliter positus & solis Scyptalis instructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur, Sucula vocatur.

PROBLEMA CXL.

884. Machinam construere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere possit Homo.

RESOLUTIO.

1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur.
2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum transeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodsi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB semiperipheriam describet, sicque trahendo movebis Machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem sui BC tibi obvertit, in pristinum situm redigas; idem radius BA alteram semiperipheriam describet; sicque trahendo movebis Machinam (§. 870).

Aliter.

Idem præstabis, si vectis HFG solo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere possit: reliqua omnia eadem ratione se habeant, ut ante.

SCHOLIUM.

885. Uncus interdum geminatur, ut alter sit altero superior & in contrarium positus: ita nimirum duo simul machinam agitare possunt motibus contrariis, uno scilicet trahente, dum alter trudit; & contra.

PROBLEMA CXLI.

886. Machinam construere, quam Homo calcando movere possit.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VII. *Fig. 87.* Construatur Tympanum AB cum cylindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut Homo unus vel plures intra ejus ambitum stare possint. Hunc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874).

Aliter.

Tab. VII. *Fig. 88.* Construi quoque potest rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior superficies dentibus, superior scalis instruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi sua in eam agat (§. 261), major tamen distantia a centro motus esse potest, quam in verticaliter erectis.

Aliter.

Tab. VIII. *Fig. 89.* Si pondus movendum sit exiguum & motus celer requiritur, vecte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum ma-

Tab. VIII. *Fig. 90.* nubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, si pede deprimatur. Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elasticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, adeoque in minori distantia, applicatur; motus est celer, utut potentia major esse debeat resistentia in H vincenda (§. 765. 772).

PROBLEMA CXLII.

887. *Machinam construere, quam Equus vel Bos trahendo movere possit.*

RESOLUTIO.

Utendum est cylindro verticaliter erecto ND cum temone HG 8 minimum pedum, ut supra (§. 775). Præstat autem temonem esse longiorem, quam brevior, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA CXLIII.

888. *Machinam construere, quam Equus vel Bos calcando movere possit.*

RESOLUTIO.

Construendum est Tympanum AB subscudibus transversis munitum, & per eo stabulo includatur Equus vel Bos per solum pertusum pedibus posterioribus rotæ insitens, subscudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum assa, tympanum eum in modum construi solet, quo majora (§. 885), ab Hominibus intra eorum ambitum consistentibus impellenda; & Canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis sui mole idem circumagens.

SCHOLIUM.

889. *Cum Machina hactenus descriptæ omnes, ad Axem in Peritrochio revocentur, nisi quod nonnullæ earum sint ex Vecte & Axe in Peritrochio compositæ, si attendatur ad lineam directionis potentie & inde determinetur distantia a centro motus (§. 229), virium æstimatio haud difficulter instituitur (§. 765, 792, 793).*

PROBLEMA CXLIV.

Tab. VIII. Fig. 92. 890. *Machinam construere, qua a pondere descendente movetur.*

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontaliter positum funis circumvolvatur, &
2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento distantia.
3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum descendit, cylindrum AB circumagitat.

COROLLARIUM I.

891. Quo major est altitudo, per quam pondus Q descendit, eo diutius durat motus.

SCHOLIUM.

892. *Hinc Horologia, qua a pondere descendente moventur, in cæcis Turribus collocantur, ut, si index circumagendus fuerit exiguus, in suprema conelatis parte.*

COROLLARIUM II.

893. Ut pondus Q lento gradu descendat, nec motus ejus acceleretur (§. 70); cylindri AB motus esse debet quam tardissimus; consequenter pondus ad movendam Machinam adhiberi nequit, nisi in Machinis compositis, ubi motus in principio tardus, sed per plures Machinæ partes propagatus sit celerior (§. 815).

COROLLARIUM III.

894. Cum adeo pondus in minori a centro distantia applicandum sit, ibi potissimum hinc potentia est locus, ubi non magis est resistentia.

COROLLARIUM IV.

Tab. VIII. Fig. 93. 895. Quodsi pondus P ex Polyspasto FH suspendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere poterit. Dum enim per spatium peripheriæ cylindri descendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum sine Polyspasto non nisi semel circumagereur. Sed

quia funis HI a quarta tantum ponderis Tab. VIII. Fig. 93. Q parte trahitur (§. 833), vel etiam a minore (§. 843); perinde est ac si quarta tantum ejus pars, vel etiam quarta minor, sine Polyspasto ad Machinam agendam adhiberetur. Utendum igitur est Polyspasto, ubi spatium non satis altum descensui ponderis conceditur.

PROBLEMA CXLV.

896. *Pondere appenso adjuvare potentiam moventem.* Tab. VIII. Fig. 94.

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo E alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodsi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA CXLVI.

897. *Machinam elateris vi movere.* Tab. VIII. Fig. 95.

RESOLUTIO.

1. Lamella chalybea AB altero sui extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur, & thecæ cylindricæ, cui altero sui extremo afferruminata, includatur.
2. Huic alligatur cætenula, altero suo extremo axi conformi GH alligata. Quoniam enim laminæ vis elastica continuo minuitur, sub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus distantia GL applicanda; sub finem vero, ubi segnius trahit, in majori IK (§. 792); quo obtinetur, ut potentia hæc, in se sit inæquabilis, ad motum tamen regularem qualis est horologiorum portatilium adhiberi possit.

SCHO-

SCHOLIION.

898. Equidem figura fusi GH non Conica, sed alia Conoidica esse debebat, & Celeberrimus DE LA HIRE (a) in ejus constructionem inquirat. Sed cum hypotheses assumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipsemet non diffusetur regulam quam invenit praxi non satis exacte respondere. Ceterum vi elastica animantur quoque automata culinaria.

DEFINITIO XC.

899. Rota directa est quæ ab aqua desuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. Rota vero retrograda vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM I.

900. Quoniam aqua rarissime ea rapiditate fertur ut rotas molares circumagere possit; ex alto præcipitata impetum acquirat necesse est (§. 79, 543).

COROLLARIUM II.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorsum tendat, quamdiu centro Telluris propius fieri potest; locus, ubi rotæ collocantur, centro Telluris vicinior esse debet quam is unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM III.

902. Et cum aquæ fluentes successive cadant, a latice seu origine earundem nonnisi exigua declivitas, nempe quam sufficere experientia loquitur, ad distantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad summum dimidii, concedenda; reliqua

(a) *Traité de Mécanique*, prop. 71. p. 233. & seqq.

autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM IV.

903. Inquirendum itaque quanto depressior sit locus, ubi rotæ molares constituantur, quam origo aquarum.

DEFINITIO XCI.

904. *Ars libellandi* est ars determinandi declivitatem aquarum, seu generalius, quanto intervallo punctum aliquod sit Terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta singula a centro Telluris æqualiter distant (§. 207): aquæ libellantur si lineæ horizontalis in datorum locorum superiore inventa usque ad inferiorem continueatur, & ejus a superficie aquarum distantia utrobique investigetur. Distantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO XCII.

906. *Libella* est instrumentum, quo invenitur lineæ horizontalis, & addatum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA CXLVII.

907. *Libellam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro semicirculi C suspendatur pondusculum H. Tab. VIII.
2. Diametro AB infigantur unci E Fig. 96. & F.

Quodsi enim funis per uncas E & F ita extendatur, ut filum CD semicirculum appensum bifariam secet; lineam horizontalem apparentem representabit.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Quia pondusculum H filum CD extendit: erit CD linea directionis ejus (S. 17). Et quia semicirculum bifariam secat *per hyp.* ad AB perpendicularis est (S. 143, 78 *Geom.*). Ergo AB est linea horizontalis apparens (S. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. VIII. Fig. 97. n. 1. 1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ, & inferius in C lamina cochlea E instructa.
2. Laminæ vero huic afferruminentur prisma excavatum FG cum stylo GHIK bifurcato.
3. Inferius afferruminetur annulus cum ansula, ut, si opus fuerit, pondus appendi possit.
- n. 2. 4. Paretur denique fulcrum semicirculare aut semi-Ellipticum NO superius in P cochlea PQ instructum, ut instrumentum cruribus IK, in cuspides acutas desinentibus, in punctis S & T insistere queat.

Quodsi enim fulcimentum, mediante cochlea, ad arborem aut baculum erectum firmetur, instrumentum eidem insistens vi gravitatis in eum situm sese disponet, ut regula cum dioptris sit horizonti parallela (S. 215).

Aliter.

- Tab. VIII. Fig. 98. RICCIOLUS propria experientia fretus hanc Libellam (a) commendat.
1. Super regula AB pedum 12 aut ad summum 20 canaliculo excavato inseratur tubus CABD ex laminis ferreis stanno obductis, vel cupreis

(a) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 16. §. 8. f. 230.

paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis. Tab. VIII. Fig. 98.

2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ foeminae; quibus aliæ mares inserantur, ut tubus quam artificissime claudi possit.
3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.
4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate molestus sit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque Libella moveri & in situ eodem, si necesse sit, immota servari possit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere possit inter transferendum.

Quodsi enim instrumentum aqua repleas, & tubum ita constituas ut a qua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens; cum fluidorum quiescentium partes omnes eandem a centro Telluris distantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent versus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Consultum quoque est, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem; quamvis etiam sine iisdem per utriusque aquæ superficiem collineatio in omni situ tubi fieri possit.

Aliter.

1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excrefcere potest, Tab. IX. Fig. 99.

Tab. IX. Fig. 99.

potest, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, sitque tubus in altero extremo L apertus, sed obturaculo quodam ex subere parato & capite orichalceo instructo claudendus.

2. Tubus ita paratus firmetur super regulam ST, ad quam etiam
3. Firmentur dioptræ M & N.
4. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.
5. Intra has regulas sit lamina elastica H ex orichalco aut chalybe parata, ut instrumentum tanto accuratius ad situm horizontalem disponi possit.
6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix seu cochlea foemina, ut Libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari possit.

Quod si tubum vel aqua, vel spiritu vini colorato repleas, ita tamen ut pauculum aeris remaneat, bullulam in superficie fluidi formaturum; ascendet bullula in partem superiorem, si tubus fuerit inclinatus, sed datum situm e. gr. in F tuebitur, si horizontalis fuerit. Levia enim sursum ascendunt, quantum datur.

SCHOLIION I.

907. Alia Libellarum genera a Viris celeberrimis Philippo DE LA HIRE, ROEMERO, HUGENIO, PICARDO inventa describuntur a modo laudato PICARDO (a). Ad-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

(a) Traité du Nivellement, c. 2. p. 37. & seqq.

huc alia dederunt Viri Cl. COOPLERTUS (b) & HARTSOEKERUS (c). Ego eas descripsi, quas mea instrumentorum suppellex mihi suppeditavit. Omnium fere, qua passim prostant, descriptionem dedit Jacobus LEUPOLDUS (d).

SCHOLIION II.

908. Prima Libellarum, quam exhibui, Tab. IX. Fig. 100. non satis fida. RICCIOLUS enim jam observavit, facile aberrari 5 minutis, immo gradu dimidio, nisi ingens fuerit. Sed moles usum molestum reddit. Facile tamen medesa paratur, si scilicet loco semicirculi utamur regula AB trium pedum cum altera longiore CD quatuor pedum ad angulos rectos priori insistente: qua si dioptris instruatur & libere suspendatur, fulcro conveniente adhibito, exactissimam Libellam constituit.

SCHOLIION III.

909. Solent quoque a nonnullis in Libellationibus presertim longioribus dioptrarum loco adhiberi Telescopia: sed multa circumspeditione opus est, ut rite ad instrumenta applicentur. Enimvero ea de re in Astronomia ex principiis opticis dicitur.

PROBLEMA CXLVIII.

910. Rectificare Libellam.

RESOLUTIO.

Ut certus sis, Libellam esse revera in situ horizontali

1. Instrumento in G collocato, collineatio fiat in C centrum tabulae in Dd erectæ.

G g

2. Li-

Tab. IX. Fig. 102.

(b) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences A. 1699. p. 172.

(c) In Miscellan. Berolinens. p. 328. & in Actis Eruditorum A. 1712. p. 34.

(d) In Theatro Horizontaliæ seu Libellationis, quod est pars quarta Theatri Struicij universalis.

Tab.
IX.
Fig.
102.

2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris instrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam eandem.
3. Quodsi idem punctum C sit in linea visuali, Libella convenientem habet situm; sin in puncto altiori aut depresso desinat, paulisper attollenda vel deprimenda est [quo spectant regulæ cum cochleis in Libellis paulo ante descriptis], donec linea visualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Ponamus instrumentum esse in linea horizontali AC, & visu attingi punctum C. Si situs instrumenti mutetur, ut B in A & A in B constituatur; cum linea horizontalis non sit nisi unica, adhuc linea visualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur.

Quod erat unum.

Quodsi instrumentum non sit horizonti parallelum, linea visiva in centro ejus G secabit horizontalem AB, eritque $HGB = AGF$ (§. 156 *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum æcius N. Quodsi Libella invertatur, ut H in h & F in f constituatur; erit $hGA = BGf$ (§. 156 *Geom.*). Est vero $hGA = HGB$, quia instrumentum, situ respectu lineæ horizontalis immutato, invertitur. Ergo $BGf = HGB$. Quare cum porro, ob rectam Dd, in quo sunt puncta D & d, ad lineam horizontalem perpendiculararem anguli recti ad C æquales sint (§. 145 *Geom.*); erit $CD = Cd$ (§. 267 *Geom.*), hoc

est, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & d medium. *Q. e. d.*

Tab.
IX.
Fig.
102.

PROBLEMA CXLIX.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

1. Eo in loco, ubi origo declivitatis statuitur, ope ponderis ex fune suspensi exploretur, quanto intervallo superficies aquæ a ripa absit.
2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus statuitur.
3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus, cum tabulis D & C nigro colore tinctis, sed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocunque situ ad baculos firmatis, libella EF collocetur in P.
4. Tabula utraque D & C nunc attollatur, nunc deprimatur, donec per EF collineanti punctum medium, in quo lineæ albae sese mutuo intersectant, occurrat.
5. Investigentur exactissime altitudines punctorum D & C, nempe AD & EC, atque in schedula notentur.
6. Tum instrumento in Q & baculo ex A in M translato, fiat ut ante collineatio in O & P, notenturque altitudines OB & PM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attingeris.
7. Addantur in unam summam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MP &c. & priori adiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, posteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.

Tab.
IX.
Fig.
102.

2. Quod-

Tab. 8. Quodsi enim aggregatum posterius
IX. e priori auferas, relinquetur declivi-
Fig. tas aquarum a termino A usque ad
101. alterum M fluentium, respectu lineæ
horizontalis apparentis.

9. Quare si tractus AM fuerit longus;
quod ab ea subtrahendum est, ut ha-
beat declivitas respectu lineæ ho-
rizontalis veræ, invenitur per Pro-
blema 39 (§. 216): aut sine novo
calculo in Tabula superius exhibita
(§. 217). Sit ex. gr.

altit. ripæ AL 64 altit. ripæ MN 58
AD 34'' BC 57''
BO 68 PM 102

Summa 166

Summa 217

166

declivitas LI 51

Sit LK 900 pedum, erit declivitas LI
múltanda 3 lineis, ut relinquatur ve-
ra 5'0"7''.

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK, itemque OQ
parallela; erit $DQ = OC$, $PN =$
 QI , $DL = BC$, $OB = QL$ (§. 226
Geom.). Ergo $DA + AL + OB = QL$
 $+ BC$, & $PM + MN + BC = QI + BC$,
consequenter $QI + BC - QL - BC = LI$
Q. e. d.

SCHOLIION.

912. Quoniam in hac operatione facile
aberrari potest, consultum est, ut libellatio
bis instituat; nempe primum a termino A
usque ad terminum M, deinde retro a termi-
no M usque ad terminum A.

DEFINITIO XCIII.

913. Sectio fluminis est planum ad
angulos rectos secans aquam in alveo
fluentem, cujus fundus horizontalis,
ripæ autem inter se parallela.

COROLLARIUM I.

914. Quoniam linea directionis parti-
cularum aquæ tanquam corporis gravis
est ad horizontalem perpendicularis (§.
215), & fundus alvei atque superficies
aquæ horizontalis, ripæ vero inter se pa-
rallæ, per hypoth. latera plani secantis
erunt ad basin perpendicularia & inter se
parallela; consequenter opposita æqualia
(§. 226, 238 Geom.), adeoque sectio re-
ctangulum est (§. 100 Geom.).

COROLLARIUM II.

915. Invenitur adeo, si latitudo alvei
in profunditatem aquæ ducatur (§. 375
Geom.).

COROLLARIUM III.

916. Sunt etiam sectiones diversæ in
ratione composita latitudinum, alveorum
& profunditatum aquarum (§. 376 Geom.).

SCHOLIION I.

917. Cum aquæ fluentes nunc tabescant;
nunc intumescant; eo potissimum tempore se-
ctionem fluminis dimetiri debet molendina ex-
structurus, quo mediocrem habet altitudinem.

SCHOLIION II.

918. Quodsi aquæ copia non abundamus;
consultum est, ut aqua in stagno colligatur
inde per alveum in rotas deducenda, ne mi-
nimum ejus pereat. Quarendi etiam sunt
fontes in vicinia siti, & aqua ex iis in
stagnum derivanda.

SCHOLIION III.

919. Cum ex superioribus constet, in
conflictu corporum non modo habendam esse
rationem massæ, sed etiam celeritatis, qua
corpus in aliud quiescens impingens move-
tur (§. 543); in Molendinis aquarum vi
agitandis consideranda est & sectio earum &
decli-

declivitas in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodsi declivitas fuerit insignis, plurimorum scilicet pedum, e. gr. 10 aut 12, & sectio aquæ exigua, rota constructur directa: ast si declivitas exigua & sectio ingens, rota utendum est retrograda.

PROBLEMA CL.

920. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari possit, aqua per alveum aut canalem ex ligno constructum deducatur ad rotam, & distantia 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis segniter fluat.
2. Rota ratione decente constructa sub canali ita constituatur, ut aqua deorsum ruens per planum declive in capsulam ab axe secundam irruat, ipsa vero aquæ effusæ superficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM I.

921. Quodsi a declivitate integra subducatur pars quæ aquæ concedenda, ut intra alveum suum fluere possit & in rotam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effusa defluat; diameter rotæ relinquatur.

COROLLARIUM II.

922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores esse præstat.

PROBLEMA CLI.

923. *Rotam directam construere.*

RESOLUTIO.

Totum artificium huc redit, ut situs palmularum determinetur; id quod sequentem in modum fieri solet.

1. Semidiametro rotæ (quæ est dimidia altitudo ejus) in scala modica sumta describatur circulus AKA & semidiametro minore, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE sit $\frac{1}{3}$ AE.
3. Ex centro per D describatur circulus, in tot partes æquales dividendus quot palmulis instruenda est rota.
4. Applicata regula ad duo divisionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI, &
5. in H excitetur perpendicularis HG. Recta HI situm palmulæ unius; recta vero HG situm alterius determinat. Et eodem modo situs binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

Tab.
IX.
Fig.
103.

PROBLEMA CLII.

924. *Aquam ad rotam retrogradam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ne aqua superflua in rotam incidat, & tota ejus declivitas, parte demta quæ ipsi ut fluere possit concedenda, in præcipitium mutari queat; fossa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo distans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumescens ripis fossæ atque molendino facile damnum inferat.

2. Ne

2. Ne autem aqua intumescens agros vicinos inundet, riparum sufficiens esse debet altitudo. Consultum quoque est, ut fundus fossæ arena complanetur.
3. Quo aquæ sufficiens copia in fossam deducatur, per transversum fluminis excitandus est agger, tantæ altitudinis quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu suo retardandam.
4. In fine fossæ trabs horizontaliter sternatur, quæ *arboris molinaria* fert nomen; ejus superficies cum fundo fossæ sit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari possit.
5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transversa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depressa, aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti possit.
6. Ut igitur aqua tabula depressa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorsum fluere possit, & ne aqua intumescens ripas fossæ egrediatur; alicubi fossæ molinariæ alatere jungenda est alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ superflue transitum concessura.
7. Alveus denique declivis in fine fossæ excitetur profunditatis AB, quanta est declivitas in præcipitium mutanda, utque in eam directe impingat aqua, superficies per quam delabitur sternenda est juxta arcum DC ex centro rotæ E, intervallo radio ejus paulo majore, descriptum.

Tab.
IX.
Fig.
104.

8. Quodsi fossæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transversum fluminis prope rotam construendus, ut aqua in motu retardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM I.

925. Si ea fuerit fossæ latitudo, ut duabus rotis juxta se invicem constituendis locus concedatur; duo quoque construendi sunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere posito, per quem aqua superflua a molendino arceretur.

COROLLARIUM II.

926. Quodsi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel subtriplum &c. rotæ agitandæ sufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ constituuntur, declivitate inter eas divisa; ita tamen ut præcipitium majus sit ante posteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLIUM I.

927. Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quorum anteriores altiores, posteriores humiliores, differentia altitudinis primorum & ultimorum existente equali altitudini, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & sabulo replentur & superius stratum paratur vel ex asseribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum distantiam complanatur, ne aqua vim ipsi inferre possit.

SCHOLIUM II.

928. Rotarum retrogradarum constructio nihil habet difficultatis: palmularum enim situs determinatur per radios ex centro rotæ eductos, sive intra orbem collocentur, sive in fronte constituentur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aqua sectio.

Minoris altitudo (quam Germani ein Staber-Rad appellant) est 12 pedum; majoris vero (quæ nobis ein Panster-Rad nuncupatur) ordinariè 16 pedum. In illa distantia palmularum digitorum 12 & 13; in hac 16 vel ad summum 19. Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratorum; in hac pedum quinque. Quodsi palmulæ ad peripheriam rotæ sint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas Straub-Ræder dicimus); altitudo rotæ & distantia palmularum variat pro diversa fundi declivitate & sectionis magnitudine.

PROBLEMA CLIII.

Tab.
IX.
Fig.
105.

929. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi infigantur virgæ AD & CB se mutuo ad angulos rectos in E secantes, quarum longitudo 32 pedum fieri solet.
2. Ad has virgas ex scandulis construuntur alæ figuram trapezii parallelarum basium habentes, quarum latitudo HI sit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad I & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ sunt, ut FG cum axe FL efficiat angulum 54° .
4. Denique, ut alæ vento semper obverti possint, tota machina circa axem NK versatilis esse debet, ut ope vectis PQ huc illucque versari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus construunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato versatile existat. Eum scilicet in finem

1. Turricula annulo ligneo cingitur, & in eo canaliculus effoditur, in cuius fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum segmentum ultra eum promineat. Tab.
IX.
Fig.
106.
2. Intra canaliculum alius annulus reponitur, cui tectum superstructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G, &
4. cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum altera priorem tecto firmiter affigit.
5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero sui extremo Axi in Peritrochio aut Suculæ alligandus.

Quodsi enim funis per uncum G ducatur & Sucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, consequenter alæ in plagam ipsi oppositam diriguntur.

SCHOLION I.

930. *Prior modus nostris in oris usitatus posteriore in Batavia utuntur. Et posterior quidem priori præstat, quia alæ construi possunt majores, consequenter Machina a vento agitata, ubi major resistentia superanda. Quodsi vero ad hanc vincendam minores sufficiunt, prior ideo antefertur, quia summis longe minoribus extruitur.*

SCHOLION II.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt Thomas SAVERY (a), AMONTONS (b),*
DIO-

(a) In *Transact. Anglican.* n. 252. p. 218.

(b) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.* Anno 1699, edit. Bat. p. 154.

Dionysius PAPINUS (c), & deinceps alii (d): sed valde vereor, ne inventa ipsorum praxi parum respondeant. Hactenus cum successu eadem non usi sunt, nisi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis casibus vis motrix nimis sumtuosa.

SCHOLIUM GENERALE.

932. Quæ hactenus de potentiarum ad Machinas applicatione diximus, cum unice in finem proposuimus, ut in Machinis inveniendis usui essent; quoniam earum structura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio &

(c) In Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam.

(d) Stephani SWITZER Introduction to a general System of Hydrostatics and Hydrauliks cap. 28. 29. p. 315. & seqq.

plus temporis requirit quam huic opera impendere conceditur, cum pleraque adhuc in desideratis habeantur, nec ad scopum nostrum apprime facere videtur. Neque operas manuales hic exponere visum est, cum eadem ad Mathesin non spectent, sed ab eadem supponantur. Mathesis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ sub mensuram cadunt; manuales vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a Theoria ad Praxin progressurus earum non sit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in Theoria pro veris habeantur, quæ non succedere in Praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc scopulum impingas, nihil assumendum est tanquam arte parabile, quod arte parari posse non jam ante experientia cognoveris, aut ex iis quæ experientia constant legitima consequentia deduxeris.

C A P U T XVII.

De Resistentia in Machinis, seu Frictione.

DEFINITIO XCIV.

933. **F**riccio est resistentia superficiæ per quam inceditur.

SCHOLIUM.

934. Ita perspicacissimus LEIBNITIUS (a) frictionem definit, qui primus hanc materiam distincte evoluit.

DEFINITIO XCV.

935. Corpus dicitur asperum, in cuius superficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO XCVI.

936. Superincessus radens est, si

(a) In Miscellaneis Berolinens. p. 302.

punctum idem superincedentis lineam in superficie describit per quam inceditur.

E. gr. Talis est superincessus parallelepipedo super plano protruso.

DEFINITIO XCVII.

937. Superincessus volvens est, si punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis est rotæ in curru tam respectu axis, quam respectu soli.

DEFINITIO XCVIII.

938. Motus mixtus est, si voluti-

ni

ni admiscetur motus radens elementaris seu instantaneus.

SCHOLIUM.

939. *Hunc motum distinctius explicat LEIBNITIVS (b); sed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA CCIII.

940. *Si superficies per quam inceditur, & superficies corporis quod per illam incedit, fuerint aspera; frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in superficie corporis asperi eminentiæ & cavitates ubique alternerentur (§. 935); si tam superficies corporis incedentis, quam ea per quam inceditur, asperæ fuerint; eminentiæ vel sunt intra cavitates deprimendæ, vel prorsus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius atollendæ. Sed nihil eorum fieri potest sine motu, nec motus produci sine vi impressa. Vis igitur qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte, his effectibus impendenda, adeoque motui corporis resistitur (§. 20); consequenter frictio oritur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

941. *Quo asperiores itaque sunt superficies, eo resistentia major.*

SCHOLIUM I.

942. *Asperitas asinenda est non modo ex natura eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri nempe potest, ut eminentia*

(b) In *Metaphys. Leibnizii*. P. 312, 313.

alia minori vi abradantur, vel deprimantur; alia autem non nisi majori vincantur.

COROLLARIUM II.

943. *Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.*

SCHOLIUM II.

944. *Id ipsam Experientia clarissime loquitur.*

COROLLARIUM III.

945. *Superficies adeo partium in Machinis, quæ se mutuo tangunt, quantum fieri potest, poliri debent.*

COROLLARIUM IV.

946. *Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri potest, ut omnis asperitas tollatur, microscopiis testibus, consultum est [quod & dudum in praxi receptum] ut partes se mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.*

THEOREMA CCIV.

947. *Dum pondus corporis incedentis superficiem ejus ad superficiem per quam inceditur apprimat, frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis superficiem ejus apprimat ad superficiem per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius descendunt, adeoque majori vi inde rursus atolluntur (§. 265), vel etiam deprimuntur, aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obstacula vincenda, quam si non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appressio ex pondere superincedentis auget resistentiam superfici-

fíciei, per quam inceditur (§. 20), hoc est, frictio augetur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

948. Crescente adeo pondere corporis incedentis aut insistentis, frictio crescit.

SCHOLIÖN.

949. *Hinc Libra exiguis ponderibus onusta exigua vi ab equilibrio dimovetur; pluribus autem onusta, majori vix dimovetur.*

THEOREMA CCV.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam incedit fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad superficiem per quam inceditur obliqua; vis qua movetur versus superficiem per quam inceditur nititur; adeoque perinde est, ac si superficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appressio ex pondere incedentis frictionem intendit (§. 947). Ergo eadem intenditur, si linea directionis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

951. Quoniam ictus perpendicularis est ad obliquum, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 552): sinus autem anguli majoris major est, minoris contra minor (§. 2 Trigon.); nisus corporis superincedentis in superficiem per quam inceditur; consequenter frictio major est, quo propius ad perpendicularum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLIÖN.

952. *Hac denuo Experientia valde consona sunt & præcipue in dentibus rotarum observantur, ut sæpissime hac de causa prorsus frangantur.*

COROLLARIUM II.

953. Tollitur adeo hæc frictio, si linea directionis corporis incedentis fuerit parallela superficiem per quam inceditur: tum enim nisus superincedentis in eam nullus est.

THEOREMA CCVI.

954. *Si superincessus volvens, longe minor est frictio, quam si radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata AB, & super ea incedat rota DE cujus dentes sint ad peripheriam normales. Quodsi superincessus fuerit radens; dens F qui regulam tangit lineam rectam in superficie regulæ describere debet (§. 936). Cum adeo ipsi resistat dens regulæ H, progredi omnino nequit, nisi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorsus abradatur. Idem ergo cum contingat, si corporis cujuscunque alterius asperi super superficie aspera incedentis superincessus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab asperitate superficiem oriri potest. Enimvero si rota ED super regula provolvatur; tum dens regulæ H incessui ejus non amplius resistit, nisi quatenus ex cavitate F supra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valeat, si corpus quodcunque asperum super aspera superficie volvitur; frictio minor est si superincessus volvens, quam si radens extiterit. *Q. e. d.*

Tabl IX. Fig. 107.

COROLLARIUM I.

955. Ne igitur in Machinis frictio magnam vis motricis partem absumat; cum cura dispiciendum est, ut, quantum fieri potest, nulla pars Machinæ alteram radat, quin potius una super altera volvatur.

COROLLARIUM II.

Tab. IX. Fig. 108. 956. Hinc consultum est, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri solet) matrici concavæ, sed rotulis A, B, C, D circa axiculos versatilibus imponantur.

SCHOLIUM I.

957. Suasit hoc dudum Paulus CASATIUS (a), & Experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodsi metuas, ne axiculus cylindri satis tuto duobus rotulis A & B incumbat, tertiam addere liceat.

SCHOLIUM II.

958. Hinc etiam, si Trochlea circa centrum mobilis; tractioni minus resistitur quam si eadem fixa foret. Eadem est ratio, cur rotæ Curruum circa axem versatiles sint.

SCHOLIUM III.

959. Patet quoque ratio, cur Traha difficillime trahantur in plateis lapidibus stratis; facillime autem, si nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.

SCHOLIUM IV.

960. Ex eodem fonte Olaus ROEMERUS, cum Parisiis commoraretur, quamvis non sine subsidio Geometriæ sublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem esse debere: id quod post eum quoque ostendit Philippus DE LA HIRE (b); sed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non est.

(a) Mechanicorum Lib. 2. c. 1. p. 130.

(b) Mémoires de Mathématique & de Physique, p. 51. & seqq.

COROLLARIUM III.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum versatiles volvuntur, dum in superficie corporis alterius incedunt; earum ope superincessus radens in volventem transmutari potest, quotiescunque datur.

SCHOLIUM V.

962. Ita in Machinis, quæ ferrarum reciprocaione ligna secant, rectanguli lignei, cui ferræ inseruntur, latera istiusmodi rotulis instrui deberent. Minuta enim frictione, plures ferræ una secare possent. Similiter brachia pistillorum atollendorum CD rotulis instruere juvat, ut super pinnulis curvis EF axis E sine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam assignat CL. DE LA HIRE (c).

Tab. X.
Fig.
109.

COROLLARIUM IV.

963. Et quia axes curvati superincessum plane tollunt (§. 884); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.

Tab. VII.
Fig.
85. 86.

SCHOLIUM VI.

964. Equidem nec hic cessat frictio in E & G. Enimvero ea perexigua est, si comparetur cum frictione, quæ ex superincessu rotarum oriri solet.

SCHOLIUM VII.

965. Equidem AMONTONS regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam requisitam (d): sed cum omnem frictionem a sola appressione ex pondere superincedentis derivet; ex antecedentibus satis apparet, quod proposito satisfacere nequeat.

CAPUT

(c) Loc. cit. p. 71. & seqq.

(d) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, A. 1699. p. 260. & seqq. edit. Bat.

C A P U T XVIII.

De Machinis Compositis.

DEFINITIO XCIX.

966. **M**achina composita est, quæ ex pluribus simplicibus tanquam partibus constat.

SCHOLIION.

967. *Machinarum compositarum nullus est numerus. Construuntur autem tum ad onera ingentia atollenda, tum ad motus varios producendos, qui in usum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a Machinis perfici possunt, ad quæ idem semper motus, vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua saxi molaris opus est: unde hæc opera Machinis demandatur. Similiter ad contusionem granorum ex quibus oleum exprimitur, pistillorum elevatione continuo iteranda opus est: hinc a Machinis contusio ista perficitur. Ut arbor prostrata in asseres dissectetur, continua ferrarum reciprocatione opus est. Quare denuo Machinarum vires ad hunc usum transferuntur. Nostrum equidem non est, Theatrum quoddam Machinarum in presentia aperire; sed ut compositionis earundem quandam ideam animo comprehendant Tyrones, unum saltem alterumque exemplum in medium asseremus; additis regulis quibusdam generalibus, quibus de Machinis inveniendis solliciti juvantur.*

PROBLEMA CLIV.

968. *Dato opere perficiendo, Machinam componere.*

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus est, ut operis perficiendi notionem distinctam, & quantum licet, adæquatam habeamus:

ad quam quomodo perveniamus: ex Commentatione de Methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi distinctius explicavi (a). Scilicet singula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione distinguui possunt, tum sigillatim expendenda, tum inter se conferenda.

2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus sit ad id præstandum, quod requiritur: qui est effectus a Machina producendus.
3. Ex eadem quoque constabit quantitas virium ad resistantiam in motu superandam requisitarum: ubi
4. Inprimis consideranda est frictio ex superincesso mobilis oriunda, & de remediis mechanicis Capite superiori expositis deliberandum.
5. Antequam vero consilium ineatur, quibusnam Machinis simplicibus combinatis motus desideratus produci queat; de potentia Machinam agitatura cogitandum est, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque Machinæ structura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad Machinam applicanda: externa ejus structura statim constabit ex Capite decimo quarto.

6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expensa, vi Capituli undecimi non difficulter determinantur

H h 2 tur

(a) In *Philos. ration. scilicet Logica* §. 678.

tur Machinæ simplices in composita combinandæ.

Tab. X. Fig. 110. E. gr. Sit construenda Machina, qua onus ingens O in altum attolli possit, & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum sit corpus grave; statim apparet lineam directionis esse ad horizontem perpendicularem. Talis ergo construenda est Machina, quæ pondus sursum trahat secundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, sed saltem ingens supponitur; Machinam construere sufficit, qua homo pondus aliquod viribus suis longe superius elevare possit, tempore tamen non nimis longo. Et quia Machina compendiosa esse debet, ut commode huc illucque transferri possit; moveri optime poterit versando, adeoque axe incurvato ABC instruenda (§. 875). Enimvero ut pondus ingens moveri possit, axis curvatus solus non sufficit, sed cum rota dentata GF axi horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus sursum trahens circa cylindrum inferiore loco constitutum circumvolvi queat, supra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Constat ergo Machina ex axe GH cum rota stellata GF, & axe dentato LC, atque incurvato CBA duabusque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, sed sola rota FG & axis incurvatus CBA. Est nimirum seposita frictione potentia sustentans ad pondus, in ratione composita radii axis dentati LC ad BC, & radii axis GH ad semidiametrum rotæ F (§. 812).

PROBLEMA CLV.

969. Machinam construere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli potest.

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 111. N. 1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D insigatur uncus, cui onus attollendum G alligari possit.

2. Alteri vectis extremo B affigatur anulus E, qui cochleæ sceminæ F seu Tab. X. Fig. 111. N. 1.

3. Matrìci inseratur cochlea HI, quæ Ergatæ IL circa axem suum in L mobili firmiter insistet.

Quodsi enim mediantibus scytais M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF descendit & vectem AB deprimit, consequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli possit, patet ex Theor. 178 (§. 765) & Theor. 198 (§. 847). Est nimirum potentia ad pondus in ratione composita AC ad CB, si AB fuerit horizontalis, & distantia duarum helicum in cochlea ad peripheriam scytaila descriptam. Sit ex. gr. distantia helicum $3'''$, longitudo scytailæ $3'$, erit peripheria, quæ eadem describitur $942'''$, adeoque potentia in N est ad resistentiam in E ut 3 ad 942, hoc est, ut 1 ad 314. Sit jam AC:CB = 1:3; erit ergo resistentia in E $\frac{2}{3}$ ponderis G, consequenter potentia ad scytailam N applicata $\frac{2}{942}$ ponderis. Quodsi singulis scytais singulæ potentia applicentur; erit una earumdem $\frac{1}{3768}$ ponderis.

COROLLARIUM.

970. Si cochlea cum Ergata remota funis ET alligetur in B, pondus G similiter cum virium compendio, attolletur, quamvis multo minore (§. 765).

SCHOLIUM.

971. Machina posteriore utuntur ad opera ex Navi una in alteram contiguam transponenda.

PROBLE-

PROBLEMA CLVI.

972. Molam acuminariam construere, hoc est, Machinam qua instrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.

RESOLUTIO.

- Tab. X. 1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F instructo infigantur ad acuendum.
- Fig. III.
2. 2. Axi alteri EG infigantur duo orbis lignei H & I, super quorum primo H arena politura inchoatur, super altero vero I smyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio superinducti, super quibus smyridis pulvere subtiliori politura perficitur.
3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena instructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere possit.
4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota stellata N, quæ communem cum rota molari PQ, ex. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverso aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus instruitur, ut motus cotium sit satis celer.
5. Denique cum cotes continuo madidæ esse debeant; ad rotam molarem applicanda sunt duo hauftra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in cotes delabentem.

SCHOLION.

973. Solent quoque mola unice ad poliendum construui, tumque orbis axi GE infixi

aptantur ad primarium DC, ipsi vero GE, alii minores inseruntur.

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas sufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris infigere licet.

PROBLEMA CLVII.

975. Molam frumentariam ab aqua agitandam construere.

RESOLUTIO.

1. Construatur rota molaris sive di-Tab. X. recta, sive retrograda, prout casus Fig. tulerit, nunc major, nunc minor, 112. prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit ex. gr. rota retrograda AB 18 pedum, eaque 33 palmulis instructa.
2. Eiusdem axi infigatur rota DE, cujus diameter illius subdupla, vel etiam major, pro diversa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in nostro casu numero 48, in plano gerat.
3. Per curriculum FI, 6, 7, 8, immo 9 bacillis instruendum, pro diversa celeritate, qua rota molaris movetur, virga transeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura sua referenti incumbat meta (seu lapis molaris superior), casinum (seu lapidem inferiorem) fixum 4 fere digitis circumcirca superans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli possit.
4. Ex scala suspendatur infundibulum p q, mediante Axe in Peritrochio s t, pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

- Tab. X. Fig. 112. 5. Bacillus propendeat in foramen metæ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.
6. Infundibulo fere insitat capsula H pyramidem truncatam referens & tam superius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.
7. Lapides cingantur cista cylindrica, spatio inter eam & metam nonnisi duorum digitorum relicto.
8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in sacculum tremulum ex peculiari linteo (nostrates *Beuteltuch* appellant) confectum devolvatur, & farina furfure separetur.
9. Sacci, cujus latera loris affuta, extremis vero P & Q annuli ferrei infuti sunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ assuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui insigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.
10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *hf* alteri *ik*, cylindro *lm* circa axem suum versatili infixæ, in *i* incumbens.
11. Curriculo FI sub angulo obliquo insigantur tres bacilli æqualiter a se invicem distantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *hf* protrudunt & sic saccum attollunt, mox iterum relapsurum, regula *ik* in situm pristinum recidente.

12. Quodsi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere possit; axi rotæ molaris insigitur rota stellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit, quarum saltem unam ab uno latere in schemate exprimere libuit: reliqua omnia sunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB sit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem strictè inhærendum non sit, si aliæ circumstantiæ aliam suadeant.

SCHOLIUM I.

976. Rotarum dimensiones dentiumque numeri variant, pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, quæ partim ab ejus sectione, partim a declivitate per quam ad illam delabitur, pendet. Constat vero ex superioribus (§. 792), rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aqua vis; minores vero, ubi hæc major. BOECKLERUS (a) diametrum rotæ vel solo impetu fluminis sine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declivem delapsa agitando fieri præcipit 48 pedum, numerum palmularum 86; diametrum rotæ stellatæ LM 18 pedum, numerum dentium 180, numerum bacillorum in rota DE 60. CASATUS (b) Tab. XI. Fig. 113, annotat in Pado communiter longitudinem rotæ molaris AB esse cubitorum 10, diametrum totam cubitorum 6, inferiorem rotam DE diametrum habere cubitorum $5\frac{1}{2}$, dentes 108 plano infixos, & curriculum FI in fusos 9 distinguui; lapidem molarem in crassitudine numerare uncias 6 aut 7, in diametro cubitos $2\frac{1}{2}$. FRANCISCUS PHILIPPUS FLORINUS (c) rotæ retro-

(a) In der Haus- und Feld-Schule part. 3. Class. 6. p. 500. & 501.

(b) Mechan. lib. 5. c. 7. p. 560.

(c) Im klugen Haus-Vater lib. 2. c. 42. f. 308. & seq.

Tab. XI. Fig. 113. retrograda ab aqua rivuli 4 vel 5 pedum declivitatibus agitanda diametrum constituit 18 pedum, numerum palmularum 30 vel 36, latitudinem palmularum 10 vel 14 digitorum, altitudinem unius pedis. Rotæ dentatæ DE dentes assignat 72, curriculo bacillos 6, 8 vel 9, prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum alluente, rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit 16 pedes.

COROLLARIUM.

977. Quodsi situs rotæ verticalis LM mutetur in horizontalem & dentes in plano infigantur; rotæ vero molari substituantur vectis veluti in Ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante: Molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco superiore deambulantibus commode agitandum. Est vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum, rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in posteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLIUM II.

978. Multis adhuc modis aliis molæ manuarie construi possunt. Eminent vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri potest, superincessu rotarum penitus sublato: Id igitur ut describatur, e re nostra iudicamus.

PROBLEMA CLVIII.

979. Molam manuariam construere.

RESOLUTIO.

- Tab. XI. Fig. 114.
1. Construantur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6 pedum, & inferior ad conservandum impetum plumbo infuso oneretur.
 2. Per centrum utriusque idefigatur axis incurvatus HG per vectes IK &

IL convertendus, ut supra docuimus (§. 884).

3. In rotæ superioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis ceratus commode circumduci queat: qui idem
4. circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixi virgæ ferreæ PQ, cui eidem
5. infigatur crux ex brachiis ferreis constans RSTV, quibus singulis affixum est pondus plumbeum, ad impetum conservandum.
6. Reliqua fiant, ut in Problemate præcedente (§. 975).

SCHOLIUM.

980. Axiculi rotarum ferrei sustentaculo orichalceo incumbere debent, quod & affricum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem Molarum genere, sustentaculum virgæ ferreæ cui lapis molaris incumbit ita construendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi possit, prout usus postulaverit. Major enim lapidum distantia requiritur, si grana integra conterenda, quam si jam contrita in farinam convertenda.

PROBLEMA CLIX.

981. Molam jumentariam construere. Tab. VII. Fig. 82.

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN, cujus diameter 14 digitorum, cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando. Immo temo geminari potest.
2. Circa eundem cylindrum construatur rota stellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transversis (quale IL) quorum latitudo 7, crassities 2 digitorum, connectenda, & adhuc

Tab. VII. Fig. 82. huc aliis 16 (quale 10) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & crassities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe sicco parati ita infigendi, ut axes eorundem distent $4\frac{1}{2}$ digitis.
4. Curriculi P diameter 22 digitorum & numerus fusorum seu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.
5. Reliqua sicut ut in Probl. 157 (§. 975).

Aliter.

Tab. XI. Fig. 113. Quodsi rota adeo ingens non commoda via fuerit, construere licet minorem, cujus diameter non nisi 7 pedum, $1\frac{1}{2}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut superius (§. 975) circumagat aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{2}$ digitorum, numerus bacillorum 16. Cum eadem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens, & curriculum FE 6 suis instructum circumagens. In rota priore crassities dentis 2, in posteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

PROBLEMA CLX.

982. *Molem aliam construere.*

RESOLUTIO.

Strukturam externam docuimus supra (§. 929). Interna constat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis que ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota denota est 72, vel 80; numerus fusorum in curriculo 9 vel 8. Quilibet ala est pedum 30 vel 32.

PROBLEMA CLXI.

983. *Molem oleariam construere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita construenda, ut Tab. XI. Fig. 115. rum materiam contundere, tum ex confusa atque tosta oleum exprimere valeat. Utinque igitur ut præstetur,

1. Axi rotæ molaris infigatur rota stellata AB, quæ circumagat
2. rotam radiatam AE axi EF insertam, cui hinc inde pinnulæ G infigantur pistilla HI attollentes.
3. Pistillorum bases, itemque fundi vasorum K in trunco LM excavatorum, lamina ferrea obducantur, ut semina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia probe contundantur, pistillis proprio pondere relabentibus.
4. In paralelepipedo LM excaventur duo minora, quorum basis inferior sit perforata, ut oleum expressum inde in vasa subiecta distillare possit. Intra ea reponitur materia confusa & in alano super igne tosta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemisphæricum cavum, in altera convexum, comprehendit. A parte postica intruditur cuneus acie sua prominens in H & ab antica infigitur axis N.
5. Ut cuneus alter N vi adigi, sicque oleum extrahi possit, malicus P cum recte PQ cylindro RS circa axem suam motu affigatur, mediante ligno traverso TV ad cuneum dirigendus.

Tab. XI. Fig. 115. 6. Ad eundem cylindrum RS, in opposito latere, aptetur forceps *ab*, intra quem continetur contus *bd* cum pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum P attollit, proprio pondere cum impetu in cuncum N mox relabentem.

COROLLARIUM I.

984. Quoniam rota radiata AE cum stellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; si aquæ sufficiens copia atque declivitas, vel numerus pistillorum exiguus fuerit: ipsi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi potest. Et tales sunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum pistillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

COROLLARIUM II.

985. Si vis aquæ sufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis suis pistilla elevantes a rota stellata circumagi solent.

COROLLARIUM III.

986. Et quia perinde est, quæcunque materia contundatur; eadem manet structura si mola construatur, ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint ex. gr. pistilla 16 in duas series distributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum 48, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius; diameter rotæ AB 7' 3", numerus dentium 60; longitudo cylindri EF 15' 10", diameter 14"; diameter rotæ radiatæ 3' 2", numerus fusorum 24; integra pistilli altitudo 9' 2", crassities & latitudo 4". Sed si rota externa calcando movetur (§. 886), diameter ejus esse potest 16 pedum, rotæ stellatæ AB 5 ½, numerus dentium 60, numerus fusorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus pistillorum 9.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

SCHOLIUM I.

987. Structura molarum chartariarum eadem est, quam in Corollario primo (§. 984) exposuimus, nisi quod tudicula AB, ferro obducta in B, velli homodromo DC circa baculum EF mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rotæ molaris infixis in C impellendo, & per canalem, vel ope antliæ, vel ope haustrorum ad rotam molarem applicatorum, aqua continuo in linamenta consumenda deduci debeat.

Tab. XI. Fig. 116.

SCHOLIUM II.

988. Cum structura mola oleariæ prorsus convenit structura trituratoriæ, quæ anno 1700. Erzæ in ditione Electorali Brunsvicensi inventa & cum insigni fructu ad frumenta straminibus ejicienda adhibetur, nisi quod peculiari artificio opus sit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Describitur in Miscellaneis Berolinensibus (a).

PROBLEMA CLXII.

989. Machinam construere, quæ materiam pulveris pyrii sine pistillis conterat.

RESOLUTIO.

1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem
2. aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti, aut (quod melius judicatur) marmorei DE quorum diameter 6, 7, vel 8 pedum, crassities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacti, vel in vase cylindrico orichalceo, si plumbei fuerint, vel super saxo marmoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, si marmorei fuerint, incedant.

Tab. XI. Fig. 117.

SCHOLIUM I.

990. Ideo ex orichalco aut potius emar-
more machina construitur, quia ex hac ma-
teria per frictionem nulla scintillula eliciun-
tur, unde non sine ingenti damno in aliis
molendinis materia pulveris pyrii ignem con-
cipere solet.

SCHOLIUM II.

991. Caterum cylindris verticaliter ere-
ctis utuntur etiam ad materias alias conte-
rendas.

PROBLEMA CLXIII.

992. Molam ferrariam construere.

RESOLUTIO.

Tab. XII. Fig. 118. In molis ferrariis duplex motus con-
siderandus, quorum altero ferra reci-
procatur, altero vero lignum ad ferra-
ram continuo promovetur. Ad motum
ferrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota stel-
lata AB, cujus diameter sine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. incedat super rota radiata CD 12 vel 8 (pro diversa vi aquarum) bacillis instructa, & communem axem habente cum rota verticula-
ri EF, cujus diameter 4 vel 5 pe-
dum.
3. Alteri hujus axis extremo infiga-
tur axis ferreus curvatus G, eique
mediante bacillo GH jungatur ten-
dricula lignea IK cum ferra HL, in-
tra duas pilas ita constricta, ut non-
nisi sursum protrudi ac deorsum tra-
hi possit.
4. Ad motum ligni efficiendum con-
struendus est currus *abcd*, cujus
longitudo longitudini ligni secandi
proportionata, e. gr. 18 pedibus

major, latus vero alterum denti-
bus instructum.

5. Ut ergo lignum, uncis ferreis ad
currum firmatum, ad ferram conti-
nuo promoveatur, axi *gh* infigatur
baculus *ik*, cujus alterum extremum
k inditum est annulo ad tendicu-
lam IK firmato, & prope alterum
extremum forceps *m* contineat fur-
cam *ml* usque ad dentes rotæ ferra-
tæ *ln* extensam, cujus diameter duo-
rum pedum.
6. Porro axi rotæ ferratæ, ferrea in-
figenda est alia radiata *pq* 6 bacil-
lis instructa, qua circumagitur rota
stellata *rs*, dentes 36 & axem com-
munem cum alia radiata *tv* habens,
quæ 6 bacillis instructa currum pro-
pellit.

SCHOLIUM.

993. Dantur & adhuc alii modi Currum
propellendi, quos representat BOEKLERUS
(a). Nos cum descripsimus, quo ordinariè
utuntur. Caterum idem BOEKLERUS (b).
molam ferrariam manuariam accurate deli-
neat.

PROBLEMA CLXIV.

994. Horologium oscillatorium Hu-
genianum construere.

RESOLUTIO.

1. Fiant laminæ AA & BB semipedali
longitudine, pollices duos & semis
latæ, quibus rotarum præcipuarum
axes inferantur.
2. Rota infima CC 80 dentibus inci-
datur in convexo, & eidem axi affi-
gatur orbiculus aculeatus DD, ex
quo pondera suspendantur.

3. Rota

(a) In *Theatro Machinarum* f. 60. & seqq.

(b) In *der Haus- und Feld-Schule* Tom. I. class.
6 p. 512. & 513.

- Tab. XII. Fig. 119. 3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo, & una rotam stellatam F dentium 48.
4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8, & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.
5. Hæc agitet tympanum I dentium 24, & rotam ferratam K dentium 15.
- Tab. XII. Fig. 120. 6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima sui parte reflexa, ac foramine oblongo penduli intra duas laminas Cycloidicas duplici filo suspensi virgam ferream, cum appenso pondere plumbeo X, complexa.
- Tab. XII. Fig. 119. 7. A lamina AA quarta digiti parte distet alia YY, in qua describantur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas, exterior in 60 scrupula prima dividatur.
8. Axi rotæ C aptetur rota bb tubo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, sine eodem tamen converti possit, ubi e re fuerit.
9. In tubuli prædicti extremo e applicetur Index horæ spatio circuitum absoluturus, atque ita minuta horaria indicaturus.
10. Rota bb impellat aliam gg 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum sex dentium d: quod tandem
11. Convertat rotam dentium 72 Indicem horarium minutario breviorum circumferentem.
12. Axi rotæ H affigatur orbis ll, & in eo circulus in 60 partes æquales divisus describatur, qui per incisum in lamina YY foramen minuta secunda monstrat.

13. Longitudinem penduli, ut jam supra notatum est, HUGENIUS (a) inventor experimentis factis deprehendit esse partium trium, quarum una est ad pedem Parisinum ut 864 ad 881 (§. 470).
14. Pondus perpendiculari X trilibre esse debet; & ne occurfu aëris motus impediatur, optima ejus forma est lenticularis. Ponderis b, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri nequit, sed per experientiam determinanda. HUGENIUS pondere 6 librarum usus est, diametro orbiculi D unius digiti existente, longitudine autem penduli ea, quam diximus.
15. Ceterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus sursum trahitur, peculiari hoc artificio suspendendum, quod a laudato HUGENIO repertum. Funis scilicet in se rediens orbiculum D amplectatur, & inde descendens altera sui parte trochleam c subeat, cui pondus b appensum. Hinc super orbiculum D extrinsecus horologio affixum ascendit, iterumque ad trochleam alteram F descendit, cui pondus G appensum majus b retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto descendat. Hic autem ferratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat.

Tab. XII. Fig. 119.

Tab. XII. Fig. 120.

SCHOLIUM.

995. Horologia hæc oscillatoria Hugeniana adeo accurate construi possunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus

li 2

(a) In Horologio oscillatorio f. 7.

motus Solis diurnus inaequalis, ceu in Chronologicis ostendetur. Unde in Astronomia, ubi accurata temporis mensura requiritur, ingens eorum est usus. Sane Vir Cl. Philippus DE LA HIRE (a) testatur, se sepius experitum esse, quod intra octiduum a medio Solis motu vel minuto secundo non aberrant.

SCHOLIUM II.

996. *Cum pleraque Machinae ex ligno constructi soleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum constructionem edocere.*

PROBLEMA CLXV.

Tab. XII. 997. *Rotas dentatas & radiatas lignearum construere.*

Fig.

RESOLUTIO.

121.
n. 1. 2.
3.

1. Orbes rotarum, quibus dentes insiguntur, ex diversis partibus componuntur. Si dentes in plano insiguntur, aliae partes sunt segmenta circuli A, aliae segmenta annulorum circularium B. Posteriores ita superimponuntur prioribus, ut juncturae D partium A medio partium B, & contra juncturae C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatae clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transversis FF firmantur. Quodsi dentes in convexo insigendi, partes in utroque plano sunt segmenta annularia B.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium insigendorum existunt, in tot partes aequales divisa, quot dentes rota habere debet; intervallum unum dividitur in 16 partes aequales, quales 7 tribuuntur denti, 9

(a) In Epistola Tabulis Astronomicis praemissa.

Tab. XII. Fig. 121. n. 3.
vero interstitio inter binos relinquuntur, quarum 8 cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes aequales, quarum 3 spissitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ spissitudini seu diametro bacilli tribuuntur.

3. Idem intervallum dividitur in 3 partes aequales, & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{3}{4}$ faciunt.

4. Anguli dentium secundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati refecantur, ut superincessus super bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes insiguntur, esse debent quadrata, & axiculi ferrei in centris rotarum exacte constituendi, eo meliores quo minores, quia minorum minor est frictio: eadem de causa imponendi concavo orichalceo, aut saltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotae radiatae duplicem plerumque habent orbem, nisi bacilli exiguae fuerint longitudinis, & si numerus bacillorum exiguus & resistentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri consuevit.

SCHOLIUM I.

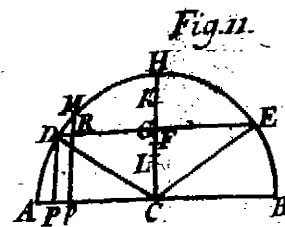
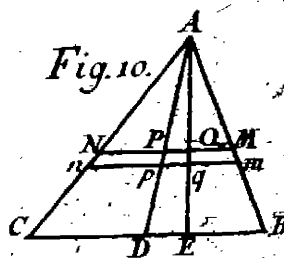
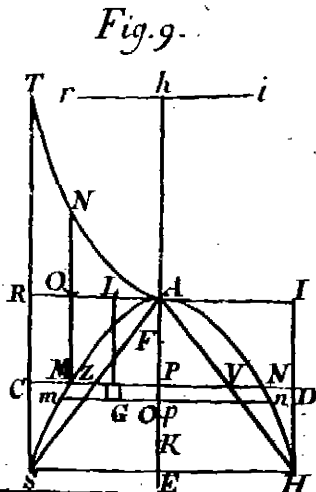
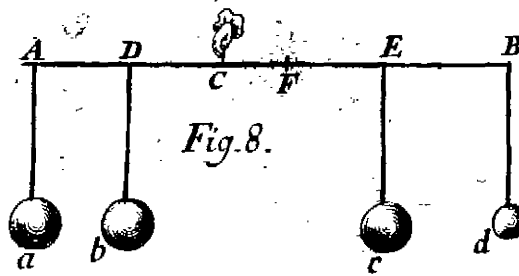
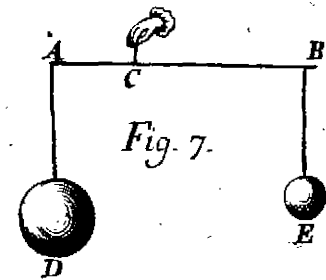
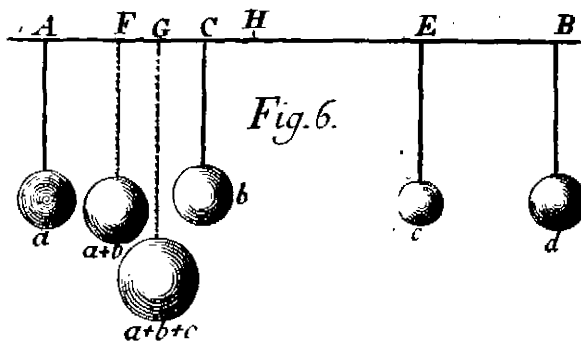
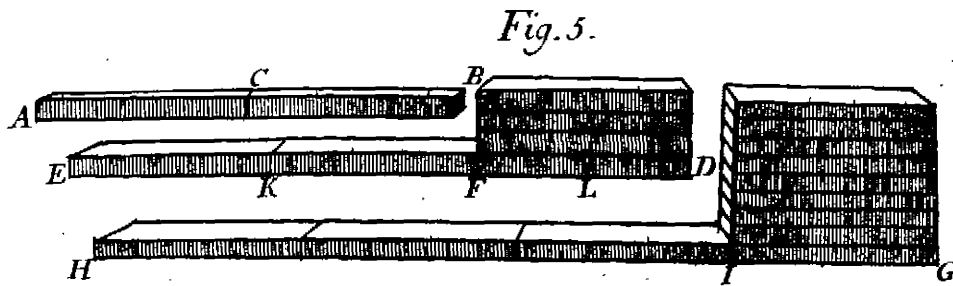
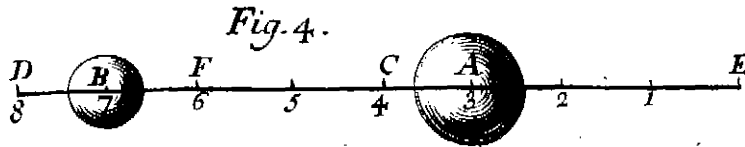
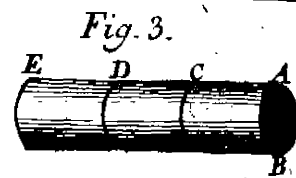
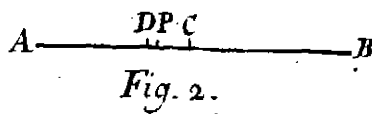
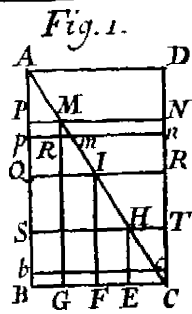
998. *Distantia dentium in rotis, quarum usus in Molendinis est, intra spatium 4 & 5 digitorum fere continetur.*

SCHOLIUM II.

999. *Rota horologiarum metallica accuratam imprimis exigunt divisionem; ad quam absolvendam peculiaribus instrumentis opus est a LEUFOLDO (b) descriptis.*

(b) In Theatro Machinarum generalis. c. 5. §. 93. 94

Fig. Mechan. Tab. I.



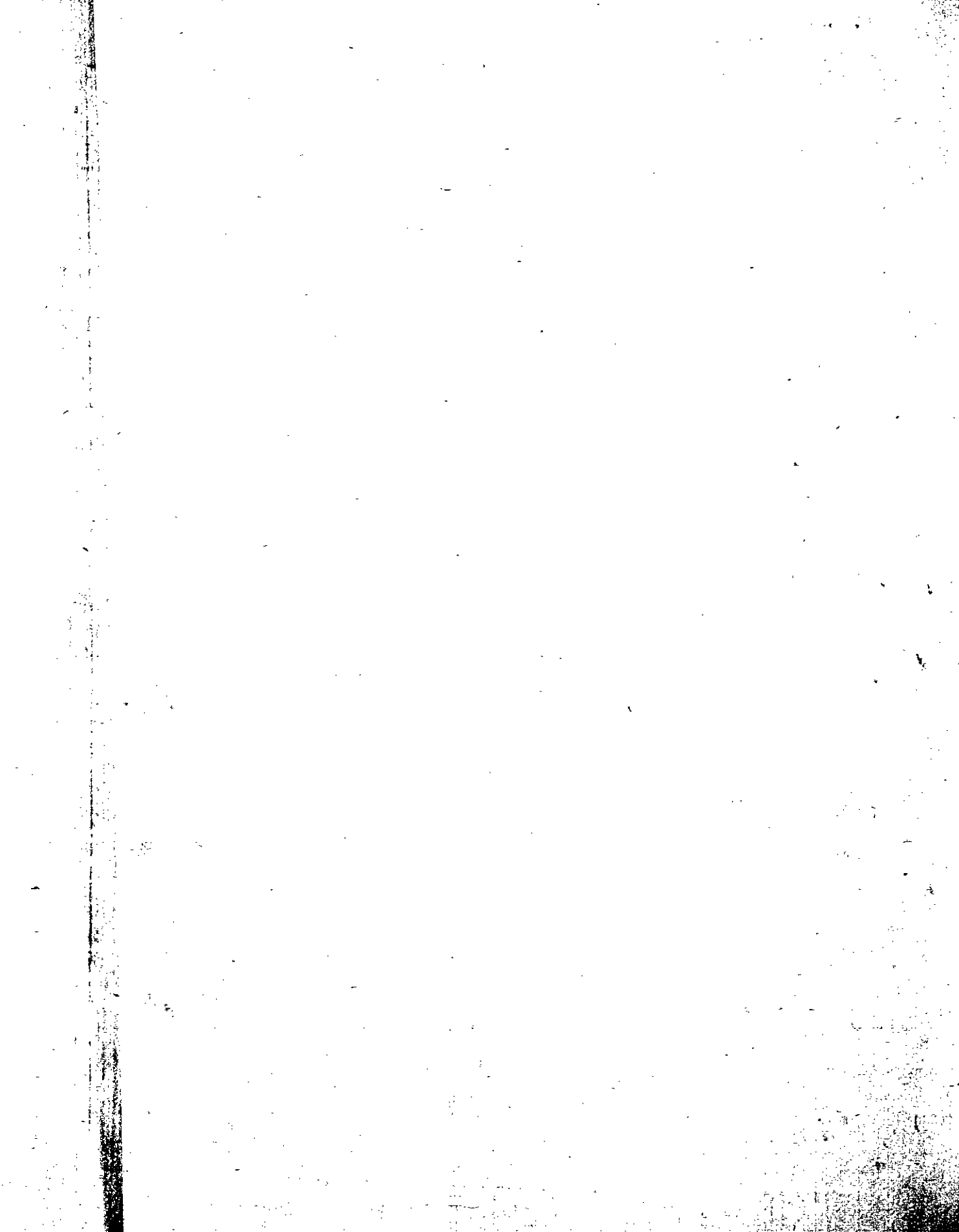


Fig. 12.

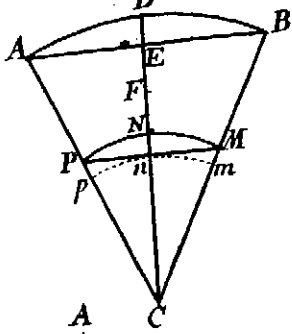


Fig. 13.

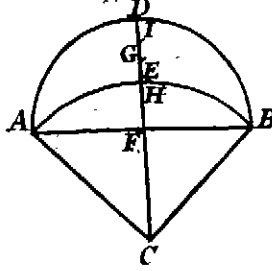


Fig. 14.

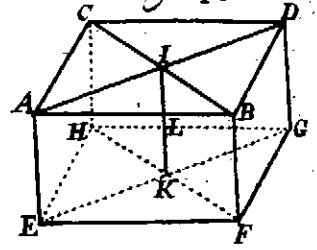


Fig. 16.

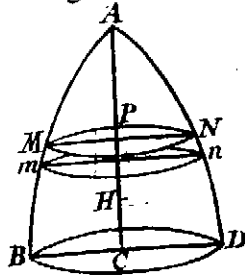


Fig. 17.

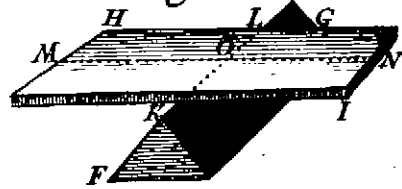


Fig. 15.

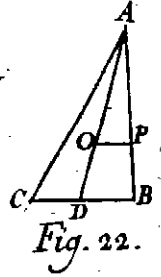
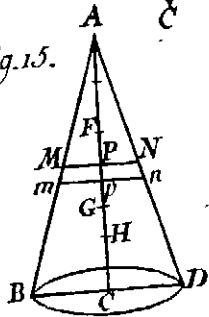


Fig. 22.

Fig. 23.

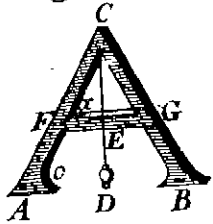


Fig. 25.

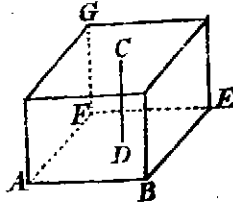


Fig. 18.

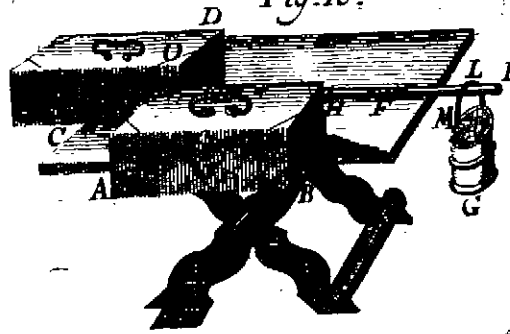


Fig. 19.

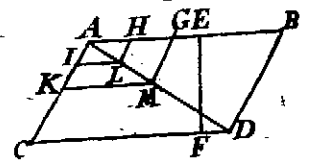


Fig. 20.

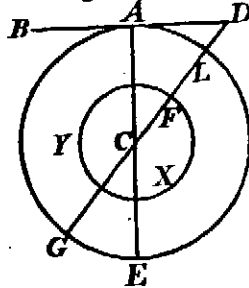


Fig. 27.

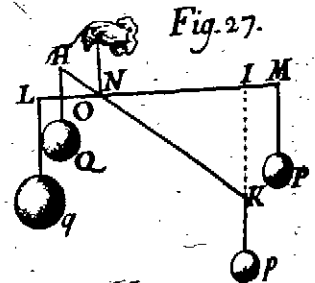


Fig. 24.

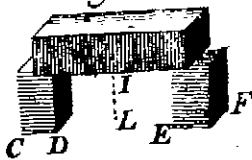


Fig. 21.

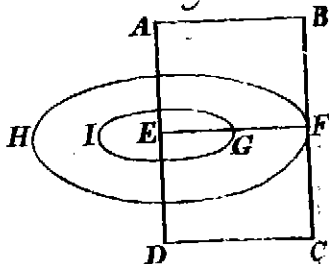


Fig. 29.

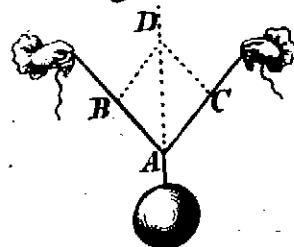


Fig. 26.





Fig. 28.

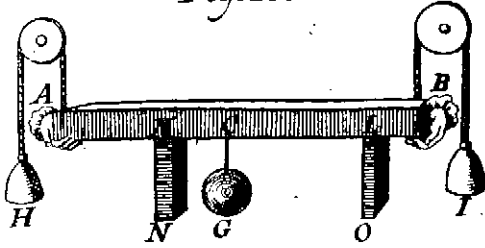


Fig. 30.

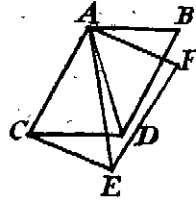


Fig. 32.

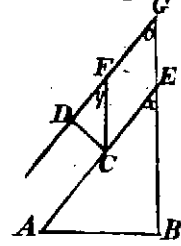


Fig. 31.

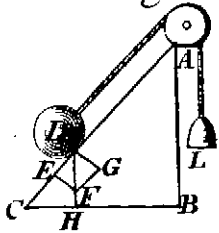


Fig. 33.

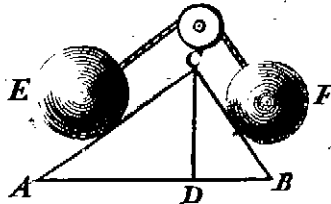


Fig. 34.

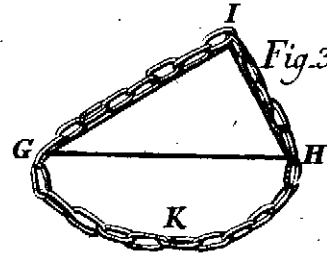


Fig. 35.

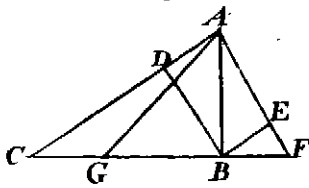


Fig. 36.

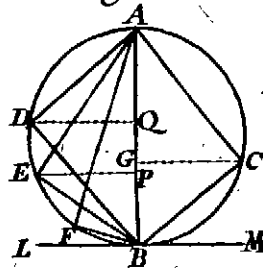


Fig. 38.

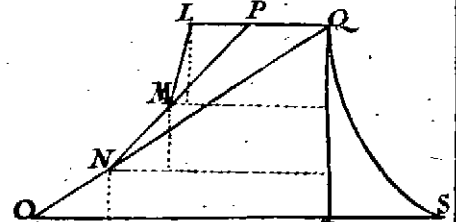


Fig. 37.

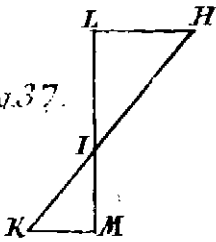


Fig. 40.

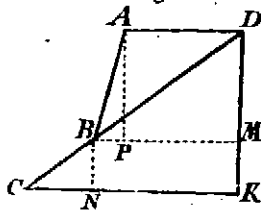


Fig. 40.

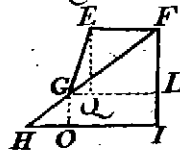


Fig. 41.

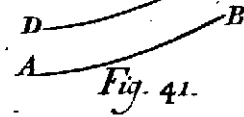


Fig. 39.

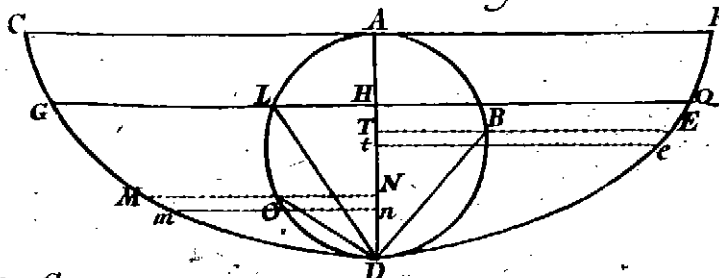


Fig. 42.

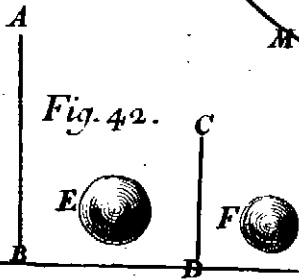
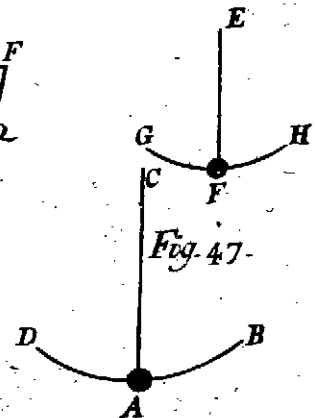
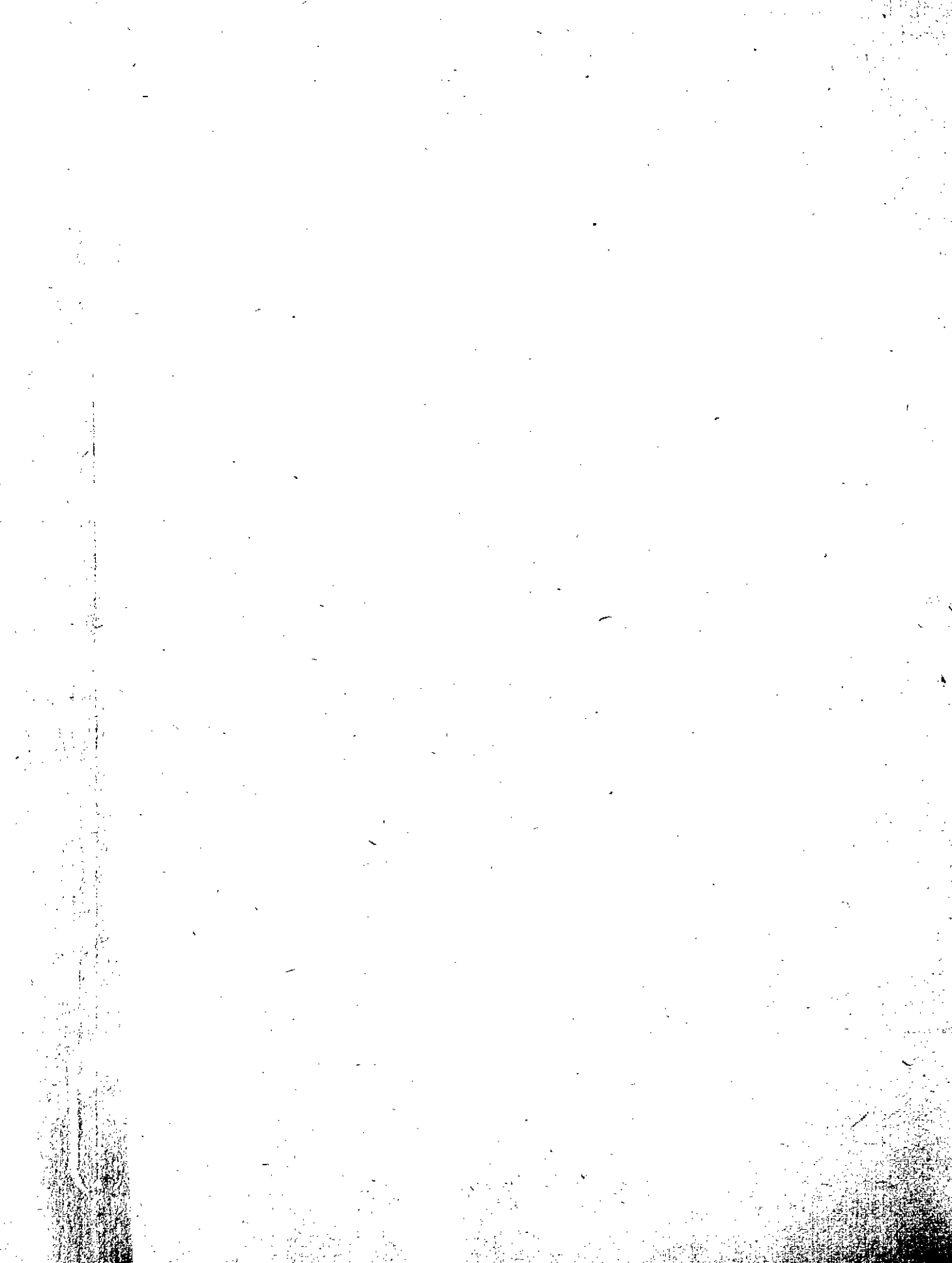


Fig. 47.





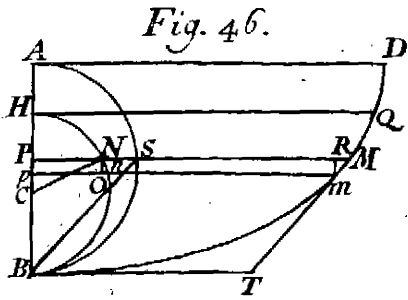


Fig. 46.

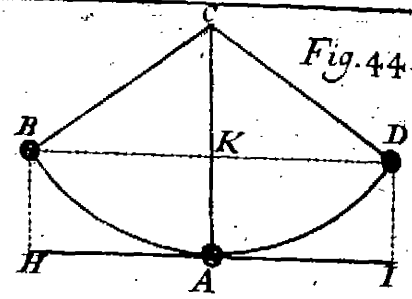


Fig. 44.

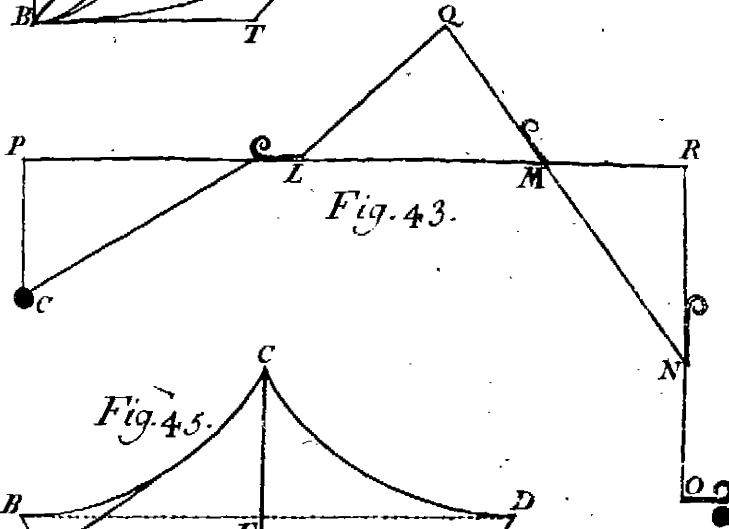


Fig. 43.

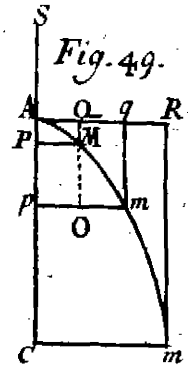


Fig. 49.

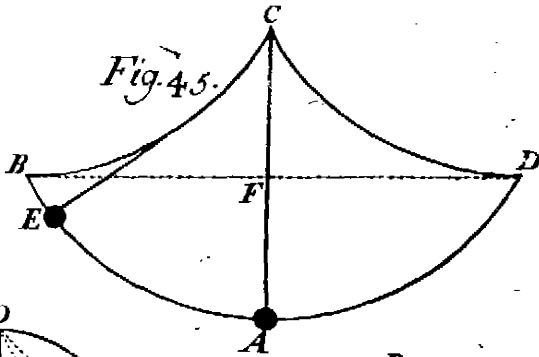


Fig. 45.

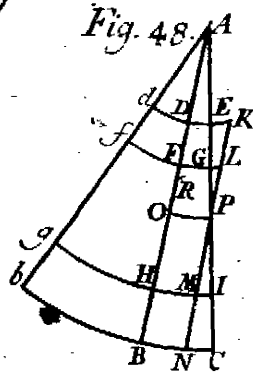


Fig. 48.

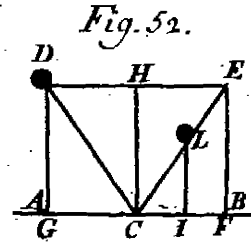


Fig. 52.

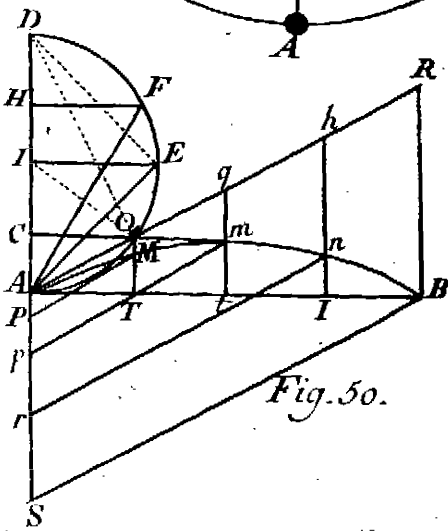


Fig. 50.

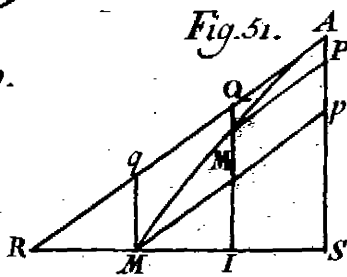


Fig. 51.

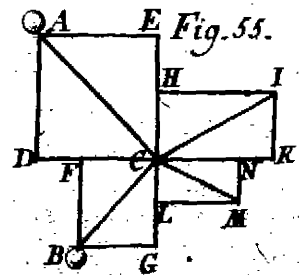


Fig. 55.

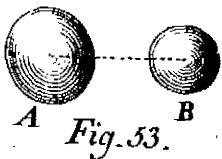


Fig. 53.

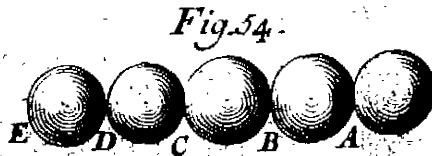


Fig. 54.

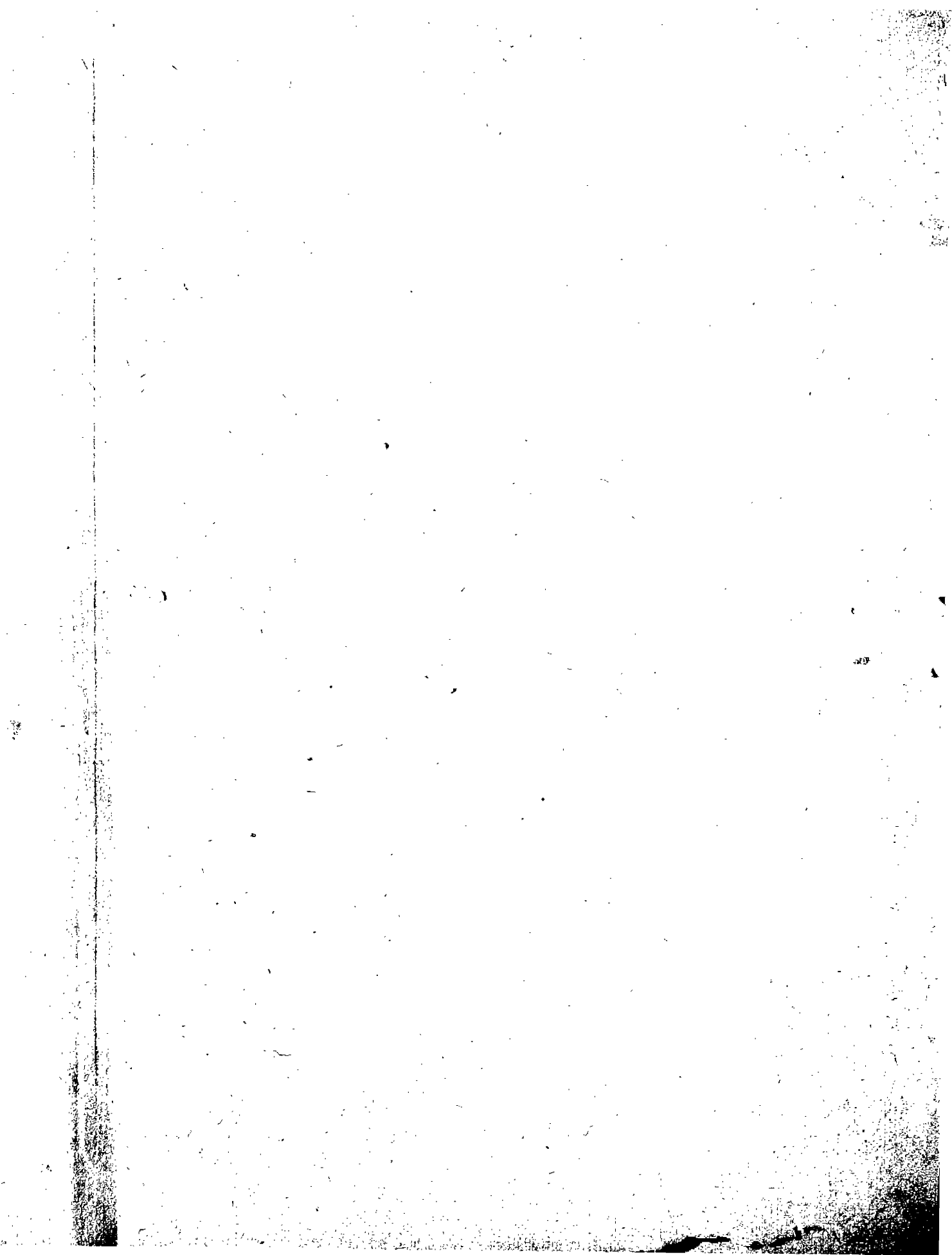


Fig. 56.

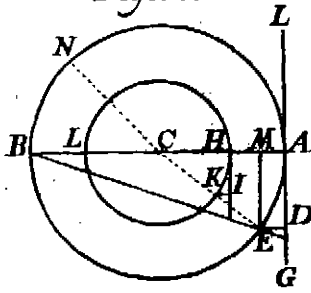


Fig. 57.

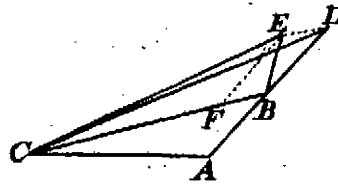


Fig. 59.

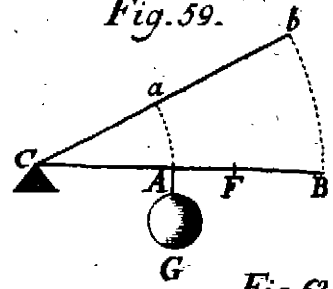


Fig. 58.

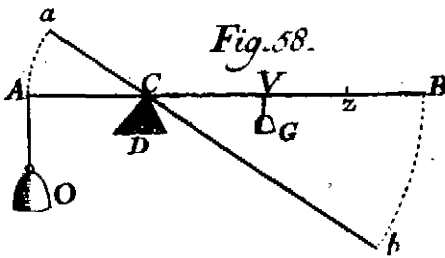


Fig. 65.

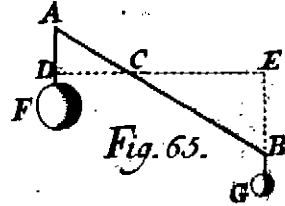


Fig. 63.

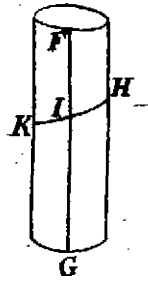


Fig. 62.

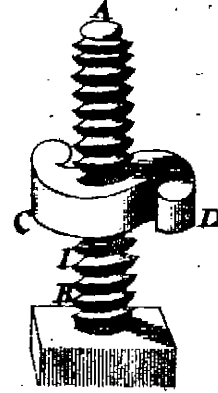


Fig. 64.

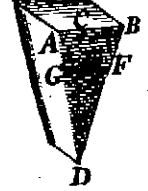


Fig. 60.

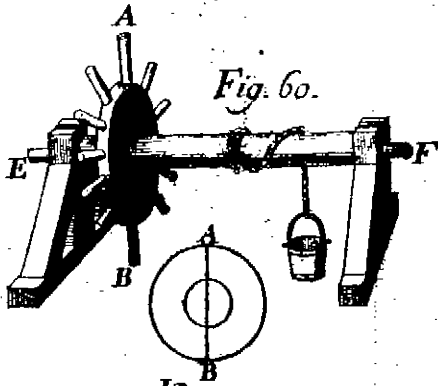


Fig. 61.

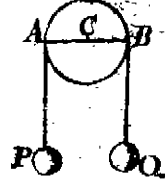


Fig. 66.

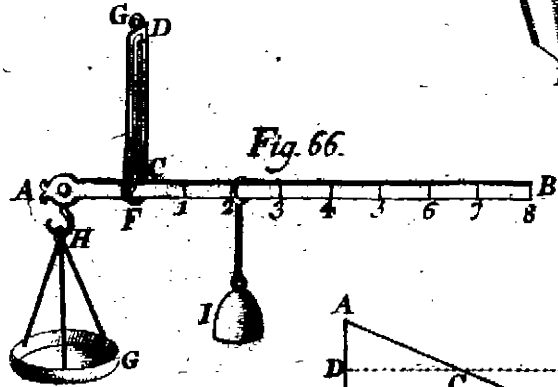


Fig. 70.

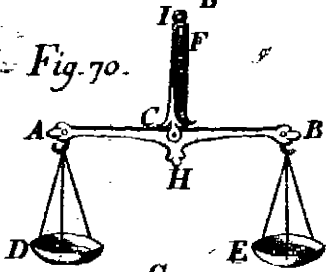


Fig. 69.

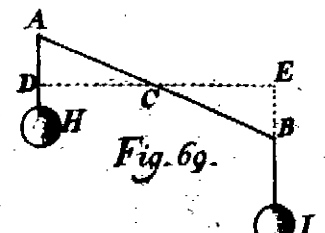


Fig. 67.

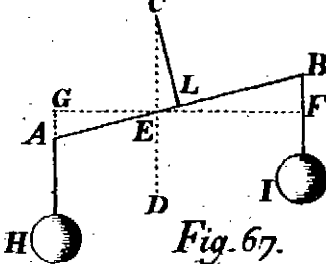
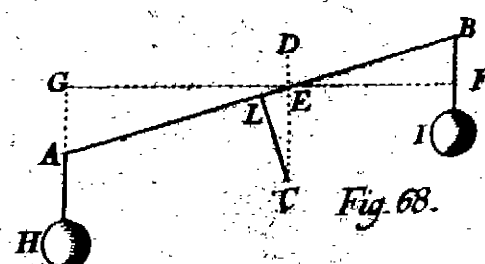
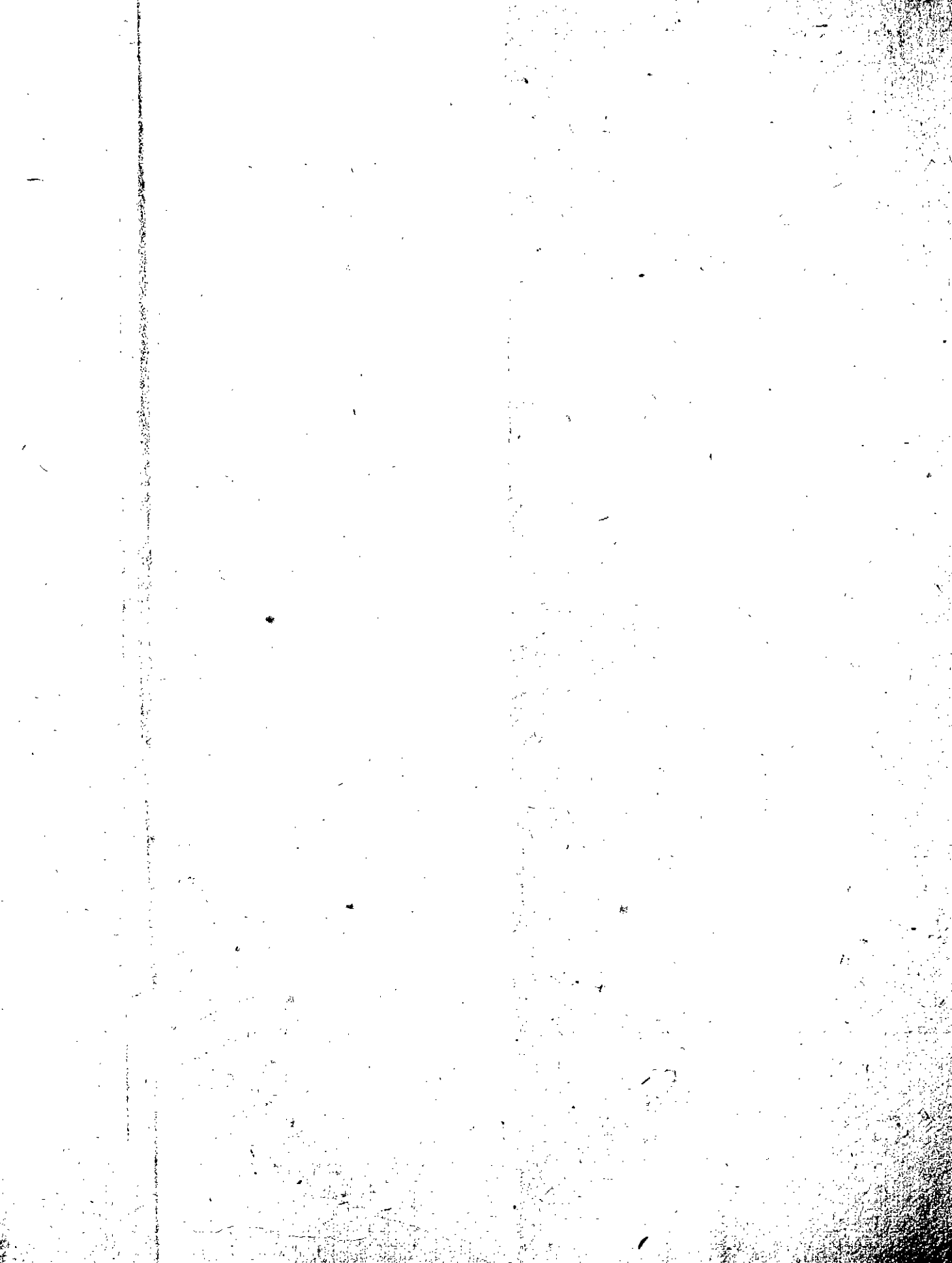
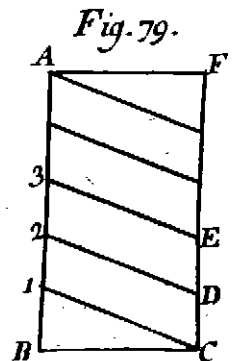
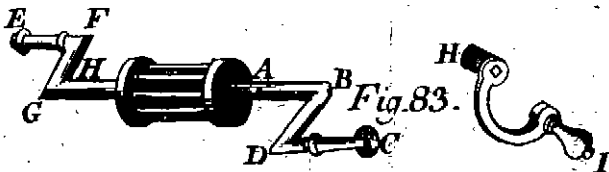
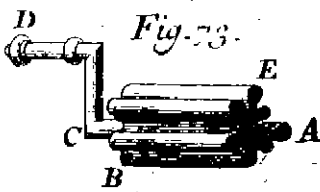
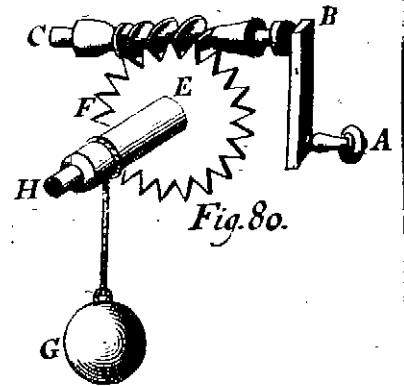
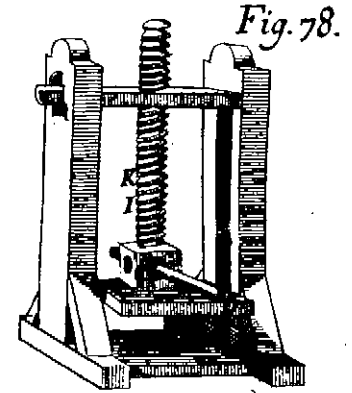
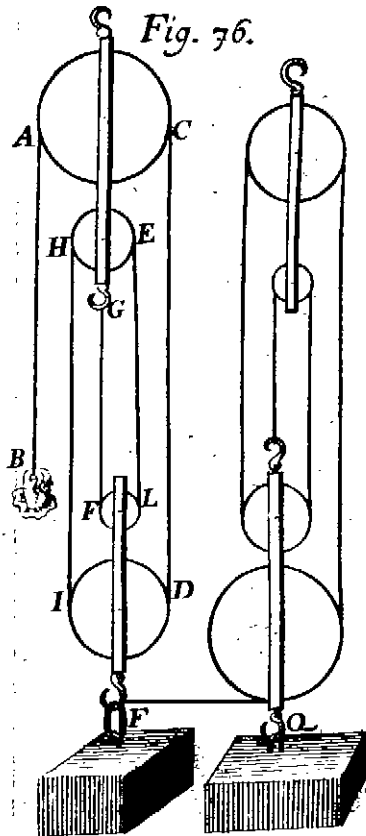
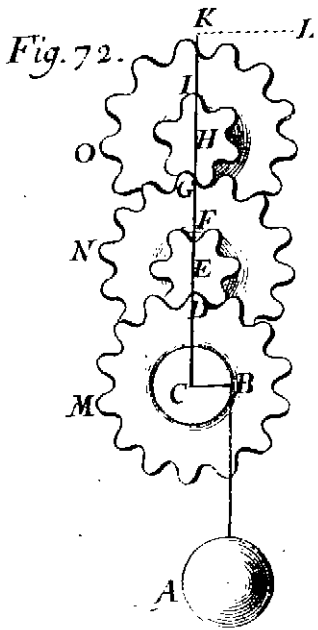
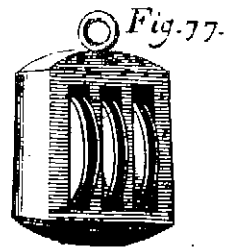
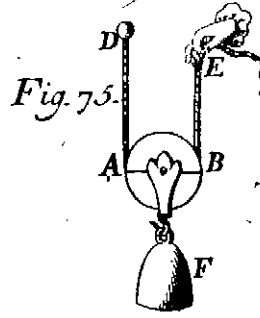
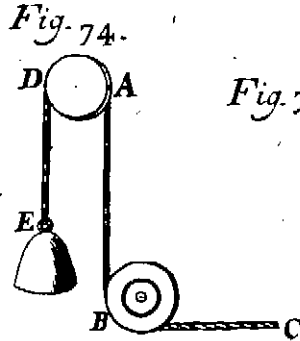
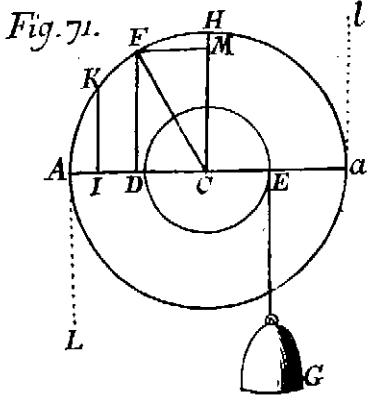


Fig. 68.







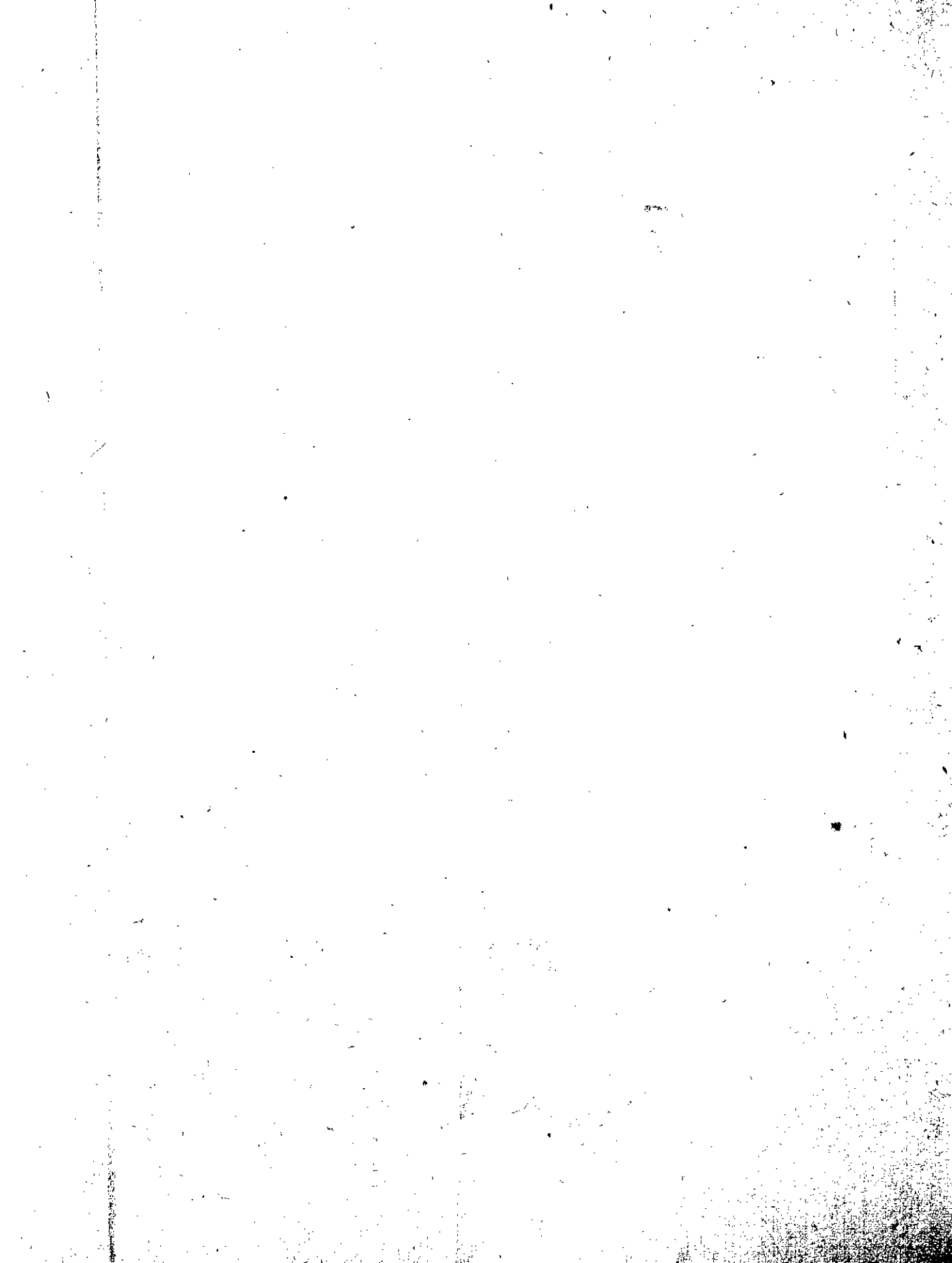


Fig: 81.

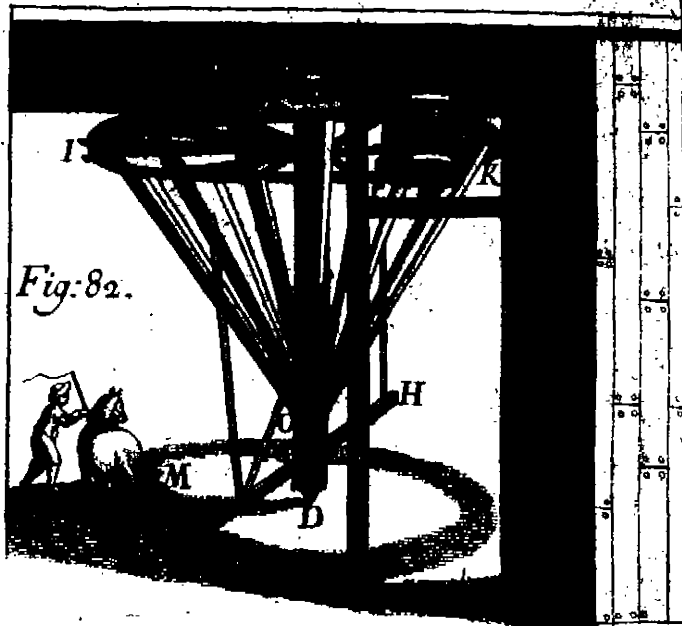
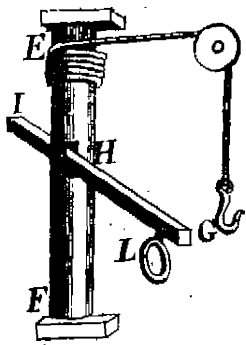


Fig: 85.

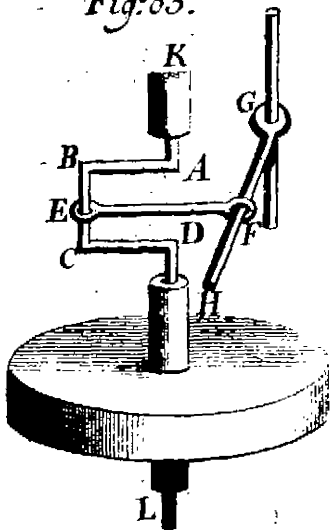


Fig: 86.

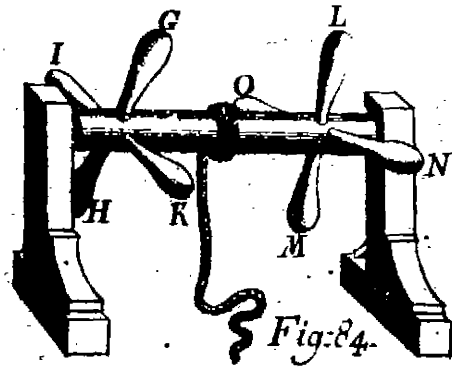
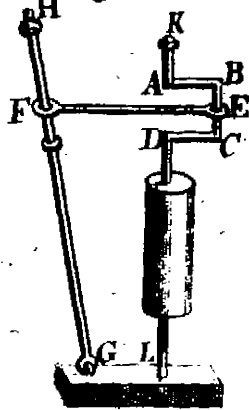
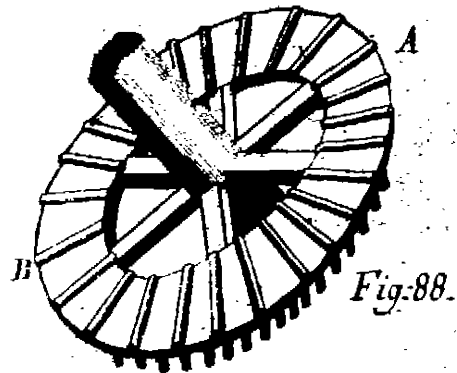
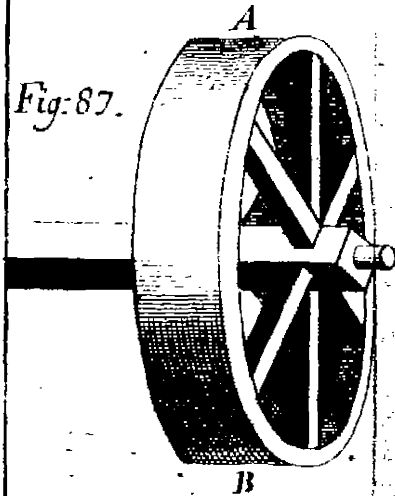


Fig: 87.



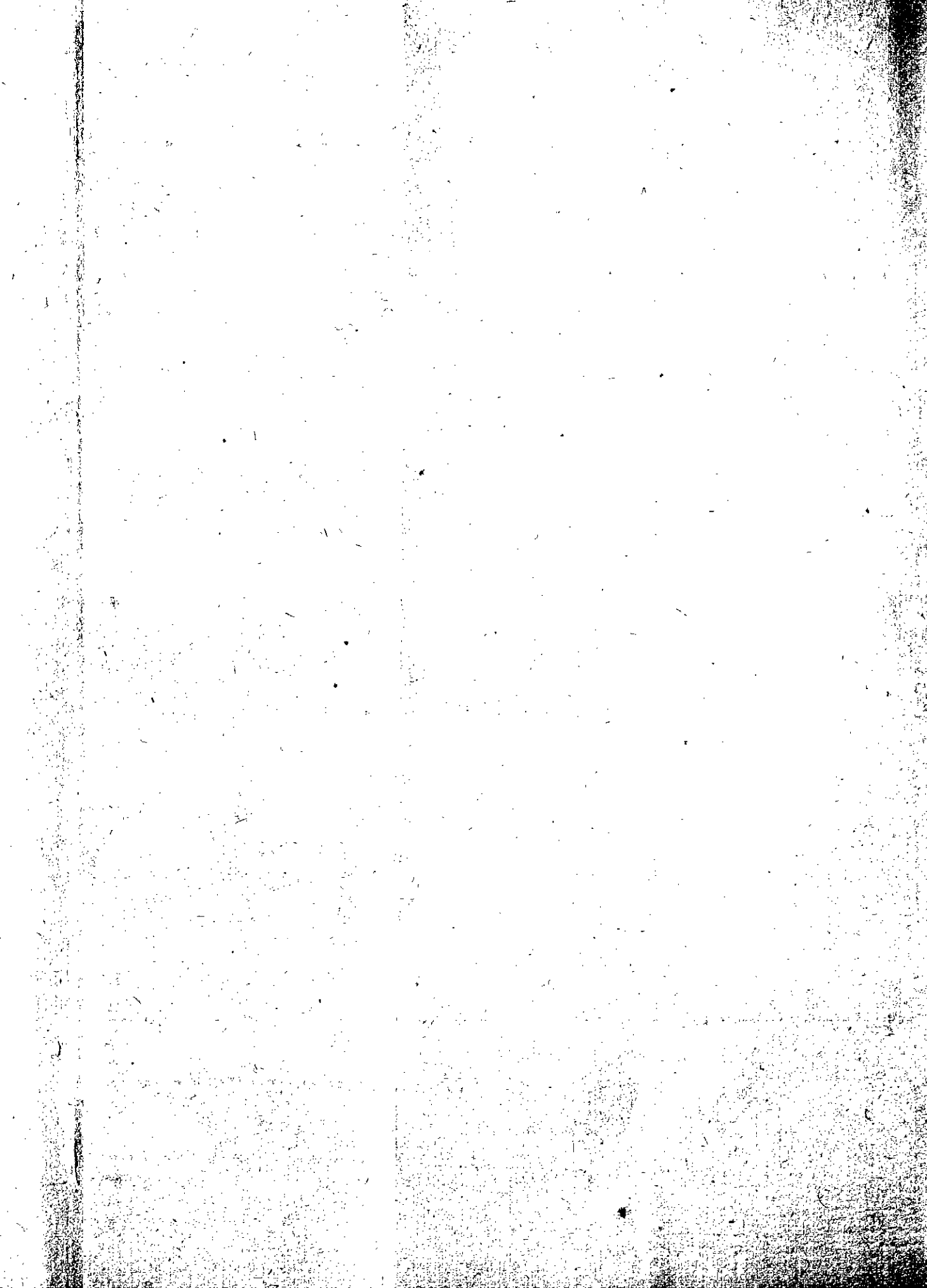


Fig: Mech: Tab: VIII.

Fig: 89.

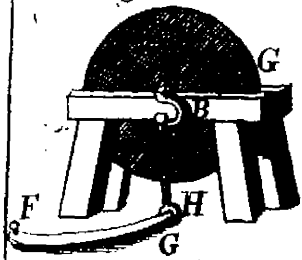


Fig: 90.

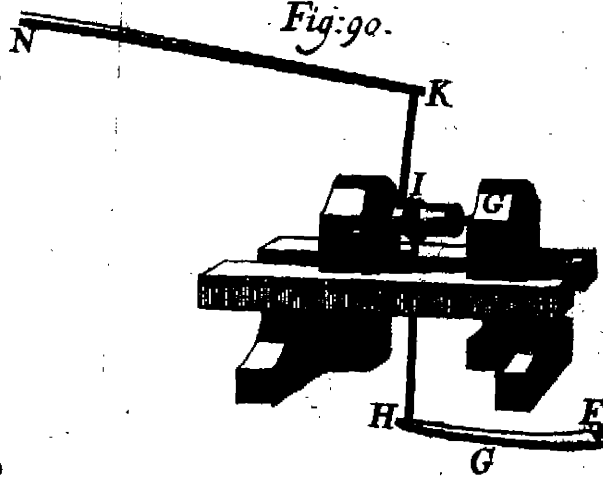


Fig: 92.

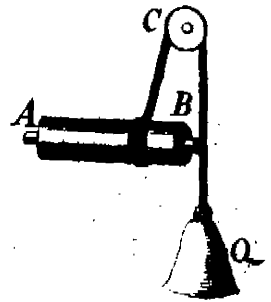


Fig: 91.

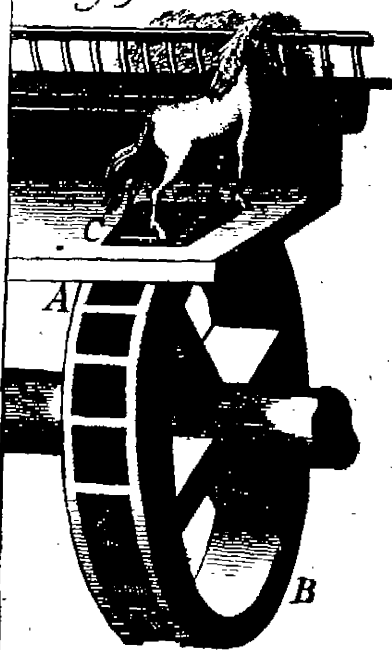


Fig: 93.

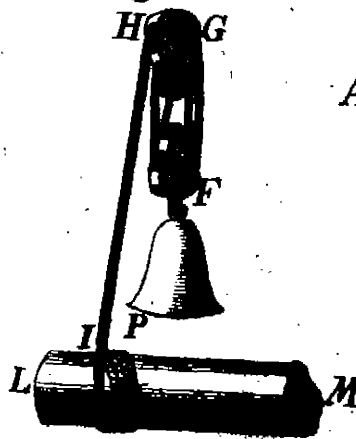


Fig: 96.

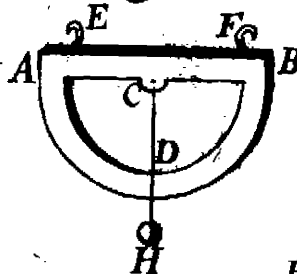


Fig: 94.



Fig: 97. N° 1.

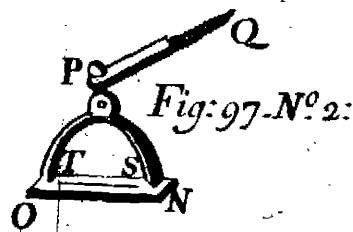
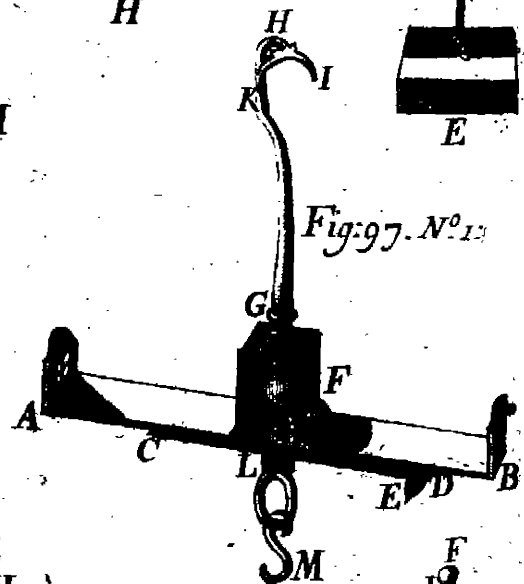


Fig: 97. N° 2.

Fig: 95.

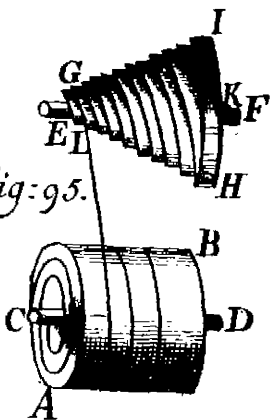
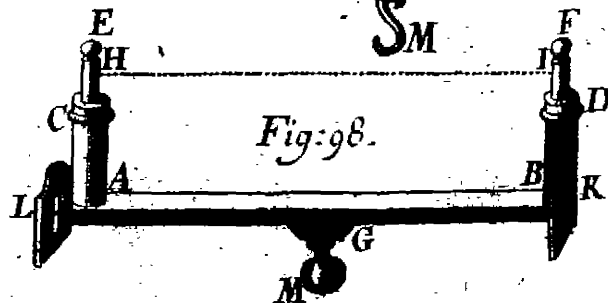


Fig: 98.



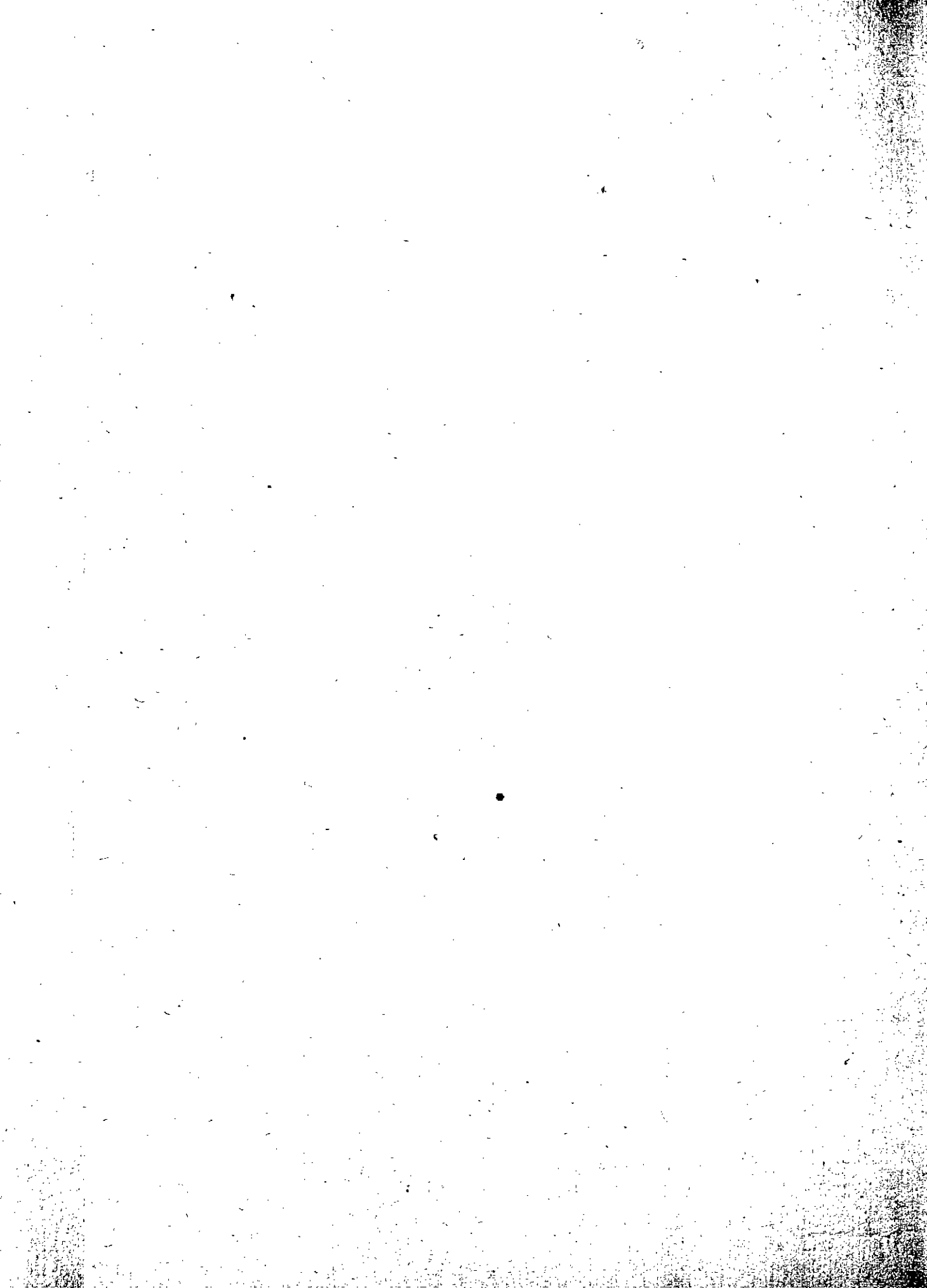


Fig. Mechan. Tab. IX.

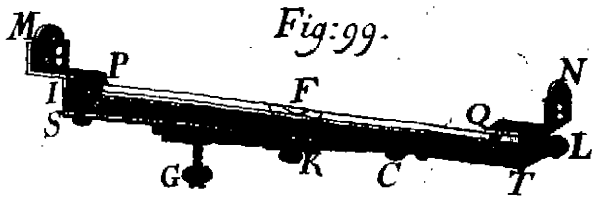


Fig: 99.

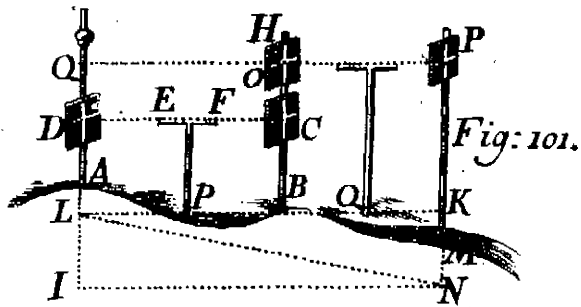


Fig: 101.

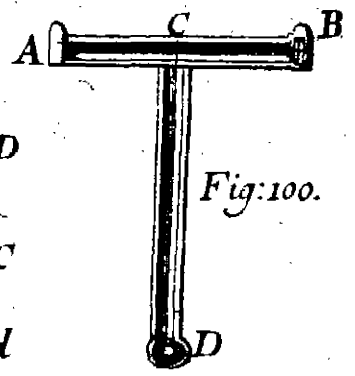


Fig: 100.

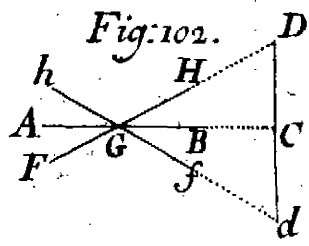


Fig: 102.

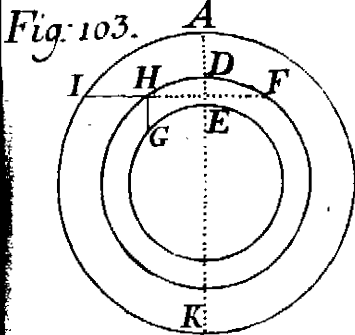


Fig: 103.

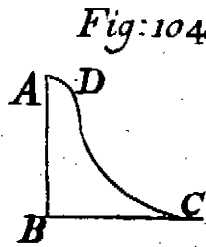


Fig: 104.

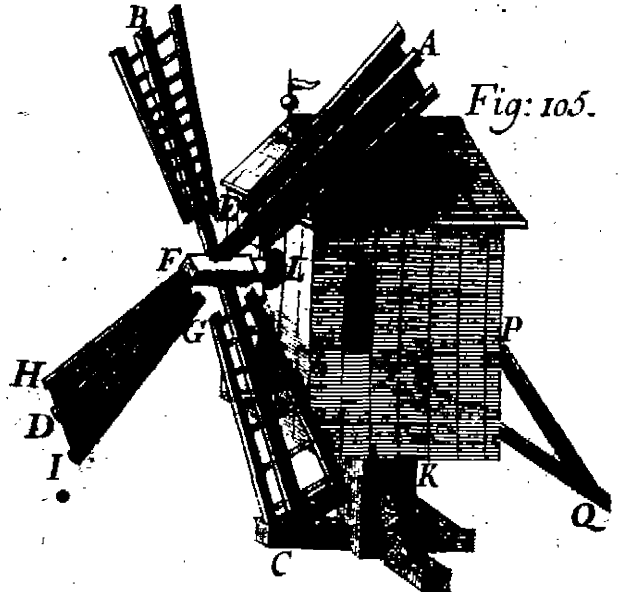


Fig: 105.

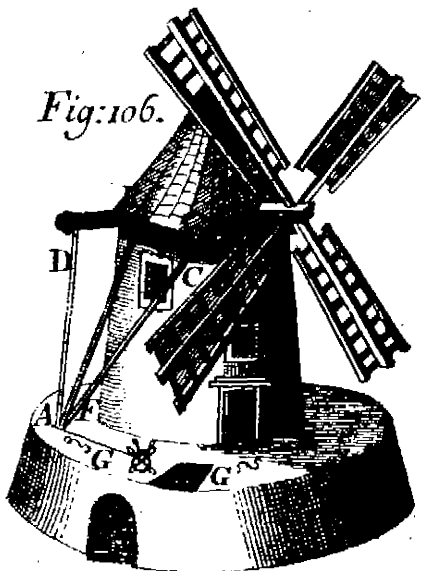


Fig: 106.

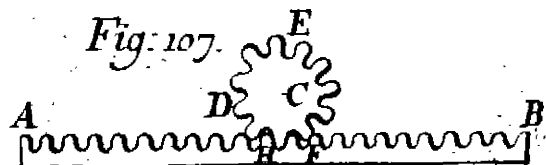


Fig: 107.

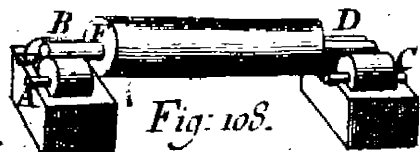


Fig: 108.

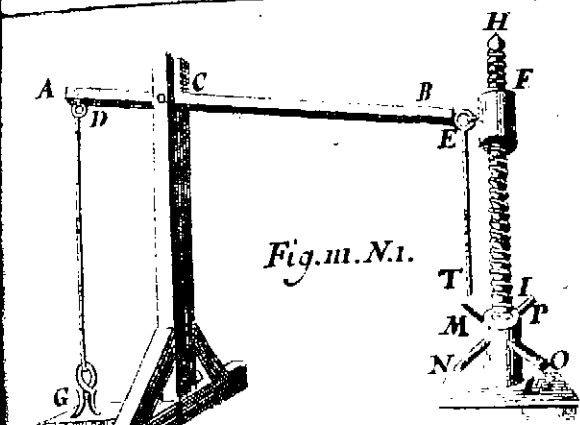


Fig. m. N. 1.

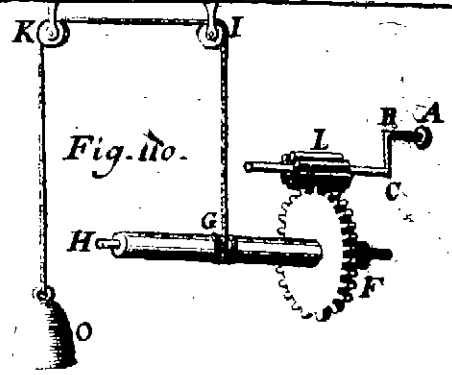


Fig. 110.

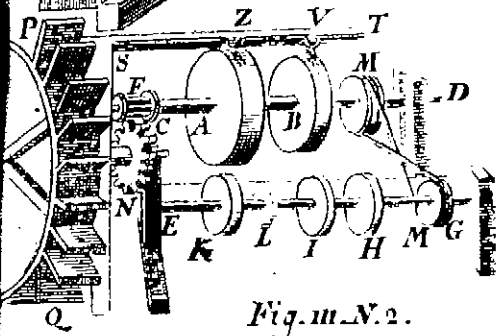


Fig. m. N. 2.

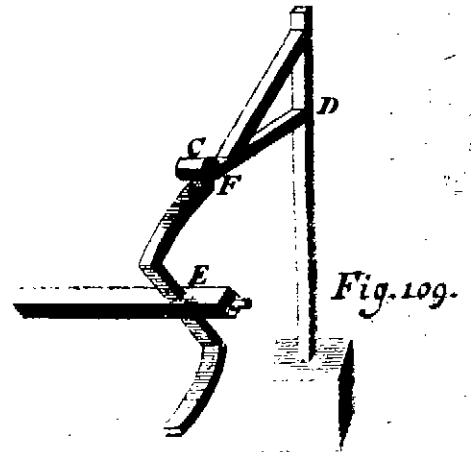


Fig. 109.

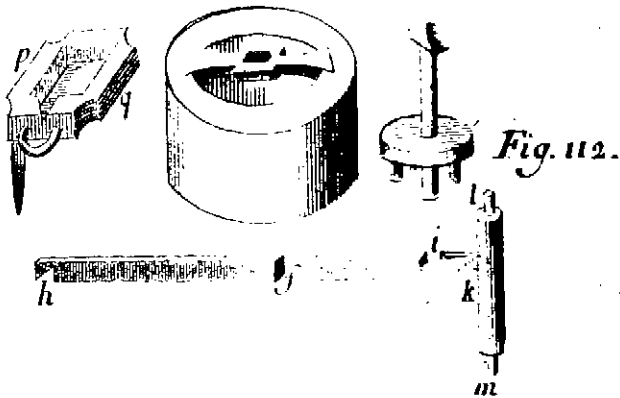
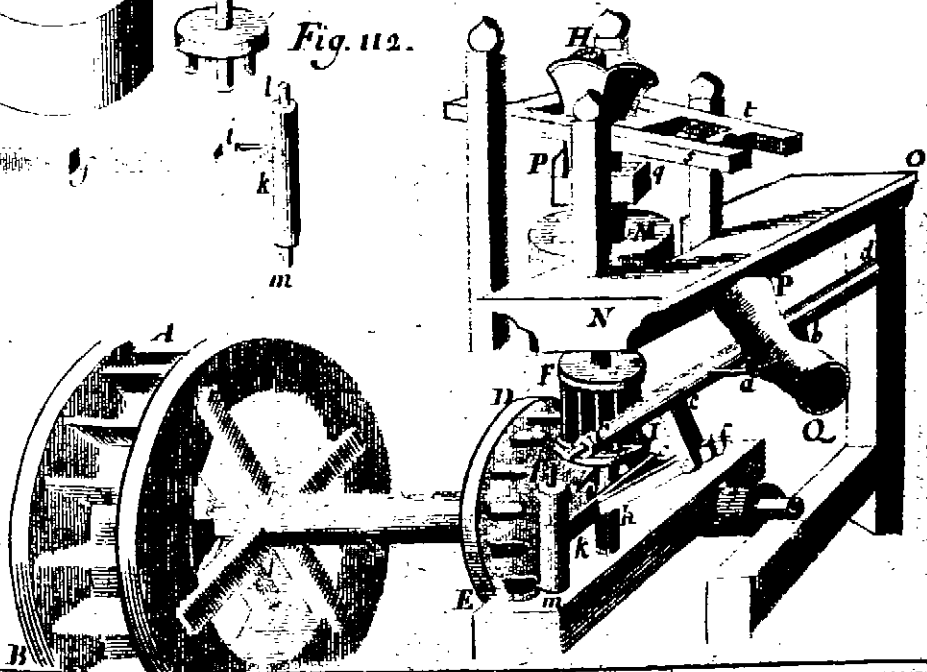


Fig. 112.



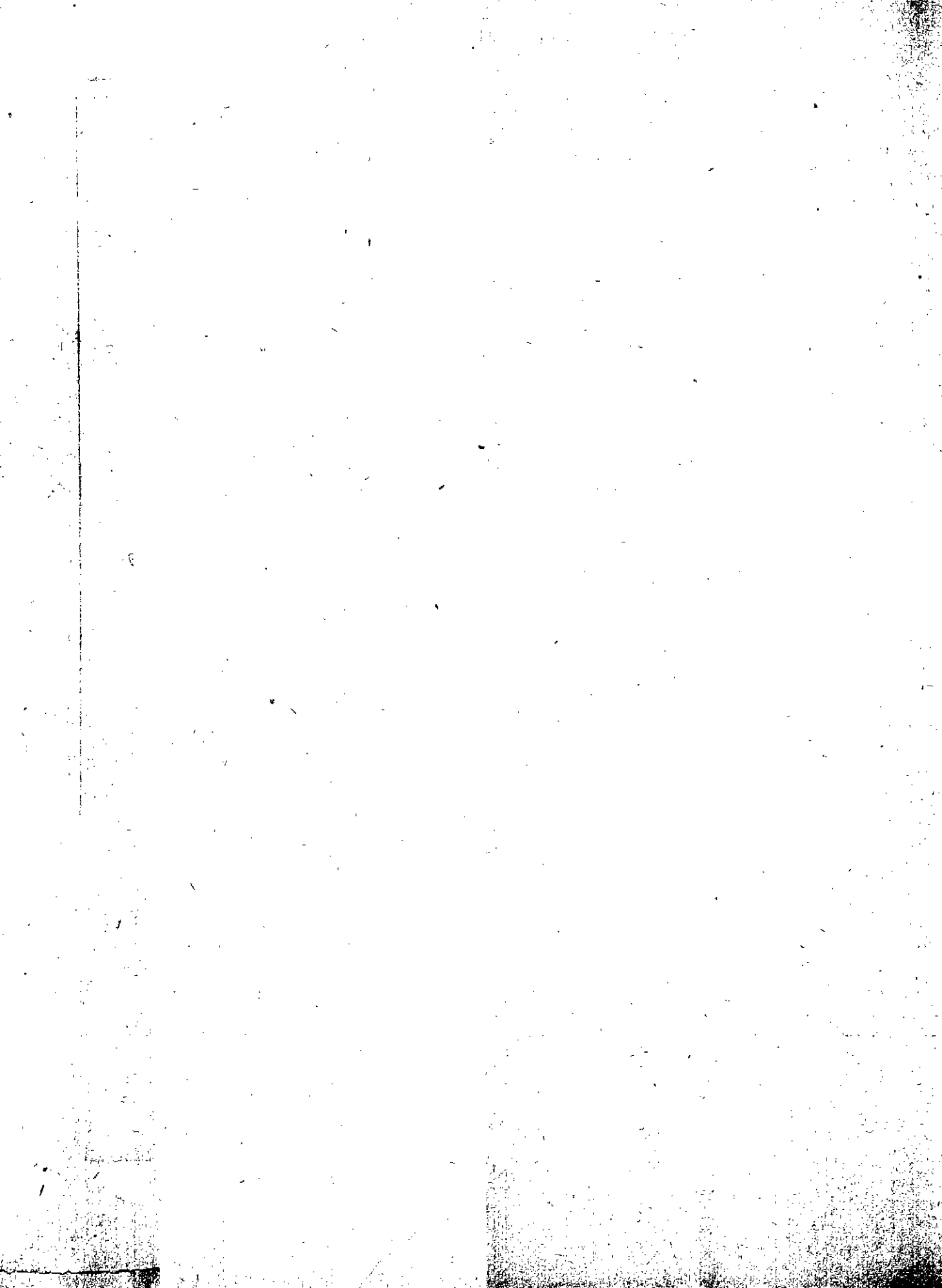


Fig. 115.

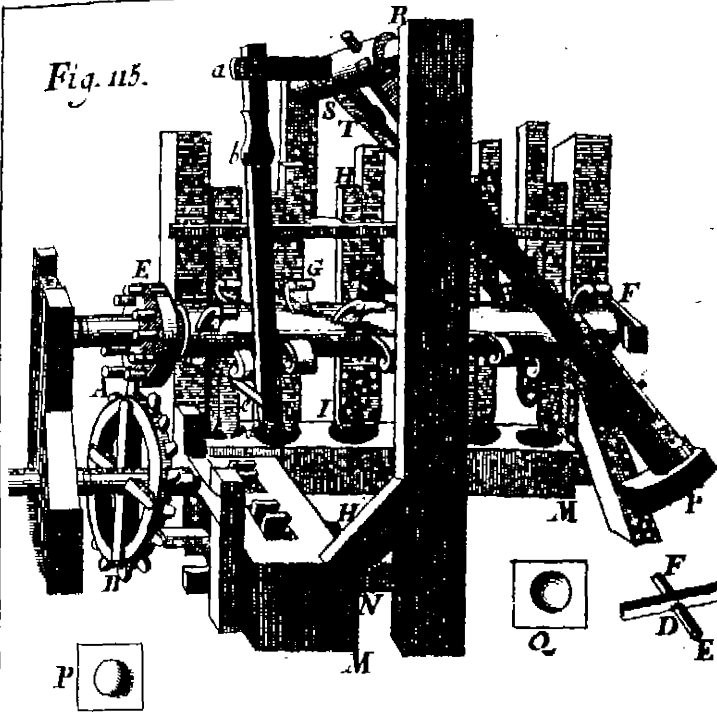


Fig. 117.

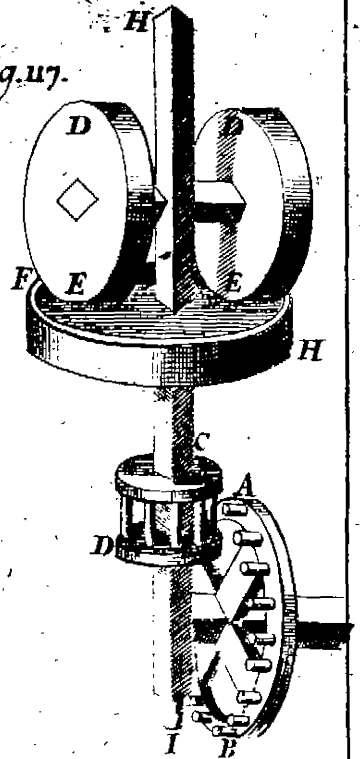


Fig. 116.

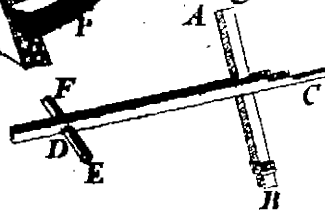


Fig. 114.

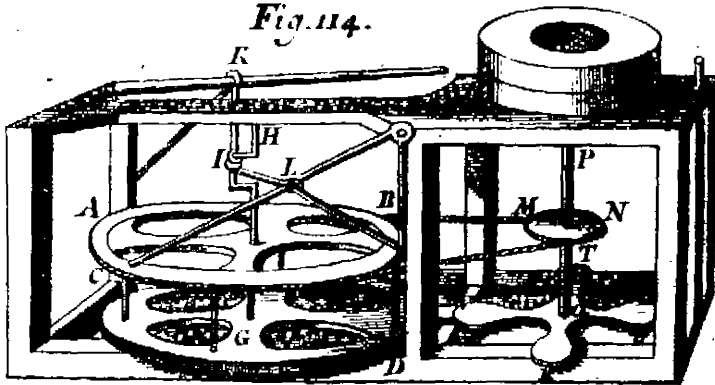
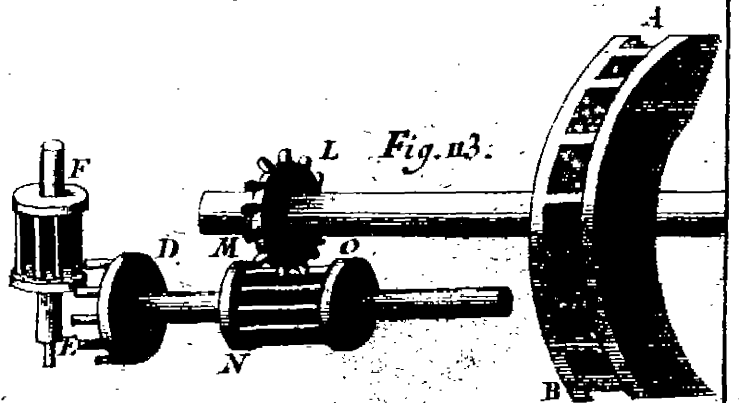


Fig. 113.



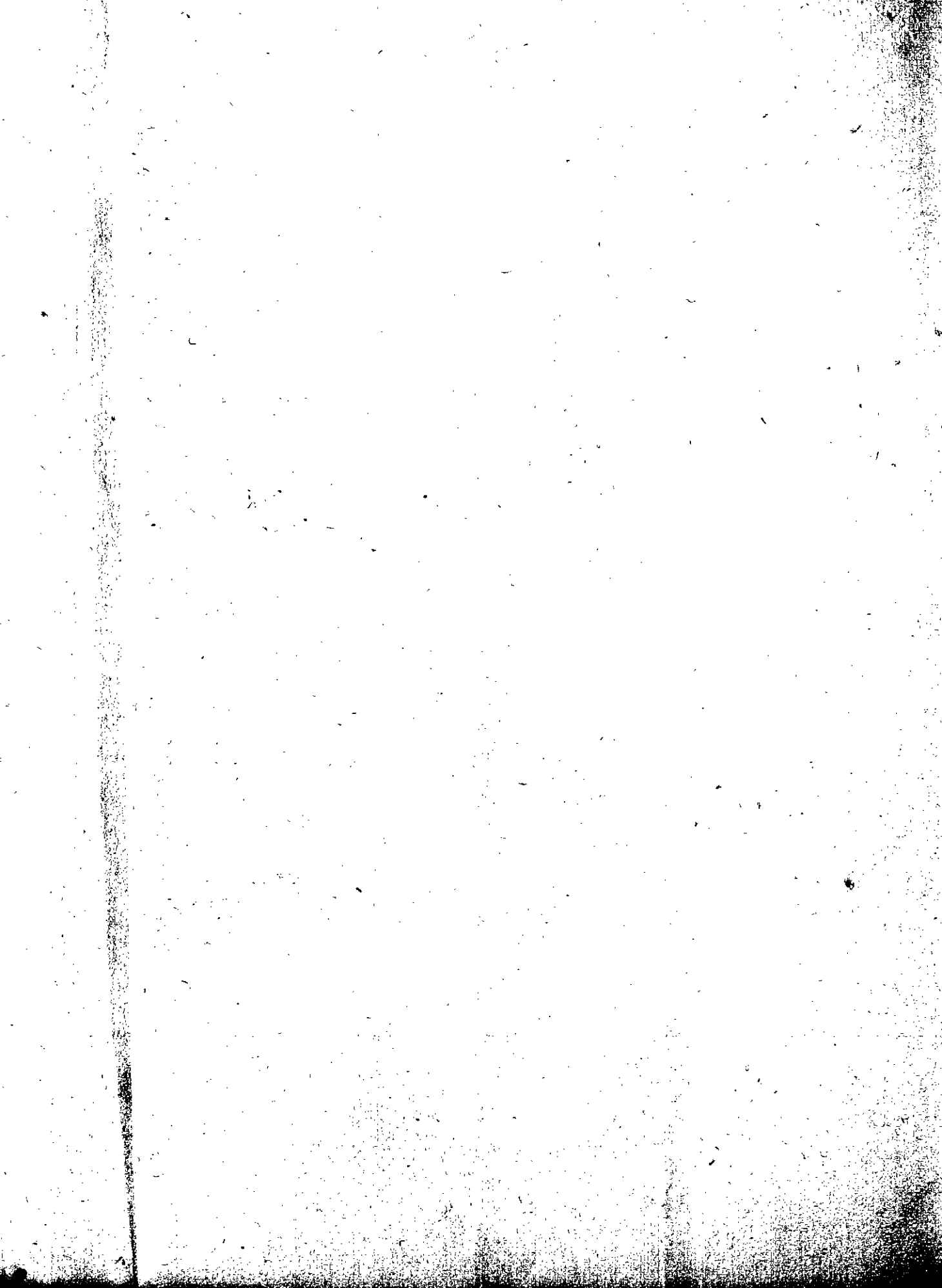


Fig: Mechan: Tab: XII.

Fig. 121. N. 1.

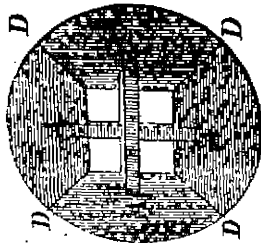


Fig. 121. N. 2.

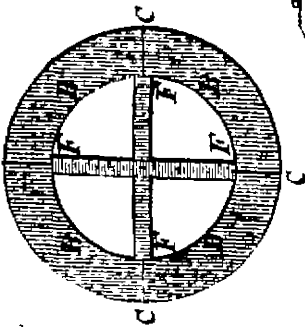


Fig. 8.

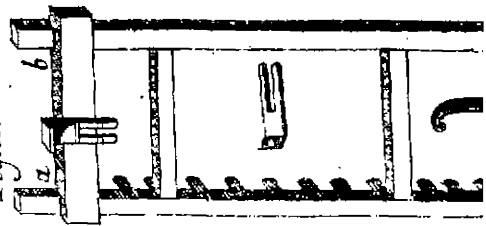


Fig. 120.

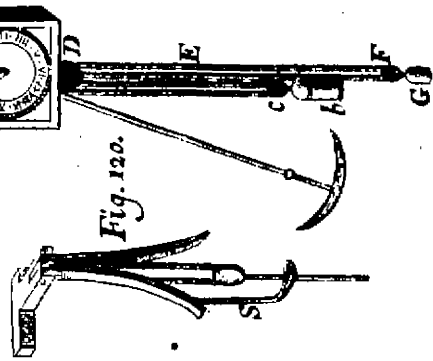
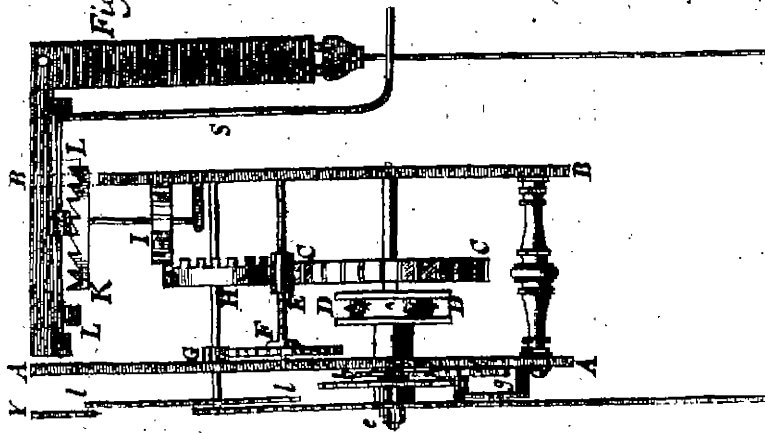


Fig. 119.



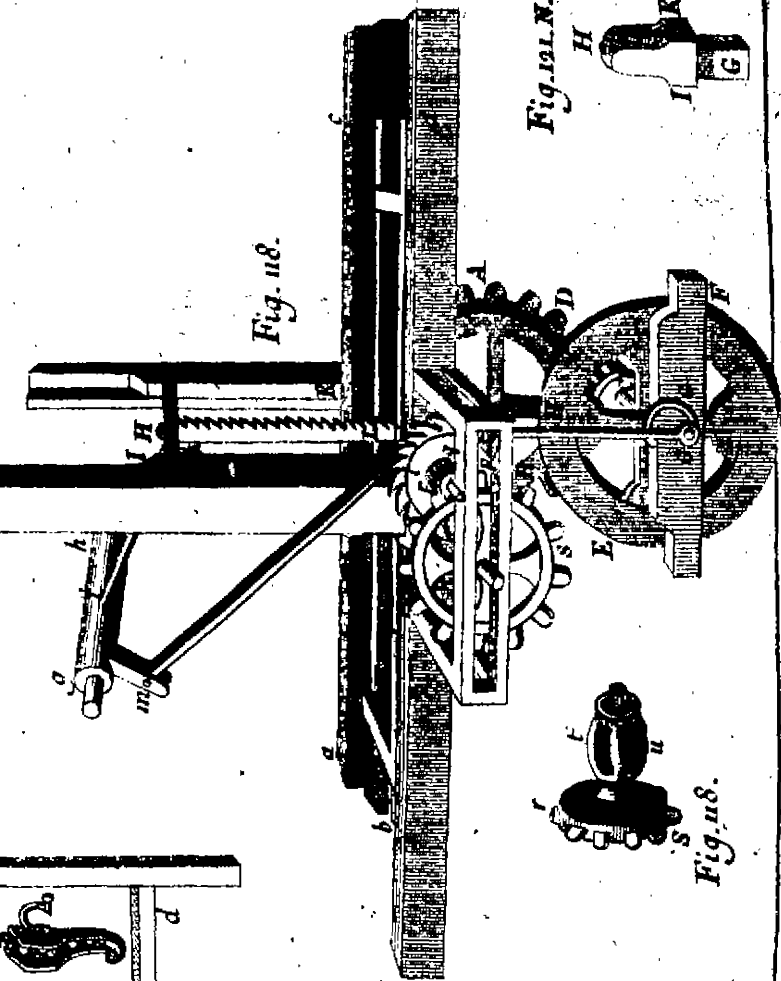


Fig. 118.

Fig. 121. N. 3.



Fig. 119.



Fig. Mechan. Tab. XIII.

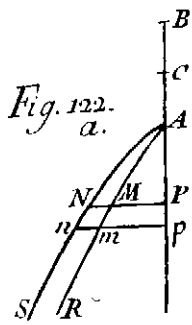


Fig. 122. a.

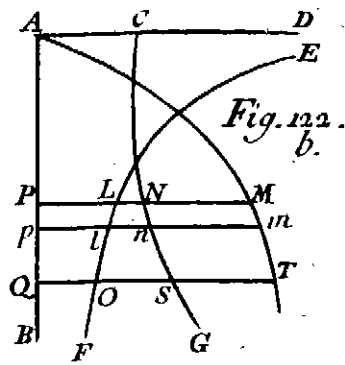


Fig. 122. b.

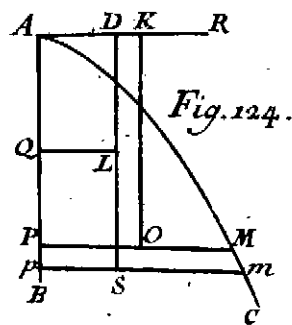


Fig. 124.

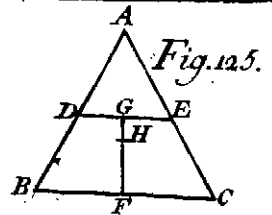


Fig. 125.

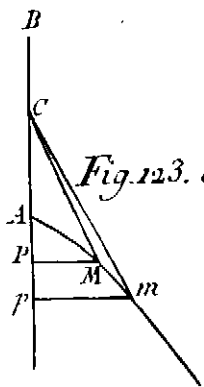


Fig. 123. a.

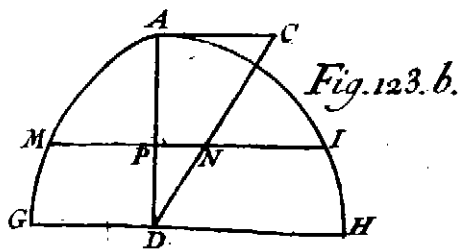


Fig. 123. b.

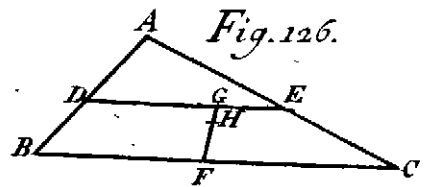


Fig. 126.

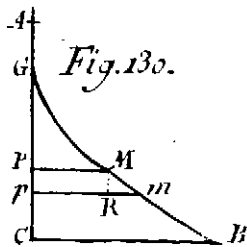


Fig. 130.

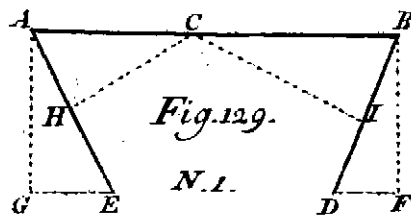


Fig. 129.

N. 1.

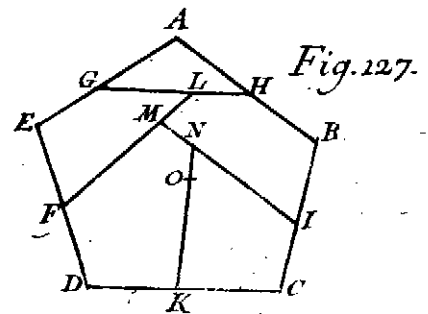


Fig. 127.

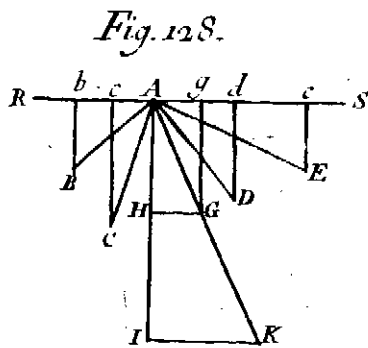


Fig. 128.

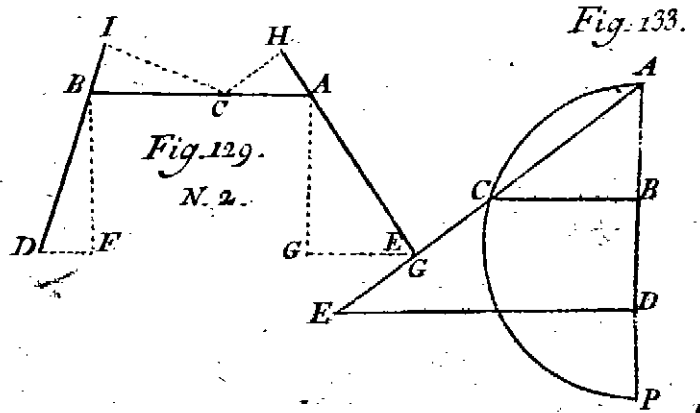


Fig. 129.

N. 2.

Fig. 133.



Fig. 131.

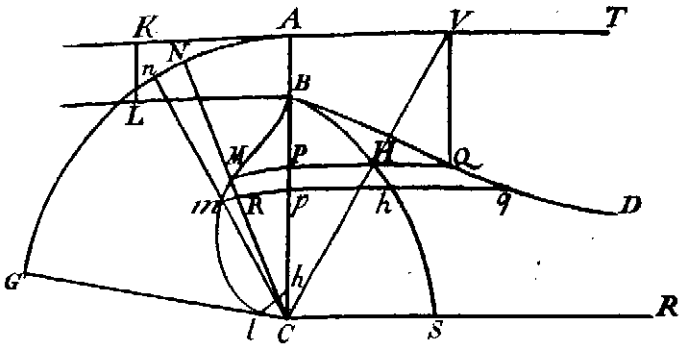


Fig. 134.

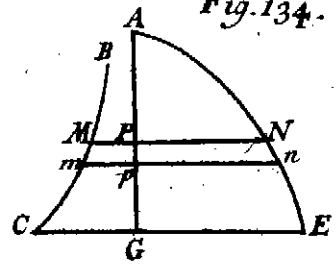


Fig. 132.

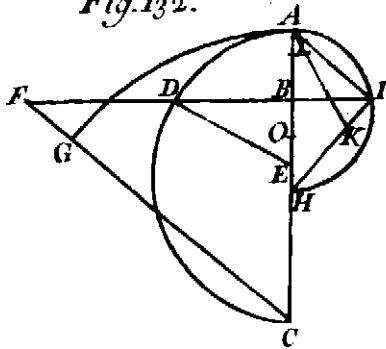


Fig. 135.

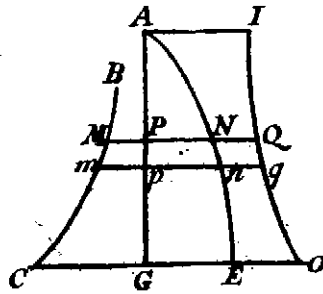


Fig. 136.

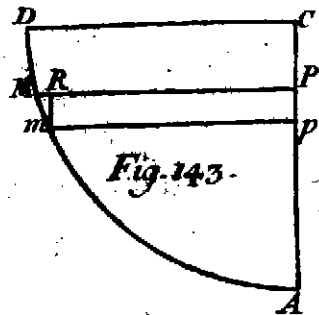
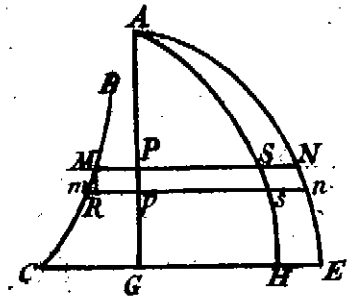
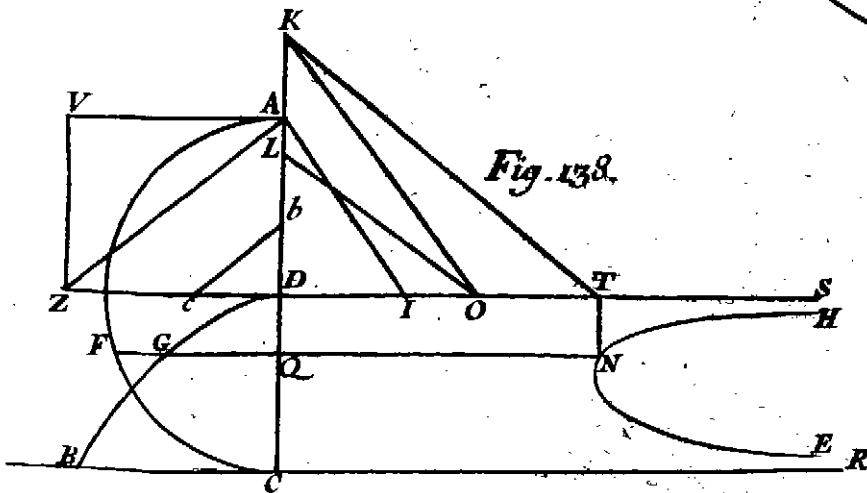


Fig. 138.



2

Fig. 137.

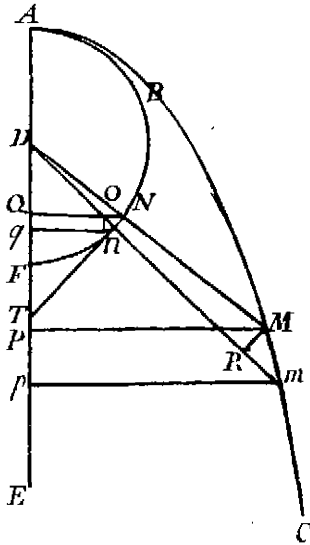


Fig. 139.

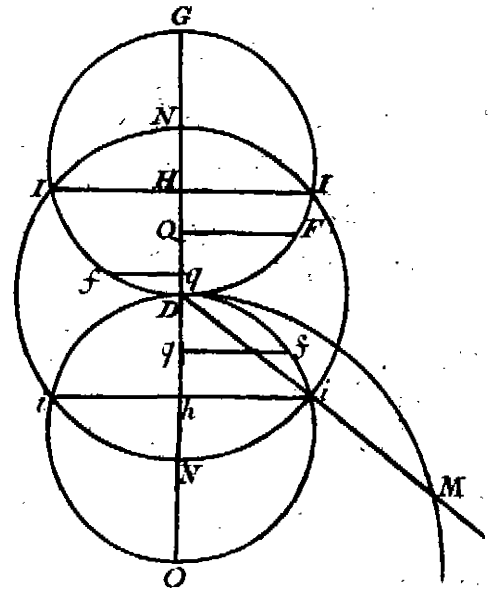


Fig. 140.

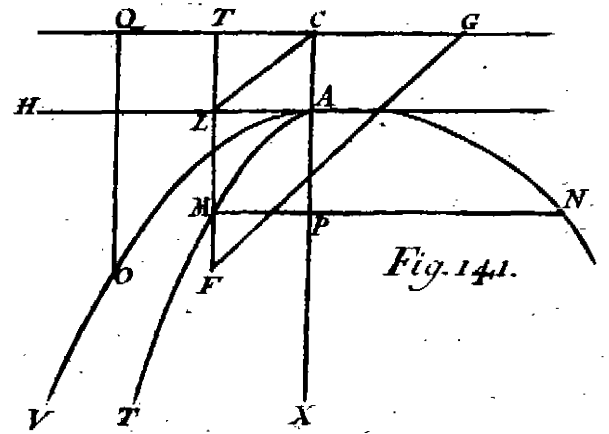
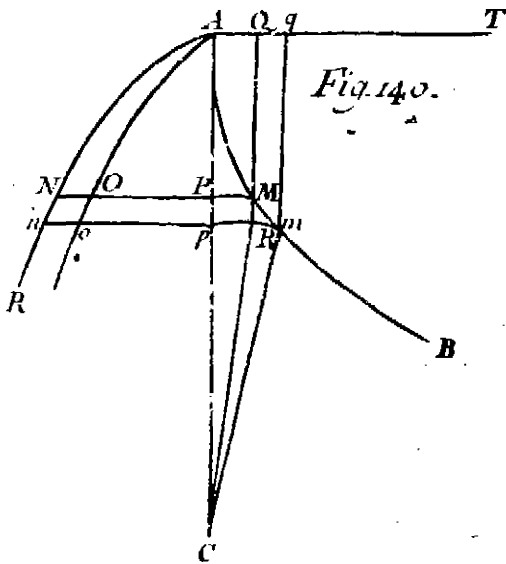


Fig. 141.

Fig. 142.

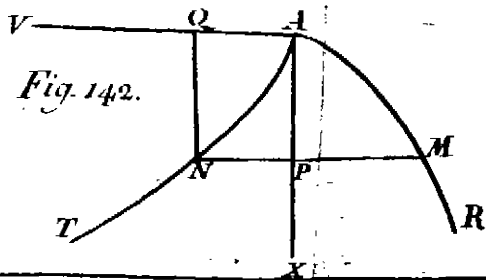
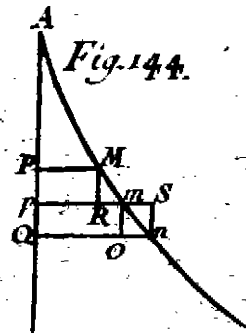


Fig. 144.



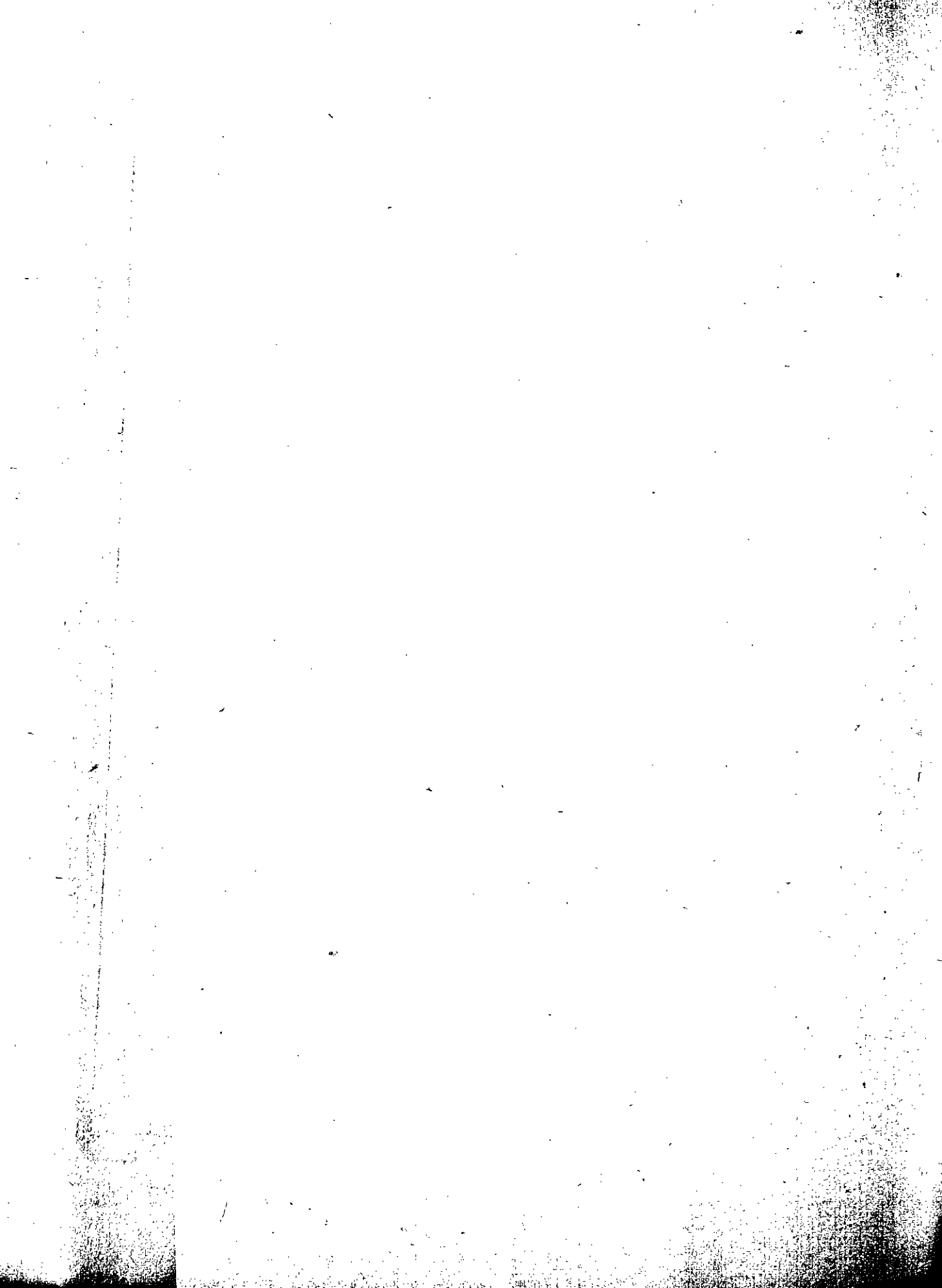


Fig. Mechan. Tab. XV.

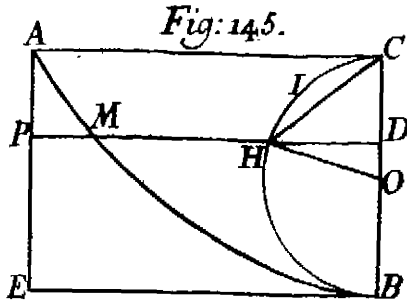


Fig: 145.

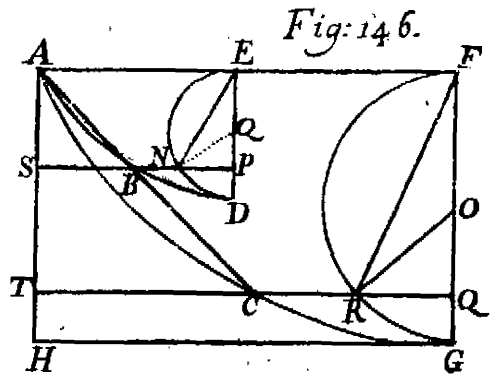


Fig: 146.

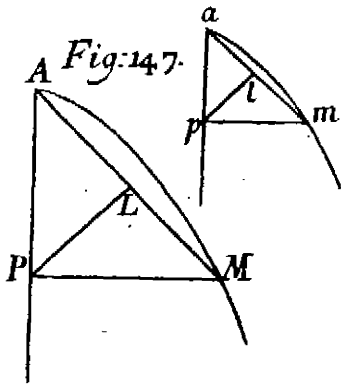


Fig: 147.

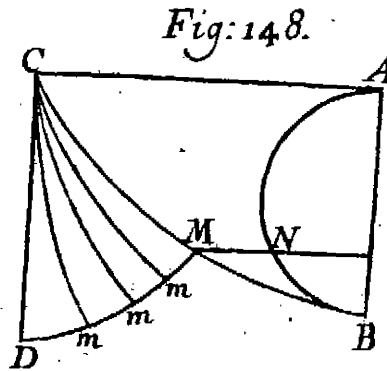


Fig: 148.

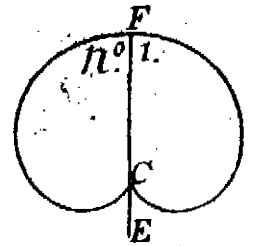


Fig: 151.

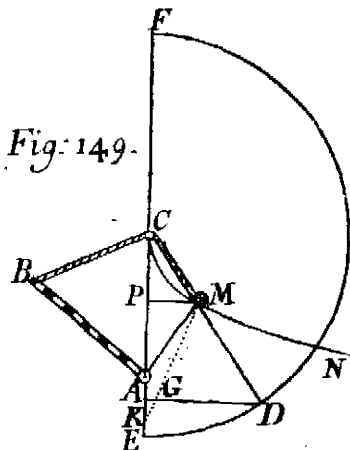
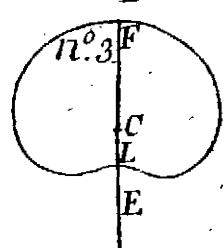
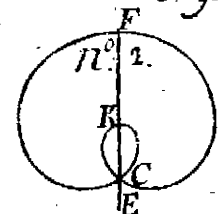


Fig: 149.

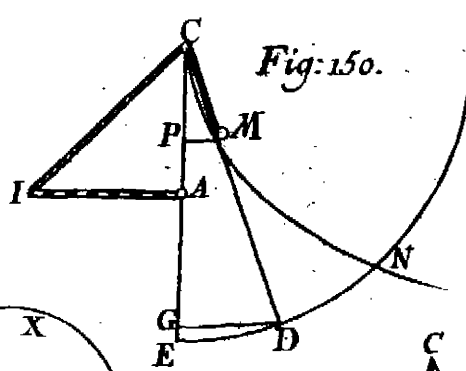


Fig: 150.

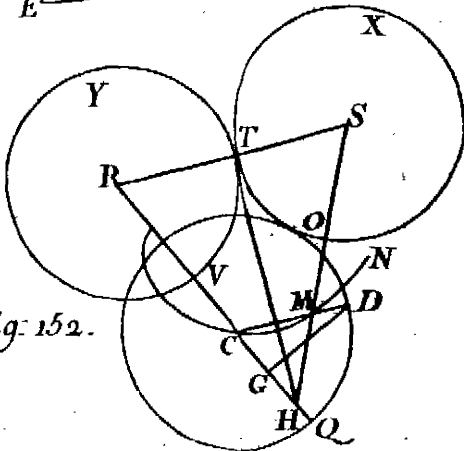


Fig: 152.

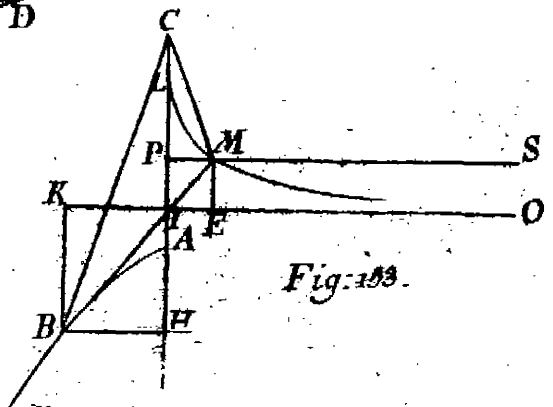


Fig: 153.

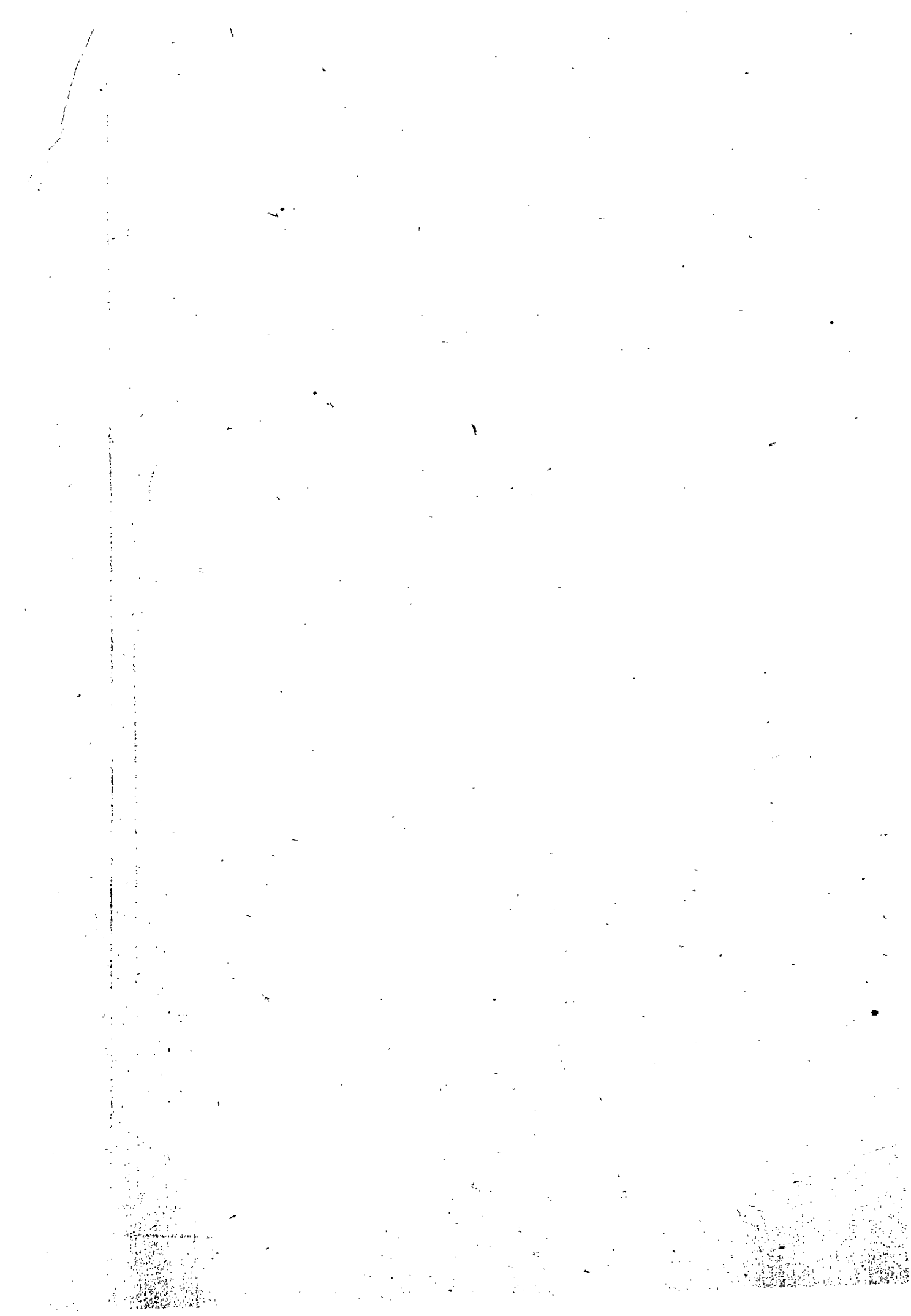


Fig. 154.

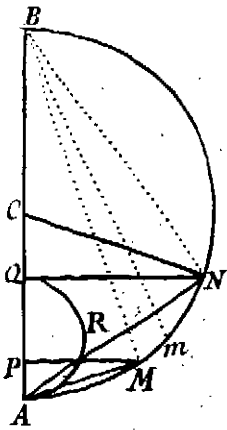


Fig. 155.

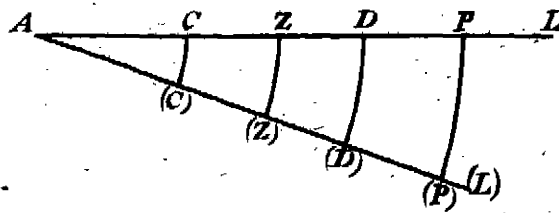


Fig. 157.

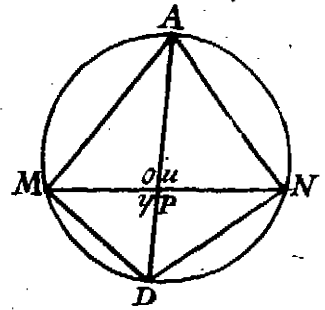


Fig. 156.

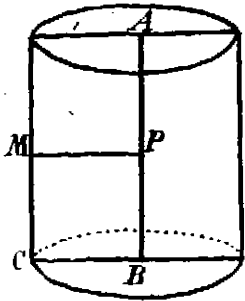
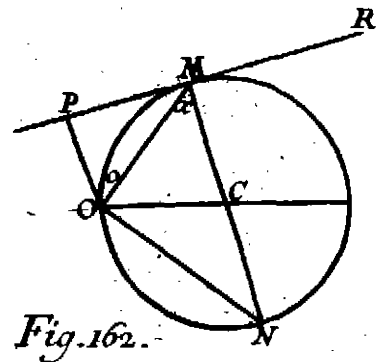
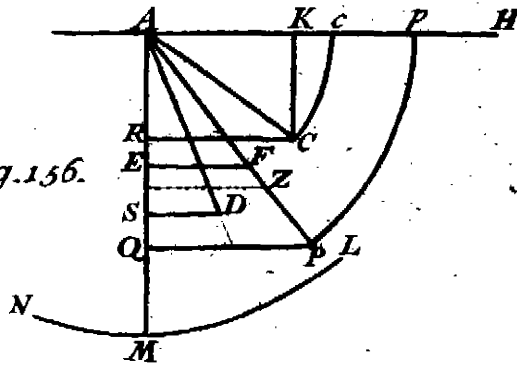


Fig. 159.

Fig. 162.

Fig. 161.

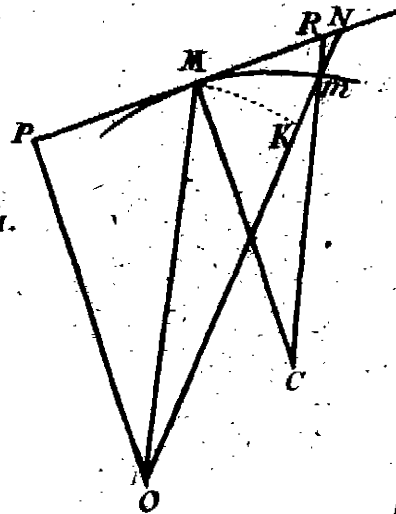


Fig. 160.

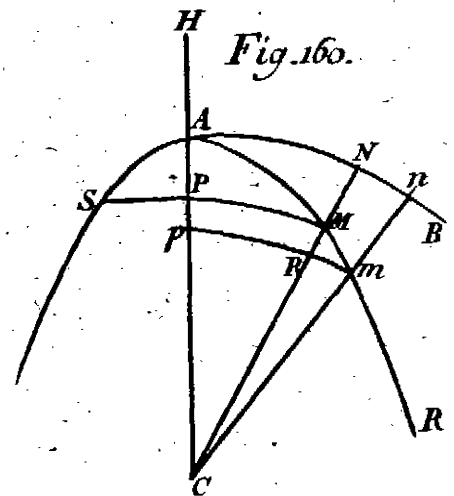


Fig. 158.

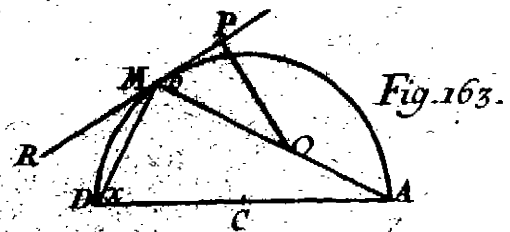
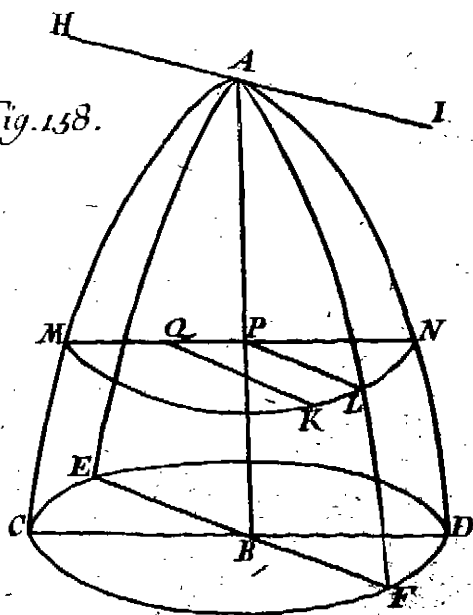
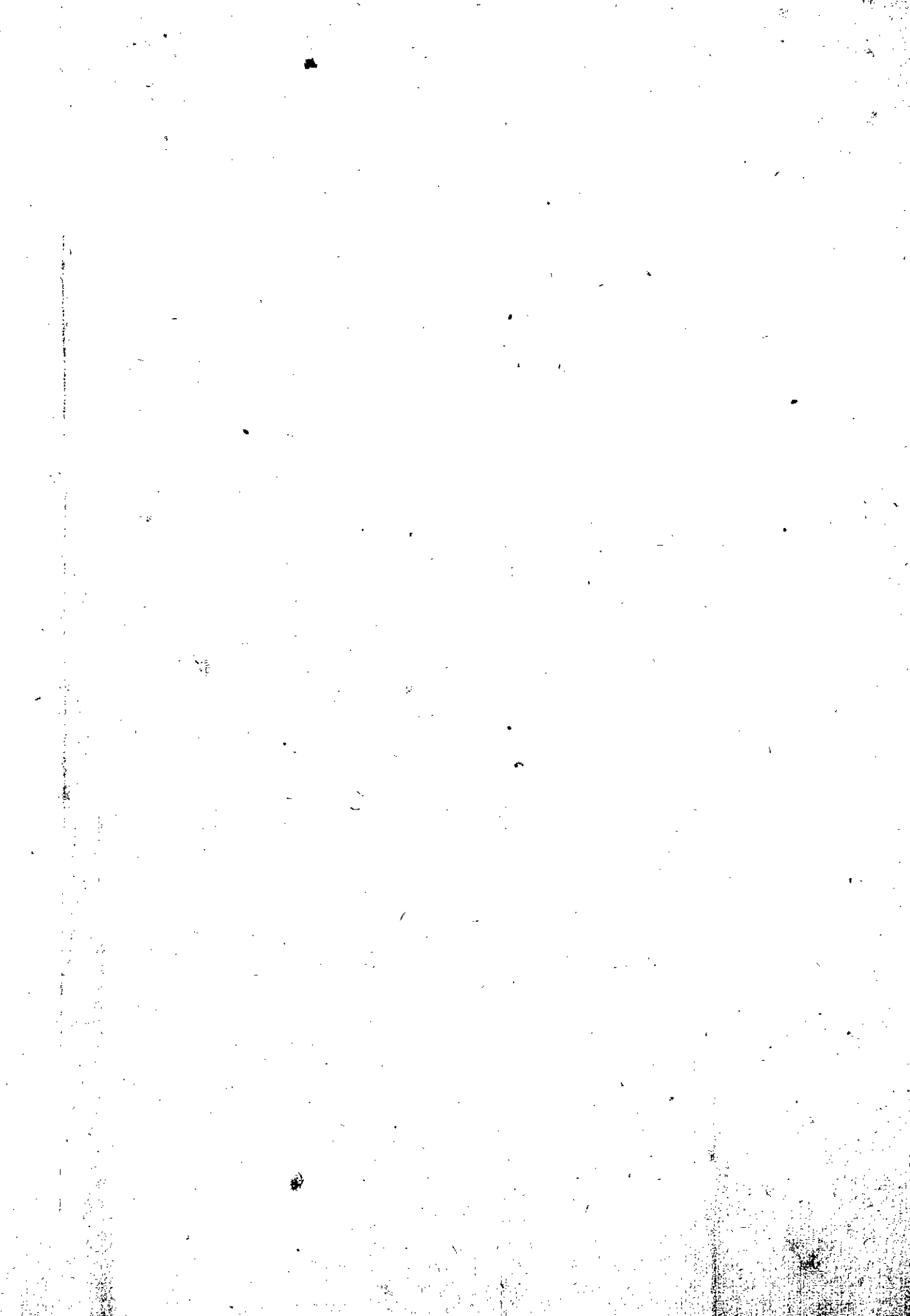


Fig. 163.



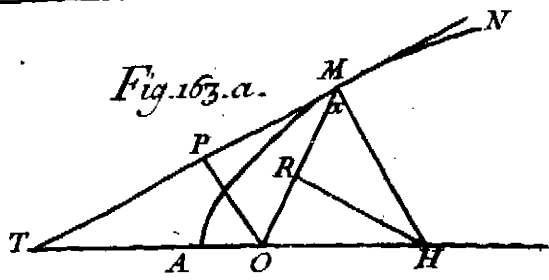


Fig. 163.a.

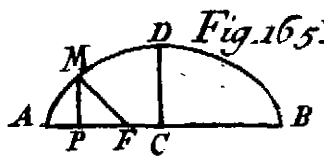


Fig. 165.

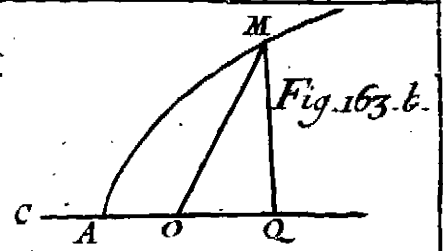


Fig. 163.b.

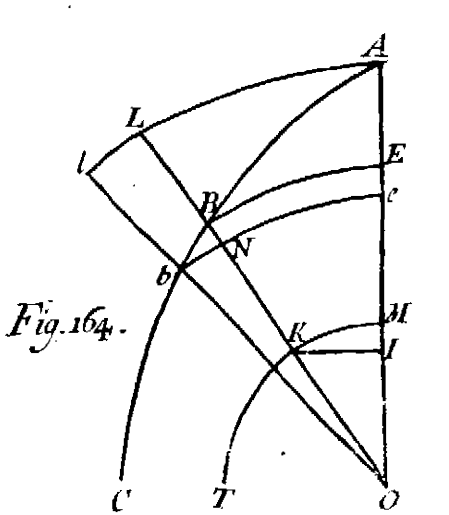


Fig. 164.

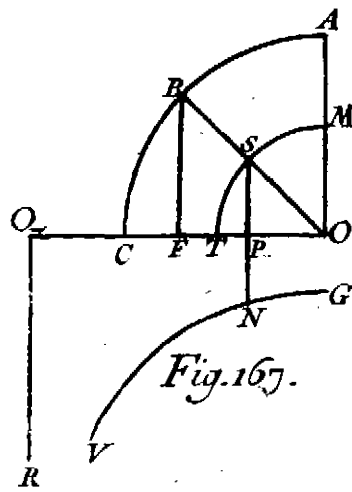


Fig. 167.

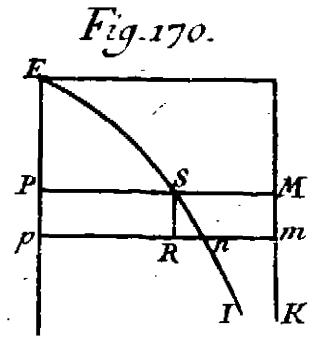


Fig. 170.

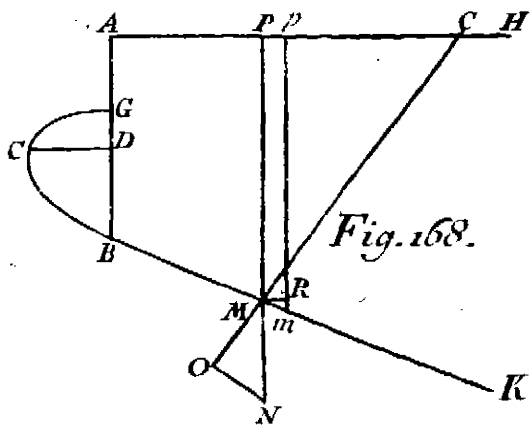


Fig. 168.

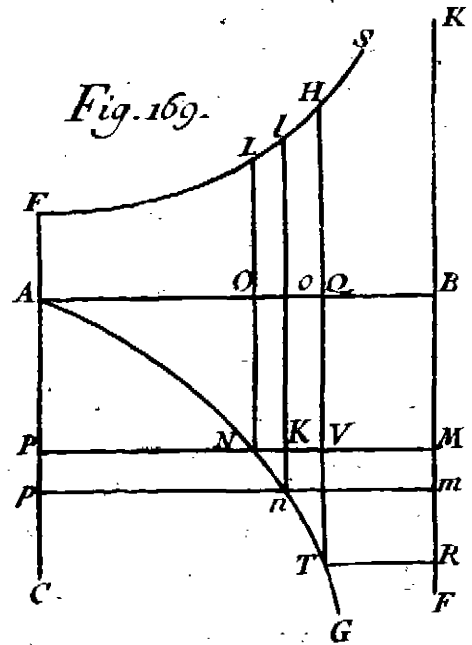


Fig. 169.

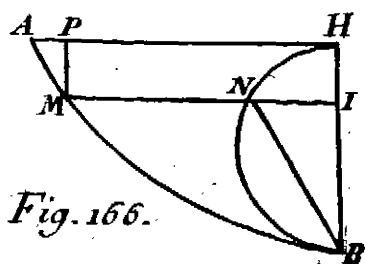


Fig. 166.

Fig. 171.

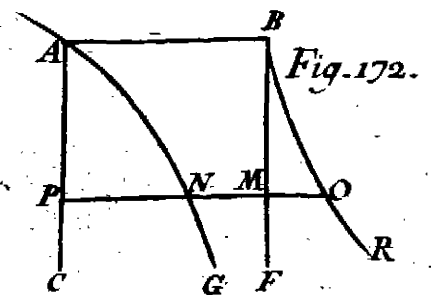
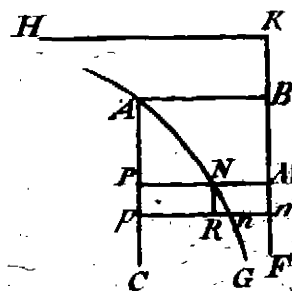


Fig. 172.



Fig. 173.

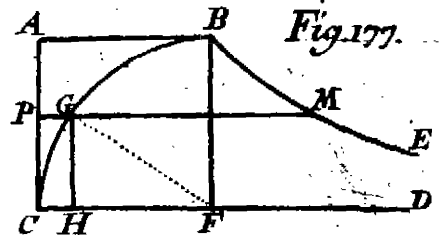
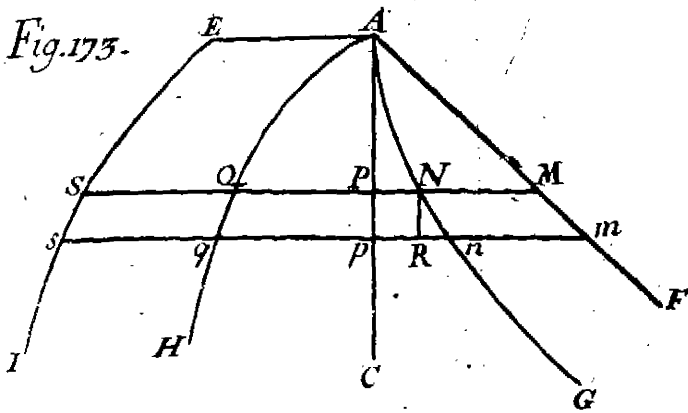


Fig. 177.

Fig. 174.

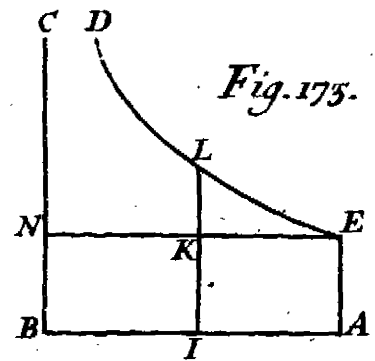
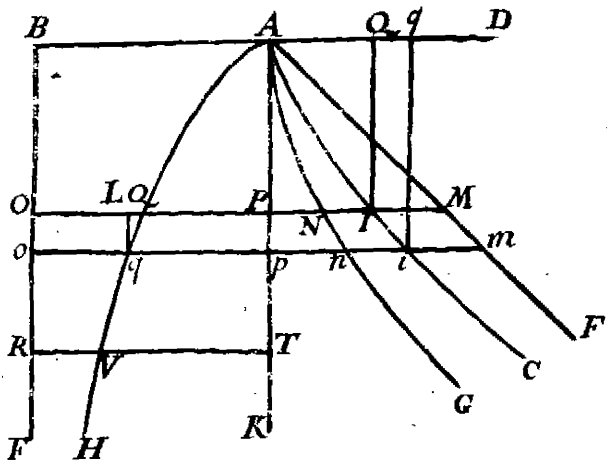


Fig. 175.

Fig. 176.

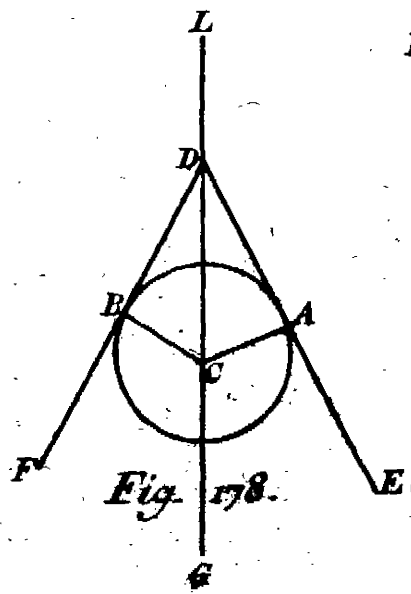
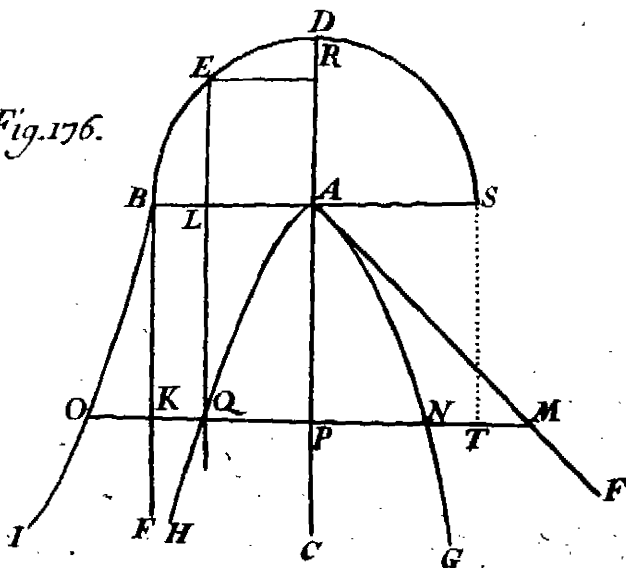
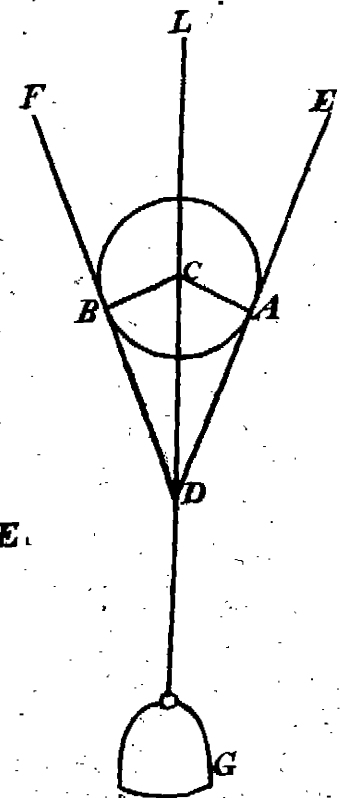
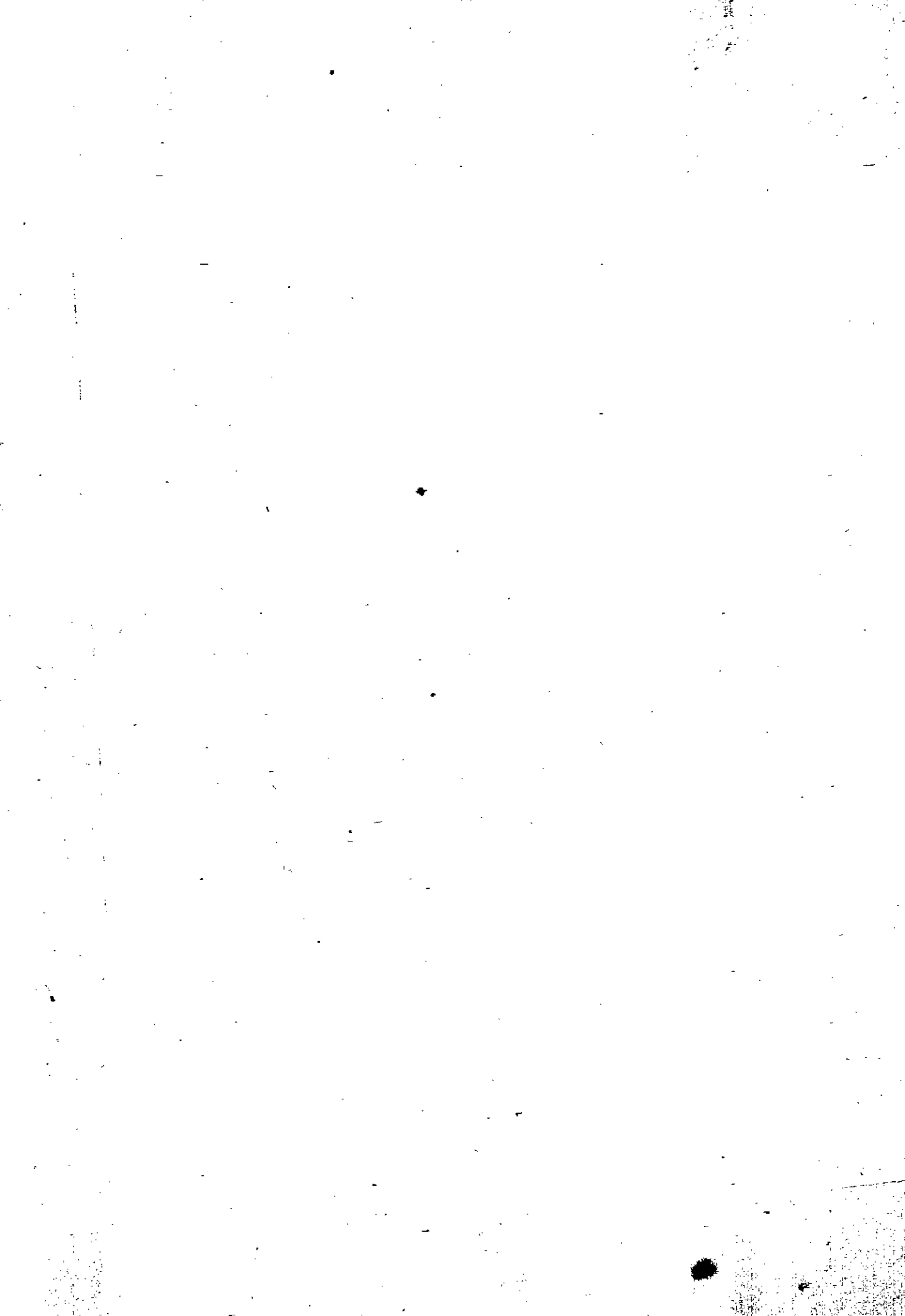
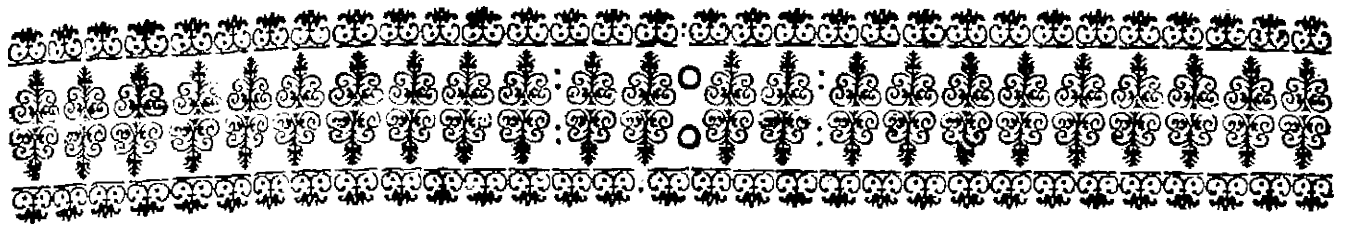


Fig. 178.

Fig. 179.

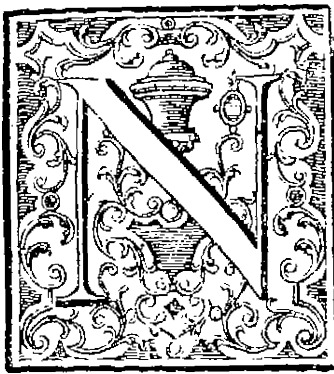






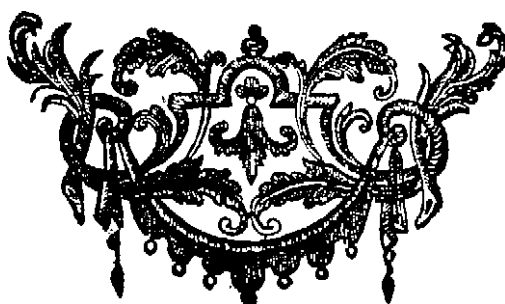
ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

P R Æ F A T I O.



NON dubito fore multos, quibus Leges Hydrostaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim Gravitationem sibi imaginentur tanquam Vim in materia persistentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato: fluida vero, quamdiu intra eosdem terminos conclusa quiescunt, omnis actionis in corpora alia prorsus expertia judicent; rationem sane non capiunt, cur partem Gravitationis corpori demerso veluti adimant, vel etiam totum ingenti sæpius impetu sursum propellant. Enimvero quemadmodum Leges Hydrostaticæ admodum evidenter demonstrantur, ita non minus Experientia singulæ confirmantur. Hinc discant velim, qui in rebus naturalibus cognoscendis sensui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane esse in intellectu quam in sensu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica speranda. Quodsi hunc solum sui usum Hydrostatica præberet, digna profecto foret, quam meditentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipsa quoque clavem

continet, qua multa abdita referantur. Non exiguus est Phænomenorum numerus, quorum ratio in Hydrostatica continetur, & quæ nec sine ea intelligi, nedum comprehendi possunt. Hydrostaticæ usum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum solidorum, in primis autem fluidorum, in *Medicina Hydrostatica* ostendit Celeberrimus BOYLIUS. Varios, eosque præclaros in vita humana usus in ipsa pertractatione passim indicavi. Sine ea nec Aërometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi potest. Sat ergo rationis apparet, cur Hydrostaticæ Elementa inter Elementa Matheseos præcipuum quendam locum sibi vendicent, & cur digna sint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana usus applicentur. Agite itaque, quotquot Natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando solum cogitent; evolvite hæc Hydrostaticæ Elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Physicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.





ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Corporum Specifica Gravitate & Levitate.

DEFINITIO I.

1. **H**ydrostatica est Scientia Gravitationis in fluido.

SCHOLIUM.

2. Docetur nempe in Hydrostatica non modo ratio gravitatis fluidorum, sed & imprimis actio eorum in solida demersa.

DEFINITIO II.

3. Corpus fluidum est, cujus massulæ quantælibet sunt inconnexæ, mutua cohæsiōne a causâ quacunque impedita.

DEFINITIO III.

4. Corpus solidum est, cujus massulæ quantælibet sunt connexæ.

DEFINITIO IV.

5. Corpus specificè levius est, quod sub eodem volumine minus pondus continet quam alterum.

DEFINITIO V.

6. Corpus specificè gravius est, quod sub eodem volumine majus pondus continet quam alterum.

SCHOLIUM.

7. Sint duo globi æquales, quorum scilicet diameter unius pedis; alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo, dicitur specificè gravior; ligneus autem specificè levior.

DEFINITIO VI.

8. Corpus densius est, quod plus massæ sub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus specificè gravius densius est specificè leviori, & corpus densius specificè gravius est rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO VII.

10. Corpus rarius est, quod minus massæ sub eodem volumine continet quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112 *Mechan.*); corpus rarius est specificè levius densiori, & specificè levius rarius specificè graviori (§. 5, 6).

AXIOMA I.

12. Corpora ejusdem densitatis sub eodem volumine æqualem massam continent.

COROLLARIUM.

13. Quare si volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt, seu gravitatem eandem habebunt (§. 112 *Mechan.*).

Axioma II.

14. Si duorum corporum volumina fuerint æqualia; densitates sunt ut massæ.

SCHOLIUM.

15. Nempe, vi defin. (§. 8) corpus dicendum est duplo densius, si duplum massæ sub eodem volumine continet; triplo densius, si triplum; & ita porro.

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur densitates corporum æqualium ut pondera, seu ut gravitates (§. 112 *Mechan.*).

THEOREMA I.

17. Si duo corpora eandem densitatem habuerint, massæ sunt ut volumina.

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem massam continent (§. 12); adeoque in volumine duplo continetur massa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla, & ita porro. Sunt igitur massæ ut volumina. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

18. Quoniam etiam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); corporum ejusdem densitatis gravitates sunt in ratione voluminum (§. 167 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Ergo corpora ejusdem densitatis sunt etiam ejusdem gravitatis specificæ; & contra (§. 6).

COROLLARIUM III.

20. Quare corpora diversæ densitatis sunt diversæ gravitatis specificæ; & contra.

THEOREMA II.

21. Massa duorum corporum sunt in ratione composita densitatum atque voluminum.

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum massæ $a, b, c,$

volumina primi & secundi $d,$ tertii $e,$ densitas primi $f,$ secundi & tertii $g:$ sint nempe primum & secundum ejusdem voluminis, secundum & tertium ejusdem densitatis. Quoniam

$$a : b = f : g \quad (\S. 14)$$

$$b : c = d : e \quad (\S. 17).$$

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 213 *Arithm.*) consequenter $a : c = fd : ge$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM III.

22. Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*); eadem etiam sunt in ratione composita densitatum & voluminum (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA III.

23. Si duorum corporum massa vel gravitates fuerint æquales; densitates sunt reciproce ut volumina.

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in Theorematis præcedentis demonstratione, erit $a : c = fd : ge$ (§. 21). Jam $a = c$ per hypoth. adeoque $fd = ge$. Est igitur $f : g = e : d$ (§. 299 *Arithm.*). Quod erat unum.

Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112 *Mechan.*), si massæ æquales sunt, etiam gravitates æquales sunt. Sed si massæ æquales sunt, densitates sunt reciproce ut volumina, per demonstrata. Ergo etiam, si gravitates æquales sunt, densitates reciproce sunt ut volumina. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

24. Duorum corporum quorumcunque densitates sunt in ratione composita ex directa massarum & voluminum reciproca.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione Theorematis secundi, erit

$$a : c = fd : ge \text{ (§. 21).}$$

Ergo $age = cfd$ (§. 297 *Arithm.*)
consequenter $f : g = ae : cd$ (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum sunt ut massæ eorundem (§. 112 *Mechan.*); densitates corporum sunt in ratione composita ex directa gravitatum & reciproca voluminum (§. 15 *Arithm.*).

AXIOMA III.

26. Si duorum corporum volumina fuerint equalia; gravitates specificæ sunt ut gravitates absolutæ.

SCHOLIUM.

27. Corpus enim duplo gravius specificè dicitur altero, si duplam gravitatem sub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, si triplam, &c. (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates absolutæ sunt ut massæ (§. 112 *Mech.*); corporum æqualium gravitates specificæ sunt ut massæ (§. 167 *Arithm.*).

THEOREMA V.

29. Corporum ejusdem ponderis gravitates specificæ sunt in ratione voluminum reciproca.

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis = g , volumen corporis $A = a$, volumen alterius $B = b$. Quoniam B supponitur esse homogœneum; gravitates voluminibus proportionales sunt (§. 130 *Mechan.*), adeoque gravitas ipsius B sub volumine a , reperitur $ag : b$ (§. 301 *Arithm.*). Sunt igitur gravitates specificæ corporum A & B ut $ag : b$ (§. 26), hoc est,

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

ut bg , ad ag (§. 181 *Arithm.*); consequenter ut b ad a (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

30. Quodsi ergo volumina fuerint æqualia; etiam gravitates specificæ æquales erunt, hoc est, corpora ejusdem ponderis & voluminis eandem gravitatem specificam habent.

THEOREMA VI.

31. Gravitates absolutæ duorum corporum sunt in ratione composita voluminum & gravitatum specificarum (hoc est, gravitatum sub eodem volumine).

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejusdem voluminis c gravitates absolutæ a & b , specificæ f & g ; corporum ejusdem ponderis a volumina c & d , gravitates specificæ f & e . Erit

$$a : b = f : g \text{ (§. 26)}$$

$$f : e = d : c \text{ (§. 29).}$$

Ergo $af : be = fd : gc$ (§. 213 *Arith.*)

Unde $a : b = d : \frac{gc}{e}$ (§. 185 *Arithm.*)

& $a : b = ed : gc$ (§. 178 *Arithm.*)
Q. e. d.

THEOREMA VII.

32. Gravitates specificæ duorum corporum sunt in ratione composita ex directa gravitatum absolutarum & reciproca voluminum.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione Theorematis præcedentis; erit

$$a : b = ed : gc \text{ (§. 31).}$$

Ergo $\frac{a}{d} : \frac{b}{c} = e : g$ (§. 185 *Arithm.*)

consequenter $ac : bd = e : g$ (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

K k

COROL-

COROLLARIUM.

33. Quoniam densitates sunt in ratione composita ex directa gravitatum absoluta-

rum & reciproca voluminum (§. 25); erunt etiam gravitates specificæ ut densitates (§. 167 *Arithm.*)

CAPUT II.

De Equilibrio & Pressione Fluidorum.

THEOREMA VIII.

34. **S**I in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit; fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem basin & altitudinem habent, adeoque æquales sunt (§. 535 *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales sint (§. 131 *Mechan.*); fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, quæ idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quiescunt & neutrum alterum movet (§. 75 *Mechan.*). *Quod erat unum.*

Fig. 2. II. Quodsi basis tubi GI fuerit quadrupla basis alterius HK, & aqua descenderet ex L usque ad O; ex. gr. per intervallum unius digiti, in tubo altero NK ascenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (§. 580 *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK, est ad celeritatem, qua idem moveretur in GI; ut basis tubi GI, ad basin alterius HK (§. 33 *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo, ipsumque fluidum homogeneum *per hypoth.* massa fluidi in

tubo GI est ad massam fluidi in altero *Fig. 2.* HK, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 573 *Geom.*). Est ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK, ut factum ex basi tubi GI in basin alterius HK ad factum ex basi tubi HK in basin alterius GI (§. 278 *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207 *Arithm.*); vires etiam æquales sunt; adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§. 75 *Mech.*). *Quod erat secundum.*

III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum *Fig. 3.* QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas absoluta fluidi in tubo inclinato SR est ad gravitatem respectivam ejusdem qua nititur juxta directionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261 *Mechan.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem basin & altitudinem habente cum inclinato TR; consequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per cas. 1. Quod erat tertium.*

IV. Eodem modo ostenditur fluida *Fig. 4.* æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, si ad eandem

eandem altitudinem constituentur.
Quod erat quartum.

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major est altitudo.

THEOREMA IX.

36. In tubis communicantibus quibusque fluida diverse gravitatis specificæ æquponderant, si altitudines habuerint rationem gravitatum specificarum reciprocam.

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. E. g. Sint tuborum AB & DC diametri æquales; & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas specificæ aquæ est ad gravitatem specificam argenti vivi ut 1 ad 14; sit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero mercurii in tubo DC digiti unius.

Quoniam bases cylindrorum aquei & mercurialis æquales sunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 573 *Geom.*); consequenter cum tam aqua, quam mercurius sit fluidum homogeneum, licet inter se heterogenea, gravitates absolutæ eorundem erunt in ratione composita ex directâ tam gravitatum specificarum 1:4, quam altitudinum EB & DH, 4:1 (§. 31), hoc est æquales sunt (§. 159 *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro substituere licet aqueum, cujus altitudo est altitudinis ipsius quadrupla (§. 15 *Arithm.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquponderat (§. 34.). Ergo etiam mercurialis eidem æquponderat.

Idem non absimili modo ostenditur, si tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM I.

37. Inveniri adeo potest fluidorum duo-
Fig. 1.
rum quorumcunque gravitas specificæ, si in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum; & altitudines BG & DH, ad quas subsistunt æquilibrata, ex eadem mensura accurate æstimentur. Est enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLIUM.

38. Quodsi fluida facile commisceantur, tubum horizontalem BD mercurio replere debemus, commixtionem impedituro. Et si autem fluida non facile commisceri soleant, specificè tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.

COROLLARIUM II.

39. Quoniam densitates fluidorum sunt ut gravitates specificæ (§. 33); eadem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM III.

40. Eadem ergo methodo, quam in *Cor. 1* (§. 37) exposuimus, ratio densitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA X.

41. In vasis perpendicularibus ABDC
Fig. 5.
& EGHF æquales bases BD & GH habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum AB & EG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vasa sunt perpendicularia, hoc est, bases eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hypoth.* fluida adversus fundos nituntur secundum lineas perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), adeoque tota gravitate sua, cum nihil resistat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina sunt ut altitudines (§. 573 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Quodsi ergo etiam altitudines æquales sunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM II.

43. In vase igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam consistente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales sunt super parte qualibet fundi.

COROLLARIUM III.

44. In uno eodemque vase, fluidum ad diversas altitudines successive constitutum fundum premit in ratione altitudinum ad quas consistit.

COROLLARIUM IV.

45. Decrescente adeo altitudine, decrescit pressio, suntque hujus decremента in ratione decremmentorū altitudinis.

THEOREMA XI.

Fig. 6. 46. In vasis perpendicularibus ABDC & EGHF, bases BD & GH utcumque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione composita basium & altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione Theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina sunt in ratione composita basium & altitudinum (§. 572 *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione composita basium & altitudinum (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

47. Si vas inclinatum ABDC eam-*Fig. 7.* dem altitudinem & basin habuerit cum perpendiculari BEFG; fundus utriusque æqualiter premitur.

DEMONSTRATIO.

In vase inclinato ABCD fundus CD premitur secundum directionem BD. Est autem vis gravitatis secundum BD ad gravitatem absolutam, ut BE ad BD (§. 261 *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac si a fluido ad altitudinem BE consistente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vasis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

48. Si bases vasis ABDC inæquales fuerint; fundus eodem modo premitur, ac si superior inferiori æqualis existeret.

DEMONSTRATIO.

I. Sit basis inferior CD minor superiori-*Fig. 8.* re AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem

Fig. 8. quem in plano horizontali supponimus, secundum lineas perpendiculares EC, FD premit (§. 215 *Mechan.*), non nisi fluidum intra cylindrum ECDF comprehensum adversus eum nititur, reliqua massa contra latera vasis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac si basis superior inferiori æqualis esset. *Quod erat unum.*

Fig. 9. II. Sit vasis inferior basis CD multo major superiore FG. Nempe ut Demonstratio facilius evadat, cylindro ABDC infixus intelligatur tubus FE. Quodsi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per interval- lum CL: in tubo FE per altitudinem EM ascendet, quæ est ad CL ut basis CD ad basin GF (§. 580 *Geom.*). Est vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vase AD, ut EM ad CL (§. 33 *Mechan.*); consequenter ut basis CD ad basin FG (§. 167 *Arithm.*). Vis ergo, qua aqua in tubo deorsum nititur, prodit si basis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*). Summando scilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95 *Analys. infin.*); consequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a Cylindro HC DI premeretur (§. 541 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vasorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem consistente, quæcunque sit figura vasis.

SCHOLIUM I.

Fig. 10. 51. Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus superior dolii AB attollatur ab aqua in tubo CD plurimum pedum contenta. Ipse-

met experimentum aliquoties iteravi in vase Fig. 10. ligneo AB intus pice probe obducto & tubo CD ex lamina ferrea stanno obducta parato altitudinis 14 fere pedum, nec 800 libra basi superiori inpositæ impedire potuerunt, quominus attolleretur.

SCHOLIUM II.

52. Ab hoc principio derivavi Siphonem Fig. 11. meum Anatomicum, ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri scilicet curavi ex lamina ferrea stanno obducta vas cylindricum DEGF, & eidem afferruminari jussi tubum FIH. Quodsi jam vesica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut aliæ quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inversæ basi superiori superinducantur; eas non modo ingenti vi in hemisphæricam figuram expandit, sed & poros subintrans omnes membranas & vasa ita dividit, ut, levi incisura facta, solis digitis multo accuratius separentur, quam cultro anatomico. Jucundum sane est spectaculum, dum non modo substantia membranacea mire intumescit, sed & vasorum per eam disperforum ramificationes & insertiones minimas distincte spectare, tunicasque, quæ vulgo pro una habentur, in plures discernere licet. Probe autem notandum est, quod si interior vesicæ aut reliquarum partium corporis animalis super vase DG expensarum superficies aquam lambat, aqua per substantiam earum penetrare nequeat. Caterum si vesicæ ingens pondus imponas, ab aqua in tubo HI vix duarum librarum attollitur.

SCHOLIUM III.

53. Veritatem hujus doctrinæ de pressione Fig. 9. fluidorum in ratione basis ac altitudinis exploraturus, vas metallicum ACDB ita construi curet, ut fundus CD sit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & basi superiori AB successive tubi æque-alti, sed diversarum diametrorum applicari possint. Quodsi enim funiculi per tubum FE trajecti alterius extremum annulo K basi mobili afferruminato,

Fig. 9. alterum vero brachio alicujus libræ alligēs, & in lance alteri appensa pondus colloces, idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus CD attollatur; non modo hinc discēs, eodem semper pondere opus esse ad fundum attollendum, quacunque sit tubi EF amplitudo, modo aqua constanter ad eandem altitudinem consistat, sed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vase basin CD, sed altitudinem FK habentis.

SCHOLIUM IV.

54. Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonstrata sunt, non consentire videtur, quod in tubis capillaribus, seu fistulis gracilioribus utrinque patulis, unaque sua extremitate sub aquam demersis, aqua ultra libellam assurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, Phænomenon hoc alteri cuidam causæ adscribendum esse, licet sine principiis Aerometricis describi nequeat.

CAPUT III.

De Gravitatione Corporum specificè Graviorum in Fluidis Levioribus.

THEOREMA XIV.

55. **C**ORPUS specificè gravius in fluido leviori eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.

DEMONSTRATIO.

Fig. 12. Ponamus ex. gr. cubum pollicarem plumbeum F sub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo quem occupat loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a resistentia ambientis sustentabatur. Ergo a resistentia aquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plombe pars sustentari debet, quantum est pondus aquæ expulsæ. Hac igitur parte gravitas corporis demersi deprehendetur imminuta. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

56. Cum fluidum specificè gravius sub

eodem volumine majus pondus possideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido specificè graviori majorem ponderis sui partem amittit, quam in leviori; adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHOLIUM.

57. Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in spiritu vini.

COROLLARIUM II.

58. Graviorum igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, si unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM III.

59. Cum gravitates specificæ sint ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi solido immerso mole æqualis sit ad gravitatem solidi, ut pars ponderis in fluido amissa ad pondus ipsius integrum (§. 55);

(§. 55); erit gravitas fluidi specifica ad gravitatem solidi demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 167 *Aritbm.*).

COROLLARIUM IV.

60. Duo solida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed specificè gravioris pondus majus est, quam specificè levioris (§. 6). Ergo majorem sui ponderis partem amittit specificè levius quam gravius (§. 205 *Aritbm.*).

COROLLARIUM V.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina sunt reciproce ut gravitates specificæ (§. 29); specificè levius ejusdem cum graviori ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare si in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, sed specificè gravius præponderabit, eo magis quo fluidum densius.

PROBLEMA I.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, ex. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quærat volumen fluidi per regulas Stereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino suspensus fluido immergatur, & ope bilancis exactè notetur pondus amissum: quod erit pondus fluidi sub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus sit volumini proportionale (§. 130 *Mechan.*); pondus fluidi quæsitum per regulam trium (§. 302 *Aritbm.*) invenietur.

Ex. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68:1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari potest pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque, & in usus futuros annotari.

SCHOLIUM.

64. *Pondus pedis cubici aquæ investigarunt multi; sed cum in diversis fluviis ac fontibus non eadem sit gravitas specifica aquæ, immo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio, mirum non est, observationes diversorum Autorum inter se admodum discrepare. MORLANDUS (a) experimentis sæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum juxta mensuram Parisinam esse 70 librarum cum duabus uncis.*

THEOREMA XV.

65. *Gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in utroque amissa.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ sunt ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26). Sed pondera ab eodem solido in diversis fluidis amissa sunt gravitates absolutæ fluidorum sub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in iis amissa. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

66. *Invenire gravitatem specificam fluidorum quorumcunque,*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ suspendatur globus plumbeus, & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipso in aëre æquilibrium servet.

2. Glo.

(a) *Elevations des Eaux p. 75.*

2. Globus successive immittatur diversis fluidis quorum specifica gravitas determinanda, noteturque pondus quod in singulis fluidis demerso æquiponderat.
3. Singula hæc pondera subducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amissæ, & una ratio gravitatis specificæ fluidorum constabit (§. 65).

COROLLARIUM.

67. Cum densitates sint ut gravitates specificæ (§. 55): eodem modo invenitur ratio densitatis fluidorum.

SCHOLIUM I.

68. *Maximi usus est hoc Problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum investigantur: quod scire non solum in Scientia naturali excolenda, sed & in vita civili ac praxi medica proficuum existit.*

SCHOLIUM II.

69. *Quodsi diverso tempore gravitatem specificam fluidorum investiges; hieme majorem, quam æstate deprehendes. Joan. Casp. EISENSCHMIDIUS (4) experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hæc Tabulam referre libet.*

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Parisino.						
Pollex cubicus Paris.	Æstate			Hieme		
	Unc.	Gross.	Gran.	Unc.	Gross.	Gran.
Mercurii	-	1	65	-	2	14
Olei vitrioli	-	7	39	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	53	-	5	58
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus salis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti destillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	73
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cereviæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cereviæ fuscæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	22	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Uriæ	-	5	14	-	5	12
Spiritus uriæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	47
Olei olivarum	-	4	32	hieme congelantur.		
Olei cerebintinæ	-	4	30	-	4	46
Aquæ maris	-	6	12	-	6	15
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ destillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHOLIO

SCHOLIION III.

70. Ut accuratissime omnia peragantur, gravitas sili extra fluidum constituti subtrahenda est a pondere solidi in aëre; vis vero quæ requiritur ad sili sub fluido demergendum, si specificè levius, addenda est ponderi amisso. Quodsi vero sili ex quo pendet solidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus sili in aëre subtrahendum est a pondere solidi in aëre, & pondus quod sili amittit a pondere in fluido amisso. Enimvero quoniam sili cum solido immerso idem totum constituit, hac cautione opus non est, si in omnibus fluidis quorum gravitates specificas inter se conferre volueris, eandem sili portionem una cum solido immersas. Quia crinis equinus eandem fere cum aqua gravitatem specificam habet; Experimenta Hydrostatica in aqua instituturi ex eodem solido suspendunt.

PROBLEMA III.

71. Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a superioribus, nec ne.

RESOLUTIO.

Exploretur per Probl. 2 (§. 66), quamnam ponderis sui partem amittat idem solidum in diversis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodsi enim pondus a solido solo in diversis profunditatibus amissum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi specificæ in partibus inferioribus, quæ in superioribus (§. 55), consequenter eadem densitas (§. 33). Quodsi vero in profunditate majore pondus majus amittitur quam in minore; in priore casu gravitas specificæ (§. 6), consequenter & densitas (§. 33), major erit quam in altero. Q. e. i. & d.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II,

SCHOLIION.

72. Tentavit hoc in aqua Franciscus Tertius DE LANIS (a). Accepto autem vase duorum pedum altitudine, cum globum vitream eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum aequipondio 18 granorum perfectissimum facere aequilibrium expertus est. Cum eundem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem descendere permetteret, ponderi ejus dimidium insuper granum decedere observavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immersum conjici debet, quippe extra aquam grani semissi aequiponderantem; aquæ partes inferiores a superioribus nullam pati compressionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus instituire.

PROBLEMA IV.

73. Determinare rationem quam habet gravitas specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi quod fluido specificè gravius existit.

RESOLUTIO.

Ponderetur massa quantalibet solidi in fluido, & notetur accurate pondus in eodem amissum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi in ipso demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 59). Q. e. d.

SCHOLIION.

74. Si fluidum specificè gravius solido, proposito satisfiet per ea quæ in Capite subsequente traduntur.

LI

THEO-

(a) In *Maisterio Natura & Artis*. Tom. 3. lib. 25. c. 1. exper. 7. f. 492.

THEOREMA XVI.

75. Corporum pondere equalium gravitates specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amissæ.

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ corporum pondere æqualium sunt reciproce ut volumina (§. 29). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amissæ voluminum rationem habeant (§. 55, 18); gravitates corporum specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amissæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio quam habent gravitates specificæ solidorum, si massæ in aëre æquiperantes in eodem fluido ponderentur, & pondera a singulis amissa notentur.

SCHOLIUM.

77. Gravitatem specificam plurimorum Corporum solidorum investigarunt multi. Imprimis prolixè sunt Tabulæ, quæ in hanc rem exhibeantur in Transactionibus Anglicanis (a). Variorum quoque corporum, præsertim metallorum, gravitatem specificam jam ante dedit Martinus GHETALDUS (b) & ex eo Guilielmus OLIGHTREDUS (c): dederunt postea alii. Nobis suffecerit annotasse metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem specificam a PETITO multa solertia investigatam, prout eam exhibuit MERSENNUS (d) & ex ipso postea alii. Nempe si fuerit gravitas

(a) N. 169. p. 926. & seqq. it. n. 199. p. 994. Conf. Epitome Transact. Angl. Cl. LOWTHORPII, vol. I. cap. 6. p. 60. & seqq.

(b) In Archimede promotò.

(c) In Opusculis Mathematicis, p. 61.

(d) In Phenomenis Hydraulicis. cor. prop. 47. Cægitatorum Physico-Mathem. p. 192.

Auri librarum 100.

erit sub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. $71\frac{1}{2}$	Stanni puri	$38\frac{3}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Argenti	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{2}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{2}$

PROBLEMA V.

78. Data gravitate fluidi, invenire gravitatem solidi mole ipsi æqualis.

RESOLUTIO.

1. Investigetur ratio gravitatis specificæ fluidi ac solidi (§. 73).
2. Hac data, per Regulam trium invenietur gravitas solidi sub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi sub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas specificæ aquæ ad gravitatem plumbi, ut $5\frac{1}{2}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 32 ad 363 (§. 178 Arithm.); reperitur gravitas plumbi $363.200:32 = 2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur, data gravitate solidi unius, gravitas alterius, si ratio gravitatis specificæ investigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas stanni sub eodem volumine cum plumbo 30 librarum. Quia gravitas stanni ad gravitatem plumbi, ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 78 ad 121 (§. 178 Arithm.); reperietur gravitas stanni quæsitæ $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA VI.

80. Dato corporis solidi volumine, invenire volumen solidi alterius pondere æqualis.

RESOLUTIO

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium fiat reciproce ut gravitates specificæ (§. 29), Problema præfens eodem modo resolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum, ut 21 ad 42, hoc est, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PROBLEMA VII.

81. Dato pondere corporis ex duobus miscibilibus compositi, una cum pondere quod in fluido aliquo amittit; invenire pondera miscibilium sigillatim.

RESOLUTIO.

1. Investigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido massa quædam determinata utriusque miscibilis amittat.
2. Hinc per Regulam trium porro eruat, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriusque massa, si pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus subtrahatur e majori, ut constet excessus quo pondus a specificè leviori amissum superat pondus a graviore amissum.
4. Porro pondus a specificè graviore amissum subtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut constet excessus quo pondus a mixto amissum superat pondus a graviore amissum.
5. Quodsi ad excessum primum, excessum alterum, & pondus mixti quæ-

ratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miscibilis specificè levioris: quod

6. a pondere mixti subductum relinquit pondus massæ specificè gravioris.

Ex. gr. Massa 120 librarum, ex stanno & plumbo commixtis composita, in aqua 14 libras amittit: quærentur pondera stanni & plumbi sigillatim. Quoniam experimentando reperitur, stannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

$$\begin{array}{r}
 37 - 5 = 120 \\
 \quad \quad \quad 5 \\
 \hline
 \frac{600}{37} \text{ lib.} \\
 23 - 2 = 120 \\
 \quad \quad \quad 2 \\
 \hline
 \frac{240}{23} \text{ lib.} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 500 \quad 240 \quad 13800 \quad 8880 \quad 4920 \\
 37 \quad 23 \quad \quad \quad 851 \quad \quad 851 \\
 14 \quad 240 \quad 11914 \quad 8880 \quad 3034 \\
 \quad 23 \quad \quad \quad 851 \quad \quad 851 \\
 4920 - 3034 = 120 \\
 41 \quad \quad \quad 1 \quad (120 \\
 \quad \quad \quad * \\
 303 * (74 \text{ lib. Pondus specif. lev.} \\
 * * * 120 \quad \quad \quad \text{Pondus mixti} \\
 * \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 46 \quad \quad \quad \text{Pondus specificè} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{gravioris.}
 \end{array}
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum = *p*, quod in fluido amittit = *a*, pondus amissum a specificè graviore ejusdem cum mixto ponderis = *b*, amissum a specificè leviori ejusdem itidem cum mixto ponderis = *c*, pondus specificè levioris quod mixtum

mixtum ingreditur = x ; erit pondus specificè gravioris quod mixtum ingreditur = $p - x$, pondus a miscibili x in fluido amissum = $cx : p$, amissum a miscibili $p - x = (lp - bx) : p$. Ergo

$$\frac{(lp - bx + cx) : p = a}{cx - bx = (a - b) p}$$

$$x = (a - b) p : (c - b). \text{ Q. e. d.}$$

SCHOLIUM.

82. Eodem modo solvi potest Problema ab Hierone Rege Syracusarum olim Archimedi propositum, quantum scilicet argenti corona aurea admiscuerit dolosus Artifex (a).

PROBLEMA VIII.

83. Determinare bonitatem massarum, massasque adulteratas distinguere a genuinis.

RESOLUTIO.

Præsupponendum hic est, bonitatem massæ æstimari ex ratione ipsius ad volumen, ex. gr. frumentum eo melius, quo gravitas specificæ major. Quare non alia re opus est, quam ut investigetur decrementum ponderis in aqua.

Quodsi, eodem mediantem, gravitatis specificæ massarum ratio ad fluidum aliquod determinetur (§. 73); massæ adulteratæ facile dignoscuntur, si facta ponderatione in eodem fluido, diversa ab hac gravitatis specificæ ratio reperitur (§. cit.).

SCHOLIUM I.

84. Cum aqua non semper ejusdem sit gravitatis specificæ, diversitas prius per ponderationem ejusdem solidi in eadem deregenda.

SCHOLIUM II.

85. Notandum præterea, fieri nonnunquam posse, ut Hydrostaticum examen solum adulterationem factam non prodat. Ex. gr. Cum stannum argento sit specificè levius, plumbum specificè gravius; duo hæc metalla (quod inferius expressius docetur) ita misceri possunt, ut eandem cum argento gravitatem specificam nanciscantur: quæ massa postmodum cum argento permixta examen Hydrostaticum non verebitur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miscibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur (§. 81.).

SCHOLIUM III.

86. Notandum denique, per varia experimenta addiscendam esse diversitatem, quæ in gravitate specificæ corporum (eiusdem speciei ad idem fluidum occurrere potest, antequam de adulteratione facta iudicium feratur.

PROBLEMA IX.

87. Fluidum specificè gravius ponderare in specificè leviore.

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. mercurius in aqua ponderandus.

1. Assumatur vas vitreum, v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amissum 36: quod erit pondus aquæ ejusdem cum vitri massa voluminis.
2. Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua; ut habeatur pondus amissum 43; quod erit æquale ponderi aquæ ejusdem cum vitro & mercurio simul sumto voluminis.

(*) Vid. VITRUVIUS Lib. 9. c. 35. f. 273.

4. Quare si pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde subtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc est, pondus ab argento vivo in aqua amissum 7.

THEOREMA XVII.

88. *Corpus specificè gravius in fluido specificè leviori ea vi descendit, quæ est excessi ponderis ejusdem supra pondus fluidi sub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonnisi ea vi descendit quæ ipsi relinquitur, demta parte in resistantiam fluidi vincendam impensa. Quamobrem cum hæc æqualis sit ponderi fluidi sub eodem volumine (§. 55); nonnisi excessu ponderis sui supra pondus fluidi sub eodem volumine descendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

89. Quoniam vis ad sustentandum corpus in fluido requisita æqualis est vi qua nititur deorsum in eodem; vis, quæ corpus specificè gravius in fluido sustentat, æqualis est excessui gravitatis absolutæ supra gravitatem fluidi sub eodem volumine. Ex. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{2}$ in aqua amittit de pondere suo $5\frac{1}{2}$ libras: vis ergo 42 librarum id sustentare valet.

COROLLARIUM II.

90. Quare cum excessus ponderis solidi supra pondus fluidi specificè gravioris minor sit, quam supra pondus specificè levioris sub eodem volumine; in specificè graviore vi minore descendit, quam in

leviore; consequenter etiam in hoc celebrius, in illo tardius descendit.

COROLLARIUM III.

91. Quamobrem in specificè graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod sustentandum, ne fundum petat, quam in specificè leviori (§. 89).

PROBLEMA X.

92. *Data solidi submersi gravitate absoluta, datoque volumine; determinare vim qua in fluido attolli potest.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63); unde,
2. Ob datum solidi submersi volumen, per Regulam trium inveniri potest pondus aquæ idem cum ipso volumen habentis.
3. Hæc ergo si subducatur a gravitate corporis submersi data, relinquetur vis quæ ipsum in aqua sustentare valet (§. 89); adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis submersi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ sit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum submerso volumen habentis 2800: quod ex 3000 subductum relinquit vim sustentantem 200 librarum.

SCHOLIUM.

93. *Hinc patet ratio, cur corpora quadam, quæ scilicet ad gravitatem specificam fluidi propius accedunt (§. 90), in fluido isto exigua vi sustententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aëre superant.*

CAPUT IV.

De Gravitatione Corporum specificè Leviorum in Fluido Graviori.

THEOREMA XVIII.

94. **C**Orpus specificè levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi sub volumine partis immerse aequetur ponderi totius corporis.

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantalibet, in quas fluidum concipitur divisum, æquiponderent (§. 34); si corpus solidum eidem imponitur, perinde est ac si columnæ uni tantum ponderis accessisset, quantum est fluidi sub eodem volumine; consequenter columna ista præponderat (§. 35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§. 75 *Mechan.*), corpusque solidum immergitur. Quam primum vero corpus ea sui parte immersum est, ut fluidum ejectum ex spatio quod occupat pondere æquale sit gravitati totius corporis; columna ista non amplius præponderat. Corpus itaque ita immersum ab aqua sustentatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

95. Quia gravitates specificæ corporum ejusdem ponderis sunt reciproce ut volumina (§. 29); volumina vero fluidorum pondere æqualium sunt ut partes immerse ejusdem solidi (§. 59); gravitates specificæ fluidorum reciproce sunt ut partes immerse ejusdem corporis.

COROLLARIUM II.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviore.

COROLLARIUM III.

97. Quo majorem rationem solidi gravitas specificæ ad fluidi specificè levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur (§. 203 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

98. Si solidum fuerit ejusdem gravitatis specificæ cum fluido, corpus totum submergitur, & datum intra fluidum locum servat.

COROLLARIUM V.

99. Si corpus specificè levius in fluido graviore totum submergitur, a columnis collateralibus ea vi ad ascensum urgetur, quæ æqualis est excessui fluidi volumine solido æqualis, supra pondus solidi (§. 75 *Mechan.*).

COROLLARIUM VI.

100. Corpus adeo specificè levius fundo vasis incumbens non attollitur, nisi fluidum gravius affusum ultra partem assurgat quæ volumine æqualis est fluido ejusdem cum solido toto ponderis.

THEOREMA XIX.

101. *Gravitas specificæ solidi est ad gravitatem specificam fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immerse ad volumen integrum.*

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi solido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immerse (§. 94). Cum adeo gravitates specificæ æquiponderantium sint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi in quo mergitur, ut volumen partis immerse ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA XX.

102. Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immerse sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Etenim pars immersa solidi A æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore A ponderis; & pars immersa solidi B æqualis est volumini fluidi quod est ejusdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Est vero gravitas solidi A æqualis gravitati solidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* consequenter gravitas fluidi expulsi eadem. Ergo pars immersa ipsius A est æqualis parti immerse ipsius B. *Q. e. d.*

THEOREMA XXI.

103. Solidorum æqualium gravitates specifica sunt ut partes eorundem in eodem fluido demersæ.

DEMONSTRATIO.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demersæ sunt ut gravitates fluidi expulsi (§. 130 *Mechan.*), adeoque

ut gravitates absolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates specificæ sunt ut absolutæ (§. 26); consequenter gravitates specificæ solidorum æqualium A & B sunt ut partes immerse (§. 167 *Ariihm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

104. Data gravitate pedis cubici fluidi, ex. gr. aquæ, una cum volumine partis immerse solidi; invenire pondus totius corporis.

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis solidi æquale est ponderi fluidi quod idem cum parte immersa volumen habet (§. 94); ad pedem cubicum, volumen partis immerse, & gravitatem pedis cubici unius fluidi quærendus est numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

Ex. gr. Pes cubicus aquæ est 70 librarum; (§. 64). Si itaque fuerit volumen partis immerse 40 pedum cubicorum: reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA XII.

105. Data gravitate ex. gr. unius pedis cubici aquæ, & gravitate solidi; invenire volumen partis immergende.

RESOLUTIO.

Cum sit ut gravitas unius pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis, ita

pes.

pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per Regulam trium invenitur.

Ex. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ est librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XIII.

106. *Datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate fluidi specificè gravioris; invenire vim qua illud sub hoc demersum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis ista æqualis est excessui ponderis fluidi sub eodem volumine, quod habet solidum submersum, supra pondus hujus (§. 99).

1. Ex datis volumine solidi, & gravitate unius pedis cubici aquæ, quaeratur per Regulam trium gravitas fluidi sub æquali volumine.
2. Inde subtrahatur pondus solidi: ita nimirum vis quaesita relinquetur.

Ex. gr. Quaeritur, qua vi opus sit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, sub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64); pondus aquæ sub volumine 8 pedum est 560. Unde si subducatur pondus solidi 100, relinquitur vis ad detinendum solidum sub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus specificè levius eadem vi ascendit in fluido graviori, qua ad ascensum ejus impediendum opus est (§. 75 *Mechan.*); per præsens Problema invenitur quoque vis, qua solidum specificè levius in fluido graviori ascendit.

PROBLEMA XIV.

108. *Instrumentum construere, quo explorare licet quantum salis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.

1. Ex tenui lamina cuprea construat *Fig. 13.* globus AB cum tubo BCEjus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.
2. Granula plumbea globo AB indantur, donec instrumentum in D usque immergatur.
3. Pondus totius aquæ, in qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum salis sit in ea dissolvendum, ut partem ponderis centesimam absolvat.
4. Postquam igitur tantum salis in aqua fuerit dissolutum, instrumentum de novo in ea mergatur, noteturque punctum E, quod hæret in superficie aquæ salis. Ita nimirum constabit terminus immersionis in aqua, quæ sub volumine 100 librarum salis libram unam comprehendit.
5. Quodsi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immersionis in aqua, sub volumine 100 librarum, duas, tres, quæ

quatuor &c. libras falis continente ; instrumento hoc explorare poteris , quantum falis in aqua data contineatur.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim instrumentum in aqua falsa mergatur , statim apparebit quot libræ falis in aqua falsa centum librarum contineantur. Quamobrem si pondus aquæ falsæ exploretur , per Regulam trium invenitur quantitas falis in ea dissoluti. *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

109. Ut Problema præsens rectius intelligatur , exemplo sequente id illustrare libet. Sit gravitas aquæ puræ 2000 scrupulorum. Divide 2000 per 99 , quotus $20\frac{20}{99}$ indicabit , quot scrupula falis in aqua dissolvenda , ut ponderis centesimam partem constituat. Divide ulterius 2000 per 98 , quoti $20\frac{40}{98}$ duplum $40\frac{80}{98}$ indicat , quantum falis in aqua sit dissolvendum , ut sit $\frac{2}{100}$ totius ponderis. Divide similiter 2000 per 97 , quoti $20\frac{60}{97}$ triplum $61\frac{81}{97}$ indicat , quantum falis in aqua dissolvi debeat , ut sit $\frac{3}{100}$ totius ponderis &c. Enimvero cum non sine tædio , ad singula divisionum puncta inveniendâ , aqua pura uti liceat ; numerum sequentem continuo subduc a proxime præcedente ; residuum enim indicabit quantum adhuc falis sit addendum ad inveniendum punctum proxime sequens. Ex. gr. ubi in aqua dissolveris falis $20\frac{20}{99}$ pro inveniendâ puncto E : ut alterum F reperias addenda sunt insuper scrupula $20\frac{2}{9}$ fere , quæ est differentia inter $20\frac{20}{99}$ & $40\frac{80}{98}$.

SCHOLIUM II.

110. Similia instrumenta ex vitro construi Fig. 14. solent ; tubo BC in partes æquales diviso , & hermetice in C sigillato , globo vero geminato , ad examinandam fluidorum gravitatem specificam (§. 101).

PROBLEMA XV.

111. Data gravitate vasis ex materia specificè graviori parandi , & gravitate fluidi specificè levioris ; determinare cavitatem quam habere debet , ut fluido supernatet.

RESOLUTIO.

Cum detur pondus fluidi sub volumine unius pedis cubici , per hypoth. volumen fluidi vasi pondere æqualis per Regulam trium inveniri potest. Quodsi ergo cavitas paulo major fiat , vas sub eodem volumine minus ponderis continebit quam fluidum ; adeoque eodem specificè levius erit (§. 5) ; consequenter ipsi supernatabit (§. 94).

Ex. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ supernatans , cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici est 70 librarum ; reperietur volumen aquæ 30 librarum $428'' 571'''$, adeoque cubus diametri sphaeræ 818924 (§. 552 Geom.) : unde radix cubica extracta $9'' 3'''$ est diameter sphaeræ aquæ 30 librarum. Quodsi ergo diameter cavitatis fiat paulo major ex. gr. unius pedis , eo minor ipsius pars mergetur , quo major fuerit diameter.

DEMONSTRATIO.

Quod si in volumine corporis tantundem gravitatis contineretur quantum in æquali volumine fluidi inest, totum in eodem submergeretur, & datum in eodem locum servaret, vi nulla extrinsecus accedente (§. 98). Quare cum sub volumine fluidi quod parti immersæ solidi æquale est tantum gravitatis inest quantum per totum corpus diffunditur (§. 94); vis, quæ extrinsecus superaccedere debet, ut solidum in dato loco intra fluidum detineatur, æqualis est gravitati fluidi per volumen diffusæ, quod æquale est excessui corporis solidi integri supra partem qua in fluido mergitur vi gravitatis propriæ. Enimvero in fluido tanquam gravi homogeneo gravitas est volumini proportionalis (§. 130 *Mechan.*). Ergo vis ad corpus solidum in fluido specificè leviori detinendum requisita est ad gravitatem totius solidi, uti excessus voluminis supra partem in eodem vi gravitatis propriæ immersam ad hanc partem immersam. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVI.

121. *Vis corpus solidum in fluido specificè leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum specificarum solidi atque fluidi, ad gravitatem specificam solidi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica fluidi ad

gravitatem specificam solidi, ut volumen totius solidi ad partem ejus qua in fluido vi gravitatis propriæ demergitur (§. 101). Ergo differentia gravitatum specificarum fluidi & solidi est ad gravitatem specificam solidi, ut excessus voluminis solidi supra partem immersam ad hanc ipsam partem (§. 193 *Arithm.*). Quoniam itaque vis in fluido corpus specificè levius suspensum detinens est ad gravitatem ejus, ut excessus voluminis supra partem qua vi gravitatis suæ in eodem demergitur ad hanc partem (§. 120); erit etiam eadem vis ad gravitatem corporis, ut differentia gravitatum specificarum solidi ac fluidi ad gravitatem specificam solidi (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

122. *Dato pondere corporis fluido specificè gravioris, una cum parte ejusdem in fluido amissa; dataque ratione gravitatis specificæ fluidi ac corporis alicujus specificè levioris: invenire pondus ejusdem quod requiritur, ut specificè graviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Subtrahatur pars ponderis, quam corpus solidum specificè gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato; ut relinquatur vis quæ solidum intra fluidum in dato loco detinere potest (§. 75 *Mechan.*).

2. Ex

2. Ex data gravitate specifica fluidi & corporis specificè levioris, atque vi ad sustentandum specificè gravius intra fluidum modo reperta, seu, quod perinde est, ad detinendum specificè levius a graviori requisita; investigetur gravitas totius corporis specificè levioris: quod vi Theorematis præcedentis (§. 121) per Regulam trium, (§. 302 *Arithm.*) reperiri potest. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM I.

123. Quoniam solidum ejusdem gravitatis specificæ est cum fluido quod datum intra fluidum locum servat (§. 98), cum specificè gravius in eodem descendat (§. 88), specificè levius aliqua tantum sui parte mergatur (§. 94); per præsens Problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido specificè levius, alterum specificè gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem specificam habens.

COROLLARIUM II.

124. Si pondus corporis specificè levioris tantisper augeatur; specificè gravius ad superficiem fluidi attollet.

SCHOLIUM.

125. Theorema præsens cum ejus Corollariis etiam per Theorema 24 (§. 118) demonstrari poterat.

THEOREMA XXVII.

126. *Vis corpus solidum in fluido specificè leviori sustensans est ad pondus ejusdem, ut differentia gravitatum spe-*

cificarum illius ac fluidi ad gravitatem specificam solidi.

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi, ut pondus integrum solidi ad partem ejus in fluido amissam (§. 59). Quamobrem convertendo erit, ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi, ita excessus solidi supra fluidum ad pondus solidi integrum (§. 193 *Arithm.*). Est vero excessus solidi supra fluidum æqualis vi ad solidum intra fluidum sustentandum requisitæ (§. 89). Ergo hæc vis est ad pondus integrum solidi sustentandi, ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

127. *Datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specificè gravioris, nec non gravitate specifica ejusdem fluidi & corporis solidi eodem specificè gravioris; invenire quantum hujus pondus esse debeat, ut specificè leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex datis gravitate & volumine solidi specificè levioris, una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specificè gravioris; inveniatur vis ad solidum in fluido detinendum requi-

fitæ (§. 106) : quæ erit excessus
solidi specificè gravioris supra pon-
dus fluidi mole æqualis (§. 89).
Unde

2. ex data ratione gravitatum speci-
ficarum solidi specificè gravioris &
fluidi, atque vi ista, seu excessu præ-
dicto; invenitur pondus solidi spe-
cificè gravioris cum leviori conjun-
gendum, ut idem in fluido susten-
tet (§. 118). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quodsi solidi specificè gravioris
pondus tantisper augeatur, cum specificè
leviori una descendet, seu specificè levius
ad fundum secum abripiet.

SCHOLIUM.

129. *Non absimili modo plura alia Pro-
blemata solvi possunt, quæ in Philosophia Ex-
perimentalì, & Vita communi, ac Arte, usum
suum habere possint.*

FINIS HYDROSTATICÆ.



Fig. Hydrost.

Fig. 1.

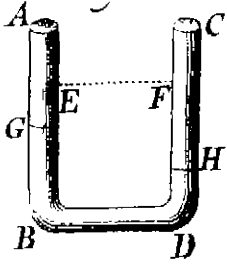


Fig. 2.

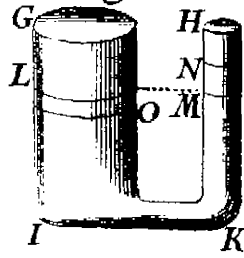


Fig. 3.

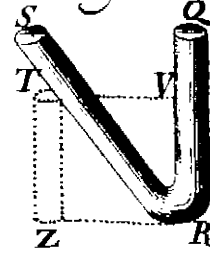


Fig. 5.

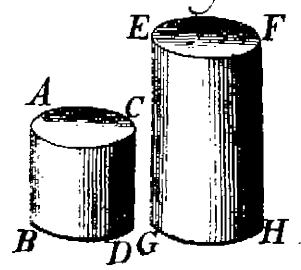


Fig. 9.

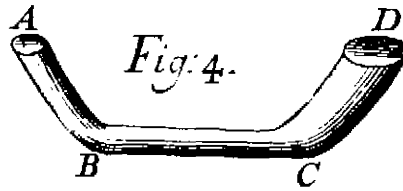
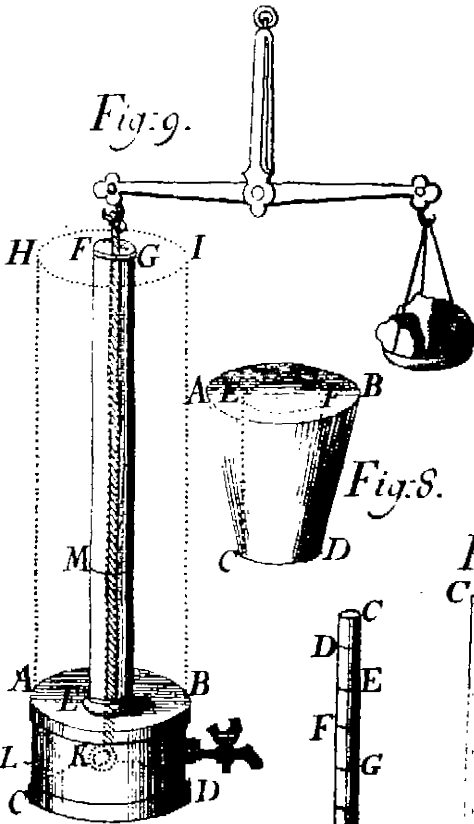


Fig. 4.

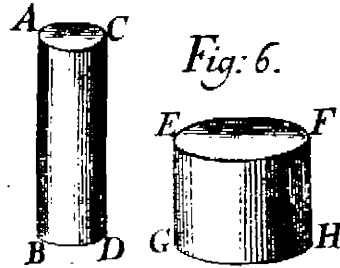


Fig. 6.

Fig. 8.

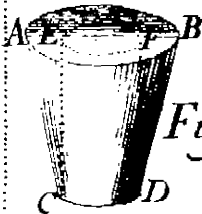


Fig. 10.



Fig. 14.



Fig. 13.

Fig. 12.



Fig. 15.

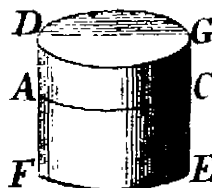


Fig. 7.

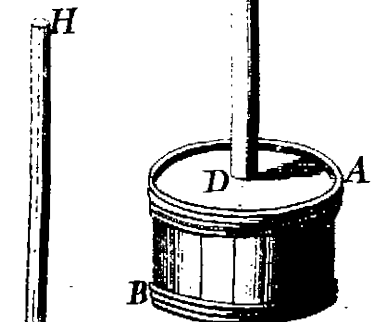
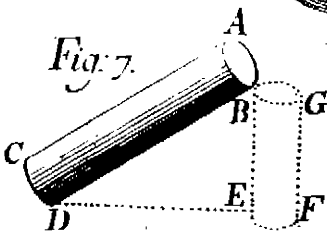
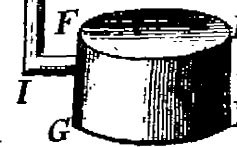
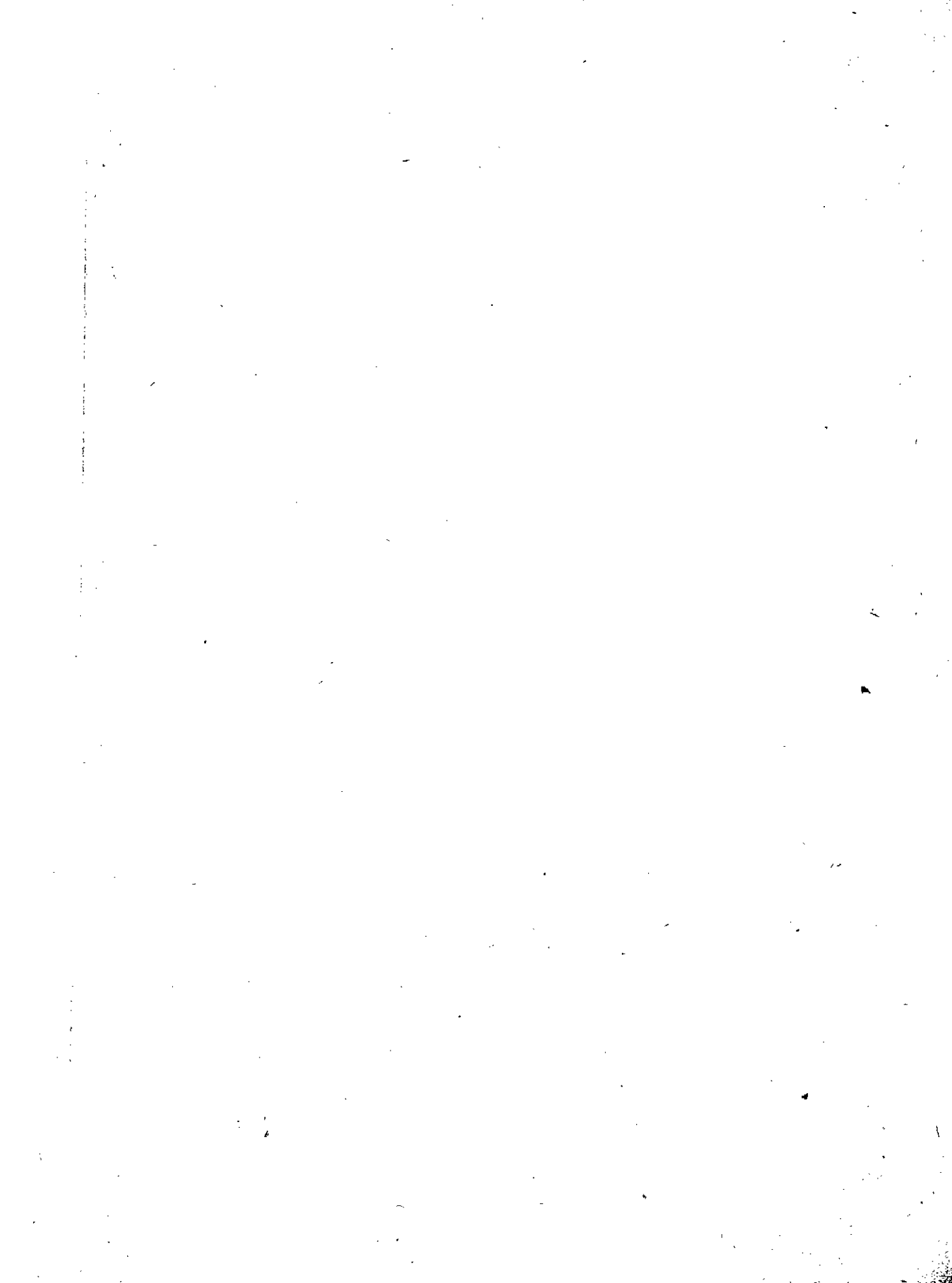
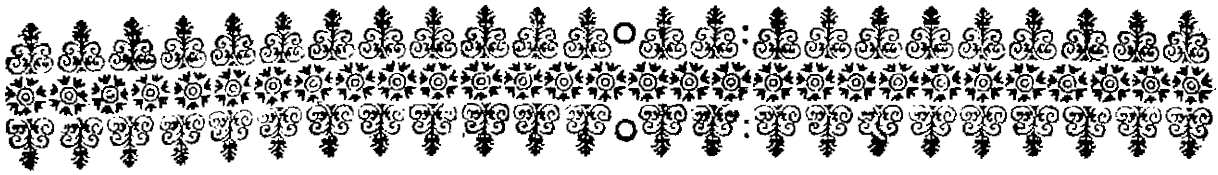


Fig. 11.







ELEMENTA AEROMETRIÆ.

P R Æ F A T I O.



MULTO jam tempore in more positum, ut Physicæ quædam capita in numerum disciplinarum mathematicarum relata fuerint, postquam, facta ad Experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ, & Analyseos, hoc est, Matheos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia sane de causa Hydrostatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Astronomia in numero isto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus Aëris more Geometrarum & ex principiis Matheos puræ demonstrari, demonstrata ad varios usus dextre applicari possint; Anno 1709, numerum Disciplinarum mathematicarum augere animum induxi, editis *Aërometria Elementis*, quæ anno sequente 1710, in Tomo secundo Elementorum Matheos Germanicorum, Hydrostaticæ subjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto majori jure locum semel adeptum tuetur, quod Hydraulica, dudum in Mathesin recepta, in multis opem ejus implet.

ploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydrostatica; ita Aërometria Hydraulicam illustrat. Antequam igitur ad Aërometriad animum appellas, Hydrostaticæ dogmatibus eundem imbuas opus est. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriad tibi sociam jungas e re tua omnino esse deprehendes. Jucundum vero est Aërometriæ studium, idemque utilissimum; tum quod inde ratio plurimorum Naturæ Phænomenorum desumitur, tum quod variarum Machinarum ac Instrumentorum structura in ea continetur. Ut brevitati consulatur & sequentia antecedentibus respondeant, non integra exhibeo Aërometriæ Elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita esse modo memini, sed quæ digniora reliquis visa sunt in compendio exhibere & nonnullis augere constitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris consentientibus, iis potissimum commendo, quibus curæ cordique fuerit ad Experimenta applicare Mathesin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem consequantur ex animo apprecor.



ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Aërometriæ.

DEFINITIO I.

1. **A**erometria est Scientia metiendi Aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem sit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam investigare (§. 23 Geom.); in Aërometria tradendæ sunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia, & extensionis terminos vel intensitatis gradus habentia, accurate determinari possunt.

DEFINITIO II.

3. *Aër* est corpus fluidum Telluri circumfusum, & spatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, nisi impediatur.

SCHOLION.

4. Definitionem Aëris nonnisi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuisse notam aëre præsentem semper obviam, ex qua ejus præsentia certo colligi potest.

DEFINITIO III.

5. *Compressio* est coarctatio massæ in minus volumen per impulsum aut pressuram alterius corporis facta.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

DEFINITIO IV.

6. *Condensatio* est coarctatio massæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO V.

7. *Dilatatio* est expansio massæ in majus volumen quam facta compressione habuerat.

DEFINITIO VI.

8. *Rarefactio* est expansio massæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO VII.

9. *Elastr aëris* est vis qua vi comprimente sublata dilatatur.

AXIOMA I.

10. *Quo corpus est gravius, eo magis premit alia sibi subjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione Gravitatis (§. 4 Mechan.). Corpus scilicet vi gravitatis nititur deorsum, adeoque premit alterum descensui resistens. Quo majore itaque vi deorsum nititur, eo magis quoque premit alterum sibi subjectum.*

NE

AXI

A X I O M A II.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem est, elater quoque immutatus sit necesse est: quodsi vero elater majorem dilatationem produxerit, crevisse; sita minorem, decrevisse censendus est.*

E X P E R I E N T I A I.

13. *Promove celeriter manum per spatia quæ vacua esse videntur, faciem versus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipsam non contingat.*

C O R O L L A R I U M.

14. *Necesse est adeo, ut interstitia inter corpora terrestria quæ vacua esse videntur, materia quadam repleantur, cujus partes sint admodum subtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediunt. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod subtilissimum occupat (§. 3 Hydrostat.), hoc est, aër datur (§. 3).*

E X P E R I E N T I A II.

15. *Globo cupreo aut orichalceo satis capaci afferruminetur epistomium cum cochlea ferrea, ita ut syrix, mediante cochlea mari, ad arbitrium ei adaptari rursusque removeri possit. Quodsi ope syringis plus aëris in globum intrudas, eumque clauso epistomio bilanci imponas; pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epistomium rursus aperies; aërem erumpere animadvertes, & globus metallicus recuperabit pondus quod ante intrusionem aëris habuerat.*

S C H O L I O N.

16. *Experimentum hoc excogitavit GALILÆUS GALILÆI, lagena vitrea usus (a); sed cum vasa vitrea ab aëre compresso facile nec sine periculo adstantium frangantur, ego metallico uti soleo, in gratiam curiosorum idem repetens.*

C O R O L L A R I U M I.

17. *Quoniam in globum metallicum plus aëris intrudi potest quam ordinarie capit; evidens est, aërem in minus volumen coarctari posse quam ordinarie occupat. Comprimi ergo potest (§. 5).*

C O R O L L A R I U M II.

18. *Cum epistomio aperto aër rursus egrediatur, ipsoque egresso pondus pristinum recuperet globus quod ante compressionem aëris in ipso factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præcise aëris rursus egressum quantum intrasum fuerat. Aër itaque compressus ad pristinam expansionem redit, si vis comprimens aut expansioni resistens removeatur; adeoque elatere gaudet (§. 9).*

C O R O L L A R I U M III.

19. *Certum itaque compressionis indicium est, quod aër intra vas quoddam magis compressus sit quam externus, si orificio ejus aperto, cæteris paribus, aëris quædam portio egredi observetur.*

C O R O L L A R I U M IV.

20. *Denique quia pondus vasis augetur, si aër intra ipsum comprimitur; massa aëreæ nisum exerceat opus est deorsum juxta lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215. Mechan.). Gravis ergo existit (§. 4. Mechan.).*

C O R O L L A R I U M V.

21. *Premittit ergo corpora subjecta secundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215. Mechan.).*

Ex-

EXPERIENTIA III.

22. Quodsi vesicam aëre mediocriter repletam firmiterque constrictam ad ignem admoveas; ea non solum distenditur, sed & ingenti prorsus fragore tandem disrumpitur. Quodsi vero eam ab igne removeas antequam disrumpatur, statim flaccida evadit.

COROLLARIUM I.

23. Cum intra vesicam nil nisi pauculum aëris contentum fuerit; expansio vesicæ expansionem aëris inclusi arguit. Aër itaque rarefit (§. 8).

COROLLARIUM II.

24. Quia calore expirato vesica distensa rursus flaccida fit; frigore in volumen minus rursus coarctatur, adeoque condensatur (§. 6).

EXPERIENTIA IV.

25. Si aër in vase comprimatur, ejus quandam portionem aperto orificio ex ipso iterum expirare notabis in quacunque orificii directione.

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aëris nititur quaquaversum secundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA V.

Tab. I. Fig. 1. 27. Si tubum oblongum AB, cujus altitudo 32 pedibus Rhenanis major, in C epistomio instructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius A in aquam immergas, & aperto orificio B epistomium aperias; aqua tota cum impetu effluit: si vero obtura-

to orificio B epistomium C recludas; Tab. I. Fig. 1. aqua usque ad D descendit, ac in altitudine 31 pedum Rhenanorum ultra libellam aqua in vase GH contenta pendula hæret.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendulæ aquam in vasculo sibi subjectam premit, nec tamen descendit; necesse est, ut, si aqua in vasculo contenta in istiusmodi columnas divisa concipiatur, qualis est quæ tubo AB subjacet, singulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum superficiem aquæ incumbit aër (§. 3), eamque premit (§. 21). Columna igitur aërea a superficie aquæ in vasculo contentæ usque ad extremitatem atmosphæræ extensa, eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo super eadem basi, sed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. 36 Hydrost.).

SCHOLIUM.

29. Hoc æquilibrium aëris cum aqua prius observavit Hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra 18 cubitos attolli non posse miratus, atque cum GALILÆO Phenomenon insperatum communicavit, ipse causam ejus ignorans (a). Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter MARIOTTUS (b) altitudinem aquæ in tubo pendulæ reperit 32 pedum Parisiensium. Evangelista TORRICELLUS, discipulus GALILÆI, aqua substituit mercurium, cujus altitudo, utpote quatuordecies gravioris aqua, reperitur 28 circiter digitorum Rhenanorum (§. 36 Hydrost.).

N n 2

CAPUT

(a) *Mechan. Dial. 1. p. m. 15. 16.*

(b) *Traité du mouvement des Eaux. part. 2. Disc. 1. p. 9.*

CAPUT II.

De Elatere & Gravitate Aëris.

THEOREMA I.

30. **E**later aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis.

DEMONSTRATIO.

Aër enim superior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

31. Quoniam pondus aëris superioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aëris basis, sed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aëris inferioris eidem columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHOLIUM.

32. Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus in posterum, brevitate gratia, Pondus Atmosphæricum.

COROLLARIUM II.

33. Elater aëris inclusi, si cætera cum ambiente externo paria sint, æquatur similiter ponderi totius superioris incumbentis.

COROLLARIUM III.

34. Inclusus adeo aër eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM IV.

35. Ergo etiam hic mercurium ad altitudinem 28 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo suspendit (§. 28, 29).

THEOREMA II.

36. Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur; aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet, eamque replebit.

DEMONSTRATIO.

Est enim aër in statu compressionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expansionem nititur (§. 9) & quidem quaquaversum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum nisi huic nihil resistat, expansio per cavitatem vasis actu sequetur (§. 75 *Mechan.*). Et quia, si aliquod spatium vacuum intra cavitatem vasis ab aëre irrudente non occupatum supponamus, illud instar vasis vacui intra aërem aperti considerari potest; aër in vas irruens etiam hoc spatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit, eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo syrinx orificio alicujus vasis firmiter infigatur, & embolus postea extrahatur, aër in vase contentus per siphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO VIII.

38. *Antlia Pneumatica* est Machina, qua mediante aër ex vasis educi potest.

SCHOLIUM.

39. *Primus Antlia Pneumatica inventor est OTTO DE GUERICKE, Consul Magdeburgicus,*

qui

qui Experimenta sua jam sub finem Comitiorum Imperialium, anno 1654 Ratisbonæ celebratorum, in præsentia Imperatoris, Electorum ac Principum quorundam iteravit (a). Ut vero inter exteros non desint, qui laudem inventionis Roberto BOYLIO, Experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis Robertus HOOKIUS, recensente Cl. WALLERO (b), & ex Gallis, Joannes Baptista DU HAMEL variis scriptis celebris (c); ipse tamen BOYLIIUS, pro eo qui decet virum doctum candore (d), agnoscit quod OTTO DE GUERICKE ipsum prævenit, quodque ipse ab iis quæ Casparus SCHOTTUS, in Mechanica Hydraulico-pneumatica A. 1657 edita, de vasis vitreis a GUERICKIO ab aère evacuatis publicaverat, ad sua Experimenta, & Antlia Pneumatica constructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipse GUERICKIUS (e): aliud artificium embolum extrahendi applicuit BOYLIIUS, quo nunc ordinarie utuntur. Recentius structuram Antlia Pneumatica immutavit HAURSBEIUS, Mechanicus Anglus, cujus formam describit Cel. s^r GRAVESANDIUS (f), ipseque inventor delineat (g).

PROBLEMA I.

40. Antliam Pneumaticam construere.

RESOLUTIO.

Tab. I. I. Paretur cylindrus AB ex orichalco, Fig. 2. intus cavus & satis capax, cujus interior superficies optime polita, ut embolus DE artiffime ipsam un-

(a) Vid. Præfatio ad Experimenta nova Magdeburgica.

(b) In Vita HODKII Operibus ejus posthumis præmissa f. 3.

(c) In Philos. Vet. & Nov. Tom. 4. Phys. gener. Tract. 2. dissert. 3. c. 10. p. m. 234.

(d) In Præf. ad Nova Experim. Phys. Mech. de virtutibus elasticis, p. m. 3.

(e) L. c. f.

(f) In Elementis Physica Mathematicis Tom. 1. Lib. 2. c. 6. p. 309. Edit. sec.

(g) Physico-Mechanical Experiments, p. 1. & seqq.

diquaque contingat, ne ulli moleculæ aëreæ inter eam & embolum locus relinquatur. Fig. 2.

2. Embolus constare debet ex orbibus coriaceis firmiter sibi mutuo appressis, mediante cochlea orbi orichalco E afferruminata. Corium optimum est bubulum, ex quo succingula militum parari solent. Probe autem notandum est, corium imbibere debere oleum olivarum tertiam parti pinguedinis suillæ excoctæ permixtum, ne successu temporis indurescat.
3. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ, manubrio NO versato, commode extrahi ac intrudi possit.
4. In B afferruminetur basi cylindri tubulus BFKL cum epistomio GHI, ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico solido I composito.
5. Denique tubulus KL in L instruitur cochlea, ut vasa quorum officia cochleis foeminis seu matricibus instructa, ad eundem firmari possint. Eodem modo adaptandus est, quoties usus postulat, catinus orichalceus PQ, cui vitra campaniformia commode imponere liceat.

Dico ex vasis ad hanc Machinam firmatis aërem educi posse.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur, epistomio versus antliam AB & tubulum KL aperto, aër in vase contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavitatem

Tab. I. tatem expanditur (§. 36). Quodsi Fig. 2. jam epistomium claudatur versus tubulum KL, sit tamen apertum versus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rursus intrudatur; aër per epistomium FH extrudatur; consequenter aeris aliqua portio ex vaseeducta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aëris ex vase educitur. Ope adco Machinæ constructæ aër ex vasis educi potest. Q. e. d.

SCHOLIUM I.

41. In usu Antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini, & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad constructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum esse; ut embolus facile extrahatur & antliam undequaque arctissime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.

SCHOLIUM II.

42. In evacuandis vasis rationem habendam esse tantum vis elasticæ, ad quam solam in Demonstratione respeximus experimenta probant. Aërem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri docet expansio vesicæ sub campana suspensæ, firmiter constricto collo & nonnisi pauculo aëris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Aëris Lipsiensibus (a) ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari posset, atque fornicem vasis evacuandi fere attingentem. Quantum, per hunc tubum, aëris facta qualibet emboli agitatio-

(a) A. 1711. mens. Jan. p. 14.

ne ex vase educeretur, maxima cum circumspeditione notavi: embolo enim intruso, donec aër in antlia contentus eandem cum externo densitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conspicendos. Mox tubo isto remoto, evacuationem ejusdem vasis denuo tentavi: quam eadem prorsus ratione ut antea contingere didici. Usus autem sum vasis & majoribus, & minoribus eodem semper successu; estque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhenanorum. Quoniam vero doctissimis Diarii Trevoltiensis Collectoribus (b), quorum erga me humanitatem ut gratus prædicem fas est, hoc experimentum non sufficere visum est ad vim gravitatis ab evacuatione vasis excludendam; ideo (§. 47) mox ex natura elateris id demonstrabimus, ut in Aërometria A. 1709 edita. Ceterum hæc ratio est, cur Antlia situs ad horizontem inclinatus esse possit; nec opus sit ut, quod post GUERICKIIUM etiam BOYLIUS & nuper HAUKSBEIUS fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.

SCHOLIUM III.

43. Aliud Antliæ genus ex duplici cylindro construxit experimentator industrius Franciscus HAUKSBEË, cujus descriptionem exhibent Actorum Eruditorum Collectores (c). Eam, pro more suo, in multis immutavit LEUPOLDUS variis inventionibus Mechanicis celebris (d). Sed cum in comprimendo aëre usus ejus sit nullus, qui tamen in experimentis frequens esse solet; nec vasa tam exacte evacuari posse videantur quam Antlia ordinaria utendo: ideo antiquum Antliæ genus huic recentiori præferendum esse judico, nisi accedat medela.

THEO-

(b) Mémoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts. Août. 1711. art. 120. p. 1404.

(c) Supplém. Tom. V. Sect. 9. p. 403. Confer Autores ante, not. f & g, pag. præc. citatos.

(d) Act. Erudit. A. 1713. p. 95.

THEOREMA III.

44. *Aër Telluri circumfunditur; nec uno in loco altior esse potest quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus posterius. Dabitur ergo super aliqua Telluris parte spatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus existat, per spatium illud expandetur (§. 36). Impossibile igitur, ut intra aërem sit spatium aliquod ab aëre vacuum. Tale vero cum necessarium foret ob rotunditatem Telluris, nisi aër eam undiqueque ambiret; necesse est aërem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quodsi ponamus aërem uno in loco esse altiore, quam in altero; aër vacuo contiguus statim expandetur (§. 36), adeoque non quiescet nisi undiqueque eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

45. Quare si cetera sint paria, duobus corporibus eandem basin habentibus, in aequalibus a centro Terræ distantis, aequalia Atmosphæræ pondera incumbunt; adeoque ab aëre incumbente aequaliter premuntur (§. 42 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

46. In aequalibus itaque a centro Terræ distantis, si cetera fuerint paria, aër eandem densitatem habet; adeoque sub aequalibus voluminibus massas aequales continet (§. 8 *Hydrost.*); consequenter aequalia volumina ejusdem gravitatis existunt.

THEOREMA IV.

47. *In eodem vase, vel etiam in vasis communicantibus, aër ubique eandem densitatem habet, si cetera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet densitatem; aut non. Ponamus aërem in vase uno esse rariorem, in altero densiorem. Illius ergo densitas per pressuram minoris ponderis producet, hujus per pressuram majoris. Ast elater aëris æquatur ponderi prementi (§. 553 *Mechan.*). Ergo in aëre rariore minor vis elastica, quam in densiore. Quare cum aër uterque vi elateris quaquaversum sese expandere nitatur (§. 26); majore vi aër densior nititur versus rariorem, quam rarior versus densiorem. Ergo rarior cedit densiori (§. 75 *Mechan.*); comprimetur ergo ab elatere densioris (§. 5), & densior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aëri in utroque vase quies, nisi visus aeris utrinque fuerit idem (§. 75 *Mechan.*); hoc est, nisi eandem densitatem habuerit, *per demonstrata.* Si igitur aër in utroque vase eandem densitatem non habuerit, ceteraque paria fuerint; ad eandem statim reducetur. In vasis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, ceteris paribus, aër ubique eandem densitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

48. Quare si embolo ex Antlia extracto aër ex vase ad ipsam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem Antliæ replet

replet cum eo, qui in vase evacuando residuus, densitatem eandem habet.

COROLLARIUM II.

49. Est ergo massa aëris intra cavitatem Antliæ contenti ad massam aëris in vase evacuando residui, ut capacitas Antliæ ad capacitatem vasis (§. 17 *Hydrost.*).

THEOREMA V.

50. In vase quod per Antliam evacuetur, semper est aër primitivus ad aërem residuum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad eam dignitatem elevatum cujus exponens aequatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam.

DEMONSTRATIO.

Dicatur aër à prima agitatione emboli, residuus aër *residuus primus*; qui a secunda emboli agitatione restat, aër *residuus secundus*, & ita porro.

Quoniam aër in vase contentus est ad aërem in Antlia contentum, ut capacitas vasis ad capacitatem Antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aëre in vase & ex aëre in Antlia contento, hoc est aër primitivus, ad aërem in solo vase contentum, hoc est residuum primum, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius (§. 190 *Arithm.*). Similiter demonstratur, esse quantitatem aëris residui primi ad quantitatem residui secundi, ut aggregatum ex capacitate vasis & Antliæ ad capacitatem vasis solius; & in eadem ratione esse quantitatem aëris residui tertii &c. Ergo factum ex aëre primiti-

vo in residuum primum, secundum; tertium, quartum &c. ad factum ex aëre residuo primo in secundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vasis & Antliæ junctim toties in se ducta emergens quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vasis solius multoties itidem in se ducta enascens (§. 213 *Arithm.*): hoc est, ut dignitas aggregati ex capacitate vasis & Antliæ junctim cujus exponens est numerus agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam (§. 250 *Arithm.*); consequenter aër primitivus ad residuum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 181 *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA II.

51. Dato numero agitationum emboli in Antlia factarum, una cum capacitate vasis & capacitate Antliæ; invenire rationem aëris primitivi ad residuum.

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ, una cum logarithmo capacitatis vasis solius.
2. Logarithmus posterior e priori auferatur, &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus cui in Tabulis respondet numerus indicans quoties aër primitivus contineat residuum quæsitum.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580'', capacitas vasis 460'', erit aggregatum ex utraque 1040''. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aër primitivus ad residuum $6(3.0170333 - 2.6627578) = 2.1656530$, cui in Tabulis respondet numerus $146\frac{4}{10}$. Est igitur aër primitivus ad residuum ut $146\frac{4}{10}$ ad 1, hoc est, ut 1464 ad 10 seu ut 732 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitatis vasis = v , capacitas antliæ & vasis simul = a , numerus agitationum emboli = n , aër residuus = 1. Quoniam aër primitivus ad residuum, ut a^n ad v^n (§. 50); erit etiam primitivus ad residuum, ut $\frac{a^n}{v^n}$, ad 1 (§. 181 *Arithm.*); consequenter si residuus 1, Logarithmus primitivi est $n(la - lv)$ (§. 341, 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

52. Data capacitate vasis evacuan- di, & capacitate Antliæ; invenire nume- rum agitationum emboli ad aërem in data ratione dilatandum requisitum.

RESOLUTIO.

1. Excerptantur ex Canone logarith- morum logarithmi aëris primitivi, aëris residui, capacitatis vasis, & ag- gregari ex capacitate vasis & capa- citate Antliæ.
2. Logarithmus aëris residui subduca- tur ex logarithmo aëris primitivi: similiter logarithmus capacitatis va- sis auferatur ex logarithmo aggre- gati ex capacitate vasis & capacitate Antliæ.

3. Differentia prior dividatur per alte- ram. Dico, quotum esse numerum agitationum emboli quaesitum.

Ex. gr. Sit capacitas Antliæ 580'', capaci- tas vasis 460'', aër primitivus ad resi- duum ut 1464 ad 10: reperietur nu- merus agitationum emboli $(3.0656530 - 1.0000000) : (3.0170333 - 2.6627578) = 21656530 : 3542755 = 6$.

DEMONSTRATIO.

Sit aër primitivus p , residuus r , reli- qua sint ut in Demonstratione Proble- matis præcedentis: erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (\S. 50)$$

$$lp - lr = nla - nlv \quad (\S. 341, 343$$

Arithm.)

$$(lp - lr) : (la - lv) = n. \quad Q. e. d.$$

PROBLEMA IV.

53. Data ratione aëris primitivi ad residuum, una cum capacitate vasis & numero agitationum emboli; invenire capacitatem Antliæ.

RESOLUTIO.

Sit aër primitivus ad residuum = $p:r$, capacitas vasis = v , capacitas Antliæ = x , numerus agitationum emboli = n ; erit

$$p : r = (v + x)^n : v^n \quad (\S. 50)$$

$$lp - lr = nl(v + x) - nlv \quad (341, 343$$

Arithm.)

$$lv + (lp - lr) : n = l(v + x)$$

Inveniri adeo potest logarithmus aggre- gati ex capacitate vasis & Antliæ con- sequenter ipsum hoc aggregatum. Qua- re si hinc auferatur capacitas vasis, re- linquetur capacitas Antliæ.

Ex. gr. Sit $p:r = 1464:10$, $v = 460^{\circ}$,
 $n = 6$; erit $l(v+x) = 2.6627578 +$
 $(3.0656530 - 10000000):6 = 26627578 +$
 $3542755 = 30170333$. Ergo vi Canonis
 $v+x = 1040^{\circ}$, consequenter $x = 580^{\circ}$.

THEOREMA VI.

54. Numeri agitationum emboli quibus ope duarum Antliarum in eodem vase vel equalibus vasis aër ad eandem rationem cum aère primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmi vasis a logarithmo aggregatorum ex capacitate vasis & capacitate Antliarum.

DEMONSTRATIO.

Sit ratio aëris primitivi ad residuum $= p:r$, capacitas vasis $= v$, Antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aëris primitivi ad residuum, in evacuatione per utramque Antliam facta, eadem *per hypoth.* si numeri agitationum emboli fuerint m & n ; erit $(v+A)^m : v^m = p:r$ & $(v+a)^n : v^n = p:r$ (§. 50); consequenter $(v+A)^m : v^m = (v+a)^n : v^n$ (§. 167 *Aritlm.*). Habemus itaque $ml(v+A) = nbv = nl(v+a) = nbv$ (§. 341, 343 *Aritlm.*); consequenter $m:n = l(v+a) : l(v+A) = lv$, hoc est, numeri agitationum emboli, quibus aër in eodem vase ope diversarum Antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vasis & aggregati ex vase & Antlia. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vase quodam dato, ope Antliæ datæ, aër residuus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorsus educitur; inveniri potest numerus agitationum emboli, quibus ope alterius Antliæ datæ, in eodem vase, aër residuus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorsus educitur.

PROBLEMA V.

56. Invenire pondus unius pedis cubici aëri.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Vasis vitrei aut metallici BC satis capacis, figura sphaerica, collo oblongo AB & epistomio D præditi, pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aère ejusdem cum ambiente externo densitatis repletur. Quo facto
2. educatur aër (§. 40), &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore subductum relinquit pondus aëriseducti.
5. Investigetur capacitas vasis (§. 556 *Geom.*), & ratio aëris residui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aëris residui per Regulam trium innotescet, a capacitate vasis subducendum, ut relinquatur volumen aëriseducti. Quodsi Antlia accurate fuerit constructa, & tamdiu exerceatur quamdiu aër evacuatur; volumen aëris residui tantillum reperietur, ut tuto negligi, ipsaque capacitas vasis pro volumine aëriseducti assumi possit.

6. Datis

6. Datis adeo pondere atque volumine aëris educi, per Regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aëris (§. 130 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

57. *Methodo hac primum usus Otto DE GUERICKE (a) & post eum BURCHERUS DE VOLDER, qui sequentia annotavit (b). Pondus vasis sphaerici vitrei aëre admissio erat 7 libr. 1 unc. 2 dr. 48 gr. aëre educito, 7 libr. 1 unc. 1 dr. 31 gr. aqua admissa 16 libr. 12 unc. 7 dr. 14 gr. Erat igitur pondus aëris 1 dr. 12 gr. seu 77 gr. pondus aquae 9 libr. 11 unc. 5 dr. 43 gr. seu 74743 gr. consequenter ratio gravitatis specifica inter aquam & aërem $74743 : 77 = 970\frac{63}{77} : 1$. Jam cum VOLDERUS pedem cubicum aquae deprehendisset 64 librarum, inferendo ut 970 ad 1, ita 64 librae seu 1024 unc. ad numerum quartum proportionalem, per Regulam trium pondus unius pedis cubici aërei $506\frac{79}{97}$ seu 507 gr. fere, hoc est 1 unc. 0 dr. 27 gr. reperit. Testatur autem, se usum esse bilance quae, etiamsi vel 25 aut 30 librae utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtore, in hanc illamve partem manifeste propenderet.*

PROBLEMA VI.

58. Dato corporis cujuscunque volumine, una cum pondere ejusdem in aëre; invenire pondus ejusdem in vacuo.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aëris (§. 56).
2. Per Regulam trium, ex eodem & volumine corporis dati, investigetur pondus aëris mole huic aequalis (§. 130 *Mech.*).

(a) *Experiment. de Vacuo* lib. 3. c. 21. f. 101.

(b) In *Quaestionibus Academicis de aëris gravitate*. Theſ. 52. P. 35. & seqq.

3. Pondus hoc aëris subtrahatur a pondere corporis dato; quod relinquitur erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55 *Hydrost.*) *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Pondus unius pedis cubici aërei est 507 gr. (§. 57), pondus trium pedum cubicorum aquae 210 librarum (§. 64 *Hydrost.*) seu 209 libr. 15 unc. 7 drach. 60 gran. Pondus trium pedum cubicorum aëris reperitur 1521 gr. seu 3 unc. 1 dr. 21 gr. Pondus adeo trium pedum cubicorum aquae in vacuo 209 lib. 12 unc. 6 dr. 39 gr.

PROBLEMA VII.

59. Data basi columnae atmosphaericae; invenire pondus ejus.

RESOLUTIO.

1. Basis data multiplicetur per altitudinem columnae aquae ipsi aequiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnae (§. 539, 541 *Geom.*).
2. Quærat ad volumina unius pedis cubici, & columnae illius, atque pondus unius pedis cubici aquae, numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnae aquae atmosphaericae aequiponderantis (§. 130 *Mech.*), hoc est, pondus ipsius columnae atmosphaericae quaesitum.

Ex. gr. Sit diameter circuli 100^{''}, erit area 7850^{''} (§. 429 *Geom.*). Quia altitudo columnae aquae 3100^{''} (§. 27); erit volumen ejus 24335^{''}, consequenter, cum 1000^{''} sint 70 fere librarum (§. 64 *Hydrost.*) pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ seu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque cujus diameter unius pedis, ab aëre eadem vi premitur, ac si pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

60. Quodsi diameter sphaeræ fuerit unius pedis, basis columnæ atmosphaericæ incumbens est circulus cujus diameter unius pedis. Quare cum hemisphaerium inferius ab elatere aëris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemisphaeria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA VII.

61. *Diversa plana premuntur ab aëre in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Pressio enim eadem, quæ foret si aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana subjecta gravitaret (§. 28); consequenter pressiones diversorum planorum ab aëre factæ sunt in ratione planorum istorum (§. 573 *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

62. Quare si plana quæ ab aëre premuntur fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

63. Quoniam aër premit secundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), superficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quomodocunque composita, eadem premitur vi, qua premitur planum horizontale eidem subjectum; consequenter pressiones superficierum quarumcunque sunt ut plana horizontalia iisdem subjecta.

SCHOLIUM.

64. *In hypothesis Propositionis tacite supponitur situm planorum esse horizontalem: ex Demonstratione autem apparet Theoremam cum suis Corollariis ad omnem pressionem a fluido gravi factam extendi posse.*

CAPUT III.

De Compressione Aëris.

PROBLEMA VIII.

65. **A** *Erem intra vas comprimere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. 1. Epistomio IHG respectu vasis clauso, respectu Antliæ vero aperto, embolus ex Antlia Pneumatica extrahatur: quo facto, aër externus in cavitatem Antliæ ruet (§. 36).

2. Converso epistomio, ita ut communicato inter vas & cylindrum detur, superius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur; aër ex Antlia in vas expelletur, quod cum jam aëre alio sit plenum, novum intrusum recipere nequit, nisi facta utriusque compressione (§. 5). Excipiet vero hospitio suo adventantem hunc hospitem, cum comprimere possit (§. 17).

3. Repetita igitur hac operatione, aer continuo magis magisque comprimitur. Q. e. f.

THEOREMA VIII.

66. Aer primitivus est ad aerem in vase ope Antlia Pneumatica dato agitationum emboli numero compressum, ut capacitas vasis ad aggregatum ex capacitate vasis & facto capacitatis Antlia in numerum agitationum emboli.

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliae = a , capacitas vasis = v , numerus agitationum emboli = n . Erit aer primitivus in antlia ad aerem in vase, ut a , ad v (§. 17 Hydrost.). Incrementum igitur massae in vase, dato numero agitationum emboli n , est ut na ; consequenter aer compressus ut $na + v$. Unde compressus ad primitivum ut $na + v$ ad v . Q. e. d.

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate Antliae 580, & capacitate vasis 260, seu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aeris compressi ad primitivum, ut 6 ad 1 seu ut 7 ad 1.

PROBLEMA IX.

68. Data ratione aeris primitivi ad compressum, una cum ratione capacitatis Antliae ad capacitatem vasis; invenire numerum agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.

RESOLUTIO.

Sit ratio aeris primitivi ad compressum = $p : c$, ratio Antliae ad vas = $a : v$,

numerus agitationum emboli = x , erit (§. 66)

$$p : c = v : ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv) : pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis, dividatur per factum ex aere primitivo in capacitatem Antliae; quotus est numerus agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum. Sit ex. gr. $p = 1, c = 7, v = 1, a = 2$; erit $x = 6 : 2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodsi fiat $p = v$, erit $x = (c - p)v : av = (c - p) : a$, hoc est numerus agitationum emboli invenitur, si differentia aeris primitivi a compresso per capacitatem Antliae dividatur. Ita in nostro Exemplo $x = (7 - 1) : 2 = 3$.

PROBLEMA X.

70. Data capacitate vasis in quo aer comprimendus, una cum ratione quam aer primitivus ad compressum habere debet, & numero agitationum emboli quibus ista compressio effici jubetur; invenire capacitatem Antliae.

RESOLUTIO.

Sit capacitas vasis = v , aer primitivus = p , compressus = c , numerus agitationum emboli = n , capacitas Antliae = x , erit (§. 66)

$$p : c = v : nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv) : pn = x$$

Quodsi fiat $p = v$; erit $x = (c - p) : n$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis, di-

vidatur per factum ex aëre primitivo in numerum agitationum emboli compressio- nem efficientium ; quorus erit capacitas Antliæ quaëra. Quodsi aër primitivus fue- rit ut capacitas vasis, ejus a compresso dif- ferentia tantum dividenda est per nume- rum agitationum emboli.

Sit ex. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6. 290 : 3 = 2. 290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Est ergo $pn : c - p = v : x$, hoc est, capacitas vasis ad capacitatem Antliæ, est in ratione composita aëris primitivi ad ejus a compresso differentiam, & numeri agitationum emboli quibus ista compres- sio efficitur, ad unitatem (§. 159 *Arithm.*)

PROBLEMA XI.

72. *Invenire utrum aër comprima- tur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.

- Tab. I.
Fig. 4
1. Assumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC sit 12 cir- citer digitorum, majus AB 8 circi- ter pedum minori parallelum.
 2. Brachium minus EC hermetice si- gilletur in C, majus in A sit aper- tum: utrumque in particulas æqua- les dividatur.
 3. Pars tubi BE mercurio repleatur, ita ut CE sit aëre primitivo plenus.
 4. Hinc ulterius per orificium A suc- cessive plus mercurii infundatur; no- tenturque altitudines, ad quas in utroque brachio mercurius successi- ve infusus pertingit.

Dico, si successive fuerint spatia in bra- chio minore super mercurio, reciproce ut differentiæ altitudinum ad quas in brachio majore mercurius successive

subsistit 28 digitis auctarum, & alti- tudinum ad quas in minore mercuri- us ascendit; aërem comprimi in ra- tione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aër in brachio mi- nore CE a pondere atmospherico com- primitur (§. 21), quod æquatur cylin- dro mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium basium sint ut altitudines (§. 573 *Geom.*); tum volumina aëris reducti sunt ut altitu- dines spatiorum a mercurio vacuo- rum in brachio minore EC, tum vo- lumina mercurii in brachio majore sunt ut altitudines ad quas mercurius ascen- dit. In aërem vero minori brachio in- clusum, præter pondus atmosphericum, volumina mercurii gravitant, quorum altitudo est differentia inter altitudines ad quas in brachio minore & altitudi- nes ad quas in majore successive per- tingit (§. 34 *Hydrost.*). Quare pondera aërem inclusum comprimentia sunt ut differentiæ altitudinum ad quas suc- cessive in brachio minore mercurius ascendit ab altitudinibus ad quas in majore successive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18 *Hydrost.*). Quodsi adeo volumina aëris successive compressi in eadem ratione reciproca deprehendan- tur, aër omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

73. MARIOTTUS (a) notavit mercurium in brachio majore AB 8 pedum, ad alti- tudini-

(a) *Essai de la Nature de l'Air* p. 17. & seqq. f. *Opus in Batavia recursorum* Tom. 1. p. 153.

titudinem 18 digitorum ascendentem, in minore 12 digitorum, ad 4 digitorum altitudinem substituisse. Aëris itaque volumen cum a solo pondere atmosphærico premeretur, erat 12 digitorum; ast cum aër premeretur a pondere atmosphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc est, a pondere mercuriali 41 digitorum, erat volumen compressi 8 digitorum. Est vero 8 ad 12, ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, si in brachio minori mercurius ad altitudinem 6 digitorum assurgat, altitudinem in majore esse 34. Volumen ergo aëris compressi est 6 digitorum, hoc est, subduplum ejus, quod habebat aër a solo pondere atmosphærico pressus. Ast pondus premens est $28 \div 28$, hoc est, duplum ponderis atmosphærici. Porro advertit, si altitudo mercurii in brachio minore sit 9 digitorum, altitudinem in majore esse 93. Est itaque volumen aëris compressi 3 digitorum, hoc est, subquadruplum ejus, quod habeat a solo pondere atmosphærico compressus. Sed pondus premens tum est $84 \div 28$, hoc est, quadruplum ponderis atmosphærici. Evidens ergo per experimentum MARIOTTI, volumina aëris compressi esse reciproce ut pondera comprimentia.

SCHOLIION I.

Tab. I. Fig. 4. 74. Idem experimentum succedit, si diameter brachii minoris CE multo major fuerit diametro majoris AB (§. 34 Hydrost.): curandum tamen, ut amplitudo illius sit uniformis, cum in demonstratione supponamus partes quantaslibet tubi CE esse cylindros aequalium basium.

SCHOLIION II.

75. Probe autem notandum est, præter pondera comprimentia, in voluminibus aëris quæ inter se comparantur, cætera omnia paria esse debere; cavendumque, ne eandem compressionis legem ad diversa aëris volumina applicemus, in quibus, præter pondera comprimen-

tia, aliorum quoque aërem alterantium datur disparitas: quoniam hoc in casu fieri potest, ut elateris, in duobus voluminibus aequalibus atque ejusdem densitatis, vires sint inæquales, adeoque & pondera compressionem aëris in utroque efficientia sint inæqualia (§. 553 Mechan.), consequenter & duo volumina aëris aequalia ab iisdem ponderibus inæqualiter comprimantur. Ex.gr. Ponamus duo volumina aërea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens est, quod paria pondera sustentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rarefiet igitur (§. 23), adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aër ad pristinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aëris inter se aequalia, cumque ab initio eandem densitatem habuerint, per hypoth. ejusdem densitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia sustinent.

SCHOLIION III.

76. Vana vero est objectio; quod, admittæ hac compressionis lege, sequatur aërem eo usque comprimi posse, ut spatium occupet infinite parvum, ejus respectu quod ante compressionem obtinuerat, pondere scilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad summum compressionis gradum pertingit, ponderi quocumque prementi resistit; consequenter vi resistendæ infinite æquipollet. Nec ideo vis elastica aëris in statu summa compressionis viribus infinite variis æquatur (§. 553 Mechan.); sed minima earum a quibus maxima compressio proficisci valet. Est enim vis minor pars majoris (§. 20 Arithm.). Quamobrem si vis elastica aëris in statu summa compressionis, & vi minori, & majori æqualis esset; pars toti æqualis foret: id quod absurdum (§. 84 Arithm.). Cum adeo vis elastica in statu summa compressionis infinita non sit, explicandum est quomodo vi resistendæ infinite æquipolleat. Scilicet si majus pondus aëri incumbere supponamus, quam ad-

sum-

summam compressionem efficiendam sufficit; accessus ponderis non amplius ad comprimendum aërem, sed ad compressum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellantur corpora aërem compressum ambientia, vi resistendi prædita esse debent, quæ toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim qua premit ad aërem compressum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impediuntia & vi elastica aëris impressi & vi eidem impressa urgentur, quæ simul sumpta vim ponderis prementis adæquant.

SCHOLIUM IV.

77. Idem experimentum cum successu repetierunt Robertus BOYLE (a) & AMONTONS (b), hicque in voluminibus aëris majoribus.

THEOREMA IX.

78. Elater aëris compressi est ad elaterem dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi.

DEMONSTRATIO.

Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut pondus isti incumbens ad pondus huic impositum (§. 553 *Mechan.*). Enimvero in ratione horum ponderum est quoque reciproce volumen aëris minus compressi ad volumen aëris magis compressi (§. 73). Ergo & elater magis compressi est ad elaterem minus compressi seu dilatati, uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi (§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

(a) In *Defensione doctrina de elatere & gravitate aëris contra LINUM* part. 2. c. 5. p. m. 42. & seqq.

(b) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, A. 1705. p. m. 155. & seqq.

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aëris magis compressi fortior est, quam elater minus compressi.

THEOREMA X.

80. Elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ceteris paribus, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine contenti.

DEMONSTRATIO.

Si aër comprimitur in spatium subduplum, subtripulum, subquadruplum &c. erit aëris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in spatio simplici. Ast in spatium subduplum a duplo; in subtripulum a triplo; in subquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 73). Ergo, in æqualibus voluminibus, massæ aëris diversimode compressi in ratione ponderum comprimentium existunt; consequenter cum in eadem ratione sit elater aëris magis & minus compressi (§. 553 *Mech.*); elater aëris magis compressi ad elaterem minus compressi, est ut massa illius ad massam hujus sub æquali volumine (§. 167 *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA XII.

81. Data ratione voluminis quod replet aëra solo pondere atmospherico pressus ad spatium in quod redigitur ulterius compressus; determinare vim elasticam compressi.

RESOLUTIO.

Cum elater aëris a solo pondere atmospherico pressus æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aëris basin, sed altitudinem 28 digito-

digitorum habentis (§. 29); si ad volumen compressi, volumen nondum compressi, & pondus istius columnæ mercurialis quærat numerus quartus proportionalis, designabit is quantitatem vis elasticæ in aëre compresso (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodsi pondus columnæ mercurialis istius a quantitate vis elasticæ inventa subducatur; relinquitur vis elateris qua resistentiam ponderis atmosphærici superat.

PROBLEMA XIII.

83. Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus, aut in certo compressionis gradu; invenire effectum quem producturus est in alio quocunque compressionis gradu.

RESOLUTIO.

Cum effectus sint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mechan.*) vires vero productrices, in nostro casu, sint reciproce ut volumina in diversis compressionis gradibus (§. 78); si effectus quem elater aëris in certo compressionis gradu producit detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur, inferendo, Ut volumen aëris magis compressi ad volumen minus compressi, ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLIUM.

84. *Idem Problema quoque solvitur per analogiam Theor. 10 (§. 80).*

PROBLEMA XIV.

85. Dato effectu quem producit aër a solo pondere atmosphærico pressus; determinare alium compressionis gradum; in quo idem producat intra atmosphæram effectum quemcunque majorem datum.

RESOLUTIO.

Sit effectus minor = a , major = b ; volumen aëris minus compressi = c , volumen magis compressi = x . Cum alter effectus intra Atmosphæram resistentem sit producendus, & integer tamen desideretur; quærenda erit compressio quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu desiderato & effectu quem aër a solo pondere atmosphærico pressus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aëre compresso producendus = $a + b$, consequenter $a + b : a = c : x$, hoc est, ut aggregatum ex effectu aëris a solo pondere atmosphærico pressi & effectu ab aëre in quæsito compressionis gradu intra Atmosphæram producendo ad effectum aëris a solo pondere atmosphærico pressi, ita volumen aëris a solo pondere atmosphærico pressi ad volumen aëris in quæsito compressionis gradu (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur.

SCHOLIUM.

86. *Eodem modo Problema resolvitur ope Theorematis 10 (§. 80).*

CAPUT IV.

De Æquilibrio Aëris cum aliis Fluidis Specificè
gravioribus.

DEFINITIO IX.

Tab. I. 87. **P**ER Tubum Torricellianum intelligo tubum vitreum AB, mercurio repletum, cujus osculum superius A hermetice sigillatum, inferius B stagnanti in vasculo CD mercurio immersum.

SCHOLIUM.

88. Vocatur istiusmodi tubus Torricellianus ab inventore TORRICELLIO (§. 29).

DEFINITIO X.

89. Barometrum est instrumentum, quo gravitatem aëris metiri licet. Baroscopium vero est instrumentum, quod variationes gravitatis aëris confuse indicat.

SCHOLIUM.

90. Vulgo pro synonymis habent has voces: sed mihi necesse esse videtur eas distinguere; cum aliud utique sit saltem cognoscere aërem hoc tempore esse graviolem, quam altero; aliud vero scire, quoties gravitas Atmosphæra hac die superet gravitatem illius anteriorem: posterius vero constare debet, si gravitatem aëris metiaris (§. 21 Geom.).

THEOREMA XI.

91. In tubo Torricelliano major columna mercurii suspenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.

DEMONSTRATIO.

Columna mercurii suspensa æquatur columnæ aëreæ, cujus eadem cum ista basis, sed altitudo a superficie mercurii in vasculo stagnantis usque ad extremitatem Atmosphære exporrigitur (§. 36 Hydrost.). In locis vero altioribus columnæ aëreæ altitudo minor, quam in profundioribus; adeoque & ipsa columna in his gravior, quam in istis: consequenter minor columna mercurii columnæ aëreæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. Q. e. d.

SCHOLIUM.

92. Veritatem hujus Theorematis Experimentia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit PASCALIUS, qui Phenomena tubi Torricelliani maxima cum solertia scrutatus est in Tractatu De Æquilibrio liquorum.

THEOREMA XII.

93. Si in tubo Torricelliano aëris quadam quantitas super mercurio, & in genere in vase quocunque; cujus orificium apertum fluido immersum, super fluido relinquatur: mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem suspenditur quam si vacuum fuerit, & pondus fluidi suspensi æquatur differentia elateris aëris inclusi a pondere atmospherico.

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aëris inclusi elater solus ponderi atmosphærico æquetur (§. 33), mercurius vi gravitatis propriæ descendere incipit. Ast dum descendit, aër inclusus dilatatur (§. 36), adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmosphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur mercurii, aut fluidi cujuscunque alterius, in tubo vel vase remanere debet, quantum differentiæ elateris aëris inclusi a pondere atmosphærico æquilibratur: consequenter mercurius ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus ab aëre vacuus extitisset. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

94. Aër igitur in tubo *Torricelliano* inclusus rarior ambiente externo, & ejus elater æquatur differentiæ ponderis mercurii suspensi a pondere atmosphærico (§. 36 *Hydrost.*).

COROLLARIUM II.

95. Hinc liquet, si vas exiguo orificio instructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorsus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium sit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vase quocunque alio quantumvis amplo, si orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA XVI.

96. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aëre prorsus vacuo ad altitudinem qua gaudet si tubi aliqua pars aere repleatur, una cum volumine aëris dilatati; invenire volumen aëris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo suspensi (§. 33), adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere Atmosphærico (§. 94), pondera vero fluidi sint ut volumina (§. 130 *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573 *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priori, ita volumen aëris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod adeo per Regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

Ex. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aëris dilatati 25, erit volumen primitivi $(28 - 14) 25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$. Quæ prorsus consona sunt experimento *MARIOTTI* (a).

PROBLEMA XVII.

97. *Data altitudine fluidi in tubo vacuo, & ratione voluminis aëris primitivi ad volumen dilatati; invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo = *a*, altitudo in non vacuo = *x*, volumen aëris primitivi = *b*, dilatati = *c*, erit (§. 96).

$$a : a - x = c : b$$

$$x : a = c - b : c \text{ (§. 193 Arith.)}$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aëris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati, & altitudinem in tubo vacuo.

P p 2

Sit

(a) *Essai de la nature de l'air*, p. 23. & seqq.

Sit ex. gr. $a = 28$, $b = 12\frac{1}{2}$, $c = 25$;
erit $x = (25 - 12\frac{1}{2}) : 28 : 35 = 350 : 25$
 ≈ 14 .

PROBLEMA XVIII.

98. Datis altitudine fluidi in tubo vacuo, & volumine aëris primitivi; invenire volumen dilatati, & altitudinem fluidi in tubo non vacuo data altitudinis.

DEFINITIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis $= a$, altitudo voluminis aëris primitivi $= b$, dilatati $= x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $= a - x$, consequenter

$$m : m - a + x = x : b \quad (\S. 96).$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc est, si fiat $a - m = d$

$$bm = x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4}d^2 \qquad \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula. 1. Quadrato semidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis, addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aëris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic addatur semidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitudo voluminis aëris dilatati. Ex. gr. sit $a = 29$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}dd = 1\frac{1}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = 1\frac{1}{4} + 350 = 351\frac{1}{4}$, consequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + bm)} = 19\frac{1}{2}$; unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA XIX.

99. Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis, & altitudine fluidi in tubo non vacuo; invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$; erit altitudo dilatati $= a - n$; consequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x , quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore, & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi, numerum quartum proportionalem.

Sit ex. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$; erit $x = (39 - 14) : (28 - 14) : 28 = 25$.
 $14 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA XX.

100. Determinare quantitatem liquoris effluentis, si vas exigui orifici non plenum invertatur.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 Hydrost.).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vase, atque altitudo totius vasis per hypoth. reperietur volumen aëris dilatati (§. 98). Unde si
3. subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, si vas invertatur (§. 95).

THEO-

THEOREMA XIII.

101. Si vasis ab aëre prorsus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris Atmosphære æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demersumque aperiat; liquor ascendens totum replebit: ast si non prorsus evacuatum fuerit; minus spatium liquor ascendens occupabit quam aëris primitivieducti quantitas repleverat.

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vasis demersum a pondere Atmosphære prematur (§. 21), sub orificio autem vasis aperto nulla sit aëris pressura, quia ab aëre prorsus vacuum supponitur; tantum liquoris intra vas ascendere debet, quantum sufficit ad pressuram ei æqualem efficiendam quæ a pondere Atmosphærico efficitur (§. 75 *Mechan.*). Sed vasis altitudo liquoris Atmosphære æquiponderantis altitudinem non excedit *per hypoth.* Ergo pressura æqualis pressuræ ponderis atmosphærici a liquore intra vas contento effici nequit, nisi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quodsi quædam aëris portio residua fuerit, ea super liquore ingrediente constituta rarior sit necesse est quam aër primitivus (§. 94). Majus ergo spatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10 *Hydrost.*). Quoniam adeo nonnisi spatium reliquum a liquore occupatur, evidens est liquorem ascendentem minus spatium vasis replere quam aëris primitivi

educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLIUM.

102. SCHOTTUS autor est (a), cum Heribipoli Experimentum sæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuisse, ut etiam minore vase adhibito omnem excluderent aërem. Equidem cum aqua in vas irrumpens spumescat, ipse id indicium irruentis aëris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expansione aëris intra aquam latentis idem Phenomenon deducunt, atque hinc aëris super liquore constituti originem derivant. Enimvero quemadmodum fore negari nequit, quod hac ratione aër in vase residuus aliquod capiat incrementum; ita rationi consentaneum videtur non omnem aërem ope Antliæ ex vasis educi, quia aër ad summum expansionis gradum perductus non amplius evacuat, moleculis paucis dispersis ætheri subtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum massulæ metallicæ in fluidis specificè levioribus natare solent; ut taceam massulas aereas, quæ ab eminentiolis in superficie vitri, non secus ac aliorum fluidorum guttulæ, fulciuntur. Sæpius tamen diverso tempore diversis quoque vasis repetito experimento didici, perexiguam esse aëris quod super liquore constitutum deprehenditur, vase summa cum diligentia evacuato.

PROBLEMA XXI.

103. Data altitudine vasis evacuati, & altitudine liquoris in ipsum ingressi; invenire volumen aëris primitivieducti.

RESOLUTIO.

I. Inveniatur altitudo ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36 *Hydrost.*).

P p 3

2. Quo-

(a) In *Techn. Curiosa*. lib. 1. c. 3. p. 24.

2. Quoniam porro datur altitudo vasis evacuati & altitudo liquoris ipsum ingressi, invenietur volumen aëris primitivi (§. 99).

COROLLARIUM.

104. Quodsi quantitas aëriseducti quatur per Probl. præf. eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur; certum id erit indicium, nihil aëris ex aqua irruente in summitatem vasis ascendisse.

SCHOLIUM.

105. Dubito tamen, num hæ subtilitates in praxi satis discerni queant.

PROBLEMA XXII.

Tab. I. 106. Si vas quoddam ABCD, aperto Fig. 6. orificio CD, sub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur; quo profundius mergitur, eo magis aër in eodem comprimitur.

DEMONSTRATIO.

Cum enim aër aqua aliisque fluidis levior existat (§. 57), si vas ABCD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua descendere deberet, quod fieri nequit (§. 99 *Hydrost.*). Jam elater aëris inclusi aquam subjectam eadem vi premit, qua pondus Atmosphæricum (§. 33); aqua vero in eadem libella circa orificium vasis, præter pondus atmosphæricum, etiam aqua super ea in vase stagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vasis CD, quam sub eodem: consequenter cum aër intra vas adhuc compressibilis existat (§. 17) &

in ratione ponderum compressionem Tab. I. patiatur (§. 73); aliqua liquoris Fig. 6. quantitas intra vas ascendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

107. Veritatem Theorematis Experimenti confirmat. Imprimis huc pertinent Phænomena Campana urinatoria a STURMIO (a) enarrata & experimento illustrata.

THEOREMA XIV.

108. Iisdem positis qua in Propositione precedente, elater aëris in vase ABCD compressi, una cum pondere liquoris in ipsum ingressi, aequatur aggregato ex pondere Atmosphæra & pondere columnæ ejusdem fluidi qua eandem cum fluido ultra libellam orificii CD in vase FG stagnante altitudinem habet.

DEMONSTRATIO.

Aër in vase ABCD adhuc compressibilis existit (§. 17); tamdiu itaque vi prementi cedit, donec eadem in fluidum sub orificio CD pressura efficiatur quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmosphærico & columnæ fluidi eandem cum vase basin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vasis CD in vase FG stagnante altitudinem habente (§. 75 *Mechan.*). Sed pressura in aquam sub orificio CD fit ab elatere aëris in vase ABCD compressi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aëris in vase ABCD compressi, una cum pondere fluidi intrantis, aequatur &c. *Q. e. d.*

(a) Colleg. Curios. part. 1. Tent. 1. & seqq.

PROBLEMA XXIII.

Tab. I. 109. *Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vasis CD consistentis, una cum volumine ejus, & volumine aëris primitivi cavitatem vasis ABCD implentis; invenire volumen aëris compressi & fluidi in vas intrantis.*

RESOLUTIO.

Sit gravitas fluidi = g , ejus volumen = c , pondus atmosphæricum = a , volumen aëris primitivi = b , volumen fluidi in vas ascendens = x , erit volumen compressi = $b - x$. Jam cum elater aëris primitivi æquetur ponderi atmosphærico (§. 33), reperietur elater aëris compressi = $ab : (b - x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas ascendens = $gx : c$. Habemus ergo

$$ab : (b - x) + gx : c = g + a \quad (\text{§. 108}).$$

$$abc + bgx - gx^2 = bgc + abc - gcx - acx$$

$$x^2 - bx - cx - acx : g = -bc$$

hoc est; si fiat $b + c + ac : g = d$.

$$x^2 - dx = -bc$$

$$\frac{1}{4}dd \quad \frac{1}{4}dd$$

$$x^2 - dx + \frac{1}{4}dd = \frac{1}{4}dd - bc$$

$$\frac{1}{2}d - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}$$

$$x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aëris primitivi & volumine fluidi super libellam orificii vasis stagnantis, addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmosphæricum, & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ

femisummæ quadrato subtrahatur factum Tab. I. ex volumine aëris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vasis stagnantis. 3. Ex residuo extrahatur radix quadrata, quæ si 4. a femisumma supra inventa subtrahatur relinquetur volumen fluidi in vas ascendens.

COROLLARIUM I.

110. Cum pondus liquoris vas intrantis sit $gx : c$, idem substituto valore ipsius x , reperitur = $\left(\frac{1}{2}d - \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}\right) g : c$.

COROLLARIUM II.

111. Et quia elater aëris in vase compressi est $ab : (b - x)$, idem substituto valore ipsius x , reperitur = $ab : \left(b - \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - bc\right)}\right)$.

PROBLEMA XXIV.

112. *Data profunditate vasis, seu altitudine aëris primitivi in ejus cavitare contenti; invenire profunditatem ad quam intra fluidum data gravitatis orificium CD deprimentum, ut volumen aëris compressi habeat ad volumen aëris primitivi rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aëris primitivi = b , pondus atmosphæricum = a , gravitas fluidi = g , ejus altitudo super libella orificii = x , altitudo aëris compressi = c , erit altitudo liquoris vas intrantis = $b - c$. Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi Atmosphærico (§. 33); reperietur elater compressi = $ab : c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 130 *Mech.*), erit gravitas fluidi in vas ascendens = $(bg - gc) : x$. Ergo

ab :

Tab. I.
Fig. 6.

$$\frac{ab:c + (bg - gc):x = a + g}{\frac{abx + bgc - gc^2 = acx + gcx}{\frac{bgc - gc^2 = acx + gcx - abx}}}$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmospherico in altitudinem aëris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmospherici & gravitatis fluidi in altitudinem aëris compressi ad gravitatem fluidi; ita differentia quadrati altitudinis aëris compressi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificij CD vasis sub fluido demersi.

SCHOLIUM.

113. *Hactenus supposuimus aërem, dum comprimitur, cum ambiente externo cetera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aëre ambiente, aër in vase condensatur (S. 24). Dispiciendum itaque, quamquam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA XXV.

114. *Datis capacitate vasis, hoc est, volumine aëris primitivi, volumine fluidi demersum ingressi, & volumine fluidi supra orificij vasis libellam stagnantis, una cum pondere atmospherico; invenire rationem voluminis aëris compressi tantum ad volumen compressi & condensati simul.*

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri potest volumen aëris compressi (S. 105), & si volumen fluidi vas ingressi a volumine aëris primitivi subducitur, manifestum est relinqui volumen aëris compressi & condensati simul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compressi tantum, quam volumen aeris & compressi & condensati, illius ad hoc ratio latere nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

115. *Quodsi volumen aëris compressi & condensati subtrahatur ex volumine aëris compressi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condensationem metitur.*

COROLLARIUM II.

116. *Quodsi contingat hanc differentiam esse nullam; vel aër ambiens non erit calidior aqua, vel aër compressus ab isto frigoris gradu nullam patiatur necesse est condensationem.*

COROLLARIUM III.

117. *Quodsi differentia aliqua prodeat; evidens est aërem compressum adhuc condensatum, & spatium a compresso in condensatione derelictum a fluido ascendente repletum fuisse. Elater igitur aëris compressi facta condensatione decrevit, & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in spatio derelicto contenti (S. 93).*

SCHOLIUM I.

118. *Supposuimus in hactenus demonstratis Propositionibus vasa esse cylindrica vel prismatica: alias enim prolixiore subinde opus fuisset calculo.*

SCHOLIUM II.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in Problemate presente de aëre condensato demonstrata sunt ad rarefactum quoque transferri posse, si vas in fluido calidiore quam aër ambiens demergatur.*

THEOREMA XV.

120. *Si pondus Atmosphærae minuitur; mercurius in Tubo Torricelliano descendere; si illud augetur; hic ascendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna mercurialis intra Tubum Torricellianum suspensa æquatur pon-

ponderi atmosphærico (§. 29). Quare si pondus Atmosphære minuitur, mercurius fortius deorsum nititur quam pondus Atmosphære resistit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentie ponderis columnæ mercurialis & ponderis atmosphærici æquatur (§. 75 *Mechan.*). Quare si volumen mercurii minuitur, in tubo utique descendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonstratur, pondere atmosphærico aucto, mercurium in Tubo Torricelliano ascendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121. Cum altitudo mercurii in Tubo Torricelliano quotidie variet, experientia teste; æris quoque gravitas quotidie varietur opus est.

SCHOLIUM I.

122. Mathematici Parisienses maximam mercurii altitudinem $28^{\circ} 4''$, minimam $26^{\circ} 4''$ observaverunt, ut adeo omnis variatio intra $2''$ seu $24''$ pedis Parisini comprehendatur. A. 1711. d. 23. Dec. apud nos, flante Coro & celo núbilo, altitudo maxima fuit $30^{\circ} \frac{2}{8}$ pedis Londinensis, d. 21. Octobr. h. 7. mat. minima vix excessit 28 digitos pedis Londinensis, flante Zephyro & tempestate pluviâli, cum nocte præcedente procella sæviisset. Nec memini, me intra quinquennium ex quo tales observationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem mercurii deprehendisse. Tota igitur variationis scala non excedit $2^{\circ} \frac{2}{8}$ digitos pedis Londinensis, qui cum deficiat à Parisino $\frac{2}{144}$ (§. 26 Ge. m.); observationes nostræ cum Parisiis satis conspirant.

SCHOLIUM II.

123. Equidem Celeberrimus HALLEIUS (a)

(a) *Philos. Transact.* n. 197. p. 650.

cum globum vitreum, collo tenui instructum & mercurio plenum, aqua ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus $\frac{7}{4}$ sui crescere observavit, atque adeo hinc constat, mercurium rareferi, iterumque condensari (§. 6. 8). Quoniam tamen incrementa & decrementa mercurii calori atque frigori proportionalia non sunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, immo maxima plerumque hieme observantur (§. 122); variationes ejus a calore ac frigore minime pendent.

THEOREMA XVI.

124. Si tubus recurvus ABC, in A Tab. L hermetice sigillatus, in C vero apertus, Fig. 7. ut Torricellianus, mercurio repletur; erit variatio altitudinis mercurii in crure longiore AB, ob variatum pondus Atmosphæra, subdupla variationis altitudinis mercurii in Tubo Torricelliano ex eadem causa contingentis.

DEMONSTRATIO.

Altitudo enim mercurii in brachio majore Atmosphære æquiponderantis semper computanda est a superficie mercurii in crure minore BC stagnantis (§. 34, 36 *Hydrost.*). Ponamus jam mercurium in crure minore CB consistere ad E, in majore AB ad D, sitque $HD = 26''$. Aucta Atmosphære gravitate, mercurius ascendat ex D in F (§. 120): tum ex E descendet in G, critque, suppositis tuborum CB & BA diametris æqualibus, $EG = DF$. Ponamus esse $EG = 1''$, erit $IF = 28''$. Quare si in Tubo Torricelliano mercurius ascendit per $2''$, in tubo recurvo nonnisi ex D in F, hoc est per $1''$, ascendit. Est ergo variatio altitudinis mercurii, ob mutatum pondus atmosphæ-

ricum, in istiusmodi tubo recurvo contingens, subdupla variationis altitudinis mercurii ex eadem causa in Tubo *Torricelliano* contingentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

125. Quia vasculum, cui Tubus *Torricellianus* immittitur, cruri breviori respondet; evidens est, illud tam amplum esse debere, ut mercurius ex tubo per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non sensibilibiter augeat, ex gr. non nisi dimidia lineola. Ita enim mercurius in tubo per unam lineam ascensus propter hoc impedimentum non nisi per lineam parte sui quadragesima octava multatam ($1'' - \frac{1}{48}$) ascendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

COROLLARIUM II.

126. Cum scala integra, per quam mercurius in Tubo *Torricelliano*, vasculo satis amplo, ascendere ac descendere solet, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non nisi 12 linearum seu digiti unius.

PROBLEMA XXVI.

127. *Data integra scala, per quam ascendit & descendit mercurius in Tubo Torricelliano, una cum diametro tubi; invenire diametrum vasculi; in quo si tubus contineatur, mercurius ex eo delapsus non impediatur quominus mutationes satis notabiles existant.*

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur quominus mercurius ex tubo delapsus mercurii in vasculo stagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini mercurii in vasculo, ex demonstratione Theorematis 16 (§. 124). Id autem obtinetur, si

ea sit vasculi amplitudo, ut mercurius per integram scalam delapsus altitudinem in vasculo stagnantis non nisi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque scala mercurialis in Tubo *Torricelliano* = a , diameter tubi = b , erit, supposita ratione diametri ad peripheriam = $d:p$, cylindrus mercurialis intra scalam continendus = $pb^2 a : 4d$ (§. 541 *Geom.*). Sit porro diameter vasculi = x , cum altitudo cylindri in quem in id delapsus mercurius abire debet, sit dimidiæ lineolæ = m ; erit soliditas ejusdem = $mpx^2 : 4d$ (§. cit.), consequenter

$$mpx^2 : 4d = pb^2 a : 4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2 : b^2 = a : m \text{ seu } x : b = \sqrt{a} : \sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi, in ratione subduplicata scalæ mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapsi in vasculo, hoc est ut $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 125), seu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc est; diameter vasculi est media proportionalis inter altitudinem scalæ & diametrum tubi, si mercurius ex integra scala delapsus in vasculo ascendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA XXVII.

129. *Datis diametris tubi & vasculi, una cum altitudine intervalli per quod mercurius in tubo descendit; invenire altitudinem intervalli per quod ascendit in vasculo; & contra.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi = a , diameter vasculi = b , altitudo descensus = c , altitudinis mercurii in vasculo incrementum = x , erit (§. 127)

$$a^2pc : 4d = b^2px : 4d$$

$$a^2c = b^2x$$

Theorema. Incrementum altitudinis mercurii in vasculo est ad intervallum descensus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi.

COROLLARIUM.

130. Ergo si mercurius descendit per quodcumque intervallum c , erit verum descensus intervallum = $c \mp a^2 c : b^2$.

PROBLEMA XXVIII.

131. *Baroscopium construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. II. Fig. 8. 1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice sigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, mercurio ita repleatur ut nihil aëris super eo relinquantur, nec ulli vesiculæ inter parietes vitri & mercurium locus concedatur: id quod optime succedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari instructi.
2. Orificium tubi ita repleti ut mercurius ex eo redundet, digito fortissime appresso, ne intra eum & mercurium aëris quidpiam remaneat, mercurio in vasculo ligneo, cujus diameter per Probl. 26 (§. 127) determinanda, ita immergatur ut fundum non attingat.

3. Intervallo a superficie mercurii in Tab. II. vasculo stagnantis 26 digitorum Fig. 8. Rhenanorum, affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos divisæ, qui rursus in 12 lineas aut particulas quocumque æquales alias subdividendi.
4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciso indatur, & superius alio tegatur, ut ex conspectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam Tubus hic idem est cum *Toricelliano* (§. 87); Baroscopium utique erit hac ratione constructum (§. 89, 120).

SCHOLIUM I.

132. Non opus esse ut vasculum ligneum, in quo mercurius stagnat, sit apertum, & evidenti experimento (a) docui, & propria experientia didici. Memm enim Baroscopium non modo vasculum habet undique probe clausum; sed præterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aëris externi ad superficiem vasculi admittenti. Hoc tamen non obstante, mutationes in altitudine mercurii consuetæ ratione contingunt.

SCHOLIUM.

133. Non desuere, qui in eo operam suam collocarunt, ut mutationes sensibiliores efficerent. CARTESIUS primum, postea quoque Tab. I. HUGENIUS commendarunt tubum AB vase Fig. 9. cylindrico CD instructum, & dimidium vasis una cum quadam tubi superioris parte aqua, reliquam vasis partem ac tubum inferiorem mercurio replevi jusserunt. Advertit vero HUGENIUS votis non respondere eventum. Etenim aër in aqua contentus vinculis suis

Qq 2

(a) In *Actis Brundisensibus* A. 1710. p. 596

suis sese liberabat & partem tubi superioris vacuum replebat: quo facto, cum aer inclusus rareferet & condensaretur (§. 23, 24), depressiones & elevationes mercurii a gravitatis Atmosphære variationibus producta non amplius discerni poterant. Cum adeo didicisset consultius esse ut mercurius locum vacuo proximum occupet, aliam Baroscopii compositi constructionem excogitavit, quam Problemate sequente explicamus.

PROBLEMA XXIX.

134. *Baroscopium compositum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. 1. *Fiat tubus recurvus ADG, in A hermetice sigillatus, in G vero apertus, & duobus vasis cylindricis BC & EF instructus.*

2. *Vasa BC & EF sint inter se æqualia & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum distent, quanta scilicet est mercurii in media aëris gravitate altitudo in Baroscopio simplici.*

3. *Baroscopio huic infundatur primum mercurius, dum Baroscopium simplex mediam aëris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC assurgat, reliquo spatio ad A usque vacuo non solum a mercurio, sed ipso etiam aëre crassiore.*

4. *Postea quoque infundatur aqua communis cum parte sexta aquæ regię permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis constituatur. Ita Baroscopium compositum constructum.*

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim, ultra libellam mer- Tab. I. curii in vasculo EF contenti per tu- Fig. 19. bum AD assurgens, ponderi atmosphærico & liquoris æquilibratur (§. 34. *Hydrostat.*). Aucto igitur Atmosphære pondere, augeri debet columna illa mercurialis: consequenter liquor descendet. Ast imminuto Atmosphære pondere, columna mercurialis quoque imminui debet: consequenter liquor ascendet. Liquoris adeo descensus incrementum gravitatis aëris, ascensus vero decrementum indicat; consequenter instrumentum ita constructum Baroscopium est (§. 89). *Q. e. d.*

SCHOLION.

135. *Baroscopium Hugenianum multo minores gravitatis aërea mutationes indicare, quam Tubus Torricellianus, attendentibus manifestum est. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamsi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expressi instilletur, liquori innatura; loco aquæ oleum Tartari per deliquium infundi potest.*

PROBLEMA XXX.

136. *Baroscopium construere, cujus mutationes sint multo sensibiliores quam in Barometro ordinario.*

RESOLUTIO.

1. *Tubo recurvo ACD, cujus crus Tab. I. CD sit ad alterum AC perpendiculari- Fig. 11. re, cohæreat vasculum cylindricum B; cujus diameter tanto major esse debet, quanto sensibiliores mutationes Baroscopium indicare debet.*

2. *Crure AC in situm horizontalem incli-*

Tab. I. inclinato, mediante infundibulo, Baroscopium repletur mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua sit; nec metuendum, ne in minima Atmosphæræ gravitate mercurius elabatur.
 Fig. 11. 3. Cruri horizontali aptetur scala in suos digitos divisa & in lineas subdivisa. Dico hoc Baroscopium mutationes gravitatis aëris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum pondus Atmosphæræ augetur, mercurius in vasculo tanto intervallo ascendit, quanto in ordinario Baroscopio ascendere solet (§. 120): consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicare valet, quam Baroscopium commune sive simplex. Similiter quando pondus Atmosphæræ minuitur, mercurius in vasculo tanto intervallo descendit, quanto in ordinario Baroscopio descendere solet (§. 120): consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo versus orificium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicat, quam Baroscopium simplex.
Q. e. d.

PROBLEMA XXXI.

137. *Data diametro tubi CD; invenire diametrum vasculi AB, ita ut scala descensus mercurii in tubo DC*

habeat ad scalam ascensus in vasculo AB rationem datam. Tab. I. Fig. 11.

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi = a , ratio scalarum $b : c$, diameter vasculi = x . Cum tantum mercurii in vasculum ascendat, quantum per aëris gravitatem in tubo DC deprimitur, positaque ratione diametri ad peripheriam = $d : p$, quantitas mercurii in tubo recedentis fit $a^2pb : 4d$, & quantitas vasculum ingressæ = $x^2pc : 4d$ (§. 541 *Geom.*); erit

$$a^2pb : 4d = x^2pc : 4d$$

$$a^2b = x^2c$$

$$x^2 : a^2 = b : c$$

$$x : a = \sqrt{b} : \sqrt{c}$$

Theorema. Diameter vasculi, est ad diametrum tubi; in ratione subduplicata reciproca scalarum.

COROLLARIUM.

138. *Datis ergo diametro tubi CD, & diametro vasculi AB, una cum scala mercurii in vasculo; invenitur scala in tubo, inferendo, Ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi, ita reciproca scala mercurii in vasculo ad scalam mercurii in tubo.*

PROBLEMA XXXII.

139. *Datis diametris tuborum & vasculorum, una cum altitudinibus intervalloꝝ per quæ mercurius descendit; invenire utrum Baroscopia concordent, nec ne.*

RESOLUTIO.

Quærantur vera descensus intervalla in eadem mensura (§. 130): quæ si utrinque æqualia reperiantur, evidens est, Barometra inter se concordare; sin minus, discordare.

SCHOLIUM.

140. Apparet adeo, ad judicandam duorum vel plurium Barometrorum concordiam, aut veram intervallorum ascensus differentiam, non sufficere ut utrique eadem graduatio applicetur, nisi utriusque vasculi (§. 127) ea fiat amplitudo, ut mercurius ex tubo delapsus, gravitate Atmosphære imminuta, altitudinem in vasculo stagnantis sensibilibiter non variet.

THEOREMA XVII.

Tab. I. Fig. 12. 141. Si Tubus Torricellianus AB inclinatur, erit cylindrus mercurialis Atmosphære æquiponderans ad cylindrum mercurialem eidem in situ tubi verticali æquiponderantem, ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmosphærici egressum mercurii ex tubo AB per osculum A impediatis, concipiatur cylindrus mercurialis isti æquiponderans in tubo verticali ad A resistere; erit ejus gravitas ad gravitatem mercurii in tubo inclinato, ut longitudo AB, ad altitudinem BC (§. 34 Hydrost.). Cum itaque cylindro mercurii verticali pondus Atmosphære æquale sit, erit etiam gravitas mercurii in tubo inclinato ad hoc, ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi, vel subtripla, vel subquadrupla &c. mutationes Baroscopii triplo, vel quadruplo &c. sensibiliores evadunt.

COROLLARIUM II.

143. Si AB sumatur pro sinu toto, erit CB sinus anguli inclinationis BAC. Est ergo gravitas mercurii in tubo inclinato ponderi atmosphærico æquiponderantis ad pondus atmosphæricum, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIUM III.

144. Ergo & scala integra, & singula intervalla ascensus descensusque mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmosphærici ad scalam integram & singula ejus intervalla in tubo verticali, sunt ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipsi BC & FE ipsi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 255 Geom.); consequenter $DE : DF = BA : BC$ (§. 267 Geom.).

PROBLEMA XXXIII.

145. Data longitudine scala per quam mercurius nunc ascendit, nunc descendit in tubo verticaliter erecto; invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut scala, per quam mercurius in ipso nunc ascendit, nunc descendit, habeat ad scalam tubi verticalis rationem datam.

RESOLUTIO.

Sit longitudo scalæ in tubo verticali $= a$; quia datur ratio scalæ in inclinato ad scalam in verticali, datur etiam scala ipsa in inclinato, quæ sit $= b$. Sit porro sinus totus $= t$, sinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmicis $lx = \{a + b - lb\}$ (§. 143).

C A P U T V.

De Rarefactione & Condensatione, Densitate item & Raritate
Aeris.

THEOREMA XVIII.

146. **C**alor elaterem aeris intendit.

DEMONSTRATIO.

Aër vesicæ inclusus eadem vi premit qua aër ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, vesicam distendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75 *Mechan.*). Enimvero vis illa qua vesicam distendit, est elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aeris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aër rarefactus iterum condensatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA XIX.

148. *Vis elastica aeris quæ rarefiens expanditur est ad elaterem aeris condensati, uti volumen rarefacti ad volumen condensati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aërem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen quod condensatus obtinuerat: evidens est, tantum ponderis imponi debere, quod vi elasticæ æquatur qua expansus fuit (§. 75 *Mech.*). Erit igitur elater aeris quo rarefiens expanditur ad elaterem condensati, ut pondus illud ad pondus alterum

quo condensatus premebatur (§. 553 *Mechan.*). Est vero pondus rarefacto incumbens idem quod condensato incumbet, *per hypoth.* Ergo elater aeris quo rarefiens expanditur est ad elaterem condensati, ut pondus quod sustentat a rarefactione ad pristinum condensationis volumen reductus ad pondus quo rarefactus premitur: consequenter ut volumen rarefacti ad volumen condensati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXIV.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis spatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removeatur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem sua veluti sponte in cavitationem vasis ascensurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admoveatur, aër rarefit (§. 23): consequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodsi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas ascendet, dum calor exspirat. Dum enim calor

expirat, ceteris paribus, aëris quæ restat portio rarior est externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 78): consequenter quam ponderis atmosphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmosphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75 *Mechan.*) *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

150. *Quodsi prima vice non tantum aëris expulsum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec necesse est liquorem in priore operatione immissum rursus expelli; cum ipse potius, ob propriam rarefactionem, aëris adhuc residui expulsionem promoveat.*

THEOREMA XX.

Tab. II. Fig. 13. 151. *Sit globus vitreus AB, cum annexo tubo BC, cujus orificium C aqua immersum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad D: ascendet, si aër ambiens frigidior, vel gravior evadit; descendet, si calidior, vel levior redditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim aër ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam inclusus adeoque condensatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 147). Cum igitur is constanter æqualis esse debeat differentię ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 93); si minuitur; pondus fluidi, consequenter & volumen ejus (§. 17 *Hydrost.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo ascendat necesse est. *Quod erat unum.*

Similiter, si aër gravior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam sub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur

tur aquæ ascendere debet; quantum sufficit ad æquilibrium cum pondere atmosphærico constituendum (§. 36 *Hydrost.*). *Quod erat secundum.*

Contra, si aër externus calefit; calefit quoque inclusus, consequenter rarefit (§. 23), adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum descendere, si aër levior redditur, eadem ratione demonstratur qua ostendimus illud ascendere, si is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

SCHOLIUM.

152. Celeberrimus HALLEIUS (a) observavit, uti supra de mercurio (§. 123), quod spiritus vini insigniter expansus fuerit, atque ab initio celerius, postea tardius in tubulo ascenderit. Cum spiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus esset, manus quidem aqua calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiat. Vereor autem, ne diversitas spiritus vini expansionis gradum variet. In aqua exiguam expansionem notavit idem HALLEIUS, imprimis sub initium, & ebulliens $\frac{1}{20}$ circiter spatii prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experienciis manifestum sit volumen fluidi calore crescere, frigore decrescere debere, consequenter liquorem ascendere conari, dum ab elatere aëris inclusi deorsum pellitur, & contra, adeoque rarefactionem liquoris ob stare descensui ejus, condensationem vero ascensui: experientia tamen constat, hoc obstaculum non impedire quominus elateris aërei effectus sint satis sensibiles, quia aër multo magis rarefit & condensatur quam fluidum quodcumque aliud.

THEOREMA XXI.

153. *Densitas aëris ceteris paribus, crescit in ratione ponderum comprimantium.*

DE-

(a) *Philos. Transact.* n. 197. p. 650. & seqq.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim densitates ut gravitates specificæ (§. 33 *Hydrostat.*). Gravitates specificæ sunt ut volumina reciproce (§. 29 *Hydrost.*). Ergo densitates sunt ut volumina reciproce (§. 167 *Aritbm.*): consequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

154. *Aër inferior densior est superiore.*

DEMONSTRATIO.

Aër superior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aëris quantitas incumbat, quam superiori; inferior quoque magis premitur, quam superior (§. 10). Densitas adeo inferioris major est densitate superioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora densiora sunt graviora rarioribus sub eodem volumine (§. 14 *Hydrost.*), & aër gravis existit (§. 20); aër inferior specificè gravior est superiore.

THEOREMA XXIII.

156. *Densitas aëris inferioris non est ponderi atmospherico proportionalis.*

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmospherici cætera in aëre inferiore omnia essent paria, densitates ejus essent ut pondera atmospherica (§. 153). Sed calor aërem rarefacit, frigus condensat (§. 23, 24), adeoque a calore & frigore densitas diversimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur causæ eandem similiter alterantes. Cum adeo densi-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

tas aëris inferioris mutari possit, pondere atmospherico immutato, ista huic proportionalis non est. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

157. *Si aër redditur densior, pondus corporum in aëre minuitur; si rarior, augetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 33 *Hydrost.*); aër densior specificè gravior est rariori. Corpus igitur aëre specificè gravius in densiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56 *Hydrost.*). Unde si aër redditur densior, pondus corporum minuitur: si rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Si igitur densitas aëris sensibiliter alteratur; corporum in aëre rariori æquilibratorum, quorum gravitates specificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in densiore, præponderabitque specificè gravius (§. 61 *Hydrostat.*).

PROBLEMA XXXV.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aëris unius pedis cubici, ob variationem ponderis atmospherici, acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus Atmosphæræ cæteris paribus augetur, aër inferior magis comprimitur (§. 10), adeoque densior evadit (§. 153), consequenter pes cubicus aëris a compressione gravior (§. 9 *Hydrost.*). Sit jam pondus Atmosphæræ minimum = *a*, maximum = *b*, pondus aëris a minimo compressi = *c*,

R r

pressa

pressi a maximo $= x$. Cum densitates corporum æqualium sint ut pondera. (§. 16 *Hydrost.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y , quod volumen aëris datum, ob ponderis atmosphærici variationem, acquirere valet, est $bc : a - c = (bc - ac) : a$, consequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmosphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aëris a minimo compressi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmosphærici acquirere valet volumen aëris datum.

Ex. gr. Pes cubicus aëris in minima Atmosphære gravitate sit 507 granorum (§. 57). Quoniam $a = 26$, $b = 28$ (§. 122): erit $y = 39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aëris ab omni variatione ponderis atmosphærici suscipere valet, est fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis quod ipsi a minimo pondere atmosphærico presso competit.

DEFINITIO XI.

160. *Manoscopium* est instrumentum, quod alterationes densitatis aëris indicat. *Manometrum* est instrumentum, quod easdem metitur.

PROBLEMA XXXVI.

161. *Manoscopium construere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. I. Fig. 14. Assumatur bilanx tam accurate constructa ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus est super centro jugi.

2. Ex altero jugi brachio suspendatur globus E ex lamina metallica, ex. gr. cuprea aut orichalcea, construendus,

ne pondus affricum in libra augeat Tab. II. (§. 949 *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes elusurum. Capacitas globi sit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aër (§. 40).

3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B descriptus, ita ut secetur in gradu quadragesimo quinto ab indice BD, si jugum fuerit in situ horizontali.

Dico, Manoscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim si aër densior redditur pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam (*vi* §. *cit.*) vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix spatium a laminæ, ex qua globus constructus, soliditate repletum occupet, nisus ejus deorsum minus minuitur quam globi (§. 55 *Hydrost.*): consequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis specificæ aëris, in quo hæret, consequenter & densitatis (§. 33 *Hydrost.*) indicat. Est ergo Machina Manoscopium (§. 160). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

162. Quoniam aëris densitas & raritas non modo a pondere Atmosphære (§. 153), sed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23, 24); Manoscopium hoc Baroscopium esse nequit.

SCHOLIUM I.

163. *Equidem* OTTO DE GUERICKE (a) & qui ipsum sequitur, BOYLIUS (b), idem instrumentum pro Baroscopio vendicant: sed non attenderunt, manente eodem pondere, densitatem ac raritatem aëris sapissime variari.

SCHO-

(a) In *Experiment. de Vacuo* lib. 3, c. 31, f. 114.
(b) In *Historia frigoris*, tit. 17.

SCHOLIION II.

164. Neque vero putandum est, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant: Experientia enim contrarium abunde satis confirmat. Certe GUERICKIUS se expertum scribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum secundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit; & imprimis ingravescere globum notavit, si pluat. Nec difficulter idem ratione assequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aërei 39 granorum mutationem, ob variatum pondus atmosphericum, sustineat (§. 159); bilanz vero unius vel alterius grani accessionem vel ablationem indicare possit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abest globus cum suo contrapondio) oneretur (§. 57); si globus evacuatus pedem aëris cubicum capit, quin variationes densi-

tatis ab Atmosphære pondere variato pendentes Manoscopium nostrum indicet dubitandum non est. Tanto minus autem dubitare fas est, quod alia adhuc densitatis variationes a diverso calore ac frigore aëris factæ, nec istis minores accedant. Didicit nimirum HALLEIUS aërem ordinarium in Anglia a calore æstivo extendi $\frac{1}{3}$ circiter sui voluminis, a maximo autem frigore condensari $\frac{1}{20}$ fere. Cum adeo pondus unius pedis cubici aërei sit 507 granorum (§. 57); erit decrementum ponderis in casu priore 32, incrementum in posteriore 25 granorum.

SCHOLIION III.

165. Manometri constructionem dedit Celeberrimus VARIGNONIUS (a): de quo alias nonnulla monuimus (b).

CAPUT VI.

De Motu Aëris.

DEFINITIO XII.

166. **V**Entus est agitatio aëris sensibilis.

PROBLEMA XXXVII.

167. Data ratione gravitatis specifica fluidi cujuscunque ad gravitatem aëris, una cum spatium quod intra definitum aliquod temporis spatium fluidum istud percurrit ab aëre premente impulsus; determinare spatium quod ipse aër ob æqualem pressionem, intra idem tempus, emetiri debet.

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo ad quam per da-

tam aëris pressionem elevari potest fluidum in medio non resistente = a . Sit porro ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris = $b:c$. Spatium, quod fluidum ab aëre premente impulsus describit, dicatur & denique spatium, quod aër ob æqualem pressionem intra idem tempus emetitur, vocetur x . Quoniam altitudines fluidorum ad quas propter æquales pressiones elevantur sunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36 Hydrost.); si altitudo ad quam aër eandem cum fluido pressionem sustinens eveheretur, modo

R r 2

(a) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences A. 1705. p. m. 409. & seqq.
(b) In Element. Aërometria p. 284.

modo elatere careret, fiat $\equiv y$; erit $c : b = a : y$, consequenter $y = ab : c$. Sunt vero velocitates quibus fluida ob eandem pressionem elevantur, in ratione subduplicata altitudinum ad quas ascendunt (§. 87, 322 *Mechan.*), adeoque in casu nostro ut \sqrt{a} ad $\sqrt{(ab : c)}$. Quare cum, ob temporum suppositam æqualitatem, spatia quæ istis temporibus percurrentur sint ut velocitates (§. 28 *Mechan.*): erit

$$\sqrt{a} : \sqrt{(ab : c)} = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§. 260 Arithm.)}$$

$$ac : ab = s^2 : x^2 \text{ (§. 178 Arithm.)}$$

adeoque

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§. 181 Arithm.)}$$

Theorema. Ut gravitas specifica aëris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum spatii quod fluidum hoc quacunque vi impulsam intra quodcunque temporis spatium percurret, ad quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM I.

168. Ergo $x = \sqrt{(bs^2 : c)}$. Unde si ponamus aquam data vi impulsam, intra minutum temporis secundum percurrere spatium 2 pedum; erit $s = 2$; cumque gravitas specifica aquæ sit ad gravitatem specificam aëris, ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b = 970$ & $c = 1$; consequenter $x = \sqrt{970.4}$, $\equiv \sqrt{3880} \approx 627^{\text{th}}$ fere.

COROLLARIUM II.

169. Est etiam $s = \sqrt{(cx^2 : b)}$, adeoque spatium quod intra certum aliquod temporis spatium, ob certam quandam impressionem, fluidum quodcunque emetitur determinatur, si ad duos numeros quibus ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravi-

tatem aëris exprimitur, atque quadratum spatii quod aër ob eandem pressionem intra idem temporis spatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæritur (§. 302 *Arithm.*), & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*).

SCHOLIUM.

170. MARIOTTUS (a) notat ventum satis violentum ordinarie spatium 24 pedum intra minutum secundum describere. Quod si ergo quæritur spatium quod aqua, ob eandem pressionem quam aër sustinet, intra idem temporis spatium absolvit, erit $c = 1$, $x = 24$, $b = 970$ & reperietur $s = \sqrt{(576 : 970)} = \frac{24}{\sqrt{51}}$.

PROBLEMA XXXVIII.

171. Data altitudine ad quam fluidum quodcunque a pressura aëris elevatur, una cum altitudine per quam corpus grave intra minutum secundum descendit; determinare spatium quod fluidum istud, intra minutum secundum, vi impetus impressi, motu æquabili percurret.

RESOLUTIO.

Sit altitudo ad quam fluidum ab aëre premente elevatur, $\equiv a$, minutum temporis secundum $\equiv b$, spatium quæsitum $\equiv x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acquisitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322 *Mech.*); vis aëris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquisita ejus est celeritatis qua corpus motu æquabili, intra idem tempus quo decidit, describere valet lineam altitudinis ex qua decidit duplam (§. 92 *Mech.*)

Repe-

(a) *Traité du mouvement des eaux*, p. 226.

Reperietur adeo spatium quod fluidum, intra idem tempus quo decidit, vi cadendo acquisita percurrere valet = 2a. Sit præterea spatium, quod corpus grave descendens intra minutum secundum describit, = c. Quoniam tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum a corporibus cadentibus descriptorum; erit tempus quo grave decidit per spatium a = √(ab² : c) (§. 87 Mech.). Quare si motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34 Mech.)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = a : x$$

$$2ab = x\sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2 \cdot ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impressum intra minutum secundum motu æquabili percurrit, est medium proportionale inter altitudinem duplam ad quam idem ab aëre premente elevatur, & altitudinem duplam ejus per quam grave intra minutum secundum decidit.

SCHOLIUM.

172. Ponamus, mercurium per pressionem Atmosphære in Tubo Torricelliano sustentari ad altitudinem 28^u: erit adeo in Problemate nostro a = 28^u. Porro c = 15^u 1^u seu 181^u (pedis Parisini) (§. 473 Mechan.). Ergo x, hoc est spatium quod ob eandem pressionem mercurius motu æquabili tempore unius secundi percurreret, = 2√181. 28 = 142^u quam proxime, seu 11^u 10^u. Ponamus mercurium elevari per aëris pressionem nonnisi 2^u. Erit in casu Problematis nostri a = 2^u, c = 181^u, adeoque x = 2√181. 2 = 38^u = 3^u 2^u.

PROBLEMA XXXIX.

173. Data altitudine fluidi ad quam

propter pressionem aëris elevatur; invenire spatium quod tempore unius minuti secundi, ob eandem pressionem, percurrere debet aër in medio non resistente.

RESOLUTIO.

1. Quærat, quantum spatium ob pressionem aëris qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti secundi, motu æquabili emittetur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro
2. investigari potest spatium quod aër in medio non resistente, ob eandem pressionem, percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM I.

174. Per præsens igitur Problema determinari potest spatium quod aër in vas prorsus evacuatum irruens, intra minutum temporis secundum, describit. Si enim vas prorsus evacuatum fuerit, aër irruens pressionem sustinet ei æqualem qua aqua ad altitudinem 32 pedum Parisiensium elevatur (§. 29). Quare spatium quod aqua ob istam pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili percurreret, est 528^u (§. 171). Jam, cum ratio gravitatis specificæ aquæ ad gravitatem aëris sit 970 : 1, reperietur spatium quod aër in vas prorsus evacuatum irruens motu æquabili, tempore unius minuti secundi, percurrere debet, 1370 pedum (§. 167).

COROLLARIUM II.

175. Si detur differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aëris contiguous; inveniri potest spatium quod aër, ex volumine fortiori elatere instructo irruens, in volumen elatere debiliori præditum describit.

SCHOLIUM.

176. Sit ex. gr. differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aëris contiguous ea qua mercurius elevari potest ad altitudinem 2 digitorum; reperietur spatium quod ob

istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet 38" (§. 171). Cum jam gravitas specifica mercurii ad gravitatem aquæ sit ut 14 ad 1 (§. 29), & gravitas aquæ ad gravitatem aëris, ut 970 ad 1; erit gravitas mercurii ad gravitatem aëris, ut 13580 ad 1, adeoque reperietur spatium quod, ob æqualem pressionem, aër emetiri debet tempore unius minuti secundi fere 368 pedum. Irruet ergo aër ex volumine fortiori in debilius ea celeritate qua tempore unius minuti secundi fere 368 pedes percurrere valet. Sit differentia virium elasticarum nonnisi 3^{'''}: reperietur spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, motu æquabili mercurius describere valet, fere 12", tandemque spatium quod ob istiusmodi pressionem, tempore unius minuti secundi, aër emetiri debet, 116½ pedum (§. 167). Ea igitur celeritate qua tempore unius minuti secundi spatium 116 circiter pedum percurrere valet, aër ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam MARIOTTUS (a) observat ventum satis violentum, intra minutum temporis secundum, 24 pedes percurrere; ejus celeritas multo minor est ea qua aër irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elasticarum nonnisi tanta existente, quanta mercurium in Tubo Torricelliano ad altitudinem 3^{'''} elevare valet.

COROLLARIUM III.

177. Quoniam, data ratione voluminum aëris primitivi atque compressi, inveniri potest altitudo ad quam aër compressus mercurium in Tubo Torricelliano elevare potest (§. 83); per Problema præsens determinari etiam potest celeritas qua aër, cessante compressione seu remota vi premente, sese expandit.

PROBLEMA XL.

178. Dato spatio quod aër intra minutum secundum percurrit; determinare pressionem qua celeritatem istam producere valet.

(a) *Traité du mouvement des eaux*, p. 226.

RESOLUTIO.

Pressionem determinatam esse patet, si constet altitudo ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aëre elevandum tantam pressionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo = x , spatium quod aër intra minutum secundum percurrit = a , ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris = $b : c$; altitudo denique per quam corpus grave, intra minutum secundum, descendit = d ; reperietur spatium a fluido tempore unius minuti secundi percurrendum = $\sqrt{a^2 c : b}$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæsitæ = $a^2 c : 4bd$. Est itaque

$$4bd : ac = a : x.$$

Theorema. Spatium quod aër tempore unius minuti secundi percurrit est ad altitudinem ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum ut pressionem efficiat celeritati qua istud describitur producendæ sufficientem in ratione composita gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aëris, atque altitudinis quadruplæ per quam corpus tempore primi minuti secundi descendit ad spatium aëris prædictum. Sit ex. gr. $a = 24'$, seu 288^{''}, ratio mercurii ad aërem $b : c = 13580 : 1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 473 *Mechan.*); erit x minor unica linea seu duodecima digiti parte.

SCHOLIUM I.

179. Apparet adeo, quod exiguas mutationes in Baroscopio, sed subitas, ingentes admodum procella subsequi debeant: id quod *Experientiæ consentaneum Theoriam nostram confirmat.*

SCHOLIUM II.

180. Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac imprimis determinandus erat situs alarum in molendino

dino alato; qualis nempe requiratur ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus sit principiis generalibus de motu fluidorum quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem universali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixisse videamur, cum plus dicere possemus.

DEFINITIO XIII.

181. *Anemometrum* est instrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA XLI.

182. *Anemometrum construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. II. I. Construantur alæ A, B, C, D, quales in molis alatis adhiberi solent; multo tamen minores; a plano verticali sub angulo 54 circiter graduum reclinatæ
- N. 3. 2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. circumacta deprimat dentes rotæ stellatæ GH.
- N. 2. 4. Axi per centrum transeunti infigatur ad angulos rectos brachium satis longum IK, in medio canaliculi instar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L sursum deorsum libere moveri possit, ipsique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus Y.
5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur, quarum singulæ radio axis æquantur.
- N. 1. 6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos insistens,

& extra cistam, cui rota stellata Tab. II. cum cochlea perpetua inclusa, emittens. Fig. 15.

7. Denique ex centro axis, in pariete cistæ exteriori, describatur quadrans circuli in 90 gradus more solito dividendus, ab indice vel ascendente vel descendente indicandus.

Dico, *Anemometrum* esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Manifestum enim, si alæ A, B, C, D, vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi, atque adeo rotam stellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota stellata GH eidem axi infigatur, per construct. ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero distantia ponderis a centro motus continua fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat necesse est, quo altius attollitur (§. 796 *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare potest pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipsum elevantis æqualis evadit, motus machinæ sistatur necesse est (§. 75 *Mech.*); & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere potest, ipsa autem a rota circumagi nequit, brachium IK cum pondere L relabii nequit. Index adeo semper indicat, quantus sit angulus elevationis ponderis, ubi eidem vis venti æquilibretur: unde determinabitur vis venti (§. 793 *Mechan.*).

Tab. II. *Mechan.*), atque adeo per Machinam Fig. 15, nostram ratio virium ventorum determinari potest, hoc est, vires venti metiri licet (§. 23 *Geom.*). Est igitur Anemometrum (§. 181). *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

183. Ut hac Machina, sine ullius adjumento, alas ABCD vento semper obvertat, cistæ ST plano quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus est asserculus POQR figuram trapezii parallelarum basium habens. Ventus enim incidens in asserculum POQR, Machinam circa axem pedamenti mobilem convolvat, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro Machinæ erecti fieri potest, ut in molendinis vulgaribus alatis.

SCHOLIUM II.

184. Brachio IK contrapondium Y additur, ut instar lineæ gravitate carentis considerari possit, nec tædia calculi præter necessitatem multiplicentur.

THEOREMA XXV.

185. Si elater aëris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis; ventus flat per locum in quo elater imminutus.

DEMONSTRATIO.

Cum aër per elaterem suum quaqua-
versum se expandere nitatur (§. 26); si elater uno in loco minor quam in altero, nisus aëris vi elastica majore prædiri adversus aërem vi elastica minore instructum major erit, quam hujus adversus istum. Ergo aër minus elasticus vi minore resistit, quam a magis elastico urgetur: consequenter minus elasticus loco suo pellitur, & magis elasticus in eum succedit. Quodsi adeo excessus elateris in aëre magis elastico

super elaterem minus elastici is sit, qui exiguam in Baroscopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aëris expulsi, quam in ipsius locum succedentis sensibilis evadat necesse est (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aër minus elasticus replet (§. 166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

186. Cum aucto pondere comprimente, elater augeatur (§. 553 *Mech.*), aër vero compressus sit densior minus compresso (§. 78): ventus flat per aërem rariorem ex loco qui densiore repletur.

COROLLARIUM II.

187. Quamobrem, quia aër densior rariore specificè gravior (§. 33 *Hydrost.*); extraordinaria aëris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis seu procellis conjungi debet.

COROLLARIUM III.

188. Jam descensus mercurii extraordinarius in Baroscopio aëris levitatem extraordinariam indicat (§. 120). Non ergo mirum quod procellas portendat, si subito fiat.

SCHOLIUM.

189. Non tamen necesse est, ut aëris levitas semper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aëris subitas pati mutationes. Hinc ventum sat valide flantem hoc ipso temporis articulo experimur, utut in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, mercurius in Baroscopio consistat, nec nisi $\frac{1}{16}$ unius digiti depressior nunc factus, quam heri erat. Immo in maxima depressione ventus saepe nullus spirat, quia depressio successive, non subito, facta.

COROLLARIUM IV.

190. Si aër alicubi subito condensatur, elater ejus subito minuitur (§. 148). Quodsi ergo

ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in Baroscopio vix indicari possit (§. 176, 178); ventus per aërem condensatum flabit.

COROLLARIUM V.

191. Quoniam vero subito condensari nequit, nisi magnam ante passus fuerit rarefactionem (§. 6, 8); ventus flabit per aërem, dum post æstum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM VI.

192. Similiter si aër subito rarefiat, elater ejus subito intenditur (§. 148), adeoque defluet per contiguum, actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75 Mech.). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aër subito rarefit.

COROLLARIUM VII.

193. Cum vires Solis in rarefaciendo aëre notissimæ sint; Solem in ventorum genesis influere manifestum est (§. 5, 6).

PROBLEMA XLII.

194. Ventum excitare adversus plagam desideratam spirantem.

RESOLUTIO.

Tab. II. 1. Construatur vas cylindricum ABDC ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major esse debet, quo impetuosior ventus excitandus.
2. Vas ipsum sit undique probe

clausum, solo foramine in E gau-Tab. II. dens, cui tubus EF utrinque aper- Fig. 16. tus ante immittendus.

3. Per medium cylindrum transeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum alis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas instructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.

4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato R 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis R curvatus semel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 conversiones absolvit, adeoque alæ L, M, N, K per aërem inclusum celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus versus plagam desideratam dirigi possit; ventus excitabitur (§. 166) adversus plagam desideratam spirans. Q. e. f.

SCHOLIUM.

195. Cum in molis frumentariis axis ferrens HI cum curriculo C occurrat (§. 975 Mech.); hoc artificio sub lapidibus molaribus facile excitatur ventus, partes a granis frumenti abrasas a nucleo eorum separaturus. Tum vero tubus EF sacci vices sustinet, & basis GF declivis, in G vero foramen esse debet, ut grana graviora per hoc desidant, leviores autem partes abraas a vento per F ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento post triturationem separandas; additis addendis, quæ nunc fusius exponere non est nostri instituti.

CAPUT VII.

De Calore ac Frigore, itemque Humiditate ac Siccitate Aëris.

DEFINITIO XIV.

196. **T**hermoscopium est instrumentum caloris ac frigoris in aëre incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero est instrumentum, quo calorem ac frigus aëris metiri licet.

DEFINITIO XV.

197. *Hygrosopium* est instrumentum, quod humiditatis & siccitatis in aëre incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero est instrumentum, quo humiditatem & siccitatem aëris metimur.

PROBLEMA XLIII.

198. *Thermoscopium construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. II. I. **T**ubo BC, qui globo vitreo AB
Fig. 17. cohæret, immittatur (§. 149) aqua communis regię permixta & ab orichalco in hac soluto virescente tincta. Opera vero danda est, ut tantum aëris in globo & tubo relinquatur, qui hyeme maximam condensationem passus globum exacte repleat & æstate ad summum rarefactionis gradum perductus non omnem ex tubo BC liquorem expellat.
2. Tubus immittatur vasculo, vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD

apertus, ut aër ejici, iterumque in-Tab. II. gredi libere possit, & in quo simi- Fig. 17. lis liquor contineatur, qualis in tubum immiffus.

3. Ab utroque latere tubi applicetur scala EF in particulas quocunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër ambiens sit calidior, liquor in tubo descendit: si is frigidior evadit, hic ascendit (§. 151). Incrementa igitur caloris & frigoris indicat hoc instrumentum, adeoque *Thermoscopium* est (§. 196). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Eodem artificio quo ante, & cum Tab. II. eadem cautione in tubum BC in va- Fig. 18. rios gyros contortum commoditatis gratia (ne scilicet longior spatium nimis longum occupet nec facile damnū patiatur) immittatur pauculum mercurii, pisi magnitudinem non excedens.
2. Tubulus dividatur in partes quocunque æquales, quæ scalæ vicem sustineant.

Accessus mercurii ad globum, frigoris recessus vero ejusdem a globo, caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ præcedens.

COROLLARIUM I.

199. Quia liquor in Thermoscopio primo & mercurius in altero etiam ascendit, si ær gravior redditur; contra vero descendit, si levior evadit (§. 151): caloris ac frigoris incrementa non satis fideliter exprimit.

COROLLARIUM II.

200. Quoniam tamen mutationes admodum sensibiles sunt; si aliorum corporum calor examinandus, commode Thermoscopio altero utimur: exiguo enim temporis spatio quo experimentum instituitur, gravitas Atmosphæræ sensibilibiter non mutatur.

SCHOLIUM.

201. Quodsi in Thermoscopio primo liquorem colore intense rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum simplicium atque rubidorum malvæ hortensis arefactis, ut color extrahatur. Quodsi enim tincturæ aquam regiam affuderis, non sine jucunditate colorem intense rubrum emergendam contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque usi sunt artifices.

PROBLEMA XLIV.

202. Thermoscopium Florentinum construere.

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus Thermoscopium paulo ante descriptum premitur (§. 198); mensuram caloris & frigoris quæsiere in rarefactione spiritus vini, utut rarefactione æris longe minore (§. 152). Thermoscopium vero ab ipsis repertum ita construitur:

1. Frustulis ex radice curcumæ aut anchusæ resectis affundatur spiritus

vini rectificatissimus, seu qui, dum accensus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priori enim radice colore flavo, a posteriore autem rubro tingetur.

2. Postea spiritus vini iterum iterumque filtretur per chartam bibulam, ut particulæ crassiores ex radice extractæ remaneant.

3. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme spiritus omnis in globum descendat, globum immittere juvat nivi multo sale conspersæ, aut (si æstivo tempore Thermoscopium parare volueris) aquæ fontanæ frigidæ in qua multum nitri solutum, ut spiritus condensatus indicet terminum quem maximo frigore attingere valet.

4. Quodsi a globo longiore intervallo adhuc distet, aliqua ejus portio rursus expellenda. Ne autem tubus justo longior fiat, globum spiritu plenum aquæ calidæ carbonibus candentibus impositæ immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.

5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice sigilletur.

6. A latere denique affigatur ut in Probl. præc. scala EF in particulas quocumque æquales divisa.

DEMONSTRATIO.

Quoniam spiritus vini rarefit & condensatur (§. 152); calore crescente, in tubo ascendet (§. 8); decrescente, descendet (§. 6). Caloris igitur incre-

Tab. III. Fig. 19.

menta & decrementa instrumentum indicat, consequenter Thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

203. Si spiritus vini per multos gradus scalæ ascendit, calorem multum crevisse constat; si descendit, idem multum decrevisse intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad hesternum non indicatur; instrumentum calorem non metitur (§. 23 *Geom.*), adeoque Thermometrum non est (§. 196).

COROLLARIUM II.

204. Liquor in tubo vi gravitatis suæ deorsum nititur (§. 4 *Mechan.*), adeoque ex globo in ipsum ulterius ascendenti resistit tanto quidem magis, quo altius jam ascendit (§. 10). Præstaret itaque, situm tubi BC esse horizontalem.

COROLLARIUM III.

205. Cum necessario aliquid aëris super liquore in parte tubi vacua existat, is vi elateris deorsum nititur (§. 26), adeoque ascensui liquoris resistit. A liquore ascendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipsius augetur (§. 73), ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 146).

COROLLARIUM IV.

206. Cum experientia constet remissionem caloris gradum facilius cum spiritu vini in globo communicari quam vehementiorem; rarefactiones spiritus vini viribus productricibus proportionales non sunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat quam remissior; cui tamen facilius communicari potest calor quam in globo stagnanti. Thermoscopium adeo Florentinum, accedente inprimis resistentia inæquali (§. 204, 205), Thermometrum non est (§. 196).

SCHOLIUM I.

207. HALLEIUS autor est, se didicisse ex his qui spiritum vini diu asservarunt, quod

is successu temporis partem vis expansivæ amittat (a). Sed meretur res accuratori examini subjici, vi eorum quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus (b).

SCHOLIUM II.

208. Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quasiverunt, a quo utriusque gradus reliqui computentur; ut observationes, eodem vel diverso tempore, in pluribus locis factas conferre inter se liceat. Aliqui locum notant in quo liquor bieme hæret, dum aqua congelare incipit; iterumque alterum tempore æstivo, dum butyrum juxta globum Thermoscopii positum liquefit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod divisionis punctum in ipsorum graduatione calori temperato respondet. Partem utramque in 10 gradus subdividunt, tandemque quatuor istiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor iidem super gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero divisionem fieri Thermoscopio in umbra collocato, & ne observationes turbentur, versus eandem constanter plagam instrumentum dirigi debere quam respiciebat cum divisio absolveretur. Enimvero supponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris, & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris respondere, ac singula Thermoscopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impressiones. Posterius autem fallere non ignorant qui Experientia edocti, Thermoscopia eidem parieti affixa non eundem constanter caloris gradum ostendere, utut eadem utriusque graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne prius cura examinaturi contrarium similiter experiantur. Differunt enim aquæ inter se, differunt inter se butyra; id quod vel sola gravitatis specifica variatio monstrat; ut alia taceamus quæ meditantibus & experimentantibus se offerent.

SCHO-

(a) *Transact. Anglic.* n. 197. p. 650.

(b) *Act. Erudit.* A. 1708. p. 163. & seqq. conf. *Logica* §. 664. & seqq.

SCHOLIION III.

209. *Suadent alii, ut globus Thermoscopii nivii vel glaciei multo sale conspersæ immittatur, & gradus ad quem spiritus subsistit notetur. Hinc Thermoscopium in cellam profundam transferunt, quorsum aëris externi nihil pertingit, ut actionem aëris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique spatium intermedium in 15 vel plures partes aequales dividunt, etiam supra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra absolvatur. Sed ut non urgeam, quæ in Scholio præcedente jam abunde dicta sunt, quis, quæso, respondeat quærenti: An omni nivii idem sit frigoris gradus? An omni sali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim frigus a sale nivii permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abradis superficièculis earundem interiore nucleum summe frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLIION IV.

210. *Celeberrimus HALLEIUS pro termino fixo assumit eum caloris gradum, quo spiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam supra monuimus, quænam ratio sit suspicandi, forte nec hunc gradum esse usque adeo fixum. Et licet post ipsum AMONTONS (a) retinuerit ipsum gradum caloris qui aquæ ebullienti convenit, dum Thermoscopium mercuriale construit; & postea (b) hujus ope Thermoscopio Florentino talem graduationem applicare docuerit qua ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diversa sit aquarum gravitas specifica, quæ massæ ac texture diversitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem sit: unde operæ pretium facient rerum naturalium scrutatores, si, factis accuratis experimentis, inquirent, quinam sit gravitatis fluidorum specificæ ad calefactionem eorundem respectus.*

(a) Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences A. 1702. p. m. 210. & seqq.

(b) Mémoires de la même Académie A. 1703. p. m. 62. & seqq.

SCHOLIION V.

211. *Nondum excipere licet istiusmodi minutias in praxi non esse attendendas: neque enim hætenus demonstratum, quod irregularitates a causis memoratis pendentes sint minutia. Lis adhuc pendens nonnisi pluribus experimentis, a pluribus, præsertim pluribus in locis, factis dirimenda.*

SCHOLIION VI.

212. *CAROLUS RENALDINUS (c) tradit modum integram graduationem methodo experimentalis determinandi, ut habeantur gradus inæquales aequalibus gradibus caloris, dum intenditur, respondentes; quam Collectores Actorum Eruditorum Lipsiensium (d) his verbis describunt: „Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, cum annexa bulla, eique infundatur spiritus vini tantum ut spherula glacie circumdata omnino repleatur, neque tamen aliquid redundet, orificiumque tubi sigilletur hermetice. Deinde parentur sex vasa, quorum quodlibet aquæ libram & aliquid amplius potest recipere, & in primum infundantur aquæ gelidæ uncia 11, in secundum uncia 10, in tertium 9, & sic porro. His peractis, Thermometrum mergatur in vas primum, eique affundatur aquæ ferventis uncia una; observeturque quo usque ascendat spiritus in collo & locus unitate notetur. Porro transferatur in vas secundum, cui injectæ aquæ ferventis uncia duæ; de quoque notetur locus ad quem ascendit spiritus, noteturque binario; & sic deinceps. Quodsi cui placeat ulterius procedere, donec tota aquæ libra sit infusum; perfectius erit instrumentum elaboratum, nempe duodecim numeris, aut asteriscis distinctum, quibus caloris termini denotantur.*

Sl 3.

SCHO-

(c) In *Philos. Nat. dissert.* 16. sect. 12.

(d) *Supplement.* Tom. 2. sect. 10. p. 453.

SCHOLIUM VII.

213. Facile incautis imponere poterat RENALDINUS, ut sibi persuaderent, hac ratione exactam caloris mensuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus, & effectus respondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde vicissim cognoscuntur gradus simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus dici ad calorem cujuscunque alterius: consequenter calorem metiri licet (§. 23 Geom.). Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quaeso, supposita; ne forte aliquid esse ponamus quod non est, sicque erroneam conclusionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris simplicum, si 11 unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, si 10 affundantur duo; triplum, si 9 tres; quadruplum, si 8 quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem simplicum vi simpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in spiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, si idem effectus in Thermoscopio a calore aëris ambientis producitur qui ab aqua calida producebatur, aëri eundem competere caloris gradum qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his suppositis verum est. Quod enim primum attinet; concedamus interea calorem aquæ ferventis, si frigida affundatur, per hanc equaliter distribui. Distribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per 10; tres per 9; quatuor per 8 &c. Si itaque assumamus equalia istarum aquarum volumina, ex gr. singularum partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto casu &c. Fallit ergo suppositum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam cui affunditur, equaliter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in spiritum vini uniformiter agit, id est, eadem vi per omne tempus actionis suæ. Prius experientiam vulgi non fugit,

ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus sit. Posterius facillime ostenditur. Notum nimirum est, requiri aliquod temporis spatium, antequam calorem suum cum spiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis spatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. si vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diversis sub initium immersionis globi esset nunc simplicus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aëris non modo in spiritum vini in globo, sed & in tubo contentum agit; adeoque non istum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum constat, num omnia fluida, in quibus idem est gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem suum communicent: nec forte hæc disquisitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri possent. Sufficit satis constare, methodum Renaldinianam suppositis niti partim precariis, partim manifesto falsis; ut adeo ratio nulla sit, cur vulgari divisioni in partes æquales hæc in partes inæquales divisio mechanica præferatur.

SCHOLIUM VIII.

214. Caterum, quamvis mutationes Thermoscopii Florentini admodum sensibiles existant, ita ut spiritus vini per notabile intervallum ascendat, manu calida admota, iterumque descendat, ea remota: ubi tamen per insigne intervallum tempore hiemali descendit, ascensus intervalla decrementis frigoris non satis respondent. E. gr. hoc ipso (a) anno d. 9 Jan. h. 8 mat. liquor in Thermoscopio meo descenderat usque ad 72^{um} gradum scale frigoris, cum consueta Phænomena frigoris intensum loquerentur: sed cum d. 18 Jan. eadem hora tempestate jam multo mitiore ad gradum 80^{um} subsisteret; hora tertia, qua
nix

(a) Scilicet 1713, quo prima horum Elementorum editio prodit.

nix & glacies ad pristinum fluiditatis statum reducebantur, spiritu ad 72^{um} hærebat. Scilicet ad eundem sæpius gradum depressus cernitur liquor, cum tamen Phenomena alia diversitatem caloris ac frigoris insignem manifesto prodant. Imo interdum depressio spiritus major, cum effectibus frigoris remissioris; minor vero, cum effectibus multo intensioris conjungi solet. Et hæc observantur, etiamsi Thermoscopium collocetur in loco, ad quem aëri externo liber patet aditus. Ratio Phenomeni hæc mihi videtur. Experientia constat, frigore invalescente, multum aëris ex fluidis expelli: id quod testantur vesiculæ tum superficiibus vitrorum in quibus continentur adhaerentes. Extra dubium itaque positum videtur, frigore intenso ex spiritu quoque vini in Thermoscopio aërem ejici, & per tubi vacuum partem expandi. Cum adeo aër ambiens calidior rursus redditur, inclusi elater augetur spirituique ascensuro resistit (§. 146). Quoniam vero per experimenta MARIOTTI (a) determinata quædam aëris quantitas in fluido salis instar dissolvitur; aër a frigore expulsus, crescente calore, sensim sensimque spiritui rursus permiscetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes semper erunt justis minores.

EXPERIENTIA VI.

215. Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus, & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exsiccabatur, ad pristinam redibat dimensionem. Multo autem brevior evadebat, ubi sub aqua per aliquod tempus ipsum detinueramus. Huc pertinent, quæ SCHWENTERUM expertum esse in Geometria (b) annuavimus. Et Guilielmus MOLINEUX, Armiger atque Societatis Dublinensis Secretarius, istiusmodi funem humecta-

tum cum appenso pondere suspendit, eumque pro ratione exsiccationis resolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admovisset, ascendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque cessante rursus resolutus. Immo balitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit, celeriterque resolvi admota prope unicum candela aut ferro ignito (c).

COROLLARIUM.

216. Sola igitur humiditas aëris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipsosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLIUM.

217. Humor nimirum dimensionem funis secundum diametrum auget. Sed cum gyri spirales filorum contortorum fere in circulares abeant, autopsia teste, dimensio secundum longitudinem decrescit. Abbreviationis igitur causa non modo ab insinuatione humoris in poros funium, sed & imprimis a spirali eorundem textura petenda.

EXPERIENTIA VII.

218. Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat 1^l 14^l circiter juxta mensuram Rhenanam, experti sumus. Cum enim eundem, duobus clavibus utraque sui extremitate alligatum, juxta fenestram apertam extendissemus, & ope paucula cera Indiculum ligneum applicassemus, per complures dies non sine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum Sole oriente ros decideret; ita ut fere semicir-

(a) Essai de la nature de l'Air, p. 97. & seqq.

(b) §. 129. p. 133.

(c) Philos. Transact. Anni 1685. n. 162. p. 1032. conf. Acta Erudit. A. 1686. p. 382.

micirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus descripsisse notaretur. Ast Solis radiis illustratus nervus iterum resolvebatur, atque Indiculum ultra terminum reducebat, in quo eum sub ortum Solis conspexeramus, cum fenestram cubiculi noctu clausam primum aperiremus. Non tamen singulis diebus aquales Indiculi itus reditusque notavimus. Eundem nervum sub aqua demersum sensibilibiter contorqueri didicimus: satis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non secus ac si duo manibusprehendentes ejus extremitates ipsum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus quam cum eundem aqua immitteremus, & radiis licet Solaribus exsiccatus ad pristinam longitudinem reducturi vires eludebat.

SCHOLIION.

219. Similia se expertum testatur STURMIUS (a). Non ignoro, quod alii (b) contrarium accidere affirmant; sed quid alii experti sint mihi quidem haud constat, cum circumstantias singulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prouti eandem expertus sum.

PROBLEMA XLV.

220. Hygroskopium construere.

RESOLUTIO.

Tab. I. Funem cannabinum, aut nervum
III. fidium, AB, juxta parietem extende
Fig. 20. super rotula B; alterique ejus extre-

(a) In *Colleg. Curios.* part. 1. tent. 14. phen. 7. p. 124. & seqq.

(b) *Traité des Baromètres, Thermomètres & Noëmètres*; p. 94.

mo D pondus alliga, cui infixus sit
stylus FG. Tab. III.

2. Eidem parieti affigatur lamina metallica HI; in partes quocunque æquales divisa. Fig. 20.

Dico Hygroskopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem sensibilibiter abbreviet, humore autem rursus expirato iterum resolvat (§. 215); pondus humore aëris aucto ascendet, imminuto descendet. Et quoniam index FG in lamina HI spatium monstrat per quod pondus ascendit vel descendit, intervalla vero ascensus & descensus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia sunt; instrumentum indicat, num dato hoc tempore aër plus alat humoris, quam alio habuit. Est igitur Hygroskopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Si Hygroskopium sensibilibus desideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero est, sive partes funis AB, AD, DE, EF, FG sint horizonti parallelæ, ut in schemate expressimus, sive ad eundem perpendicularares: prouti nempe quolibet in casu commodum visum fuerit. Tab. III. Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum præcedente.

Aliter.

Aliter.

- Tab. III. Fig. 22. 1. Funis cannabinus AC aut nervus fidium altera sui extremitate unco ferro A alligetur, altera vero C in centro tabulæ lignæ FF horizontaliter positæ firmetur.
2. Prope C infigatur pondus plumbeum D unius circiter libræ cum annexa regula DG.
3. Ex centro C in tabula describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aëris, qualem secum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rursus extemplo resolvatur (§. 215, 218); evidens est quod, humore aëris aucto, Index quantitatem contorsionis vel resolutionis monstrare, consequenter humiditatis & siccitatis incrementa indicare debeat. Est igitur instrumentum Hygroskopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. III. Fig. 23. 1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero sui extremo suspendatur ex unco H.
2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.
3. Limbo pedamenti LM inscribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & spatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

4. Globo infigatur stylus NO, cuius extremitas O limbi divisionem fere attingit. Tab. III. Fig. 23.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & siccitatis aëris ostensurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorsus est, quæ proxime præcedens.

Aliter.

1. Parentur subscudes sulcatæ AB & CD ex ligno quercino. Tab. III. Fig. 24.
2. Intra crenas oppositas aptentur asserculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri possint.
3. In extremitatibus subscudium A, B, C, D clavis firmentur asserculi, & inter utrumque relinquatur spatium EGHF, cuius latitudo EG unius circiter digiti.
4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cuius axi in altera Machinæ facie index inferatur.
5. Tandem ex centro axis in eadem facie describatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim, experientia teste, lignum abietinum humorem aëris facillime imbibat ac inde turgescat, humore autem rursus exspirato tabescat: si aëris humiditas augetur, asserculi AF & BH humore turgescentes propius ad se invicem accedunt; si illa rursus minuitur,

T t

iidem

Tab. iidem afferculi tabescentes denuo a se
 III. invicem discedunt. Quoniam vero
 Fig. 24. distantia afferculorum nec minui potest
 sine rotulæ L. convolutione, nec auge-
 ri; index monstrabit incrementa humi-
 ditatis & siccitatis aëris. Est igitur
 machina constructa Hygroskopium (S.
 197). Q. e. d.

Aliter.

Tab. II. Manoscopium superius descriptum
 Fig. 14. in Hygroskopium abit, si globo eva-
 cuato E substituas spongiam, aut ma-
 teriam quandam aliam, quæ humorem
 facile imbibit. Solet autem spongia
 primum aqua communi, deinde ubi
 bonam partem rursus exsiccata fuerit,
 aqua, vel aceto in quo aliquid salis
 Ammoniaci seu salis Tartari dissolutum
 fuerit, macerari atque in loco umbro-
 so denuo exsiccari.

DEMONSTRATIO.

Si enim aër humidus evadit, spon-
 gia gravior reddita præponderat; si ille
 levior redditur, hæc rursus altius tolli-
 tur experientia teste, adeoque index

incrementa & decrementa humiditatis
 indicat. Est ergo Hygroskopium (S.
 197). Q. e. d.

SCHOLIION I.

221. Omnia Hygrosopia, quæ hætenus
 descripta sunt, sensim sensimque a perfectio-
 ne sua deficiunt, tandemque ab humiditate
 aëris parum aut nihil mutationis patiuntur.
 Usus ultimi est magis diuturnus, quam ca-
 terorum omnium.

SCHOLIION II.

223. In Hygrosopio ultimo GOULDIIUS
 (a) loco spongia omnium maxime commen-
 dat oleam vitrioli, quod in dies in tantum
 augeri observavit, ut intra spatium 57. die-
 rum a tribus drachmis ad drachmas novem
 & 30 grana ascenderet. Enimvero non an-
 notat, num etiam humiditatem tam prompte
 rursus dimittat, quam eam attrahit; de qua
 valde dubito: adeoque præsentis instituti oleam
 vitrioli minime congruum judico.

SCHOLIION III.

223. Ceterum, quilibet, me non monente,
 videt structuram Hygrosopiorum multis mo-
 dis variari posse.

(a) In *Actis Erudit.* A. 1685. p. 315.

FINIS AEROMETRIÆ.

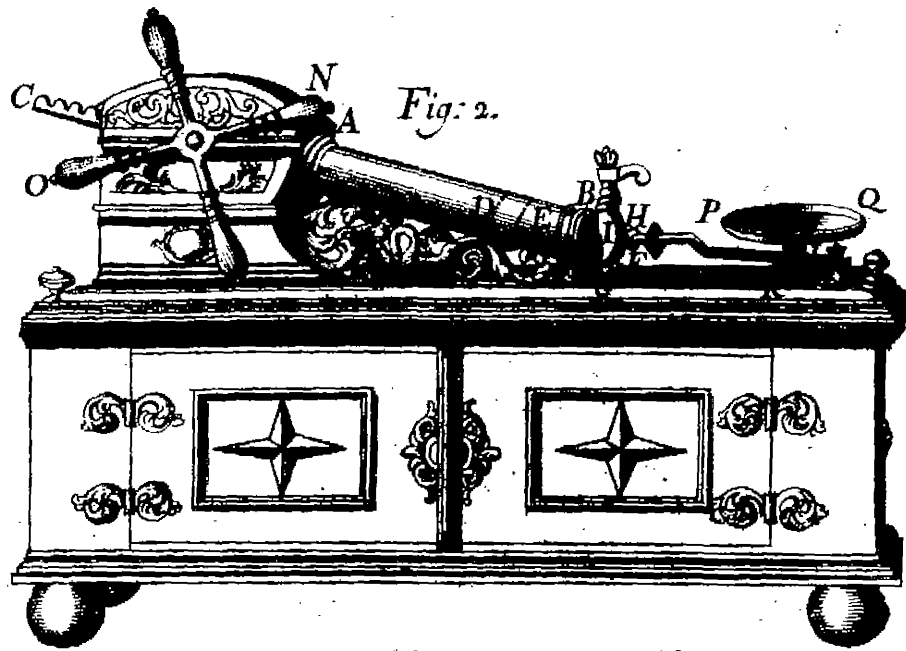


Fig: 3.

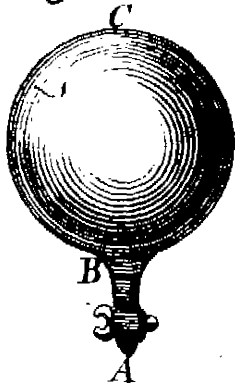


Fig: 6.

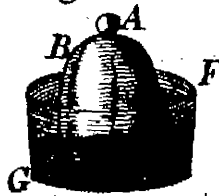


Fig: 12.

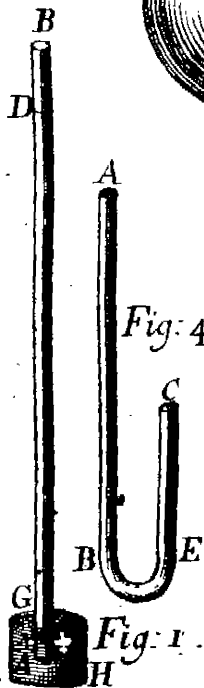
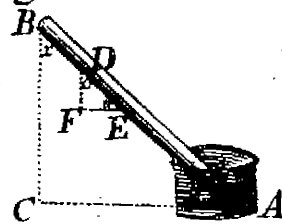


Fig: 4.



Fig: 5.

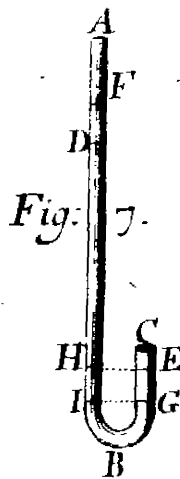


Fig: 7.

Fig: 10.

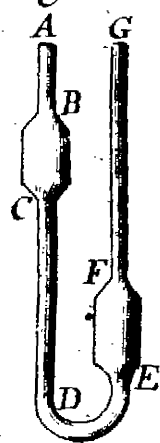


Fig: 11.

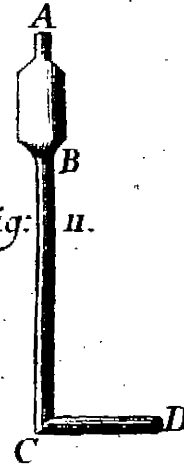


Fig: 9.

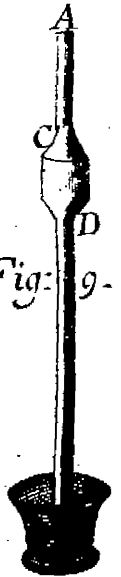


Fig: 8.

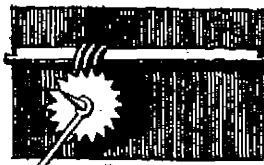
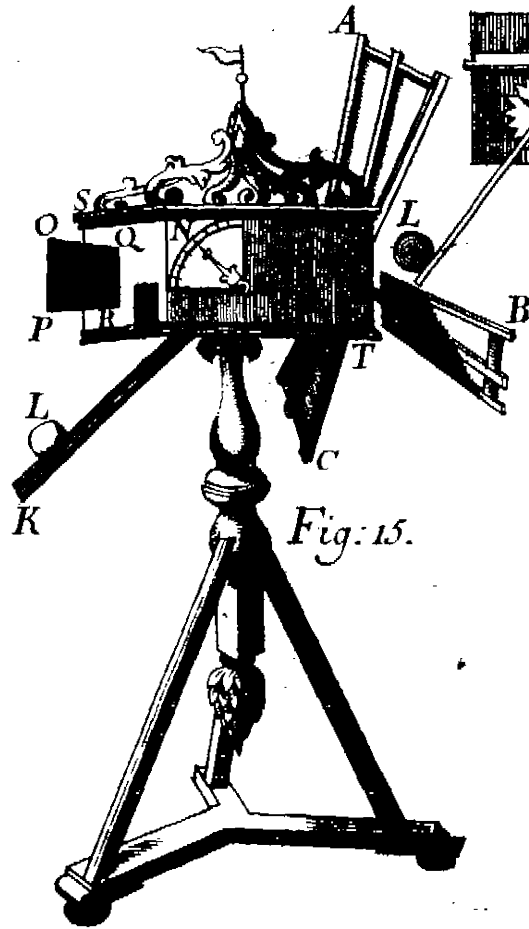
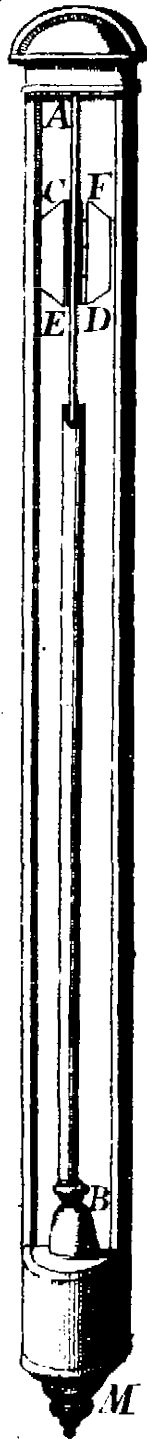


Fig: 15.N.3.

Fig: 17.

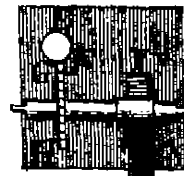


Fig: 15.N.2.

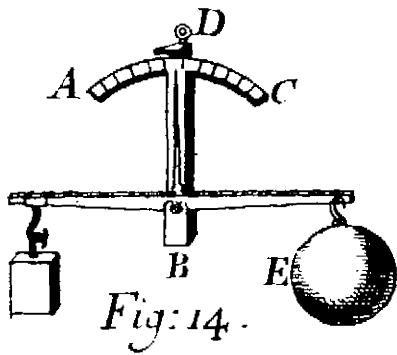
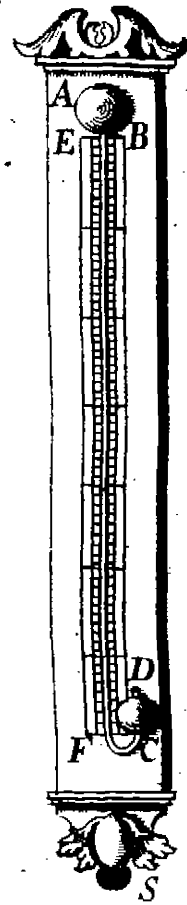


Fig: 14.

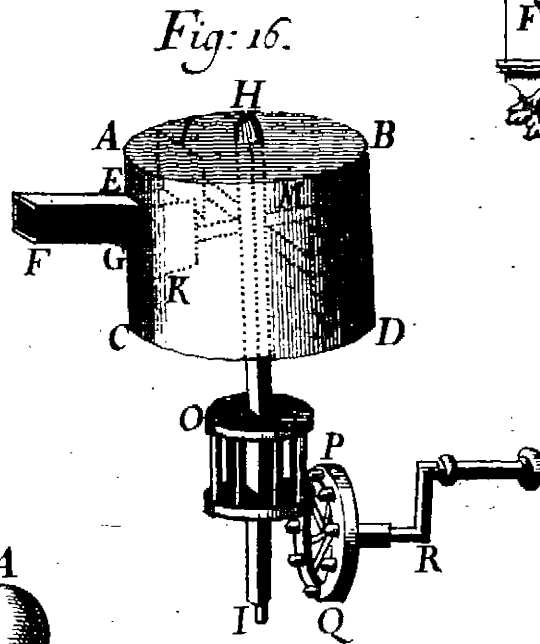


Fig: 16.

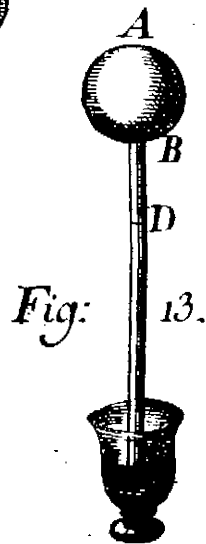


Fig: 13.

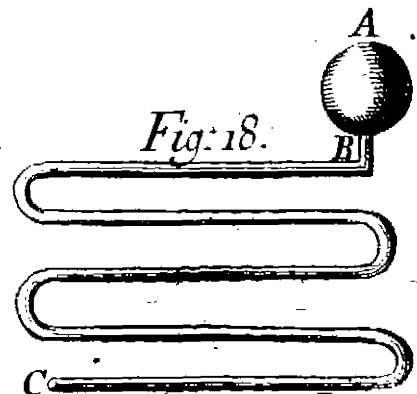


Fig: 18.

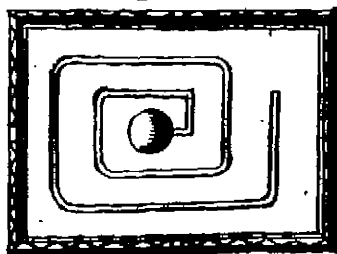


Fig: 19.

Fig: 19.

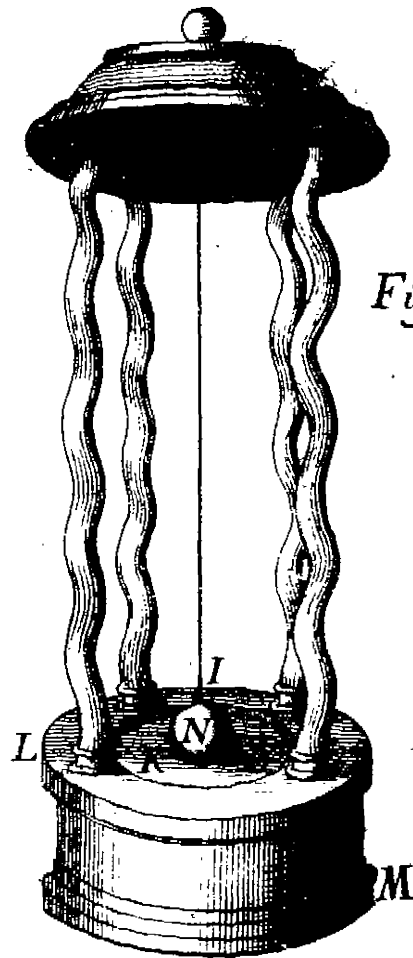
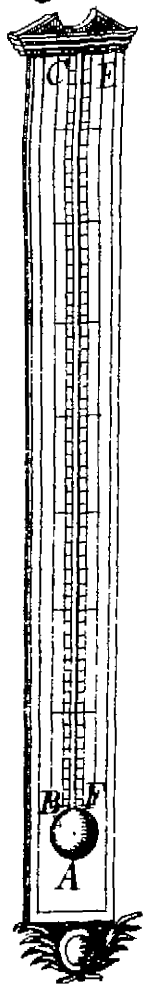


Fig: 23.

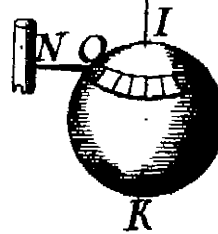


Fig: 22.

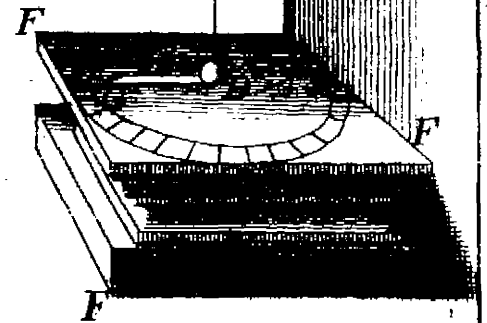


Fig: 21.

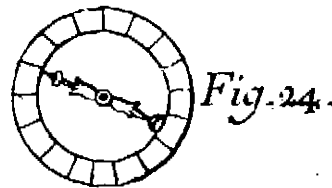
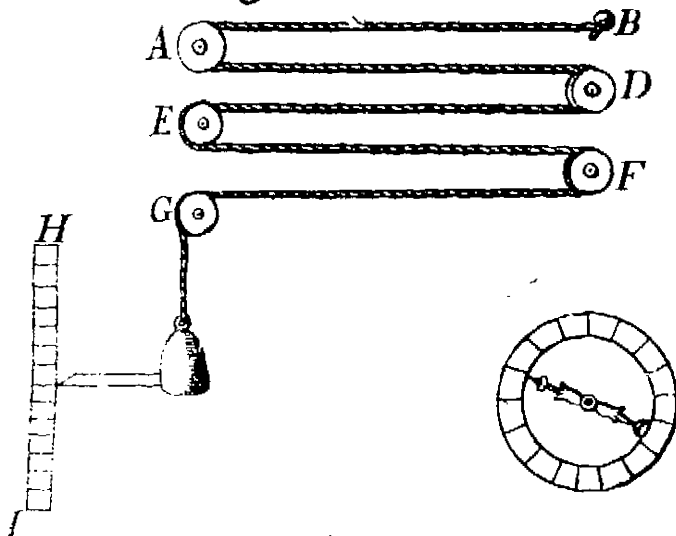


Fig: 24.

Fig: 24.

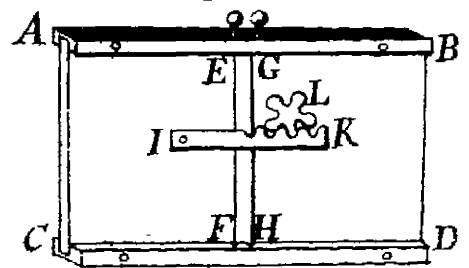
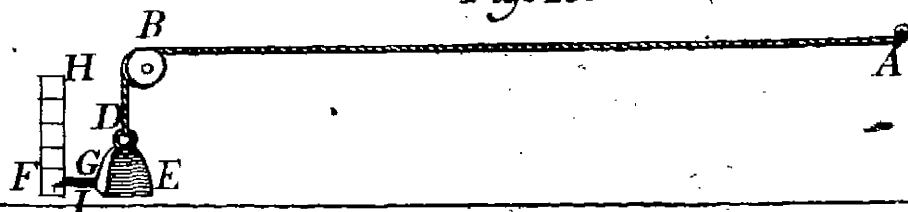
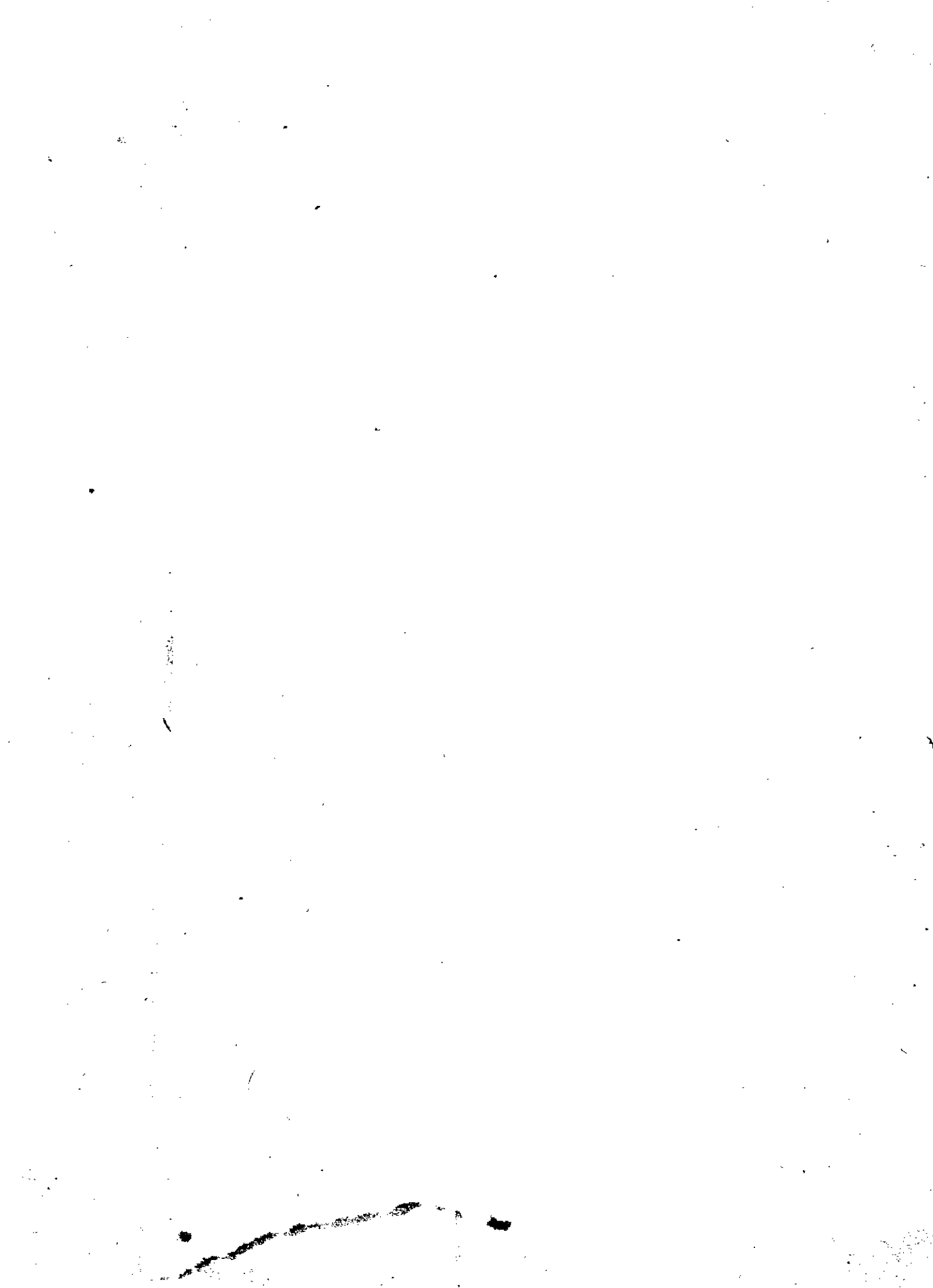
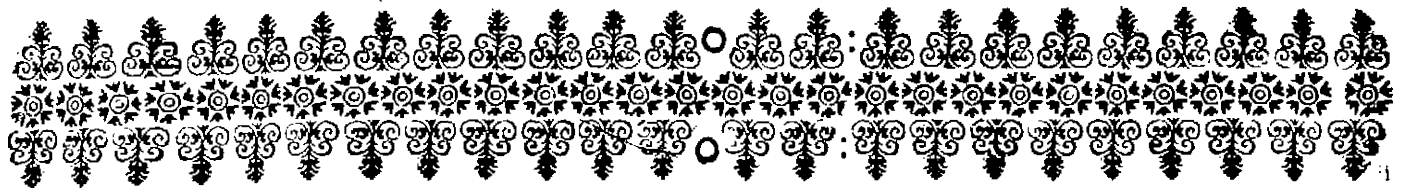


Fig: 20.







ELEMENTA HYDRAULICÆ.

P R Æ F A T I O.



N Hydraulica non modo Machinarum quibus aqua elevatur, atque fontium salientium constructio edoceri debet; sed explicandæ sunt præterea Leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius stupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel soli Libri *Spiritualium* HERONIS aperte loquuntur; ita diffiteri non possumus, in posteriore excolendo posteris adhuc multum relictum esse, utut præclara jam dederint Viri de Hydraulica optime meriti MAJOTTUS, CASTELLUS, TORRICELLIUS, BORELLUS, GUILIELMINUS, MARIOTTUS & imprimis Celeberrimus VARIGNONIUS (a). Immo ipsa Machinarum Hydraulicarum constructio Matheseos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod in dies magis magisque excolatur. Si enim Machinas Hydraulicas fontesque salientes spectes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari solet,

T t 2 quod

(a) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* An. 1703. p. 285.

quod non minus prodesse, quam delectare velit. Egregia scilicet vitæ humanæ commoda præstat, dum varias vias ostendit, per quas aqua ad locum datum derivari potest. Mirifice delectat, dum jucunda fontium salientium aliorumque admirandorum spectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad Scientiæ naturalis, tum ad Machinarum perfectionem tendunt: & si quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali distinctius cognoscetur; unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potissimum propositum sit Machinarum Hydraulicarum constructionem exponere, & ad causas suas revocare; non tamen Leges motus fluidorum prorsus insuper habebo, sed eas propositurus sum quæ ad ulteriorem disquisitionem viam sternerunt, & præ reliquis scitu necessariæ sunt. Has meditentur imprimis illi, quos rerum naturalium cognitio solidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, nisi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydrostatica, proprietates aëris ex Aërometria perspexerit.



ELEMENTA HYDRAULICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Motu Fluidorum a gravitate pendente.

DEFINITIO I.

1. **H**YDRAULICA est Scientia motus fluidorum, præsertim aquarum.

SCHOLIUM.

2. *Quare cum in Hydrostatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex sublato autem æquilibrio motus nascatur; Hydraulica Hydrostaticam supponit. Unde contingit, ut nonnulli qui de Hydraulica scripsere Hydrostaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 1. 3. Per *Tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO III.

4. *Lumen* est apertura tubi.

DEFINITIO IV.

5. *Epistomium* vel *Clavicula* est instrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri potest.

SCHOLIUM.

6. *Quoniam in Machinis hydraulicis epistomii creberrimus est usus, non inconsultum ducimus, ut ejus structura hic exponatur.*

PROBLEMA I.

7. *Epistomium vel Claviculam construere.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus ABCD cum gemina tubi parte GH & EF, quartum altera GH cochlea instrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri possit; aut, si cochlea destituantur, tubo vel vasi afferruminetur.
2. Cubus cylindricæ excavetur, ut cavitati ejus immitti possit cylindrus solidus HI perforatus in K, & in L matrice, in O manubrio instructus, ut per cavitatem cylindri trajectus, mediante cochlea M, in hoc situ firmari, & ope manubrii O huc illucque versari possit.
3. Perforetur similiter uterque tubulus GH & EF.

Quod si enim cylindrum solidum HI ita convertas, ut cavitatis ejus K foraminibus tubulorum GH & EF respondeat; aqua in F effluere potest: si vero idem cylindrus HI soliditatem

foraminibus iisdem obvertat, nihilaquæ egredi poterit, adeoque instrumentum est epistomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLIUM.

8. *Perfectissimam epistomii constructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumstantiis singularibus, si qua omitti possint. Ita ex. gr. communiter omittitur cochlea M cum matrice, qua cylindrum HI intra cavitatem cubi AC firmandum esse diximus. Neque cochlea F semper adest, & tubus GF sæpius horizontalis est.*

THEOREMA I.

Tab. I. 9. *Locus A ad quem aqua ex loco Fig. 3. alio B, sive per alveum, sive per tubos aut canales derivanda, humilior seu centro Telluris propior esse debet hoc ipso altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat nisi vi gravitatis, gravitas vero sit nisus versus centrum Telluris (§. 4 *Mechan.*); per alveum fluere nequit, nisi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere potest. Necessè igitur est, ut locus ad quem aqua per alveum fluere debet centro Telluris propior sit altero unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodsi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum descendat ex B in C, deinde rursus ascendat ex C in A: sit DE linea horizontalis per C ducta, & BD atque AE ad eandem perpendiculares. Sit jam $AE < BD$, pressio aquæ in tubo BC major est pressione aquæ in tubo AC (§. 35 *Hydrost.*). Ista igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero si $AE > BD$;

quamprimum aqua in tubo AC ascen- Tab. I. dit ad altitudinem ipsi BD æqualem, Fig. 3. alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34 *Hydrost.*), ab ea igitur ad ulteriorem ascensum sollicitari nequit (§. 75 *Mechan.*). Sed vi gravitatis deorsum nititur versus C (§. 4 *Mechan.*), adeoque nec vi intrinseca ascendere potest. Ibi igitur subsistit; consequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, nisi A sit humilior B. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

10. Cum alveus vel tubus BC per quem aqua fluit ex B in C, sit planum inclinatum (§. 258 *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari possunt, quæ in *Mechanica*, cap. 6, de descensu gravium in plano inclinato demonstrata sunt.

COROLLARIUM II.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diversos tubos fluentium eodem tempore acquisitæ, ut tuborum longitudines reciproce (§. 302 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

12. *Insuper hic & in sequentibus habemus resistantiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi (§. 933 *Mechan.*).*

PROBLEMA II.

13. *Aquam ex loco uno derivare in alterum.*

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§. 911 *Mech.*); hoc est, investigetur quam propior centro Telluris sit locus ad quem aqua derivanda est, altero unde derivatur. (§. 904 *Mech.*).

2. Quod-

2. Quodsi locus ille hoc humilior fuerit; non alia re opus est quam ut aqua, vel per canalem, vel per tubos declives, ex loco excelso in humiliorem deducatur; prout vel magna, vel exigua ejus suppetit copia.
3. Ut aqua per intervalla nobis comoda visa effundatur, extremum tubi epistomio muniatur (§. 5).
4. Et quia, experientia teste, fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capax fieri debet, sed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipsum affurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, sicque per ipsum celerius fluat.
5. Si tubus vel canalis per intervalla sufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua, remoto epistomio, continuo fluens intra puteum ex saxis exstructum colligatur necesse est; qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.
6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapsa rursus ascendere debet; deducenda est per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD. (§. 9).

SCHOLIUM I.

14. Utimur autem, in deducendis aquis, tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo est 4, 5 vel 6 digitorum, pro quantitate aquæ effundendæ, conjungun-

tur autem annulo ferreo CD. Tubo plumbeo Tab. I. locus est, si aqua in altum elevanda ad fontes salientes; neque vero sanitati conducere deprehensa est aqua quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior superficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, nisi sumtibus parcas. Longitudo eorum est duorum aut unius & dimidii pedum, crassities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commissuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.

SCHOLIUM II.

15. In alveo quem prope fontem construxisti, ita aptandus est tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex superficie hauriat; quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eundem petentibus, superficiem vero infecta aliæque impuritates leviores imitant. Solent etiam ad arcendas sordes lumini canalis primo cribrum ferreum, sed stanno obductum apponere, immo ad percolandam aquam turbidam spongiam. Ut aqua conservetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præstat.

SCHOLIUM III.

16. Ne aer interceptus cursum aquarum in canale intercipiat, sed exitus ei concedi queat, utque canalis ipse purgari possit, quoties opus fuerit; hinc inde est perforandus & obturaculo figuram conî truncati habente foramen obturandum.

SCHOLIUM IV.

17. Ceterum omni studio in deducendis aquis vitandus est aquarum ascensus; quia aqua ascendens majorem vim infert quam descendens.

PROBLEMA III.

18. Fontem naturalem arte construere.

RESOLUTIO.

- I. In loco elevato paretur fossa aggeribus undiquaque cincta, & variis meatibus

Tab. I.
Fig. 3.

tibus ex crustis lapideis excitatis hinc inde distincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine instructum.

2. Fossa hæc desuper silicibus, calculis, & ad duos tresve pedes glareæ operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari potest cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus distillabit aqua, & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLIUM.

19. Si intra meatus foveæ sat aquæ non contineatur ut perennis fluat; orificio meatus ultimi tubus cum epistomio aptandus.

THEOREMA II.

Tab. I. Fig. 5. 20. Si duo tubi æquales altitudines AB & CD atque æqualia lumina E & F habuerint, fuerintque ambo constanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia sunt, & altitudines aquæ super iisdem etiam æquales, per hypoth. aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42 *Hydrost.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum; consequenter si aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, quæ fundus in-

clinati, ubi utriusque altitudo eadem fuerit, ipsique fundi inter se æquantur (§. 47 *Hydrost.*); si tuborum utrunque inclinatum, modo æque-altorum, lumina fuerint æqualia, tubique constanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA III.

22. Si duo tubi æquales altitudines AB, & CD, sed lumina inæqualia E & F habuerint, fuerintque constanter pleni; quantitates aquarum effluentium eodem tempore sunt in lumina E & F. Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus divisum in plura minora alteri E æqualia: per singulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundetur illi æquales, quæ per lumen minus effunditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effusarum, ut lumen minus ad numerum partium in quas divisum concipitur majus, hoc est, ut lumen minus ad majus (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

23. Si lumina fuerint circularia: quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & constanter plenis effusæ sunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt in ratione duplicata diametrorum. Pater eodem modo, quo Corollarium Theorematis præcedentis (§. 21).

SCHO-

SCHOLIION.

Tab. I. 25. *Legem hanc experimentis non exacte*
 Fig. 6. *respondere autor est MARIOTTUS (a). Obser-*
vavit enim, si diameter luminis F erat dia-
metri luminis E dupla, ex tubo minore plus
quam quartam aquæ ex majore effluentis par-
tem eodem tempore effundi, tuborum altitu-
dine modica existente. Enimvero in Demon-
stratione abstrahimus ab omnibus obstaculis
accidentalibus quæ irregularitatem inducere
solent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet
altitudo aquæ super lumine, minor quam ad
latera vasis: aqua enim, in ea voluminis par-
te quæ lumini respondet, cavitatem assumit,
cum effluenti non extemplo alia a lateribus
succedere valeat. Quoniam vero hoc decre-
mentum altitudinis majus est in tubo majore
quam in minore, pressura quoque seu exeundi
conatus minor erit in majore, quam in minore,
 (§. 44 Hydrost.) Porro, dum aqua superior ef-
 fluentis locum occupare nititur, vim qua
 premit ad descendendum impendit, non ad
 premendum. Unde denuo conatus ad ex-
 eundum minuitur. Tandem hic quoque ha-
 benda est resistentiæ aëris & affrictûs aquæ in
 superficie tubi & orificio imprimis ratio.
 Enimvero omnia illa impedimenta ad certas
 leges nondum revocata; immo hætenus ne-
 quidem constitutum est, quodnam eorum in
 casu quolibet dato prævaleat. DECHALES
 (b) affrictûs unice rationem habens, in aqua
 effundenda prærogativam majoribus luminibus
 tribuit, quia proportionaliter minorem su-
 perficiem habent; cum tamen ex modo dictis
 pateat MARIOTTUM prorsus contrarium ex-
 pertum esse. Ipse vero MARIOTTUS (c) non
 distat dari subinde causas quæ multas
 irregularitates inducant; ita ut nunc majori-
 bus, nunc minoribus luminibus in aqua effun-
 denda tribuenda sit prærogativa, & asser-
 tum suum experimentis confirmat.

(a) *Traité du mouvement des Eaux.* Part. 3. disc.
 1. p. 267.
 (b) *In Traité de fontibus naturalibus,* prop. 30.
 f. 132. Tom. 2. *Mund. Mathem.*
 (c) *Loc. cit.* disc. 2. p. 176.

THEOREMA IV.

26. *Si duorum tuborum constanter Tab. I.*
plenorum AB & CD lumina E & F Fig. 7.
aqualia fuerint; quantitates aquarum
eodem tempore effluentium sunt ut cele-
ritates.

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. aquam ex tubo AB
 effluere ea celeritate, quæ fit ad alte-
 ram ex tubo CD effusæ in ratione du-
 pla. Quia hic tantum ratio habetur
 motus instantanei per foramen; motus
 aquæ ut æquabilis considerari potest,
 adeoque celeritates erunt ut spatia eo-
 dem tempore percursa (§. 33 *Mechan.*).
 Quodsi ergo filum aliquod aquæ in tu-
 bo AB extenderetur usque ad G, filum
 ex altero usque ad I; erunt longitu-
 dines EG & FI in ratione dupla seu ce-
 leritatum. Enimvero quantitates a-
 quarum eodem tempore effluentium
 sunt ut fila ista seu cylindri EG & FI;
 quorum bases E & F cum æquales sint,
 per *hypoth.* altitudinum EG & FI ratio-
 nem habent (§. 573 *Geom.*). Sunt
 adeo etiam quantitates aquarum ef-
 fluentium ut celeritates (§. 177 *Arithm.*).
Q. e. d.

THEOREMA V.

27. *Si duo tubi habuerint lumina*
E & F aqualia, sed altitudines AB &
CD inæquales, fuerintque constanter
pleni; quantitas aqua effluentis ex ma-
jore AB erit ad quantitatem aqua ef-
fluentis ex minore CD eodem vel equali
tempore, in ratione subduplicata altitu-
dinum AB & CD.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Cum vires aquas per lumina E & F Fig. 7. expellentes sint gravitates absolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem, *per hypoth.* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573 *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia sunt vires mortuæ (§. 9 *Mechan.*), si quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & a, celeritates ut C & c; erunt vires ut A. Cad a. c. (§. 278 *Mechan.*), consequenter A. Cad a. c. = AB : CD (§. 167 *Arithm.*). Est vero etiam $A : a = C : c$ (§. 26), adeoque [cum porro sit $A : a = A : a$] $A.C : a.c = A^2 : a^2$ (§. 185 *Arithm.*). Quare $A^2 : a^2 = AB : CD$ (§. 167 *Arithm.*) & hinc $A : a = \sqrt{AB} : \sqrt{CD}$ (§. 124 *Analys. finit.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium sunt in ratione duplicata ipsarummet aquarum eodem tempore effusarum.

COROLLARIUM II.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium sunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione subduplicata altitudinum.

PROBLEMA IV.

30. Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum AB & CD, una cum altitudine unius; invenire altitudinem alterius.

RESOLUTIO.

1. Quæraturs ad numeros qui rationem aquarum effluentium exprimunt,

& radicem altitudinis datæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).

2. Ducatur is in seipsum: erit factum altitudo CD quæsitæ (§. 28).

SCHOLIUM I.

31. Cum ex altitudine data rarissime radicem perfectam extrahere liceat; ut altitudo quæsitæ exacte inveniatur, per regulas *Arithmeticae irrationalium operandum*. Sit ex. gr. ratio data 3 : 5, altitudo data 7, reperietur radix altitudinis quæsitæ $5\sqrt{7} : 3$. Unde habetur altitudo ipsa quæsitæ $\frac{25}{9} \cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLIUM II.

32. Quodsi cui leges *Algorithmi irrationalium* non fuerint perspectæ, is faciat; ut 3 ad 5, ita 7 altitudo data ad numerum quartum proportionalem $\frac{35}{3}$, & porro ut 7 ad $\frac{35}{3}$, ita $\frac{35}{3}$ ad altitudinem quæsitam; quæ ut ante $= \frac{5 \cdot 35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. Sit enim universaliter 3 : 5 = a : b, 7 = c; reperietur per resolutionem *Problematis* altitudo quæsitæ = $b^2 c : a^2$. Sed quarta proportionalis ad a, b & c est bc : a & tertia proportionalis ad c & bc : a est ut ante $b^2 c : a^2$. Unde patet inferri posse, ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæsitam: id quod etiam ex demonstratione *Theorematis quinti* (§. 27) liquet. Atque hac analogia commodissime utuntur, qui a tricis *Algorithmi irrationalium* sibi metuent.

PROBLEMA V.

33. Data ratione altitudinum tuborum constanter plenorum & per æqualia lumina aquas effluentium, una cum quantitate aquæ ex uno effusa; invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.

Reso-

RESOLUTIO.

1. Quærat^r ad altitudines datas, & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effusæ, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque si radicem quadratam extrahas (§. 269 *Arithm.*), prodibit ipsa quantitas aquæ quæsitæ.

Ex. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effusa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens = $\sqrt{(9 \cdot 25 : 9)} = \sqrt{25} = 5$.

THEOREMA VI.

Tab. I. Fig. 7. 34. Si duorum tuborum constanter plenorum altitudines AB & CD fuerint inæquales, lumina E & F itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione composita ex simplici luminum & subduplicata altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & l habentium = a, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sint P & q. Porro altitudo tubi tertii = A, lumen = L, quantitas aquæ dato temporis effluentis Q; erit

$$P : q = L : l \text{ (§. 22).}$$

$$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a} \text{ (§. 27).}$$

$$\text{Ergo } PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a} \text{ (§. 213 } \textit{Arithm.}).$$

$$\text{Unde } Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a} \text{ (§. 180 } \textit{Arithm.}) \textit{ Q. e. d.}$$

COROLLARIUM.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$; consequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299 *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260 *Arithm.*); hoc est, si quantitates aquarum ex duobus tubis constanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina sunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

THEOREMA VII.

36. Si altitudines duorum tuborum constanter plenorum AB & CD æquales fuerint; aqua per lumina E & F utrunque inæqualia eadem celeritate effluunt. Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet, si præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia; aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adsit disparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus divisum in partes quotcunque, quæ singulæ minori lumini æquales sint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur ac si per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a pressione perpendiculariter imminentis aquæ evidens est, eandem in singulis partibus luminis minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

Tab. I. 37. Si altitudines tuborum constan-
Fig. 7. ter plenorum AB & CD, itemque lu-
mina E & F inæqualia fuerint; celeri-
tates aquarum effluentium sunt in ratione
subduplicata altitudinum.

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum a , a
& A, lumina eorundem L, l, & L,
velocitates aquarum effluentium u , v
& c. Quia $L = L$; erit $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$
(§. 29). Est vero $a = a$, per hy-
poth. adeoque $\sqrt{a} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c$
 $= \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168 Arithm.) Porro
ob $a = a$, per hypoth. etiam $u = v$ (§.
36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168
Arithm.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

38. Cum, altitudinibus inæqualibus exi-
stentibus, aquarum per æqualia lumina
fluentium celeritates similiter sint in ratio-
ne altitudinum subduplicata (§. 29), hæc
vero ratio æqualis sit, si altitudines æqua-
les: patet in genere celeritates aquarum
ex tubis constanter plenis effluentium esse
in ratione altitudinum subduplicata.

COROLLARIUM II.

39. Quadrata igitur velocitatum sunt
ut altitudines (§. 260 Arithm.).

SCHOLIUM.

Tab. I. 40. MARIOTTUS (a) multiplici experimen-
Fig. 8. to docuit, si ad vas ABCD applicetur tubus
EF, plus aquæ per tubum æquali tempore ef-
fluere quam per idem lumen vasis E, tubo re-
moto, & motum aquæ eo magis accelerari,
quo tubus EF longior. Cum altitudo vasis AC
esset unius pedis, tubi vitrei EF longitudo
trium pedum, diameter luminis trium linea-
rum; intervallo unius minuti effundebantur

(a) Traité du mouvement des eaux, Part. 3. disc.
6. p. 269. & seqq.

6 $\frac{1}{8}$ sextarii aquæ, tubo autem remoto nonnisi Tab. I.
4 circiter. Cum longitudo tubi EF esset 6 pe- Fig. 8.
dum, diameter luminis F unius digiti, aqua
omnis intra 37 minuta secunda effluxit. Cum
vero tubi dimidium FH rescinderetur, vas
integrum intra 45 $\frac{1}{2}$; tubo prorsus remoto in-
tra 95 $\frac{1}{2}$ evacuatum est. Tubo nimirum ap-
plicato, altitudo aquæ incumbentis & egressum
orificio tubi proxime urgentis major est, adeo-
que motus aquæ magis acceleratur.

THEOREMA IX.

41. Si duo tubi AB & CD fuerint Tab. I.
ejusdem altitudinis & lumina E atque Fig. 5.
F æqualia habuerint; tempora quibus
depleantur sunt in ratione basium.

DEMONSTRATIO.

Sit basis tubi CD dupla basis tubi
AB. Quoniam altitudines æquales sunt
per hypoth. quantitates aquarum in tu-
bis contentæ basium rationem habent
(§. 573 Geom.), adeoque ex hypothesi
aqua in tubo CD dupla est aquæ in
tubo AB. Concipiatur altitudo utrius-
que tubi in partes infinite parvas di-
visa, erit cylindrus ejusmodi altitu-
dinis in tubo majore CD duplus cylin-
druli in tubo minore AB. Uterque
autem in utroque tubo eadem celeri-
tate per lumen ejicitur (§. 36), & quia
lumina æqualia sunt per hypoth. eadem
quantitates aquæ eodem instanti fluunt
per utrumque lumen. Ergo, eodem
tempore quo cylindrus HI effluit,
nonnisi dimidium alterius LK ejicitur:
ut adeo alterum dimidium expellatur
opus est instanti altero. Tempuscula
itaque, quibus cylindruli HI & LK ef-
fluunt

Tab. I. fluunt, sunt in ratione subdupla, nempe ut bases tuborum AB & CD. Idem cum de ceteris eodem modo demonstratur, patet tempora quibus integri tubi evacuantur esse in ratione basium (§. 187 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA X.

Tab. I. 42. *Vasa cylindrica & prismatica*
 Fig. 1. ABDC ita depletur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decrescant secundum numeros impares ordine retrogrado sumptos.

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG descendens continuo decrescit in ratione subduplicata altitudinum decrescientium (§. 38). Velocitas gravis descendens crescit in ratione subduplicata altitudinum crescentium (§. 87 *Mechan.*). Talis igitur est motus libellæ FG ex G in B descendens, ac si inversa ratione ex B in G descenderet. Sed si ex B in G descenderet, æqualibus temporibus spatia crescerent secundum numerorum imparium progressionem (§. 86 *Mech.*). Ergo secundum eandem progressionem inverse sumptam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decrescunt. Q. e. d.

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege descendit, qua vi impressa per altitudinem ipsi GB æqualem ascenderet (§. 329 *Mechan.*).

SCHOLIUM.

44. Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonstrari possunt, quæ nunc brevitate gratia omittimus.

PROBLEMA VI.

45. *Vas quodcumque cylindricum dividere in partes singulis temporibus vacuandas; dato tempore quo depletur totum, itemque tempore quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes singulis horis evacuandas.

1. Fiat, Ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12, ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vasis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime superiores horæ penultimæ, quinque anteriores horæ decimæ &c. 13 denique postremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora crescant in serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. altitudines vero, si numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, crescant in serie numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9 &c. (§. 42); erunt altitudines ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1, 4, 9, 16, 25, &c. (§. 110 *Analys. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144 complectitur omnes altitudinis vasis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 est quadratum ipsius 12 (§. 246 *Arithm.*), consequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo

do dividenda, secundum seriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia distribuendus (§. 42).

Q. e. d.

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vasis substituere liceat vasa minora ipsis æqualia; data altitudine vasis intra datum temporis spatium deplendi, inveniri potest altitudo vasis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLIUM.

47. Patet ergo methodus Clepsydras construendi, quibus Veteres usus esse constat.

THEOREMA XI.

48. Aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium.

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vasis vi solius gravitatis absolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam qua egreditur ab aqua supra orificium consistente pressa, in ratione subduplicata altitudinis istius aquæ tempusculo infinite parvo per foramen excurrentis, seu, quod perinde est, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ supra orificium (§. 37). Enimvero si aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ supra orificium æqualem; celeritas cadendo acquisita foret itidem ad eam qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione subduplicata altitudinis aquæ supra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87 *Mechan.*). Aqua igitur per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam ca-

dendo ex altitudine aquæ supra orificium acquireret (§. 177 *Aritbm.*).

Q. e. d.

THEOREMA XII.

49. Si aqua per tubum KE descendens per lumen G, cujus directio verticalis, profiliat; ad eam altitudinem GI ascendit ad quam libella aquæ LM in vase ABCD consistit. Tab. I. Fig. 9.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipsius celeritas est quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48); consequenter ea ipsi vis est qua ad altitudinem ipsi EN æqualem ascendere valet (§. 322 *Mechan.*). Quare cum directio luminis sit verticalis per *hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis existat, nec quicquam sit quod eandem mutet extra tubum; aqua sursum feratur necesse est ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vase consistit. *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

50. Experientia constat, aquam per lumen G proficientem elevari ad altitudinem ipsa GI minorem. Constat præterea, lumen G eo minus esse debere, quo minor est altitudo libellæ LM in vase ABCD. Immo propriis experimentis didici, minus esse debere lumen si mercurius salire debet, quam si aqua saliat; consequenter si fluidum majore vi urgetur, quam si minore. Inde vero non concluditur Theorematis falsitas; sed tantum colligitur, subesse impedimenta quadam quæ ascensui resistent. In ea igitur inquirendum.

SCHO-

SCHOLIION II.

51. Plerique præcipuam resistentiæ causam aërem allegare solent, per quem aqua saliens ascendit. Enimvero quamvis non negem aëris resistentiæ inter impedimenta locum aliquem esse concedendum, quæ obstant quominus ad eam præcisè altitudinem ascendat unde decidit; causis tamen aliis majorem resistentiæ totalis partem tribuendam esse, mihi quidem satis probabile videtur. Aquas enim in vase ab aëre evacuato (S. 40 Aërom.) salientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aëre, ubi altitudo ascensus unius circiter pedis sit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua saliens longe infra libellam ascensum sifteret. Illud autem observare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramulosque dividi, in quot in aëre dispergitur; sed fere unitam versus eam plagam defluere, versus quam lumen G parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter salien-

tis magis ab aëre resistente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen salibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aëris resistentiam sensibilio-rem esse puto. Ipsa enim aquæ in guttulas ramulosque divisio fieri nequit, nisi aliqua celeritatis parte imminuta; quemadmodum ex Regulis motus abunde constat.

SCHOLIION III.

52. Cæterum hinc mirum non est, quod regula MARIOTTI defectum altitudinis a perpendiculari aquæ computandi, quam resistentia aëris potissimum superstruxit (a), & qua defectus isti in ratione duplicata altitudinum esse perhibentur, non satis exacte experientiæ respondeat. Quoniam tamen ejus aliquis esse potest usus; ideo non piget Tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum salientium altitudines tuborum per quos delabuntur, juxta illam assignantur, in pedibus quidem Parisinis & ejus digitis seu partibus duodecimis.

Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.	Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.
5'	5' 1''	55	55' 12 1''
10	10 4	60	60 144
15	15 9	65	65 169
20	20 16	70	70 196
25	25 25	75	75 225
30	30 36	80	80 256
35	35 49	85	85 289
40	40 64	90	90 324
45	45 81	95	95 361
50	50 100	100	100 400

SCHOLIION IV.

53. Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ ascendenti, quia observavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevetur quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus si languescit, posteriores in

cas incurrentes retardantur: id quod ipsismet oculis suis videre poterit qui aquas salientes attentius contemplare voluerit. Atque inde est, quod, si lumen G angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua saliens a perpendiculari non admodum decimare videatur, saltus altitudo statim major evadat. Huc pertinet, quod

TON:

(a) Traité du mouvement des eaux, Part. 4. disc. 1. p. 304. & seq.

Tab. I. TORRICELLIUS (a) à se observatum annotavit.
 Fig. 9. „ Quando, inquit, opposita manu foramen G
 „ penitus occluditur, deinde, retracta quam
 „ citissime manu, repente aperitur; videban-
 „ tur prima & præeuntes guttæ altius perve-
 „ nire, quam sit deinceps culmen postquam
 „ aqua deorsum fluere cæperit. Adde quod
 „ dispersionem in guttulas ipsa gravitas aquæ
 „ juvet.

SCHOLIUM V.

54. Maximum autem impedimentum in
 affrictu positum est: unde lumen seu orificium
 G optime levigatum requiritur.

SCHOLIUM VI.

55. Quamvis autem lumen non nimis in-
 gens esse debeat, ut sufficiens aqua copia
 constanter affluere possit; cum alias saltus non
 modo minuatur, sed prorsus impediatur; idem
 tamen nec nimis exiguum sit necesse est. Ex-
 perimur enim, aquæ salientis altitudinem ma-
 jorem esse si lumen majus, quam ubi minus
 fuerit. Certe MARIOTTUS (b) observavit
 aquam salientem per lumina in eadem linea
 horizontali sita & in eodem tubo facta, quo-
 rum dianetri erant 1, 4, 6, 10, 12 &c.
 linearum; notavitque altius ascendere eam
 quæ per majora egreditur, quam quæ per mi-
 nora ejicitur.

THEOREMA XIII.

Tab. I. 56. Aqua per tubum inclinatum AB
 Fig. 10. vel per tubum quomodocunque inflexum
 CD descendens, per lumen G ad eam al-
 titudinem in L vel M ascendit ad quam
 aqua in vase HK subsistit.

(a) De motu projectorum, Lib. 2. Oper. Geometr.
 P. 192.

(b) Traité du mouvement des eaux, Part. 4. disc.
 1. P. 303.

DEMONSTRATIO.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato Tab. I.
 AB, vel inflexo CD, eadem vi impelli- Fig. 10.
 tur, qua impellitur ad lumen G in tubo
 NO (§. 34 Hydrost.). Sed vi impres-
 sa per lumen istud ascendit ad altitu-
 dinem altitudini libellæ ML æqualem
 (§. 49). Ergo etiam per lumen tu-
 borum reliquorum saliens ad eandem
 altitudinem ascendere debet. Q. e. d.

SCHOLIUM.

57. Veritatem Theorematis experimento
 confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea
 stanno obducta vas HK figuram parallelepi-
 pedi habens. Ad fundum afferruminari jussi
 quatuor tubos, quorum duo NO & ST sunt
 ad fundum perpendiculares, sed inæqualium
 diametrorum, tertius AB est inclinatus, quar-
 tus vero CD ex pluribus partibus diversi-
 mode inclinatis compositus; omnes una ad
 fundum pelvis RZ aquam salientem excipien-
 tis afferruminati. Denique in M & L ad
 vas aptati sunt tubuli inclinati, ut, si per
 canalem a b plus aquæ affluat, quam per
 lumina tuborum G salit, superflua per
 eos effluat: quo artificio quoque utendum,
 si experiri volueris quæ in antecedentibus
 de motu aquarum in tubis constanter plenis
 demonstrata sunt. Quamdiu igitur aqua ean-
 dem libellam ML tuebatur, altitudo salientium
 per omnes tubos erat eadem; neque augebatur,
 unius, duorum vel trium luminibus obturatis.
 Quodsi vero libella ML vel descenderet, vel
 obturatis tubulis in M & L ascenderet, sa-
 lientium quoque altitudines omnes equaliter
 decrescebant, vel augebantur.

THEOREMA XIV.

58. Aquarum per lumen horizon-
 tale vel ad horizontem inclinatum
 D sa-

Tab. I. D salientium longitudines DE & DF, vel Fig. 11. IH & IG, sunt in ratione subduplicata altitudinum in vase vel tubo AB & AC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impressa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71 *Mechan.*), vi gravitatis autem deorsum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215 *Mechan.*), nec vis una alteram impedire potest, quia directiones non sunt contrariæ; aqua a premente AB impulsam eodem tempore pervenit ad rectam IG ipsi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulsam eandem attingit, suntque rectæ IH & IG spatia, quæ interea vi impetus impressi descripsissent eadem aquæ. Sunt vero spatia IH & IG, quia motus per DF est uniformis (§. 490 *Mechan.*), ut celeritates (§. 33 *Mechan.*); celeritates in ratione subduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata salientium sunt

in ratione subduplicata altitudinum (§. 167 *Aritm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

59. Cum in medio non resistente omne corpus, vel horizontaliter, vel oblique projectum, Parabolam describat (§. 480, 482 *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum saliens Parabolam describit.

COROLLARIUM II.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, saliens arcuatum opus efficit, sub quo citra periculum madescendi deambulare licet; impetu quo abripiuntur guttæ descensum impediens.

SCHOLIUM I.

61. *Fucundum admodum spectaculum præbent ejusmodi arcus aquei, dum radiis solaribus illustrati Iridis coloribus superbiunt.*

SCHOLIUM II.

62. *Equidem tum æris resistentia, tum aquæ facilis divisio impediunt, quominus arcus sint exacte parabolici; sed qui spectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

C A P U T II.

De Motu Fluidorum vi Aëris contigui producendo.

PROBLEMA VII.

Tab. I. 63. Fig. 12. **C**onstruere Vas ad hortos irrigandos idoneum.

RESOLUTIO.

1. Fiat Vas cylindricum ABCD, exi-
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Tab. I. Fig. 12. quo orificio E instructum, ut digito apposito claudi possit.

2. Fundus vasis CD constet ex lamina exiguis foraminulis pertusa.

Vel.

Tab. I. *Fig. 13.* Fiat vas sphaericum HB collo tenui HE instructum, & hemisphaerium DCB sit, ut ante, foraminulis pertusum.

Dico, si utrumque vas in aquam demergas, eam per foramina fundi intrare; si digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquae effluere; si tandem digitum iterum removeas, aquam per foramina instar roris stillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi posse.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foramina fundi implebitur, donec aqua in vase cum ambiente in eadem libella existat (§. 34 *Hydrost.*). Ast si digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foramina fundi adeo exigua sint, ut juxta aquam effluentem aëri in vas aditus denegetur; aër ambiens impedit, quominus quidpiam aquae effluere possit (§. 95 *Aërom.*). Si digitum removeas, aëris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem Atmosphaeræ extensa in aquam in vase contentam & una cum aqua in aërem ad fundum AB gravitat. Quare cum pressio aëris per orificium in aquam æqualis sit resistentiæ aëris ad fundum (§. 34 *Hydrost.*); aquae pondus hanc superabit, adeoque ea per fundum vasis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

64. Siphonem construere, hoc est, instrumentum cujus ope liquor ex vase hauriri potest.

RESOLUTIO.

Construatur vas FE, cujus pars media ABCD figuram cylindri, extre-
Tab. I. Fig. 14.
ma autem AIB & CED figuram conorum truncatorum habeant: sintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora quam quæ digito appposito commode claudi possunt.

Dico, si vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etsi superius orificium F extet; si digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat; si denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

Aliter.

Cum globo AB connectantur duo
Tab. I. Fig. 15.
tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F sint aperta.

Dico, si tubuli EF extremum liquori immergas & aërem ex vase per tubulum CD ex fugas, liquorem in globum AB assensurum. Quod si jam digito ad lumen D applicato siphonem extrahas, fore ut nihil effluat; ast si digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rursus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aërem ex fugis, perinde est ac si vasis ab aëre evacuati orificium

Tab. I. cium F in liquorem demergas, adeo-
 Fig. 15. que liquor in globi AB cavitatem ascen-
 dere debet (§. 101 *Aërom.*). Quodsi
 digito ad orificium D applicato siphonem
 extrahas, liquor ex eo per lumen
 F effluere nequit (§. 95 *Aërom.*).
 Quamprimum vero digitum ab orificio
 D removes, cum in F tantum
 resistat pondus atmosphæricum, liquor
 autem præter vim gravitatis ab eodem
 pondere atmosphærico per tubulum
 DC impellatur; resistentia a vi majore
 utique vincetur, adeoque liquor per F
 effluet. Q. e. d.

SCHOLIION.

65. Siphone secundo commodo utimur ad
 fluida specificè leviora a gravioribus quibus
 innatant separanda: unde Chymicis, subinde
 non contemnendum præbet usum.

PROBLEMA IX.

66. Siphonem construere cujus ope
 totus liquor ex vase quolibet in aliud
 quodcunque educi potest.

RESOLUTIO.

Tab. I. Fiat tubus recurvus ABC, ita ut,
 Fig. 16. orificio A in plano horizontali posito,
 altitudo minoris DB 31 pedes nun-
 quam excedat. Ad communes usus al-
 titudo dimidii, aut unius, vel alterius
 pedis sufficit. Quodsi brachium minus
 AB liquori immergatur, & per lumen C
 aër exsugatur; liquor ex vase tandiu
 per tubum BC effluet, quamdiu lumen
 A sub liquore constituitur.

DEMONSTRATIO.

Quando aërem ex Siphone ABC
 exsugimus, in eo residuus dilatatur (§.

37 *Aërom.*), adeoque elater ejus de-Tab. I.
 bilior evadit (§. 79 *Aërom.*). Quare Fig. 16.
 cum antea ponderi atmosphærico æ-
 quaretur (§. 34 *Aërom.*); nunc eodem
 minor est. Aqua igitur in tubum AB
 impellitur, donec elater aëris inclusi
 cum fluidi ascendentis gravitate pondus
 Atmosphærae iterum adæquet (§. 93
Aërom.). Quodsi ergo non tanta
 fuerit altitudo BD, ut aqua intra tu-
 bum AB contenta, vi gravitatis respec-
 tivæ qua in Atmosphæram aquæ su-
 perficiei extra tubum incumbentem
 gravitat (§. 28 *Aërom.* & §. 34 *Hy-*
drost.), defectum elateris suppleat; in
 tubum BC descendet. Si jam orifi-
 cium C infra libellam aquæ cui alte-
 rum A immersum est subsistit; gra-
 vitas aquæ respectiva in crure BC est
 ad gravitatem respectivam aquæ in cru-
 re AB, ut altitudo BE ad altitudinem
 BD (§. 41, 47 *Hydrost.*). Quoniam ita-
 que nisus aëris in superficiem aquæ cir-
 ca orificium A gravitantis & aquam
 ad ascensum urgentis continuatur per
 aquam in tubo BC contentam, utpote
 quæ ad descensum isto aëris nisu urge-
 tur; aër ad orificium C resistens ur-
 getur vi ponderis atmosphærici & gra-
 vitate respectiva aquæ, quæ est ut al-
 titudo BE. Et eodem modo patet aë-
 ris nisui prope orificium A resisti vi
 ponderis atmosphærici [quod ob exi-
 guam siphonis altitudinem BE pro eo-
 dem habere licet] & gravitate respec-
 tiva aquæ in tubo BA. quæ est ut al-
 titudo BD. Cum igitur aëri ad orifi-
 cium A minus resistatur quam ad ori-
 ficium C; nisus illius ibidem prævalet,

Tab. I. atque adeo aqua continuo per AB ascendit & per alterum BC descendit, quamdiu orificium A sub fluido demersum & alterum C sub libella constituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmospherici aqua non nisi ad altitudinem 32 pedum Rhenanorum elevari potest (S. 27 Aërom.); altitudo cruris AB, nempe BD, minor esse debet 32 pedibus Rhenanis, ut aqua per siphonem fluat.

SCHOLIUM I.

68. Evidens adeo est, recte rejici artificium HERONIS ope Siphonis per montium vertices in oppositam planitiem aquas deducendi. Jubeat enim HERON, ut extremitatibus Siphonis applicentur epistomia & ad nexum crurum infundibulum per quod aqua infundi possit, utrique siphonis cruri implendo sufficiens. Quoniam itaque aëris auxilio non modo est opus ad primum aquæ in crus minus ascensum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non potest ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmospherico elevari solet. Suffragatur experientia: notum enim nobis est artificium HERONIS irritum successu fuisse tentatum, ubi altitudo major fuerat 32 pedibus Rhenanis.

SCHOLIUM II.

Tab. II. Fig. 17. 18. 19. 69. Illud quoque notatu dignum est, figuram siphonis ad arbitrium variari posse, modo orificium C sit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea remouetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, si ex fluido extrahitur orificium A, fluidum omne per lumen inferius C egreditur, & quod in minore crure AB continetur secum veluti trahit. Quod si siphonem plenus ita constituatur ut lumen utrumque A & C sit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Vi-

dentur adeo fluida in siphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans descendens instar catenæ secum trahat levior.

SCHOLIUM III.

70. Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabula lignea AB infige alterum siphonis orificium C, quæ aquæ innatans & cum imminuta descendens id constanter ad eandem profunditatem demerget.

SCHOLIUM IV.

71. Denique notandum, fluere aquam per siphonem etiam interruptum, si nempe crura AD & EC conjungantur mediante tubo capaciore DE aëre pleno.

PROBLEMA XI.

72. Diabetelem construere; hoc est, vas quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.

RESOLUTIO.

Fundo vasis AFGB afferruminetur Siphonem inversus CDE, ea lege, ut crus longius DE ultra basin vasis exporrigatur, aut minimum ejus orificium sit in basi vasis; crus vero minus CD eandem non prorsus attingat; altitudo denique siphonis minor sit altitudine vasis AG.

Aliter.

Fundo vasis AFBG afferruminetur tubus DE, qui cruris majoris vicem sustinet; loco autem cruris minoris imponatur tubus alius capaciore DC in C apertus.

Dico, si vas AFBG aqua vel alio liquore impleas; quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 21. 22. Dum enim aqua infunditur, in tubo DC, seu crure minore siphonis, ad eandem altitudinem ascendit, ad quam in vase consistit (§. 34 *Hydrast.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE seu cruris longioris subsistit, consequenter per hoc nihil ejus effluere potest. Quamprimum vero plenum extiterit; ultra orificium D subsistit, adeoque vi gravitatis propriae per tubum DE descendit; dumque semel fluit per siphonem CDE, tamdiu fluere debet quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquae immersum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

73. Quodsi vas non fuerit plenum, ad orificium E ore applicato aërem ex siphone CDE exugas; liquor itidem omnis ex vase effluet (§. 66).

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 23. 74. Hinc construi potest poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis; postquam sufficienter vinum hausisti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta, donec nihil amplius effluere sentis. Tum poculum KL alteri porrige, & jube ut ore ad orificium I applicato liquorem exugat. Ubi igitur haustu absoluto poculum ab ore remove-rit, vinum adhuc fluens vestem madidabit.

SCHOLIUM I.

Tab. II. Fig. 22. 75. Si tubus CD vitreus fuerit, aërem in suprema ejus parte residuum una cum aqua fluente per tubum DE successive abripi observabis. Jucundum imprimis spectaculum, ubi aërem per tubulum vitreum fundo vasis in E infixum magna celeritate cum aqua

defluentem conspicies. Hoc Phenomenon pri-Tab. II. mus observavit R. P. DE LA ROCHE (a), Fig. 22. cumque experimentum repeterem, varias ad-huc circumstantias annotavi, unde usus in praxin redundat (b). Expertus inter alia sum, quod, cum diameter orificii D esset 6 li- nearum seu digiti dimidii, diameter vero in-ferioris E unius saltem lineæ, aër, tubum DE per superius D ingressus, per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impediverit. Hinc vero jam constat ratio, cur in diabetis istiusmodi aquæ fluxus interdum sistatur, an- tequam omnis effluerit; continuandus tamen aliquantisper, si tubus DC elevetur; atque hinc manifestum mihi videtur, quod luminis tam superioris D, quam inferioris E, diame- ter eadem esse debeat, nec ipse tubus lumini- bus capacior.

SCHOLIUM II.

76. Quodsi altitudo tubuli DE major fuerit altitudine vasis AG, hoc non obstante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat; digito ad E appposito, tubus DC attol- latur, ita enim aër in tubo DE contentus di- latabitur, ac, elatere ejus imminuto (§. 78 Aërom.), aqua intra tubum DC altius assur- gens in tubum DE sese præcipitem dabit. Quodsi itaque poculi KL operculo K tubus Tab. II. afferruminetur; ubi bibere volueris, non Fig. 23. opus est ut sugas, sed operculum attolli- sufficit.

PROBLEMA XI.

77. Aquam per siphonem interrup- tum elevare.

RESOLUTIO.

I. Duo vasa æqualia AB & IK in ea-Tab. II. dem planitie collocentur, quorum Fig. 24. unum AB sit apertum, alterum vero clausum, utrumque aqua plenum.

X x 3 2. Ex

(a) Vid. *Diarium Trevoliense* A. 1709. art. 86. p. 1709.
(b) In *Actis Erulit.* A. 1711. p. 13.

- Tab. II. 2. Ex vase tertio QR undique clauso, & ab aqua vacuo, tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, sed non major quam 31 pedum esse potest) in vasa AB & IK, quorum prior fundum vasis AB fere attingit, alter SH operculo vasis IK afferruminatur.
3. Denique vasi IK afferruminetur tubus alius LN epistomio M instructus, & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN descendit, epistomio M aperto, aliam ex vase AB in vas QR per tubum DC ascendere debere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim gravitas aëris in tubo SH contenti, respectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla sit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediatur; perinde est ac si tubus DC jungeretur cum tubo LN. Sed in hoc casu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN descendit, per alterum DC ascendit (§. 66). Ergo etiam in altero casu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vase QR jungitur, aqua per DC ascendere debet, dum per LN descendit. *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

78. Poterat idem eodem modo demonstrari, quo ascensum & descensum aquæ continuum in cruribus siphonis communis supra evicimus.

COROLLARIUM.

79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem ele-

vabitur, si in eadem altitudine collocentur Tab. II. plura vasa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, G &c. vasaque G & D, F & C, E & B tubis Pa, Mb, Ic, vasa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vasis D, C & B tubi R, S, T cum epistomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, EL longiores sint. Epistomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollit, atque ita porro.

SCHOLIUM.

80. Aut magnum requiritur præcipitii perpendicularum, aut ingens vasorum apparatus, si ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem si in vasa B, C, D, mercurius infunderetur, tubus BT 27 digitorum responderet tubo AE 31 pedum (§. 29 Aërom.); sed hac ratione elevatio aquæ nimis sumtuosa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum responderet.

THEOREMA XV.

81. Fluidum per siphonem ABC eodem modo acceleratur, quo acceleratur fluidum per foramen vasis effluens a fluidi intra vas ad altitudinem profunditatis orificii C cruris longioris BC infra libellam fluidi AD, cui crus siphonis minus BA immersum, æqualem consistente.

DEMONSTRATIO.

Patet ex Demonstratione Problematum 9 (§. 66), vim qua fluidum per siphonem urgetur esse ut gravitatem fluidi absolutam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris supra libellam fluidi cui immersum; consequenter ut altitudinem

Tab. I. dinem DE (§. 34 *Hydrost.*), quæ est excessus istius profunditas infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per siphonem accelerari debet quo acceleratur fluidum per vasis foramen effluens, si intra ipsum ad altitudinem DE consistat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

82. Quoniam aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium (§. 48); celeritas qua eadem per siphonem fertur eadem est, quam acquireret cadendo per profunditatem orificii extra aquam infra ipsius libellam DE.

COROLLARIUM II.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diversis vasis erumpentium celeritates sunt in ratione subduplicata altitudinum earum super foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diversos siphones fluentium erunt in ratione subduplicata profunditatum orificiorum per quæ effluunt infra libellam aquarum quibus crura minorum siphonum immerfa.

COROLLARIUM III.

Tab. II. Fig. 24. 84. Eodem modo patet, in siphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N effluentis eam esse, quam acquireret cadendo per altitudinem quæ est æqualis differentiæ tubi LN & partis tubi DC ultra libellam aquæ in vase contentæ (§. 77).

COROLLARIUM IV.

85. Similiter patet, per diversos siphones interruptos aquam fluere in ratione subduplicata earundem differentiarum tuborum LN & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vase AB computata.

SCHOLIUM.

86. Hinc prono alveo fluunt alia in Theoria & Praxi siphonum utilia, quæ antecedentium gnarus sua sponte inde inferet.

PROBLEMA XII.

87. *Aquam vi elastica aëris compressi movere.* Tab. II. Fig. 26.

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio assurgat tubus EF fundum non prorsus contingens, sitque apertura aliqua in G epistomio ad arbitrium obturanda. Quodsi jam per aperturam G sive ope follis, sive syringis, sive Antliæ Pneumaticæ, sive flatu oris vehementiore aërem intruseris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aër comprimetur in parte vasis reliqua (§. 17 *Aërom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 78 *Aërom.*). Cum adeo elater externi ambientis minor sit, si clauso epistomio G epistomium F aperias, aqua ex vase AD per tubum EF ab aëre sese expandente expelletur.

SCHOLIUM.

88. Si aër ope Antliæ comprimitur, non opus est epistomio G, sed sufficit cochlea muniti aperturam. Tubus vero FE in cochleam desinit, ut ad Antliam firmari possit.

PROBLEMA XIII.

89. *Vi aëris loco suo expulsi aquam movere.* Tab. II. Fig. 27.

RESOLUTIO.

1. Sit vas quodcunque BQ per diaphragma RH in duo receptacula distinctum.
2. In superiori sit catinus DB foramine in K pertusus, quod cochlea obturari possit.

Tab. II. 3. Per ejus medium transeat tubus AC
Fig. 17. diaphragma RH non prorsus attingens & epistomio I munitus.

4. Fundo catini conferruminetur tubus DEL, ultra diaphragma ad fundum fere vasis inferioris HQ protensus, tuboque AC longior.

5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere assurgens.

Dico, si receptaculum superius BR aqua repleas per foramen K, & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo superiore BR ejiciatur, & per tubulum DL in inferius descendat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aër in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17 *Aërom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 78 *Aërom.*). Quodsi ergo epistomium I aperias, elater aëris inclusi fortior magis premit aquam in vase BR, quam externus ad A resistit. Aquam igitur ex vase BR per tubum AC expellit. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

90. Quodsi tubulus AB exiguo lumine fuerit instructus, ut aqua ex eo saliat; ingeniosa hac machina ab inventore HERONE Alexandrino FONS HERONIS appellatur. Patet ex demonstratione aquam hic urgeri ad saltum vi elastica aëris compressi, quemadmodum in Problemate precedente: consequenter fontem HERONIS pendere a modo ingenioso aërem intra vas vi structura fontis comprimendi.

PROBLEMA XIV.

91. Aquam per rarefactionem aëris expellere.

RESOLUTIO.

1. Sint duo vasa ABCD & CDEF per Tab. II. diaphragma CD a se invicem separata, habeatque superius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipso capacitatis. Fig. 24.
2. Ex diaphragmate CD ascendat tubulus IK fundum catini non prorsus attingens.
3. Per fundum catini exurgat alius tubulus LM, cujus lumen L à diaphragmate exiguo intervallo distet.

Dico, si vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF supponantur, fore ut aqua ex vase AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aër in vase CEFD incalcescit, rarefit (§. 23 *Aërom.*) ejusque elater intenditur (§. 146 *Aërom.*). Elater igitur aëris inclusi fortius premit aquam in vase AD contentam, quam externus ad M resistit; consequenter aqua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

92. Si aqua vi aëris compressi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur quo acceleraretur pressione aqua ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad equilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elatorem primitivi, seu ejus qui ad orificium tubi resistit.

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aëris compressi per tubum ejicitur, vis quæ impenditur ad eam ejiciendam est excessus vis elasticæ aëris compressi supra vim elasticam aëris ad orificium tubi resistentis, reliqua ad vincendam resistentiam insumta. Quoniam igitur perinde est, sive aqua ejicienda urgeatur vi elastica aëris, sive vi gravitatis aquæ eidem æquali; motus ejus eodem modo accelerari debet quo acceleratur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ejus qui ad orificium tubi resistit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam constituta aqua æquilibrium cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis servat (§. 48).

COROLLARIUM II.

94. Et si diversimode compressus aër ejicit aquam, celeritates quibus ejicitur sunt in ratione subduplicata altitudinum, ad quas constituta aqua cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis æquilibrium servat (§. 38).

COROLLARIUM III.

95. Quoniam elater aëris magis compressi est ad elaterem minus compressi, ut massa aëris magis compressi ad massam aëris minus compressi sub eodem volumine (§. 80 *Aërom.*); si aër primitivus in vase, antequam comprimitur, fuerit idem cum exteriori ad orificium tubi per quem aqua ejicitur resistente, vis quæ aqua ejicitur est ut differentia massarum aëris compressi & primitivi.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

THEOREMA XVII.

96. Si aqua vi aëris compressi salit, ad eam altitudinem ascendit ad quam constituta aqua æquilibrium servat cum excessu elateris aëris compressi supra resistentiam aëris ad orificium tubi.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aëris compressi saliens ea celeritate ejicitur quam acquireret cadendo per altitudinem ad quam constituitur aqua æquilibrium servans cum excessu elateris aëris compressi supra elaterem ad orificium resistentis (§. 92); dum vi aëris compressi urgetur, perinde est ac si per illam altitudinem descendisset. Enimvero si per eam ascendisset, ad altitudinem saliret isti æqualem (§. 322 *Mechan.*). Ad tantam igitur etiam salire debet, dum vi aëris compressi impellitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

97. Quia in fonte HERONIS vis elastica Tab. II. aëris in vase PR compressi æquilibratur Fig. 27. columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem salit ad altitudinem æqualem altitudini orificiæ D a libella aquæ in vase HQ.

COROLLARIUM II.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL descendit, quantum per orificium A ejicitur, adeoque altitudo orificiæ D supra libellam aquæ in vase HQ continuo decrescit; altitudo quoque saltus continuo decrescit.

Y Y

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. II. 99. Et cum in vase AD aër continuo
Fig. 26. magis magisque dilatetur, dum aqua per
tubum EF salit (§. 7 *Aërom.*), ac præ-
terea, aquæ libella in eodem vase AD con-
tinuo descendente, resistentia aquæ in tu-
bo EF crescat (§. 34 *Hydrost.*); altitu-
do quoque aquæ salientis continuo de-
crescere debet (§. 95).

SCHOLIUM.

100. Nimirum gravitas aquæ in tubo EF
ultra libellam in vase AD consistens su-
peraccedit resistentia aëris ad orificium F &
cum eadem unita agit, ita ut resistentia tota-
lis quam experitur vis elastica aëris com-
pressi aquam in vase ad ascensum per tubum
urgens, componatur ex elatere aëris ad orifi-
cium F resistentis & gravitate aquæ in tubo
FE ultra libellam in vase consistens eleva-
tæ. Sed quoniam, aqua in aëre saliente, resisten-
tia ista æquatur columnæ aquæ 32 pedes
Rhenanos alta (§. 28 *Aërom.*), tubus ve-
ro EF vix dimidii vel unius pedis in vase
vacuo existit; resistentia aquæ in tubo vulgo
non attenditur.

PROBLEMA XV.

101. Data ratione aëris primitivi
ad compressum; invenire altitudinem
saltus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam aër comprimitur in ra-
tione ponderum (§. 73 *Aërom.*),
vis, autem elastica aëris primitivi

æquilibratur columnæ aquæ 31 pe-
dum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*);
ex data ratione aëris primitivi ad
compressum inveniri potest altitudo
aquæ cum compresso æquilibrium
servantis in vacuo (§. 302 *Arithm.*).
2. Quodsi ergo aqua in aëre libero
salit, cum resistentia aëris prope ori-
ficiam æquetur columnæ aquæ 31
pedum Rhenanorum (§. 28 *Aërom.*);
altitudo inventa mulctanda est 31
pedibus Rhenanis, ut relinquatur al-
titudo saltus.

Ex. gr. Sit aër compressus duplus aëris
primitivi, adeoque ratio primitivi ad com-
pressum ut 1 ad 2; reperietur columna
aquæ compresso æquilibratæ 62 pedum
Rhenanorum. Quodsi ergo aqua in aë-
re libero salit, resistentia est 31 pedum,
adeoque altitudo saltus itidem 31 pedum.
Eodem modo patet, si aër compressus sit
triplus vel quadruplus primitivi; fore al-
titudinem saltus in casu priore 62, in pos-
teriore 93 pedum, & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis
aëris rarefacti ad volumen condensati seu
primitivi, datur ratio elateris quo rarefiens
expanditur ad elaterem primitivi (§. 148
Aërom.); eodem modo inveniri potest al-
titudo saltus, si constet quantum eo gra-
du caloris qui aëri incluso inest idem
dilatari possit.

SCHOLIUM.

103. Ex his principiis alia bene multa
deducere licet: sed nobis dicta sufficiant.

C A P U T III.

De Machinis quibus Aqua elevatur.

DEFINITIO V.

104. **V**alvula seu *Affarium* est obturaculum vasis vel tubi, quod introrsum aperiri potest; ast quo magis contra fundum seu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

105. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regressum vero impedit.

PROBLEMA XVI.

106. *Valvulam seu affarium construere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 29. Valvulae simplicissimae C conficiuntur ex corio, habentque figuram circulem, & ansula D clavis affigitur fundo vasis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur.

Tab. II. Fig. 30. Fieri etiam possunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compressis AB & foraminibus circum circa pertusis; quae alio orbiculo orichalceo CD sursum deorsumque mobili teguntur.

Tab. II. Fig. 31. Parantur porro ex lamina cuprea E, & corio tenui obducuntur, circa cardinem in H mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G instruuntur.

Quemadmodum vero haecenus descriptae valvulae embolis potissimum

conveniunt, ita in fundo vasorum vel tuborum sequente utendum:

1. Foramen A torno excavetur, tantisper in conum desinens. Tab. II. Fig. 32.

2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum, & clavo aut tigillo transverso D impediatur ne inverti possit.

Vel foramen hemisphaericum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA XVII.

107. *Syngem, hoc est, Machinam construere, ex qua aqua attracta violenter expelli potest.*

RESOLUTIO.

1. Construatur cylindrus ABDC ex materia solida, intus cavus, inferius tubulo CDF instructus. Tab. III. Fig. 33.

2. Immittatur embolus K ex corio, vel alia materia quae humorem facili imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipsum & cylindrum aeri vel aquae nullus concedatur transitus.

Quodsi tubulo F aquae immisso, embolum K extrahas, in cavitatem ab aere vacuum ea ascendet (§. 101 *Aerom.*). Embolo igitur intruso, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM I.

108. Impetus aquae eo major, ipsaque aqua per longius spatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM II.

109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius spatium aqua propellitur.

PROBLEMA XVIII.

110. *Construere Antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi potest.*

RESOLUTIO.

- Tab. III. Fig. 34. 1. Paretur cylindrus cavus ex materia solida in aqua verticaliter erigendus, cujus inferior basis I valvula introrsum hiante instruat (S. 106).
2. Immittatur embolus EK valvula sursum hiante in L instructus.
3. Pro ejus faciliore extractione & depressione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam I elevat & in cavitate cylindri seu tubi AD ruit (S. 101 *Aërom.*). Quodsi ergo idem rursus deprimatur, valvula I aquæ exitum negante (S. 104), valvula L aperitur & aqua ultra embolum ascendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIX.

111. *Construere Antliam, quæ per meram expulsionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.

- Tab. III. Fig. 35. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata est, divisus in aqua collocetur.

2. Embolus F valvula G instructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi possit. Tab. III. Fig. 35.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depresso, valvula G aperitur (S. 104), & aqua in cavitate cylindri BC ascendit (S. 34 *Hydrost.*). Sed dum rursus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (S. 104), & sic aqua vi emboli, agitatione sæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

112. *Si quod vitium contrahit hoc Antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utimur, ut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, si vis sufficiens in K applicetur: ea enim attolli aquam palam est.*

PROBLEMA XX.

113. *Construere Antliam, quæ aquam attractam violenter aliorsum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in fundo valvula L instructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.
2. Immittatur embolus K sine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumescit, tonatus, & corio vel stupa vestitus.
3. In H afferruminetur tubus alius NH cum valvula sursum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (S. 105) & in cavitate

Tab. III. Fig. 36. cavitatem cylindri ascendit (§. 34 *Hydrost.*). Sed cum rursus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLIION I.

114. Ingeniosa hujus machinae inventor fuit CTESIBIUS, qui primus de aqua Antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis Mechanicis & Hydraulicis suo aere celebris, VITRUVIO autore (a). Ab eo Antliae dicuntur Machinae CTESIBIANAE.

SCHOLIION II.

115. Ejus vires, sublato affricu, multiplicare studuit diu multumque in Theoria & Praxi aquarum elevandarum versatus MORLANDUS (b). Virga nimirum ferrea D inter trochleas B & C, evitandi affricus gratia, sursum deorsum movetur (§. 956 *Mechan.*) & ponderibus E, F, G, H generatur, ut aquam fortius per tubum plumbeum TV expellat embolus LM ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad basin superiorem NO cylindri orichalcei RN dextre aptatum sine omni fere frictione mobilis; ad quam tollendam & duodecim annorum studium, & multum argenti se impendisse faetur laudatus inventor.

PROBLEMA XXI.

116. Aquam ope catenarum fitulis instructarum elevare.

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 38. 1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut prisma sexangulare MN circa axiculum ferreum mobile. 2. Eo in loco quo aqua elevari debet, constituatur cylindrus aut prisma simile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.

(a) Lib. 10. c. 12. conf. lib. 9. c. 9.
(b) *Elevation des Eaux* c. 4. art. 1. p. 35. & seqq.

3. Situlae S catenis connectantur, quae Tab. III. Fig. 38. utrumque cylindrum vel prisma ambiant. Alii fitulas coriaceas funibus connexas praefereunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod saepius accidit) catenis diffilientibus fundum aquae petant.

Quodsi cylindrum superiorem OP convertas, inferior similiter convolvitur & fitulae per aquam trajectae aquam hauriunt superius effundendam.

SCHOLIION.

117. Quoniam fitula utrinque vacua inaequilibrium sunt; pondus elevandum est aqua in fitulis ex altera parte contenta, ubi ab affricu discesseris, quae in his Machinis non exigua est.

PROBLEMA XXII.

118. Rosarium construere ad elevandam aquam.

RESOLUTIO.

1. Tubus ligneus AB in aqua constituitur tantae altitudinis, ad quam Tab. III. Fig. 39. aqua elevanda. 2. Tum sub aqua, tum in superiori loco quo aqua elevanda, collocentur ut in Problemate praecedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles. 3. Ad funem, cujus extremitates inter se connexae, circa cylindros GH & ED circumductum, aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor sit frictio) hemisphaeria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Tab. III. Fig. 39. Dum enim cylindris circumvolutis globi aut hemisphæria per tubum AB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

S C H O L I O N.

Tab. III. Fig. 40. 119. Alii utuntur prismatibus quadratis loco tuborum & tabulis ligneis quadratis loco globulorum. Immo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis substitunt. Ceterum hæc Machina usum quoque habet in fossis & fluminibus a sœcibus purgandis. Ingens tamen affricus esse solet, quem parum curare solent, ubi virium ad aquam elevandam compendium quæri necessitas nulla jubet: id quod & de aliis machinis, in quibus ingens affricus est, notandum.

P R O B L E M A XXIII.

120. Aquam tympano vel rota situlis instructa elevare.

R E S O L U T I O.

Structura admodum variari solet pro diversitate quantitatis aquarum elevandarum, & altitudinis ad quam elevanda.

Tab. IV. Fig. 41. Si magna aquæ quantitas ad exiguam altitudinem elevari debet; tympanum construitur AB in 8 cavitates divisum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis sustinet, ut aqua per ejus foramina E in cistam G effundi possit.

Tab. IV. Fig. 42. Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, situlæ lignæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trahuntur, rota circumacta, & superius in B effundunt.

Quodsi rotæ palmulas non in fronte gerant, spatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonnisi foramine in palmula superiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rursus effunditur.

Sunt qui fitulas congioles A vel (quod præstat, ne scilicet tantum aquæ perdatur) capsas quadratas unico foramine instructas B ad latus rotæ aptant: sunt & qui helicibus CD à peripheria ad centrum fere tendentibus instruunt. Alios modos silentio præterimus.

S C H O L I O N.

121. Rotæ istiusmodi structura plurimum inter se variant: non tamen omnes ejusdem nota. Sunt enim, quæ multum aquæ inutiliter dissipant, antequam in receptaculum commune effundatur. In praxi tamen ejus non semper habetur ratio, modo aquæ sufficiens copia elevari possit.

P R O B L E M A XXIV.

122. Cochlea ARCHIMEDIS aquam elevare.

R E S O L U T I O.

1. Circa cylindrum AB circumvolutur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea designare solemus (§. 854 Mech.).
2. Cylindrus inclinetur ad horizontem sub angulo 45 circiter graduum, sitque orificium tubi B sub aqua demersum.

Quodsi cochleam ita circumagas ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem ascendet tandemque in A effundetur.

Aliter.

Aliter.

Tab. I. Basis cylindri tam superior, quam inferior, dividitur in 4 vel 8 partes æquales, & puncta divisionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c. in superficie cylindri descriptis, in quas transfertur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividuntur in tot partes æquales, quot sunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HI partes duæ, in CK tres &c. transferantur, ut adeo tota cylindri superficies in areas quadratas sit divisa.

2. Anguli diagonaliter oppositi connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenso facile designantur, & juxta harum ductum helice fulcetur cylindrus.

Tab. IV. Fig. 48. Ad helicem firmentur asserculi admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.

4. Basibus denique circum circa affigantur asseres tenues & annulis ferreis minuantur, totaque superficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION I.

123. Peripheria basium cylindri dividi potest in quotcunque partes æquales, & in lineas verticales puncta divisionum conjungentes transfertur distantia helicum, quoties fieri potest, in tot partes æquales subdividenda quot sunt lineæ verticales, ut inde divisiones earum determinentur, quemadmodum in resolutione Problematis præcepimus.

Si diameter totius cochleæ 18 digitorum diameter axis 6 vel 4, distantia helicum 9 digitorum esse solet.

SCHOLION II.

124. *Hac Machina exigua vi multum aquæ attolli posse, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non sufficit; sed quæ ab una effunditur, haurienda est ab altera, & ita porro.

PROBLEMA XXV.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelso deducere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur turris, aut aliud ædificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requisiverit.
2. Intra turrim seu ædificium aqua elevetur vel ope rotæ ingentis situlis instructæ (§. 120), vel sitularum catenis connexarum (§. 116), vel rosarii (§. 118), vel cochlearum Archimedæarum (§. 122), vel antliarum (§. 110, 111), viribus vel animatis vel inanimatis legitime applicatis, juxta regulas C. 17 *Mechanica* (§. 876 & seqq.) traditas.
3. Aqua effusa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati sint tubi per quos iterum descendet.
4. Ne aqua ultra latera aheni unquam assurgat, unus alterve ad summam fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium resuat unde hauritur.

5. Hi tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defossis, & ad eum usque locum protensis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. His denique in locis in quæ aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantælibet amplitudinis, in quos hient lumina horizontalium epistomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti possit (§. 5).
- Aperto enim epistomio aqua in tubo verticali ascendet (§. 34 *Hydrost.*).

S C H O L I O N.

127. Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inseritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochlea ARCHIMEDIS, ac cylindri superiores rosariorum & catenarum situlis instructarum instruuntur rotis radiatis, quibus aliæ dentatæ occurrunt.

Ex. gr. Ponamus rosarium calcando moveri debere. Construendum igitur erit tympanum ingens (§. 886 Mechan.), cujus axi una infigenda rota stellata, occurrens radiata, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiata verticalis ad conservandum impetum. Quodsi equus eandem Machinam movere deberet, axi verticali temone instructo (§. 888 Mechan.) infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodsi homo partim trahendo, partim deprinendo, aquam ope rosarii elevare teneretur, tympano substitueretur axis cum scyialis & rota verticali (§. 882 Mech.). Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vetis homodromi versando (§. 884 Mech.) infigenda rota radiata, quæ circumagat stellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentatæ dentes in plano, axem cum cylindro rosarii communem habenti, occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis casibus fieri debeat, modo Problemata Mechanica de potentiarum ad Machinas applicatione fuerint perspecta.

C A P U T IV.

De Fontibus Salientibus.

P R O B L E M A XXVI.

128. **C**onstruere fontes salientes.

R E S O L U T I O.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiore (§. 110 & seqq.) & intra vas satis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rursus descendat.
2. Cum tubis hisce connectantur alii horizontales sub terra defossi, per

quos aqua usque ad originem fontium salientium deducatur.

3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo sit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum profliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 56).

S C H O L I O N I.

129. Quodsi aqua saliens ad altitudinem datam ascendere debet, quesito satisfieri potest per Schol. 3, Theor. 12 (§. 52).

SCHOLIUM II.

130. Quodsi desideretur, ut tubi dato tempore datam aqua quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per Theor. 3 Cor. 1 (§. 23), & per Theor. 5 (§. 27).

SCHOLIUM III.

131. Si denique aquarum ex diversis unius fontis tubis salientium altitudines inaequales requirantur; quasito poterimus per Theor. 12 (§. 49) & Theor. 13 (§. 56): ubi & observasse juvabit qua superius in Scholiis Theor. 12 (§. 50 & seqq.) monuimus.

PROBLEMA XXVII.

132. Fontem construere, ex quo aqua erumpens pilam aeneam projiciat, descensumque parantem continuo repellat.

RESOLUTIO.

Tab.V. Fig.49. 1. Fiat globus aeneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate sua impetum impressum eludat.

2. Tubus, per quem aqua salit, BC fit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquae sufficiens copia ex insigni altitudine in tubum BC deducatur. Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum, & descendentem constanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus fit ad horizontem exacte perpendicularis, per hypoth. aqua per eum prorumpens perpendiculariter ascendit. Quoniam vero ex insigni altitudine delapsa, per hypoth. & ex tubo ea celeritate erumpit quam cadendo per istam altitudinem acquireret (§. 48), magna quoque celeritate movetur (§. 91, 473 *Mechan.*), adeo-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

que globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari ascendendi (§. 534 *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit ad quam vi impressa ascendere licet (§. 317 *Mech.*), vi gravitatis suae juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215 *Mechan.*). In descensu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impresso, ut ante, ascendere cogit. Quamobrem globus in aere pendulus sursum deorsum feretur, quamdiu aqua ex tubo saliens satis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi ascensum descensumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcumque alterum non nimis grave eidem substituere licet, ex. gr. avem cum alis expansis.

SCHOLIUM.

134. Quoniam globus, ut ex alto rursus descendens in aquam salientem incurrat, in eadem constanter linea perpendiculari ascensus descensusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime exposita.

PROBLEMA XXVIII.

135. Construere fontem, qua aquam versus diversas plagas projiciat.

RESOLUTIO.

Sit tubus AB aquam advehens verticalis & ipsi infixi sint alii horizontales DE & GH, alii, ad horizontem versus diversas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem versus plagas illis intermedias reclinati ut FL. Tab.V. Fig.50.

Tab. V. Quoniam aqua directionem luminis
Fig. 50. per quod prorumpit retinet; per lumen A saliens perpendiculariter ascendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diversæ amplitudinis (§. 59), & ad diversas plagas tendentes describet. Fons igitur aquam versus diversas plagas ejicit.

Aliter.

Tab. IV. Tubus AB per quem aqua salire
Fig. 51. debet sit superius clausus in A, & lumen loco vel undiquaque, vel in dimidia superficiem parte, foraminulis exiguis pertusus.

Quodsi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis; aqua versus omnes plagas per foraminula saliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapsus (§. 58) satis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodsi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere assurgentem epistomio C instruas; eo aperto, spectatores veluti ab imbre improvise madidati recedent.

SCHOLIUM.

137. Probe autem tenendum est, lumen per quæ aqua egreditur diametros ipsorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aëris resistentia aliaque impedimenta (§. 50 & seqq.) impetum aquæ statim eludant. Ipsi quoque fontes sufficientem aquæ copiam suppeditare; aqua impetu sufficiente gaudere debent.

PROBLEMA XXIX.

138. Fontem construere, ex quo aqua instar pluvie profiliat.

RESOLUTIO.

IV. Tubo, ex quo aqua salire debet, lenticularum ruminetur globus, vel corpus ex duobus segmentis spheri-

Tab. IV. cis compositum AB, ex lamina metallica confectum, cujus superior superficies minimis foraminulis pertundatur. Fig. 52.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu versus superiorem laminam AB propulsa sub forma tenuissimorum filamentorum in varias guttulas mox dispergendorum profiliat.

PROBLEMA XXX.

139. Fontem construere, ex quo aqua profiliens ad modum lintei expanditur.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Tubo AB afferruminentur duo segmenta spherica C & D, quæ fere se invicem tangant &, mediante cochlea E, ad eum situm facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel laxior fiat, prout usus postulaverit. Fig. 53.

Alii vel in tubis lumine destitutis, vel in corporibus sphericis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam saliens ad modum lintei expanditur, si impetus fuerit sufficiens.

PROBLEMA XXXI.

140. Fontem construere, quæ aquam spumescentem jucundo spectaculo ejiciat.

RESOLUTIO.

Tab. V. Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari possit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur. Fig. 54.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens spumescet, ac fere nivis aërem opplentis floccos æmulabitur.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

141. *Fontem construere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque fitos derivari possit, & directionem luminis retineat; non alia re opus est, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abscondantur, quorum orificia hient per eas partes unde aqua proflire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aqua salienti figuram varias conciliare licet, concipi potest. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.*

PROBLEMA XXXIII.

143. *Construere fonticulum salientem, qui, ubi salire desit, clepsydre instar inverte potest.*

RESOLUTIO.

- Tab.V. Fig.55. 1. Fiant duo vasa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua saliens consumere debet; tantoque majori intervallo PN a se invicem remota quanto major aquæ salientis altitudo desideratur (§. 49).
2. Sit BAC tubus recurvus in C epistomio instructus, & DEF tubus alius itidem recurvus in D epistomio munitus.
3. In I & K sint tubuli alii utrinque aperti, & fundos vasorum NO & LM fere attingentes: quousque similiter tubi QR & ST pertingunt.

Quodsi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epistomio C, ea profiliet fere ad K, & delapsa per tubulum I apertum in vas NO, ruet aëremque contentum per tubum QR expellet. Ubi vero aqua omnis ex vase LM effluxerit; machina inversa, delapsa ex vase NO salientem efficiet.

COROLLARIUM.

144. Si vasa LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ spatium tota effluat; Clepsydram habebimus salientem in suas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA XXXIV.

145. *Construere mallucium cum fonticulo saliente.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vasis, cui aqua infunditur. Tab.V. Fig.56.
2. Ex vase descendat tubus ab L usque ad M, ubi versus I inflectitur.
3. In K applicetur epistomium, quo aperto aqua profiliet fere ad L usque (§. 49).
4. FG sit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, si aqua salienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia superius exposita (§. 135. & seqq.).*

PROBLEMA XXXV.

147. *Flatu oris aquam salientem efficere.*

RESOLUTIO.

1. Sit AB sphaera vitrea vel metalli- Tab.V. Fig.57.
ca, &

Tab.V. 2. in ea firmetur tubulus CD exiguo
Fig. 57. orificio in C instructus, & in D infimum sphaeræ punctum fere attingens. Dico: si aërem per tubulum CD exsugas, & orificium C in frigidam statim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in sphaeram ascendat. Quodsi iteratis suctionibus ultra medietatem fuerit repleta, & ore in C applicato aërem per tubulum infles, remoto ore aqua profiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aërem exsugas, in sphaera AB inclusus rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerso tantum fere aquæ ascendere debet, quantum aëris fuerit eductum (§. 149 *Aërom.*). Quodsi vero per tubulum CD aërem infles, is per aquam specificè graviolem (§. 57 *Aërom.*) ascendet (§. 99 *Hydrost.*); consequenter aër inclusus comprimetur (§. 5 *Aërom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

148. Quodsi hanc sphaeram aquæ ebullienti immittas; aër rarefiet (§. 23 *Aërom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD salire debet.

SCHOLIUM.

149. *Fonticulus hic ab inventore HERONE nomen Pila HERONIS sortitus est.*

PROBLEMA XXXVI.

150. *Fonticulum construere accensis candelis salientem.*

RESOLUTIO.

Tab.V. 1. Ex lamina metallica fiant duo vasa
Fig. 58. cylindrica AB & CD.

2. Jungantur tubis utrinque apertis KL,

ut aër ex superiore in inferius descendere possit. Tab.V. Fig. 58.

3. Tubis afferruminentur candelabra H;
4. operculo vero basis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epistomio G instructus, & ad fundum fere vasis protensus.
5. In Q sit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi possit. Dico, candelis in H accensis, aquam per tubum EF salire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis 14 (§. 91).

SCHOLIUM.

151. *Hoc eodem artificio efficies statuam ad præsentiam Solis, vel candelis accensis, lacrymas effundentem. Neque enim alia re opus est, quam ut ex cavitate in qua aër rarefit tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.*

PROBLEMA XXXVII.

152. *Fontem intermittentem construere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vasis AB ascendat tubus Tab.V. EF utrinque apertus, foramine in Fig. 59. M exciso.
2. Tubus hic afferruminetur tam vasi superiori in H, quam inferiori in E.
3. Vas superius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi possit; in basi autem inferiore multa foraminula, per quæ destillare queat.
4. In vase inferiore sit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat nisi ad altitudinem EM constituta.

Dico

Tab.V. Dico, aquam ex hoc fonte per inter-
Fig.59. valla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine M aperto aëri externo per tubum EF in vas superius AB aditus pateat; aëris inclusi elater æqualis est ponderi atmosphærico (§. 33 *Ærom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vase contentæ ipsi juncta pressio- nem majorem efficit, quam resistentia ponderis atmosphærici ad foraminula, adeoque aqua destillare debet. Quam primum vero aqua delapsa foramen M occludit, ut nullus amplius aër in lo- cum aquæ delapsæ succedere possit; perinde est, ac si vas quoddam exi- guo orificio instructum inverteres, adeo- que fluxus aquæ per foraminula siste- tur (§. 95 *Ærom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque assurgit, per foramen G in cavitatem vasis CD descendit. Ea igitur defluente, foramen M rursus aperitur, aërique aditus in vas superius AB denuo conceditur. Unde patet aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus adeo fontem intermittentem. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Quodsi fonticulum per intervalla sa-
Fig.60. lientem desideres, fiant omnia ut ante, nisi quod loco foraminulorum aptandi sint tubi recurvi PQT & RSV.

Aliter.

- Tab.V. 1. Sit tubus EF aquam advehens in ca-
Fig.61. vitatem vasis AB.
2. Ex hoc vase descendat siphon. GHI in minus CD lumine conveniente in L instructus.

Quamprimum aqua ultra siphonem in Tab.V. AB ascenderit, per siphonem fluere, do- Fig.61. nec vas exhauriatur, (§. 72) adeoque tandiu per lumen L saliet. Quodsi igitur efficias, ut plus aquæ per lu- men L saliat quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermit- tentem.

SCHOLIUM I.

153. Hoc posteriori artificio haud difficul- ter efficias, ut statua aquas evomant ex im- proviso in adstantes.

SCHOLIUM II.

154. Priori autem superstructa est lam- pas, quam in gratiam amici inventam publi- ci deinde juris feci (a), & in sequenti Pro- blemate denuo exhibeo.

PROBLEMA XXXVIII.

155. Lampadem construere, qua eam- dem quantitatem olei ellychnio constan- ter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.

RESOLUTIO.

1. Fiat vasculum cylindricum ACDB, Tab. VI. cui oleum infundi possit; & ipsi affer- ruminetur aliud minus formam pa- Fig.62. rallelepidi habens FED, & rostro FH instructum pro recipiendo el- lychnio.
 2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam fornici AC.
 3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vasculi AB parieti adhæreat, quem *Tracheam* appello. Ejus
- Z z 3

(a) In *Actis Erudit.* A. 1711. p. 30. & seqq.

Tab.
VI.
Fig. 62.

- Ejus osculum superius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O superficiem olei ad libellam HI constituti lambit.
4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque similiter apertus & ad eandem olei libellam HI protensus.
 5. Fundo vasis DB afferruminetur tubulus QR, cujus osculum superius Q ultra libellam olei tantillo emineat, & transeat per matricem cochleæ qua vas ABDC ad pedamentum VTX firmatur.
 6. Intra hoc fiat vasculum cavum ab & in G foramen exiguum, per quod aëri externo in cavitatem DKLB pateat aditus.
 7. Denique in fornice fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas (si quando opus fuerit) a sordibus purgari queat.

Dico, si lampas a pedamento avulsa invertitur &, digito ad foramen G applicato, oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingressum per tubulum NM, vase in latus DC inclinato, in proprium receptaculum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rursus firmata munere suo, ut decet, fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI consistit, ne guttula quidem una per MN effluere potest, vi eorum, quæ ad Problema præcedens demonstrata sunt (§. 152). Insensibili autem ejus

quantitate absunta, aër per tracheam OP ingreditur & oleum per MN destillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas constanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.*

Quodsi lampas in locum calidum deferatur, aër supra oleum rarefit (§. 23 *Aërom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91); quod cum ultra libellam HI assurgat, per tubulum QR in vasculum *ab* defluit, consequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi potest. *Quod erat secundum & tertium.*

SCHOLIUM.

156. Ut demonstratio ocularis evaderet; vas ABCD ex vitro fieri curavimus, observavimusque Tracheam PO non nimis arctam esse debere, si desideres ut olei vel minima quantitas absunta statim refundatur. Etenim gutta olei aëri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, nisi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas ACKL abripiatur. Unde simul colligitur operam dandam esse ut orificium tracheæ sit bene politum.

PROBLEMA XXXIX.

157. Construere fonticulum salientem, in quo avicula tantum aqua sorbeat, quantum ex illo profluit.

RESOLUTIO.

1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates divisum, quarum superior AEPD in duas alias AC & CB per diaphragma CN subdividitur.
2. In Q, R, & S fiant foramina cochleis munienda ut aqua infundi & effundi possit, prout usus postulaverit.

3. Ex

Tab. 3. Ex vase AC in vas DF descendat
VI. tubus GH fundo illius afferruminatus,
Fig. 63. fundum vero hujus non prorsus contingens, atque clavicula P instructus.

4. Ex vase DF in vas BC assurgat tubus KI basi illius superiori afferruminatus, hujus vero basin superiorem non prorsus attingens.

5. A fundo fere vasis CB ascendat alius tubus LM, transiens per fundum phialæ O aquam salientem excipientis, epistomio T instructus.

6. Denique per rostrum, corpus & pedes aviculæ vasi CA insistentis ducatur siphon inflexus ZV.

Dico si epistomia P & T aperias, vasis AC & BC aqua repletis & rostro aviculæ aquæ immerso, fore ut aqua per tubulum LM saliat & avicula eam sorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum, epistomio P aperto, aqua per tubulum GH, ex vase AC in vas DF descendit; aqua ex phiala per rostrum avis ascendere debet (§. 77). Dum vero per siphonem ZV semel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhausta (§. 66). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH descendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM salire debet (§. 89). Habemus ergo fonticulum salientem, & aviculam tantum aquæ sorbentem quantum ex illo profluit. Q. e. d.

SCHOLIUM.

158. Eadem prorsus structura est fontis Kircheriani, in quo avis tantum aquæ sorbet quantum a serpente in poculum exspuitur. Absconde enim tubum LM intra corpus serpentis & eum inflecte, ut lumen

M per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircheriani mutabitur.

PROBLEMA XL.

159. Fontem construere in vase vitreo clauso salientem.

RESOLUTIO.

1. Sit sphaera vitrea A, cujus orificium Tab. cochlea BE munitum. VI.
2. Per cochleam transeat tubulus DC, Fig. 64. exiguo lumine in C, sed ampliore in D instructus, cujus pars major sit extra vitrum.
3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, sed altero CD multo longior EF.
4. Sint duo vasa IK & LM mediante tubo HN inter se connexa & basi superioris IK afferruminetur tubulus GH,
5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, si vas IK & aliquam sphaeræ A partem aqua repleas, aquam ex sphaera per tubulum EF in vas LM descensuram & per tubulum DC in sphaeram ascensuram, per lumen exiguum C saliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF descendit, aër in sphaera dilatatur (§. 36 Aërom.), adeoque elater ejus minuitur (§. 78 Aërom.). Quare cum inclusus ante dilatationem ponderi atmosphaerico æqualis existeret (§. 33 Aërom.), quo aqua in vase IK premitur (§. 21 Aërom.); inclusus post dilatationem ad lumen C minus resistit, quam externus aquam in vase IK premit. Aqua igitur per tubulum DC ascendere & quia

Tab. VI. Fig. 64. quia lumen C exiguum per hypoth. salire debet (§. 55). Quod erat unum.

Cum vero fonticulus hic saliens sit siphon interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ salientis continuatio intelligitur per ea quæ de continuatione motus fluidorum in

siphonibus demonstrata sunt (§. 66). Tab. VI. Fig. 64. Quod erat alterum.

S C H O L I O N.

160. Ex demonstratione apparet aquam per tubulum DC salire debere; modo orificium D in aquam immergatur, orificio F extra eam constituto. Unde structura fontis multis modis variari potest.

C A P U T V.

De variis Machinamentis Hydraulicis.

P R O B L E M A X L I.

Tab. VI. Fig. 65. 161. **F**ores construere, quibus apertis aqua conspergatur ingrediens.

R E S O L U T I O.

1. Ad latera valvarum juxta superliminare collocentur vasa AB & CD aqua plena, quibus
2. tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG sub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epistomia, cum valvis P & Q ita connexa ut iis apertis & ipsa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L profiliet & ingredientem madidabit (§. 49).

S C H O L I O N.

162. Eodem artificio riscum construes, quo aperto, facies aperientis aqua conspergatur.

P R O B L E M A X L I I.

163. Efficere, ut in horto vel crypta deambulans subito aquis ex terra profiliens conspergatur.

R E S O L U T I O.

1. Sub terra ita abscondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depressa embolus movetur, paulo ultra ipsius superficiem promineat. Tab. VI. Fig. 66.
 2. Embolus F sit valvula instructus, & ita aptetur ut a pede calcantis depressus a lamina elastica H rursus attollatur.
 3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
 4. Fundo antiæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra superficiem terræ paulo promineat.
- Dico, aquam per M profiliere debere, si pede in G insistas.

D E M O N S T R A T I O.

Aqua nimirum per tubum CD in superiorem antiæ AB partem delapsa urget valvulam E, quæ, cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc transitum concedit, in tubo LM usque ad N ascensuræ (§. 34 Hydrost.). Quod si jam pede calcantis embolus

Tab. VI. Fig. 66. bolus F deprimatur, valvula E clausa aquæ regressum in superiorem antliæ partem impedit (§ 104), quare per tubum LM cum impetu eicitur. Remoto autem pede ab embolo GF, pistillum situi suo restituitur ope elateris H. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

164. Cum aqua ex altitudine quadam delapsa, ad eam fere rursus ascendat (§. 49); quæ tubo CD advehitur, ex vase intra terram defosso & in planitie replendo illuc derivari debet.

SCHOLION II.

165. Quodsi vero aqua per tubum CD advehta ex altitudine quadam fuerit delapsa; in I aptanda valvula, cui deprimenda solum aqua pondus non sufficiat: vel totum Machinamentum alia ratione construi deberet.

PROBLEMA XLIII.

166. Construere Machinam, quæ aquam insigni cum impetu elevet.

RESOLUTIO.

- Tab. VI. Fig. 67. 1. Construatur antlia compressiva AB (§. 113).
 2. Ex ea transeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco parati altitudo sit 2 pedum, diameter octo digitorum.
 3. Tubus CD sit valvula in D instructus, quæ in cavitatem vasis HI hiet.
 4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epistomio O pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

Tab. VI. Fig. 67. Dico, hanc Machinam aquam ad insignem altitudinem elevaturam.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur & aqua in antliam AB ascendit (§. 107): quo rursus depresso, illa clauditur, & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI eicitur (§. 105). Quo facto, cum epistomium O sit clausum, aër in cavitatem vasis HI comprimitur (§. 17 *Aerom.*). Quodsi itaque sufficienter fuerit compressus; aperto epistomio, aqua insigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli continuata, aër in eodem compressiōnis gradu conservari potest; hæc Machina aquam continuo eicit.

PROBLEMA XLIV.

168. Hydraconstiterium, hoc est; Machinam construere, quæ aquam ad incendia restinguenda ad datam altitudinem & in datum locum evomat.

RESOLUTIO.

1. Fiat cista AB figuram parallelepipedii habens, & rotis C instructa, ut commode ad locum incendiï advehi possit. Sunt & qui cistam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rora.
 2. Intra cistam firmetur Machina Crelibiana cum gemino cylindro (§. 113).
 3. Ad agitando embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.

Tab. VII. Fig. 68.

Tab. VII. Fig. 68. 4. Tubus per quem aqua ejaculatur, immittatur alteri mobili GH, qui ad locum desideratum commode dirigi potest.

Si enim continuo aqua in cistam AB infundatur, & emboli nunc eleventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum desideratum ejaculabitur (S. cit.). Machina igitur ad restinguenda incendia commode utimur.

SCHOLIION I.

169. *Belge alique ipsorum exemplo excitati tubo mobili GH substituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infestata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout necessitas postulaverit. (Vocatur tubus istiusmodi Germanis ein Schlauch.) Unde apparet, hac ratione hydracontisteriis esse locum, etiamsi flamma in conclavibus ædificii tantum sæviat, nec per tectum ac fenestras foras erumpat.*

SCHOLIION II.

170. *Non inutiliter Machina Ctelibianæ substituere licet alteram in Probl. 43 (S. 166) descriptam, quia aquam non per intervalla, sed continuo ejaculatur.*

PROBLEMA XLV.

171. *Efficere, ut ad speculum aut objectum aliud accedens aqua ex improvise conspergatur.*

RESOLUTIO:

- Tab. VI. Fig. 69. 1. Sit AB cista aqua plena, cujus fundo afferruminetur tubus recurvus CDEF. 2. Pars tubi intra cistam AB paulo infra embolum elevarum foraminibus nonnullis pertundatur. 3. Denique embolus G ita immittatur, ut cessante vi deprimente, per elaterium rursus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet, ac in tubo EF eo usque ascendet, donec in eadem altitudine subsistat, ad quam aqua intra cistam AB constituitur (S. 34 *Hydrost.*). Quodsi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, adeoque eadem ex improvise conspergeris. Q. e. d.

SCHOLIION.

172. *Quodsi aqua ex alto delabatur, sufficit, ut pede deprimatur valvula, qua aqua aditum in tubum EF concedat (S. 165).*

PROBLEMA XLVI.

173. *Construere speculam, in qua speculator constitutus sonum ingentem cornu edat.*

RESOLUTIO:

1. In superiore loco speculæ constituitur vas aqua plenum AB, & in inferiore aliud aëre plenum CD, contra omnem vero aëris accessum optime munitum. 2. Ex vase superiori AB in inferius CD transeat tubus EF epistomio L instructus. 3. Ex vase inferiori CD ascendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os speculatoris, cui cornu K sit afferruminatum. Etenim laxato epistomio L, aqua ex vase AB per tubum EF descendit, & ingenti celeritate aërem ex vase CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem sonum parit, qui aëre in cornu inflato audiretur.

SCHOLIION.

SCHOLIION I.

174. *Simili artificio sonos alios produces. KIRCHERUS (a) cantum singularum fere avicularum notis musicis exprimere, & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerptit SCHOTTUS (b) quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

SCHOLIION II.

175. *Huc referenda quoque sunt Organa Hydraulica jam veteribus nota & a VITRUVIO (c) descripta, a PERRALTIO in notis schematico nitido egregie illustrata: de quibus, cum non amplius in usu sint, hic dicere non attinet.*

PROBLEMA XLVII.

176. *Ventum excitare ad flammam conservandam aptum.*

RESOLUTIO.

- Tab. VII. Fig. 71.
1. Ad basin dolii superiorem AB appetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut sex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur.
 2. Tubus EC hinc inde instruendus est tubulis F, aut, si mavis, foraminulis, ut ab aqua descendente aër una in dolium abripiatur.
 3. In basi inferiori CG, e regione luminis E, sita sit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.
 4. In G appetur tubus I angustior eo per quem aqua delabitur, ut delapsa ex dolio iterum effluat.
 5. Denique in H fit tubus ad eum locum protensus, quo ventus spirare debet.

(a) Musurgia lib. 9. part. 5.

(b) In Magia Universalis Natura & Artis, Part. 2. lib. 6.

(c) Lib. 10. c. 13. f. m. 325.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac dispergitur, aër ingenti impetu per tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide spirantem (§. 166 Aërom.).

Tab. VII. Fig. 71.

SCHOLIION I.

177. *Franciscus Tertius DE LANIS (d) autor est, se vidisse hoc artificio ventum majorem fuisse excitatum, quam qui folli- bus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

SCHOLIION II.

178. *Enimvero opus non est, ut tubus CE sit rotundus & vas ABCG figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, ex. gr. quadrata fieri potest. Unde quidam, loco Dolii, cameram ex lateribus construunt. Opera tantummodo danda, ne aër ex vase ABCG ullibi, quam per tubum H erumpere possit.*

SCHOLIION III.

179. *Succedit etiam artificium, si nullum adsit dolium; sed aqua per tubum quadratum AB nullis spiraculis insti: actum tantum delabatur, ad quem apratus sit tubus GH, unde ventus spirat. Quodsi usus postulaverit ut ventus interrumpatur; obturato orificio H; aperitur aliud I vento exitum concedens.*

Tab. VII. Fig. 72.

PROBLEMA XLVIII.

180. *Duo vasa construere, quorum unum, utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, nisi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ Vasa concordiaè vocantur.*

RESOLUTIO.

1. *Sint AB & CD duo Vasa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter se communicent.*
- Tab. VII. Fig. 73.

Aaa 2

2. In

(d) In Magisterio Naturæ ac Artis, lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

Tab. 2. In utroque vase aptetur ad fundum
VII. diabetes (§. 72), ita ut orificium
Fig. 73. tubi minoris I sit infra orificia E & H
tubi recurvi EFGH.

Quodsi vas AB vino repleatur, donec
lumen I sit in libella ejus; nihil effluet
(§. 72). Sed si vas alterum CD aqua
adimpleas totum; per tubum EFGH
vas alterum AB ingreditur (§. 34 Hy-
drost.), & quantitatem liquoris ibidem
auget. Quare cum jam utrinque li-
quor ultra orificium I ascendat; per M
omnis aqua ex vase CD, per L vero
vinum omne ex vase AB effluet (§.
72). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLIX.

181. *Vas construere, quod tantum
vini effundit, quantum aqua infunderis.*

RESOLUTIO.

Tab. 1. Fiat Vas ADBC in duas cavitates;
VII. per diaphragma GF divisum, & un-
Fig. 74. diquaque contra accessum aëris pro-
be munitum.

2. Operculo AC afferruminetur tubu-
lus HI per cavitatem unam GB ad
fundum fere vasis CB perringens.
3. Cavitates duæ inter se communicent
tubo recurvo LFK.
4. Denique cavitati alteri immittatur
tubulus NM, & utraque cavitas in-
struatur foramine cochlea munito,
ut, si opus fuerit, liquor infundi &
rursus effundi possit.

Quodsi enim cavitatem AF vino re-
pleas, nihil infusi per MN effluet (§.
34 Hydrost.). Enimvero si per tu-
bulum HI aquam cavitati alteri affun-

das; aër per tubum KFL in cavitatem
alteram propellitur, adeoque vinum
per tubum MN expellit. Tab. VII. Fig. 74.

PROBLEMA L.

182. *Vas construere, quod liquorem
excipit donec fuerit plenum, si constan-
ter eum affuderis; sed ne guttam amplius
admittit, ubi semel cessaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in duas
cavitates ACD & CDB dividatur,
quarum superior aperta esse potest. Tab. VII. Fig. 75.
2. Ad diaphragma in cavitate superio-
re AD aptetur diabetes GF: sub
diaphragmate autem in cavitate
inferiorem hier tubulus H.

Quodsi aquam constanter affundas, ea
per diabetelem GF defluet in cavitatem
inferiorem BCD, aëremque per tubu-
lum H expellet (§. 72). Sed si ali-
quamdiu desistas, aër tubum longio-
rem diabetelem replebit, excepta parte
FE aquæ immersa. Nihil ergo amplius
per tubum istum in cavitatem BCD
defluet.

PROBLEMA LI.

183. *Vas construere, ex quo per idem
orificium, vel aqua, vel vinum fluit,
prout desideraveris, vel etiam mixtum
ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in
duas cavitates divisum. Tab. VII. Fig. 76.
2. In operculo vasis AE fiant duo fo-
ramina F & G, per quæ aëri in
utramque cavitatem aditus patet.
3. In

Tab. 3. In fundo fiant duo alia L & D, VII. per quæ liquores in cavitatem IHB descendere possunt. Fig. 76.

4. Ex tertia hac cavitate procedat tubulus M.

Quodsi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini ces-

sabit, fluetque aqua ex cavitate CB Tab. per eundem tubulum M. Quodsi de VII. nique utrumque foramen F & G fuerit Fig. 76. apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

SCHOLIION.

184. Ex his principiis innumera alia derivare licet.

CAPUT VI.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIO VI.

185. **A**lveus Fluminis est cavitas in superficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO VII.

186. *Alveus naturalis* est, quia natura effectus est. *Alveus vero artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLIION.

187. *Istiusmodi alveos artificiales parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas* (§. 924 Mech.). Germanico idiomate *alveus naturalis* der Wilde Bach, *alveus autem artificialis* der Muhlgraben appellatur.

DEFINITIO VIII.

188. *Sectio alvei* est planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur.

SCHOLIION.

189. Ponamus aquam intra alveum totam subito abire in glaciem, & secari plano ad fundum alvei perpendiculari. Quæ hinc prodit sectio, erit ea quæ nobis h'c sectio alvei vocatur.

DEFINITIO IX.

190. *Sectio naturalis* est sectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* sectio alvei artificialis.

SCHOLIION.

191. *Definitio adeo sectionis Fluminis, quam dedimus cum de molendinis ageremus* (§. 913 Mech.), est *sectionis artificialis*, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.

COROLLARIUM I.

192. Quoniam constat alveos naturales figuram habere prorsus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commode reduci nequit; sectio naturalis figura plana irregularis est.

COROLLARIUM II.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedii habent; sectio artificialis est rectangulum parallelogrammum (§. 162. Geom.).

SCHOLIION.

194. *Qualis figura sit sectio artificialis, jam ostendimus alibi*, (§. 914 Mech.). Potest vero figura quæcumque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus basis latitudini fluminis æqualis. Unde in sequentibus per sectionem intelligemus rectangulum, cujus

Latitudo eadem cum latitudine fluminis, nisi res ipsa loquatur posse quamcumque sectionem supponi.

DEFINITIO X.

195. *Sectiones dicuntur aque veloces, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero sit velocitas seu celeritas media, commodius docebitur deinceps.*

DEFINITIO XI.

196. *Sectio velocior est, per quam aqua celerior fluit; Sectio tardior, per quam fluit tardior.*

DEFINITIO XII.

197. *Flumina in statu manente sunt, si superficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, sed eadem manet in eodem loco profunditas.*

SCHOLIUM.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi sit profundius, alibi minus profundum.*

DEFINITIO XIII.

199. *Flumen intumescit, si superficies aquæ intra alveum attollitur; detumescit, si eadem deprimitur.*

THEOREMA XXVIII.

200. *Aqua libere fluentis in alveo declivi cursus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter pressionem quam inferior sustinet a superiori.*

DEMONSTRATIO.

Aqua enim fluidum grave est & quidem gravitatis eximie (§. 64 *Hydrost.*). Sed gravia per declivem, seu ad horizontem inclinata, motu accelerato deorsum ruunt (§. 284 *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu acce-

lerato ruere debet, atque adeo cursus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem assurgit; inferiori incumbit superior. Enimvero motus aquæ, ob pressionem quam à superiore sustinet, perinde ac cadendo per aliquam altitudinem acceleratur (§. 48). Ergo cursus fluminis acceleratur quoque per pressionem quam aqua inferior a superiore sustinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

201. Quo declivior adeo fundus alvei est, eo celerius aqua per eundem decurrit.

COROLLARIUM II.

202. Quo profundior aqua in alveo horizontali altitudo est, ad quam intra alveum assurgit, eo celerior cursus fluminis.

COROLLARIUM III.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur quam ab eo remotior; quo fundo propior, eo cursus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM IV.

204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquisita est ut VII. radix altitudinis AD (§. 288 *Mechan.*); Fig. 77. aqua etiam, si libere fluit per canalem declivem AB, in B eandem celeritatem acquirere debet quæ est ut radix altitudinis AD.

COROLLARIUM V.

205. Quod si aqua per foramen B egredieretur ex vase in quo ad altitudinem BF ipsi AD æqualem consisteret; ejus quoque celeritas esset ut radix altitudinis BF sive AD (§. 48). Aqua igitur per canalē inclinati sectionem eadem velocitate movetur, ac si flueret ex vase per lumen sectioni

congruens a superficie aquæ tantundem remotum, quantum sectio ab horizontali per initium canalis ducta distat.

THEOREMA XXIX.

206. In qualibet sectione canalis inclinati celeritas aquæ libere fluentis major est in fundo quam in superficie.

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 77. Ducatur per originem canalis A linea horizontalis AE, sitque sectio, per quam aqua fluit BC, quæ est ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipsi DB parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230 Geom.) & FG = EC (§. 238 Geom.); consequenter FB > FG vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea est quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB haberet (§. 303 Mechan.), Major igitur celeritas in B quam in C (§. cit.). Q. e. d.

SCHOLION.

207. Sequitur ex iis quæ demonstrata sunt, fluminis cursum continuo celeriore fieri debere, quo longius juxta fluvium progredieris: id quod tamen experientia parum convenire videtur. Tenendum itaque, & ripas, & fundi inæqualitates causari resistentias, per quas celeritas continuo imminuitur, immo modo acquisita rursus extinguitur. Sed de his impediementis accidentalibus nostrum jam non est dicere. Id tantummodo inculcandum esse censemus, cum declivitas fundi exigua sit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam esse; cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad descensum impediatur (§. 261 Mech.).

DEFINITIO XIV.

208. Per celeritatem, seu velocitatem mediam, intelligo eam qua si aqua flueret omnis per sectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. Hinc intelligitur, cur sectiones æqueveloces definiiverimus per eas per quas aqua eadem celeritate media fluit (§. 195). Quoniam enim aqua inferior celerior fluit superiori ob diversam pressionem, & fundi declivitas diversa diversæ quoque celeritatis causa est; per sectiones eadem celeritate variabili non fluit aqua, nisi eadem & æquales, & similes fuerint, adeoque Theoremata de sectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem quam habere possunt, nisi variabilis celeritas ad mediam quandam constantem reduceretur.

THEOREMA XXX.

210. Per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.

DEMONSTRATIO.

Per sectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195). Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per sectionem fluat, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208), & sectiones æquales sint per hypoth. per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt. Q. e. d.

COROLLARIUM: I.

211. Quod si ergo sectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris

oris æquetur (§. 20 *Arithm.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem: consequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM II.

212. Et quoniam per sectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplam quadrupla aquæ quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210); Quantitates aquarum per æqueveloces sectiones fluentes eodem tempore sunt inter se ut sectiones.

THEOREMA XXXI.

213. *Per sectiones æquales eodem tempore fluentes aqua sunt ut velocitates media.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ sectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate qua fluit per A. Concipiatur sectio infinite parvæ crassitie, & huic respondens aqua transeat tempusculo infinite parvo per sectionem A. Quoniam celeritas media in sectione B dupla est *per hypoth.* dum aqua a sectione A distat intervallo crassitie isti respondente, altera a B duplo istiusmodi intervallo distare debet (§. 33 *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ, tempusculo infinite parvo eodem, fluit per sectionem B. Jam cum tempus quodcunque in istiusmodi tempuscula æqualia resolvi possit, & singulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonstrata*; evidens est quod, omnibus istis tempusculis simul sumtis, hoc est dato quocunque tempore, aquæ per sectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum qua-

cunque; per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

214. *Si sectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes sunt in ratione composita sectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per sectionem S, celeritate media C, quantitas aquæ Q, & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque sectionem *f*, alia quacunque celeritate *c*, quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per sectionem S, celeritate *c*, quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per sectiones inæquales *f* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eadem in ratione sectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales sectiones S, diversa celeritate C & *c* fluunt; erunt eadem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus adeo $Qm = SC : fc$ (§. 213 *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : fc$ (§. 181 *Arithm.*): consequenter quantitates aquarum Q & *q*, per sectiones inæquales nec æqueveloces, fluentes sunt in ratione composita sectionum S & *f* atque celeritatum mediarum C & *c* (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

215. Si $Q = q$, erit $SC = fc$, adeoque $S : f = c : C$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si eodem tempore quantitas aquarum per inæqua-

inæquales sectiones diversa celeritate media fluunt, erunt sectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM II.

216. Quodsi præterea fuerit $S = f$, erit etiam $C = c$, adeoque si quantitates aquarum eadem per æquales sectiones fluunt; celeritas media eadem est: consequenter sectiones æqueveloces sunt (§. 195).

COROLLARIUM III.

217. Quodsi ponatur $C = c$; erit etiam $S = f$, adeoque si celeritas media eadem, & quantitates aquarum eodem tempore per utramque sectionem fluentes æquales; consequenter si sectiones æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fundunt (§. 195); æquales sunt.

COROLLARIUM IV.

218. Quoniam $Q : q = SC : sc$ (§. 214); erit $qSC = Qsc$ (§. 297 *Arithm.*) & hinc $C : c = Qs : qS$ (§. 299 *Arithm.*) hoc est, celeritates mediæ sunt in ratione composita ex reciproca sectionum & directa quantitatum aquarum quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA XXXIII.

Tab. VIII. Fig. 78. 219. Si fluvius fuerit in statu manente; per omnes sectiones quomodocunque inæquales AB, CD, EF, GH aqua eadem quantitas eodem tempore fluit.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per sectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere quam per sectionem AB; inter sectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, adeoque fluvius in alvei ABCD parte continuo intumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione

Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197). Hoc cum sit contra hypothesin, aquæ per sectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Ponamus ex adverso per sectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, adeoque fluvius in parte alvei ABCD continuo detumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197) *contra hypothesin*. Aquæ igitur per sectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Quoniam itaque, per sectionem inferiorem aliquam nec minor nec major quantitas fluere potest, quam per superiorem quamcunque; per omnes omnino sectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

220. Quoniam sectiones AB, CD, EF, GH inæquales sunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per singulas fluunt; aqua per sectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

COROLLARIUM II.

221. Flumen igitur coarctando, aquæ celeritas augetur: consequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypothesin*, aqua ibidem altius assurgere (§. 205), adeoque fluvius intumescere debet (§. 199).

COROLLARIUM III.

222. Ex aduerso, flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur : consequenter cum decliuitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altitudo imminui (§. 205), adeoque fluvius detumescere debet (§. 199).

COROLLARIUM IV.

223. Quoniam in quibuscunque fluvii sectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§. 219), sectiones vero inæquales sunt *per hypoth.* celeritates mediæ in duabus quibuscunque fluminis sectionibus sunt ut sectiones reciproce (§. 215).

SCHOLIUM.

224. Quæ Corollariis tribus prioribus continentur, experientia consona sunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorum esse, ubi minor est fluvii latitudo : ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, nisi forsitan ex accidente adsit quadam vorago. Usu quoque in praxi receptum est, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.

THEOREMA XXXIV.

225. Si fluvius intumescit ; aqua fluens per quamlibet sectionem dato quodam tempore est ad aquam quæ ante intumescentiam ibidem fluxerat, in ratione composita sectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad sectionem & celeritatem mediæ pristinam.

DEMONSTRATIO.

Dum enim fluvius intumescit, aqua intra alveum fit altior, consequenter non modo sectio, verum etiam celeritas mediæ (§. 199, 205) augetur. Nova igitur sectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam pristina. Quoniam vero sectio major

jam facta & pristina spectari possunt instar sectionum duorum fluminum, per quas aqua diversa celeritate fluit ; cum fluvius intumescens a seipso differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, sed ejusdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit ; aqua fluens per sectionem auctam celeritate mediæ aucta, erit ad aquam fluentem æquali tempore per sectionem pristinam celeritate pristina, in ratione composita sectionis auctæ ad sectionem pristinam, & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediæ pristinam. (§. 214).

Q. e. d.

COROLLARIUM I.

226. Erit adeo augmentum aquæ fluentis ad aquam pristinam æquali tempore fluentem, ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in sectiones ad factum ex sectione pristina in celeritatem (§. 193 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

227. Quodsi sectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit ; cum parallelogramma ejusdem basis altitudinum rationem habeant (§. 389 *Geom.*), augmentum aquæ fluentis post intumescentiam erit ad aquam fluentem ante eandem, ut differentia factorum ex altitudine aquæ auctæ in celeritatem mediæ auctam & ex altitudine pristina in celeritatem pristinam ad factum posterius ; id quod in alveo artificiali semper locum habet (§. 193).

SCHOLIUM.

228. Quando de altitudinibus sectionum vel aquæ in alveo fuerit sermo, per eam intelligitur ea perpendiculari a superficie aque infundum demissa pars per quam aqua continuo fluit, ita ut, si fluxus omnis protinus cessare ponatur, nulla aqua in defluentis locum succedente, nihil prorsus aquæ in ea remanere in-

telligi-

telligatur. Etenim aqua in cavitatibus fundi stagnantis nullam fluxu habenda ratio est, cum perinde sit ac si prorsus abesset, fundo plano existente. Vulgo Autores, qui de aquis currentibus scripsere, perpendicularum istud per quod aqua fluit, Altitudinem vivam vocare solent, quod sit altitudo aquae vivae: aqua enim currens ad differentiam stagnantis viva appellari solet (§. 10 Mech.).

THEOREMA XXXV.

Tab. VIII. Fig. 79. 229. Si fuerit AB canalis declivis, & BC altitudo sectionis continetur do- nec linea horizontali AL per initium ejus A ducta ubi superficies aquae canalem secat in L occurrat, & circa axem LB describatur Parabola quaecunque LGH; semiordinata CG exponet celeritatem aquae in C, BH celeritatem fundo proximam, & semiordinata intermedia inter CG & BH celeritates quascunque in perpendiculari BC inter C & B intermediis.

DEMONSTRATIO.

Celeritas enim aquarum in C & B sunt in ratione subduplicata rectorum EC & FB (§. 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL per hypoth. erit CE ipsi BF parallela (§. 256 Geom.). Quamobrem cum sit LC:LB = CE:BF (§. 268 Geom.); celeritas in C & B etiam in ratione subduplicata rectorum CL & LB existunt (§. 124 Anal. fin. & §. 156 Arithm.). Enimvero semiordinatae Parabolae CG & BH sunt itidem in ratione subduplicata rectorum CL & BL (§. 402 Analys. fin.). Ergo etiam celeritates in C & B sunt ut semiordinatae CG & BH (§. 156 Arithm.), adeoque semiordinatae CG

& BH celeritates in C & B exponunt. Tab. VIII. Fig. 79. Et quoniam de singulis semiordinatis intermediis idem eodem modo constat; semiordinatae quoque intermediae celeritates intermedias exponunt. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

230. Si ergo BC fuerit perpendicularum sectionis fluminis; spatium Parabolicum CGHB est complexus omnium velocitatum istius sectionis.

COROLLARIUM II.

231. Quoniam $CG^2 : BH^2 = CL : BL$ (§. 402 Anal. fin.), adeoque $BH^2 - CG^2 : BH^2 = BC : BL$ (§. 193 Arithm.); sunt vero celeritates aquae in B & C, ut BH ad CG, perpendiculari sectionis existente CB (§. 229); datis celeritatum in C & B ratione, ac altitudine sectionis BC, inveniri potest axis Parabolae BL.

COROLLARIUM III.

232. Cum ducta IG ipsi BC parallela sit $CG = BI$ (§. 238 Geom.), adeoque IH differentia semiordinatarum CG & BH, consequenter ut BC ad HI ita $CG + BH$ ad parametrum (§. 404 Anal. fin.); datis CG & BH in eadem mensura qua datur perpendicularum sectionis BC, in eandem quoque mensura reperietur parameter parabolae mensurantis celeritates & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA LII.

233. Dato angulo inclinationis alvei seu canalibus ABD, una cum altitudine seu perpendicularo sectionis BC, & celeritatum in C & B ratione; invenire distantiam fundi ab horizontali AL per initium alvei ducta, atque distantiam AF ab initio alvei, una cum hujus longitudine BA.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

- Tab. VIII. Fig. 79.
1. Quoniam BD parallela ipsi AL *per hypoth.* angulus BAL angulo inclinationis ABD æqualis est (§. 233 *Geom.*). Et quoniam rectus ABL recto FBD æqualis; dempto communi ABF; erit FBL angulo inclinationis ABD æqualis (§. 91 *Aritbm.*). Dantur itaque in triangulo BFL, præter rectum ad F, anguli obliqui FBL & FLB, itemque in triangulo ABF præter rectum ad F obliqui BAF & FBA.
2. Ex datis CG & BH, una cum BC, inveniatur axis seu altitudo Parabolæ BL (§. 231). Unde porro
3. calculo trigonometrico definietur recta BF (§. 36 *Trigon.*) & hinc tandem
4. recta AF, atque AB (§. *cit. Trig.*).

THEOREMA XXXVI.

234. Si semiordinata Parabola mensurantis celeritates aquæ intra minutum secundum seu tempus quodcumque datum per perpendicularum sectionis fluentis CG & BH sint æquales spatiis quæ aqua per extrema perpendiculari sectionis BC fluens dato tempore describit, & in partibus hujus assignentur; spatium Parabolicum BCGH. definiet quantitatem aquæ per sectionis perpendicularum BC tempore isto fluentem.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur perpendicularum sectionis BC divisum in particulas infinite parvas, quæ designabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC constitutas. Quoniam vero semiordi-

natae ad BC applicatae sunt æquales spatii, intra tempus datum veluti minutum secundum, descriptis ab iisdem particulis aquæ; arcus Parabolicus GH terminabit omnem aquam quæ initio hujus temporis in BC constituebatur; consequenter spatium BCGH definiet quantitatem aquæ per perpendicularum BC intervallo unius minuti secundi fluentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

235. Quoniam spatium parabolicum $GCL = \frac{2}{3} LC$. CG & BLH = $\frac{2}{3} BL$. BH (§. 104 *Anal. infm.*), BCGH vero illorum spatiorum differentia; si ex datis spatiis, quæ aqua per extrema perpendiculari sectionis fluens intra tempus datum describit, quærat axis parabolæ (§. 231); quantitas aquæ intra tempus datum per perpendicularum fluens determinari potest.

COROLLARIUM II.

236. Quoniam in sectione artificiali perpendiculara omnia æqualia sunt (§. 193); aqua fluens per totam sectionem reperitur, si quantitas fluentis per perpendicularum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri possit (§. 235); etiam quantitas per totam sectionem artificialem fluens definiiri potest.

DEFINITIO XV.

237. Velocitates aquæ transeuntis per extrema C & B perpendiculari sectionis dico brevitatis gratia celeritates terminales. Dantur autem celeritates terminales per spatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C. describit.

PROBLEMA LIII.

238. Datis celeritatibus terminalibus, una cum perpendicularo sectionis; invenire celeritatem mediam.

RESOLUTIO.

- Tab. VIII. Fig. 79. 1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculari sectionis, investigetur quantitas aquæ per perpendicularum istud tempore dato fluens (§. 235).
2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendicularum sectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculari sectionis. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculari sectionis investigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendicularum istud BC fluens, spatium parabolicum BCGH prodit (§. 234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fuit eodem tempore, quæ variabili fuit (§. 208); & ob celeritatem eandem in singulis perpendiculari partibus, etiam infinite parvis (§. cit.), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendicularum sectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media basis, æquatur spatio parabolico BCGH. Quamobrem si area spatii hujus parabolici dividatur per perpendicularum sectionis BC; prodibit celeritas media quæsitæ (§. 375 Geom.). *Q. e. d.*

PROBLEMA LIV.

239. Datis celeritatibus terminalibus CG & BH, una cum sectionis perpendicularo BC; punctum K in eodem definire per quod aqua celeritate media fuit.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quærat celeritas media (§. 238) &
2. Ex semiordinata Parabolæ velocitates exhibentis BH quæ maximam celeritatem repræsentat, resecetur recta BM mediæ æqualis.
3. In M erigatur perpendicularis MO secans Parabolam in O.
4. Denique ex puncto O demittatur perpendicularis ad axem Parabolæ OK, quæ erit semiordinata puncto O respondens (§. 370 Anal. fin.): atque adeo BK est distantia puncti perpendiculari a fundo, in quo aqua celeritate media movetur.
5. Hinc porro calculo definitur profunditas puncti K, in quo aqua movetur celeritate media, inferendo (§. 404 Anal. fin.) ut parameter quam ex datis reperire licet (§. 232) ad aggregatum ex celeritate minima CG & media KO, ita harum celeritatum differentia MI ad profunditatem quæsitam KC.

Tab. VIII. Fig. 79.

PROBLEMA LV.

240. Data longitudine canalis inclinati AB, una cum angulo inclinationis BAF, & perpendicularo sectionis BC; invenire celeritates terminales, atque mediam, una cum axe Parabolæ celeritates mensurantis BL, & verticis L ab initio canalis A distantia.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB, & angulo inclinationis BAF, invenitur in triangulo ABF distantia fundi ab horizontali BF, & in

Tab.
VIII.
Fig. 79.

- triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188), distantia verticis Parabolæ ab initio canalıs AL, una cum axe Parabolæ BL (§. 36 *Trigon.*).
2. Subducta altitudine sectionis BC ab axe Parabolæ BL modo invento, relinquitur CL. Unde datis abscissis LC & LB reperitur semiordinatarum CG & BH ratio (§. 402 *Anal. fin.*); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque
 3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri potest (§. 238).

A X I O M A I.

241. *Eadem vi, uno eodemque momento, duplex motus produci nequit.*

Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe si simul agat in B & C, pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito absurdum habetur.

S C H O L I O N.

242. *Veritas hujus Axiomatis per Experimenta Hydrostatica confirmatur. Etenim corpus grave in fluido specificè leviori descendit excessu ponderis sui supra pondus fluidi mole æqualis (§. 88 Hydrost.); quod vim gravitatis reliquam impendat in pressionem fluidi motui resistentis (§. 114 Hydrost.), Experimentorum consensu. Vis igitur qua fluidum subjectum premitur, non simul impenditur in descensum; nec vis qua motus descendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam subjectam.*

T H E O R E M A XXXVII.

243. *Aqua per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob pressionem quam inferior a superiori sustinet.*

D E M O N S T R A T I O.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob pressionem quam inferior a superiori sustinet, ita ut inferior celerior moveatur quam vi descensus per declivem acquisivit (§. 284 *Mechan.*). Quoniam motus per declivem descendentis acceleratur gravitate respectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§. 261 *Mech.*); aut vis illa qua agitur in planum inclinatum simul impendi deberet ad descensum, aut vis qua acceleratur motus descendentis simul impendenda esset pressioni aquæ subjectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, seu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod absurdum (§. 241). *Q. e. d.*

S C H O L I O N I.

244. *Alii ita adstruunt veritatem Propositionis presentis. Si aqua in B omnem habet celeritatem quam descensu per planum inclinatum AB acquisivit, ea est, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino A ad eandem horizontalem DB, nempe per altitudinem AD vel BF acquisivisset (§. 303 *Mech.*). Ponamus jam aquæ B motum quoque accelerari ob altitudinem incumbens superioris: erit ergo major celeritas ea quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc absurdum existimant, cum fluxus aquæ sit effectus gravitatis quæ in descensum*

Tab.
VIII.
Fig. 79.

sum perpendiculararem tota insumitur. Sed evidentia hujus demonstrationis pendet ab Axiomate nostro. Tacite enim supponitur in descensu perpendiculari nullum esse effectum aquae superioris in inferiorem, sed quamlibet aquae guttam ita accelerari ac si sola descenderet in medio non resistente. Id vero recte supponi, ex eo intelligitur quod vis quae ad accelerandum motum guttae superioris impenditur, non una impendi possit in pressione qua inferioris guttae acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua superior vel quiescit, vel lente admodum descendit, inferioris motu per feramen accelerato. Hic enim vis quae ad motum per pressionem accelerandum impenditur, non una consumitur in descensu prementis.

SCHOLION II.

245. Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur quam in superficie; propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in superficie & in fundo; major vero cum ibidem sit resistentia quam prope superficiem, magis quoque retardetur.

SCHOLION III.

246. Inprimis autem notandum est, quod MARIOTTUS (a) annotavit aquam in alveo naturali fluminis, ob eam quam patitur resistentiam (§. 207) brevi temporis spatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro inferit, si declivitas alvei imminuat, celeritatem denuo successive, sed brevi temporis spatio imminui, ut per istam alvei partem lentius fluat aqua quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari possit, ut in sequente alvei parte aqua celerius fluat quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diversis alvei naturalis partibus diversa sit aquae fluentis celeritas.

(a) Traité du mouvement des Eaux, Part. 4. disc. 4. p. 430. Opera.

SCHOLION IV.

247. Nulla in hoc difficultas posita est, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo (§. 221), Experientia suffragante (§. 224). Etenim tum initium canalisi, ob altitudinem aquae auctam cui pars alvei naturalis respondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalisi inclinati A Tab. VIII. ibi statuitur, ubi planum inclinatum ejusdem BA concurrat cum superficie aquae AC, Fig. 79. quemadmodum ex Demonstrationibus anterioribus intelligitur; ut determinari possit descensus perpendicularis EC aquae in superficie. Etenim aqua in C dici nequit descendisse intervallo EC, nisi aliquo tempore fuerit in A. Sed idem mox ostendemus apertius (§. 249).

SCHOLION V.

248. Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque assumi posse aquam perpendicularum sectionis eadem celeritate moveri; non tamen assumere licet quod per totam sectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem resistentiam tardior esse soleat quam in medio. Quodsi istiusmodi canales inclinati, quales in Theorematis antecedentibus supponimus, essent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret sine ulla immutatione.

THEOREMA XXXVIII.

249. Si in canale inclinato AB sectione BC obstruatur, ut aqua non nisi per partem BI fluere possit; aqua intumescet & ad statum manentem redacta celerius fluat per sectionem BI quam ante; initio canalisi G ultra priorem A promotum.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 80. Etenim dum sectio BC ex parte obstruitur, per partem residuam apertam BI pristina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit quæ ad sectionem BC nondum obstructam ferebatur; necesse est aliquid ejus continuo remanere, adeoque altitudinem fieri majorem, consequenter aqua intumescit (§. 199).

Quod erat primum.

Enimvero quando ad statum manentem reducitur, non amplius intumescit (§. 197), adeoque per sectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Necesse igitur est ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat secundum.*

Jam dum aquæ superficies AC attollitur in OG, *vi num. 1.* evidens est, quod ea canalem BA non amplius in A, sed in G secet. Initium adeo canalisi G ultra terminum pristinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

250. Quoniam ibi vertex Parabolæ FKE, ubi sectionis perpendicularum BI productum horizontalem GF per initium canalisi declivis AB secat, & semiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores sunt rectis BD & IL, quæ ante intumescitiam aquæ seu obstructionem sectionis easdem in iisdem punctis exponentant (§. 249); Parabola FKE quæ metitur celeritates in perpendicularo IB majoris amplitudinis est, quam altera HLD quæ metitur velocitates in perpendicularo majoris sectionis BC.

COROLLARIUM II.

251. Quodsi impedimentum quo obstruitur sectio fuerit minor IO, veluti IN; aqua ad O usque intumescere nequit, adeoque per NO supra impedimentum effluit. Tab. VIII. Fig. 80.

COROLLARIUM III.

252. Celeritas aucta aquæ per sectionem minorem fluentis BI, in B ea est quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas pristina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquisivisset (§. 303 Mech.). Quare cum celeritates per BN & BM acquisitæ sint in ratione subduplicata rectarum BN & BM (§. 87 Mech.); erit celeritas aucta in B ad celeritatem pristinam, ut radix rectæ BM ad radicem alterius BN.

THEOREMA XXXIX.

253. Aqua per sectionem canalisi horizontalis eodem modo fluit, qua fluit ex vase pleno cujus eadem quæ sectionis altitudo.

DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali cum nulla sit declivitas, aqua non fluit nisi quatenus sustinet pressionem inferiora superiori. Ex vase aqua pleno per foramen similiter fluit aqua vi pressionis ejusdem; quod utrumque per se manifestum est. Quodsi ergo lumen vasis sit sectioni canalisi æquale ac simile, & altitudo fluidi utrobique eadem sit; cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adest diversitatis ratio. Quamobrem aqua per sectionem canalisi horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vase pleno, cujus eadem quæ sectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHOLIION I.

254. Sane si canalem horizontalem tegas quodam operimento, convenit is cum vase pleno, cujus eadem quæ sectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo quæ ante: consequenter pressio ab eadem pendens nullo modo varietur.

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81.

255. In sectionis adeo perpendiculo BC canalis horizontalis AB, quodlibet punctum, D, E, vel B eandem celeritatem habet quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis; nimirum aqua in B habet celeritatem quam acquisivisset cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquisivisset; & similiter aqua in D celeritatem habet quæ cadendo per altitudinem DC acquiritur.

COROLLARIUM II.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC, (§. 86 *Mechan.*), seu celeritates ipsæ in ratione subduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87 *Mechan.*).

COROLLARIUM III.

257. Quare si circa altitudinem sectionis BC describatur Parabola CFGH; exponent semiorinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, C (§. *prac.* & §. 402 *Anal. fin.*).

COROLLARIUM IV.

258. Quodsi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi sectionis BC determinetur; spatium parabolicum ECH quantitatem aquæ exhibet quæ eodem tempore per sectionem fluit quo aqua per B fluens describit spatium BH; id quod eodem modo patet, quo supra idem in canale inclinato evicimus (§. 234).

COROLLARIUM V.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per
Wolfii Oper. Mathem. Tom. II.

perpendiculum BC, eo tempore quo aqua Tab. per B fluens ex B in H progreditur, est VIII. æqualis rectangulo ex BH in duas tertias Fig. 81. partes altitudinis sectionis BC, vel ex BC in $\frac{2}{3}$ BH (§. 104 *Anal. infin.*); consequenter in ratione composita ex ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium.

SCHOLIION II.

260. Hinc jam porro eodem quo supra modo determinantur alia fluxum aquæ in canali horizontali concernentia.

SCHOLIION III.

261. Resistentias quas patitur cursus fluminis, cum ab obstaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.

SCHOLIION IV.

262. Ceterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta sunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vasorum lateribus insculpta applicari possunt atque solent (§. 48).

THEOREMA XL.

263. Si aqua per canalem horizontalem fluit; celeritas media est ad maximam ut 2 ad 3.

DEMONSTRATIO.

Aquæ enim quantitas est ut $\frac{2}{3}$ BH.BC (§. 259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum fluentis, si $BI = \frac{2}{3}$ BH (§. 375 *Geom.*); eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, si per singula puncta eadem celeritate BI moveatur. Est igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero $BI = \frac{2}{3}$ BH per demonstrata. Ergo $BI : BH = \frac{2}{3}$. $1 = 2 : 3$ (§. 178 *Arithm.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 81. 264. Quoniam aucta altitudine sectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine sectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM II.

265. Similiter quia imminuta altitudine sectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine sectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM III.

266. Si ex semiordinata maxima Parabolæ celeritates aquæ per sectionem canalis horizontalis fluentis BH refecetur BI $\approx \frac{2}{3}$ BH, & super BI construatur rectangulum CBIM, cujus latus IM Parabolam in K secat; demisso ex K in altitudinem BC perpendiculari KL, erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM IV.

267. Quodsi jam porro inferatur, ut Tab. VIII. Fig. 81. quadratum spatii BH, quod aqua celeritate maxima fluens dato tempore emittitur, ad quadratum spatii LK quod celeritate media describit eodem tempore, ita altitudo sectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L per quod aqua celeritate media fluit infra superficiem aquæ LC (§. 402 Anal. fn.).

SCHOLION.

268. Punctum istud a nonnullis Centrum velocitatis appellari solet; quia velocitas ipsi conveniens in locum omnium velocitatum inæqualium assumi potest.

CAPUT VII.

De Percussione Fluidorum.

DEFINITIO XVI.

269. **P**ercussio fluidi est actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus, sive fluidum sive solidum, impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum est alias (§. 523, 526 Mechan.).

COROLLARIUM I.

270. Quoniam percussio dato aliquo tempore absolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu sunt; tota illa quantitas impingit, adeoque corpus percutit quæ tempore isto affluit, ac ideo percussio fluidorum successiva est.

SCHOLION.

271. Fluida nempe consideranda veniunt instar multitudinis globulorum, quorum diversa series sibi mutuo succedentes in corpus quod percutitur impingunt. Ut adeo appareat pro diversa densitate variari globulorum simul incurrentium, pro diversa celeritate serierum sibi invicem succedentium numerum.

COROLLARIUM II.

272. Quoniam plus massæ simul impingit, si fluidum fuerit densius, quam si fuerit rarius; plus autem massæ in densiore sub eodem volumine continetur quam in rariore (§. 8, 10 Hydrost.); in percussione fluidorum habenda est ratio densita-

densitatis fluidi, seu cæteris paribus major fit percussio a fluido densiori quam a rariori.

COROLLARIUM III.

273. Quoniam dato tempore quo percussio successiva absolvitur, plus massæ in corpus percussum incurrit, si fluidum aliquod celerius, quam si tardius moveatur; in determinanda massa percutientis non solum densitatis, (§. 272), verum etiam celeritatis ratio habenda; seu, densitate existente eadem, major est massa percutientis si fluidum celerius moveatur quam si tardius; massæ scilicet in ratione celeritatum sunt.

COROLLARIUM IV.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum est, utpote cujus actio non nisi in nisu quodam sese exerente consistit (§. 9 Mechan.), istiusmodi autem vires, massa existente eadem, in ratione celeritatum sunt (§. 280 Mechan.) in moleculis quoque simul incurrentibus major est vis percutiendi, si fluidum aliquod celerius movetur quam si movetur tardius.

SCHOLIUM.

275. Patet adeo celeritatem fluidi bis spectandam esse in percussione: nimirum primo in determinanda massæ multitudine quæ agit in corpus percussum, & secundo in determinando gradu quem vis a motu habet.

DEFINITIO XVII.

276. Si fluida in duo plana, vel directe, vel sub eodem angulo obliquo incurrunt; eodem modo incurrere dicuntur.

SCHOLIUM.

277. Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt; quia in percussione spectatur potissimum vis percutientis, quæ non modo a directione impingentis, verum etiam a massa & celeritate pendet.

AXIOMA II.

278. Si idem fluidum, eadem celeritate, eodem modo, in plana aequalia incurrit, eadem vi eadem percutit. Nulla enim adest diversitatis ratio.

SCHOLIUM.

279. Vis percutientis pendet a celeritate, massa, & directione percutientis, nec non a plani percussi magnitudine. In hypothese adeo Axiomatis, omnia eadem præsupponuntur a quibus quantitas vis pendet qua fit percussio. Ex generalibus adeo principiis Metaphysicis (§. 193 Ontol.) constat, vim percutiendi hoc in casu differre minime posse.

THEOREMA XLI.

280. Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione planorum.

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A esse duplum plani B: erit adeo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142 Arithm.), sive $B = \frac{1}{2}A$. Quoniam itaque B & $\frac{1}{2}A$ eadem vi percutiuntur (§. 278), atque eadem adeo vi utraque pars ipsius A percuti debet (§. 87 Arithm.); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero simpla; hoc est, vires percutientes sunt in ratione dupla; consequenter in ratione planorum percussorum A & B. Idem cum eodem modo ostendatur in quacunque alia planorum ratione; patet in genere esse vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percussorum. Q. e. d.

THEOREMA XLII.

281. *Si idem fluidum, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana æqualia incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat fluidum dupla celeritate ejus qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique sub eodem angulo incurrat. Dico vires quibus percutiuntur plana A & B esse ut quadrata celeritatum, seu vim qua percutitur planum A esse quadruplo majorem ea qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diversa celeritate in plana A & B incurrit, *per hypoth.* massa percutientis planum A est ad massam percutientis planum B, ut celeritas qua movetur fluidum in planum A incurrens ad celeritatem qua movetur quod fertur in B (§. 273). Quamobrem fluida percutientia spectari possunt tanquam corpora inæqualis massæ. Enimvero si massæ inæquales sunt, vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 *Mechan.*), adeoque in casu præsentem, ubi massæ sunt ut celeritates, *per demonstrata*, in ratione duplicata celeritatum; veluti in casu speciali vis qua percutitur A quadruplo major est ea qua percutitur planum B (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

282. *Si fluidum idem, diversa celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrit; vires quibus percutiuntur sunt in ratione composita ex simplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcumque in plana quæcumque A & B, celeritatibus quibuscumque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate C, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit, erit $V : f = A : B$ (§. 280). Et si idem fluidum in planum B diversa celeritate C & c incurrit; erit in diversis istis percussionibus $f : v = C^2 : c^2$ (§. 281). Habemus adeo $fV : fv = A : B \cdot C^2 : B \cdot c^2$ (§. 213 *Arithm.*), consequenter $V : v = A : B \cdot C^2 : B \cdot c^2$ (§. 181 *Arithm.*); hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita ex simplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C² & c². *Q. e. d.*

THEOREMA XLIV.

283. *Si fluida diversæ densitatis, eadem celeritate, in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita densitatum fluidorum atque planorum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diversæ densitatis D & d in plana quæcumque A & B eadem celeritate, dicanturque vires percutientes f & v: erit $f : v = D : d$ (§. 272). Incurrat jam fluidum densitatis D in planum aliud A quod alteri B inæquale sit, dicaturque vis percutiens V; erit $V : f = A : B$ (§. 280). Erit itaque $fV : fv = A : B \cdot D : B \cdot d$ (§. 213 *Arithm.*); consequenter $V : v = A : B \cdot D : B \cdot d$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita planorum A & B atque densitatum fluidorum D & d. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLV.

284. Si fluida diversa densitatis, diversa celeritate, sed eodem modo, in plana inaequalia incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita ex rationibus planorum percussorum, & densitatum fluidorum simplicibus, atque duplicata celeritatum.

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana aequalia B & B, in quæ incurrat fluidum idem, seu ejusdem densitatis d , diversis celeritatibus C & c , dicanturque vires f & v : erit $f : v = C^2 : c^2$ (§. 281). Incurrant jam fluida diversæ densitatis D & d , eadem celeritate c , in plana inaequalia A & B, dicanturque vires percutientes V & f ; erit $V : f = A . D : B . d$ (§. 283). Habemus itaque $fV : fv = A . D . C^2 : B . d . c^2$ (§. 213 *Arithm.*), consequenter $V : v = A . D . C^2 : B . d . c^2$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes fluidorum diversæ densitatis in plana utcumque inaequalia celeritatibus quibuscunque incurrentium, sunt in ratione composita ex simplicibus planorum A & B, densitatum fluidorum D & d , atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 . Q. e. d.

SCHOLIION.

285. Habemus adeo mensuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim si indirecte impingit fluidum aliquod in planum, tum variatio non una de causa accidit, et si Theoremata in comparandis viribus sub eodem angulo impingentibus locum habeant.

THEOREMA XLVI.

Tab. VIII. Fig. 82. 286. Si aqua per declivem AD de-lapsa directe incurrat in palmulam rotæ

circa centrum C convertibilis; erit vis percutiens ut palmula ducta in radium EC, densitatem aquæ, & altitudinem lapsus AB. Tab. VIII. Fig. 82.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens absoluta est ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & quadratum celeritatis qua fuit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declivem AD delapsæ est in ratione subduplicata altitudinis lapsus AB (§. 204), adeoque quadratum ejusdem ut ipsa hæc altitudo. Quare vis percutiens absoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ, in densitatem aquæ, & in altitudinem lapsus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis, per hypoth. illa jam consideranda venit tanquam potentia ad Axem in Peritrochio applicata, cujus centrum motus in C; atque tum vis respectiva erit ut absoluta ducta in radium (§. 792, 153 *Mechan.*). Est igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in densitatem aquæ, altitudinem lapsus AB & radium rotæ EC. Q. e. d.

SCHOLIION.

287. Atque hinc patet modus ad mensuram revocandi vires percutientes aquarum rotas molares agitantium, easque inter se conferendi: quod ut evidentius pateat, sequentia adjicere lubet Corollaria.

COROLLARIUM I.

288. Sint radii rotarum R & r , palmulæ P & p , altitudines lapsus A & a ; cum densitatis, quæ eadem hic supponitur, in comparandis viribus percutientibus non habendo sit ratio (§. 181 *Arithm.*); erunt vires percutientes V & v , ut R . P . A : r . p . a (§. 286).

COROLLARIUM II.

289. Quodsi ponamus palmulas rotarum esse æquales, erit $P = p$, adeoque $V : v = R. A : r. a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium sunt in ratione composita radiorum rotarum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM III.

290. Quodsi ulterius fuerit $R = r$, hoc est, si rotæ fuerint æquales; erit $V : v = A : a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est vires aquarum rotas molares æquales percutientium sunt in ratione altitudinum lapsus.

COROLLARIUM IV.

291. Si fuerit $R = r$, hoc est, si altitudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V : v = P. A : p. a$, hoc est, vires quibus palmulæ percutiuntur sunt in ratione composita palmularum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM V.

292. Quodsi fuerit $A = a$; hoc est, si aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V : v = R. P : r. p$. hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM VI.

293. Quodsi præterea $R = r$; erit $V : v = P : p$, hoc est, si rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes sunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM VII.

294. Si vero fuerit, præter $A = a$, etiam $P = p$; erit $V : v = R : r$, hoc est, si aqua per eandem declivitatem irruit in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM VIII.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R. P. A = r. p. a$ (§. 288), adeoque $A : a = r. p : R. P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si altitudines lapsus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione composita reciproca palmularum & radiorum seu altitudi-

num rotarum; vires percutientes æquales sunt, & contra.

COROLLARIUM IX.

296. Quodsi præterea fuerit $r = R$; erit: $A : a = p : P$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est si aqua incidit in rotas æque altas per declivitates quarum altitudines rationem palmularum reciprocam habent; vires percutientes æquales sunt; & contra, si rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debent ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM X.

297. Si vero fuerit $P = p$; erit $A : a = r. R$; hoc est, si aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales, æquali vi percutiuntur; & contra si rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM XI.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r. p = R. P$ (§. 292), adeoque $R : r = p : P$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, aqua per eandem declivitatem delapsa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ sunt in ratione reciproca radiorum seu altitudinum earundem.

COROLLARIUM XII.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, adeoque, si ejusdem fuerint latitudinis, longitudinis rationem habeant (§. 389 *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, seu duæ rotæ sibi mutuo æquipollent, si habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales.

SCHOLIUM.

300. Hinc videmus in fluminibus admodum latis construi rotas molares, quæ exigua sunt altitudinis, sed magna longitudinis; latitudine defectum altitudinis compensant.

THEOREMA XLVII.

301. Si plana per fluida diverse densitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; resistentia quas experiuntur sunt in ratione composita ex rationibus planorum, & densitatum fluidorum simpla, & celeritatum duplicata.

DEMONSTRATIO.

Etenim fluidum quiescens eadem vi resistit plano per ipsum lato qua impingeret in idem planum, si ipsum quiesceret & fluidum moveretur ea celeritate qua planum fertur, eadem in utroque casu supposita directione: id quod per se manifestum assumitur. Jam vero vires quibus plana percutiuntur quiescentia a fluidis directe impingentibus, sunt in ratione composita densitatum & planorum simpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires quibus fluida directe resistunt planis per ea latis, sunt in ratione composita densitatum fluidorum, ac ipsorummet planorum simpla, & celeritatum quibus per eadem feruntur duplicata. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

302. Quodsi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, densitate existente eadem; vires quibus ipsis resistitur sunt in ratione simplici planorum & duplicata celeritatum quibus ea per fluidum feruntur (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

303. Quodsi porro plana fuerint æqualia; resistentia quas patiuntur erunt ut quadrata celeritatum.

COROLLARIUM III.

304. Si vero celeritates fuerint æquales; vires quibus planis resistitur erunt in ratione planorum.

DEFINITIO XVIII.

305. Celeritatem absolutam appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; Respectivam vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

SCHOLIUM.

306. Ponamus fluidum ferri celeritate ut AC, sed oblique incurrere in planum AB sub angulo incidentiæ BAC; celeritas illa respectiva dicitur, qua in impactu directo equipollente eidem substituenda venit. Tab. VIII. Fig. 83.

THEOREMA XLVIII.

307. Si fluidum indirecte impingit in rectam AB juxta lineas parallelas AC & DB: celeritas absoluta est ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ.

DEMONSTRATIO.

Exponat recta AC celeritatem absolutam, & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC resolvitur in laterales CF & AF eidem simul æquipollentes (§. 245 *Mechan.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit secundum directionem AF, sed tantummodo secundum perpendicularem CF, juxta quam fluidi motui resistit; evidens est celeritatem respectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodsi AC sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli incidentiæ CAF (§. 2 *Trigon.*). Quare cum sit celeritas absoluta ad respectivam, ut AC ad CF per demonstrata; erit illa quoque ad hanc, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLIX.

Tab. VIII. Fig. 83. 308. Si fluidum indirecte impingit in rectam AB juxta lineas parallelas CA & BD: massa ejus, qua percussio indirecta fit, est ad massam qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis: evidens est eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB quam ad rectam BE; consequenter si BD exponat celeritatem fluidi qua fertur, veluti spatium quod decurrit fluidum isto tempusculo quo absolvitur percussio; erit quantitas seu massa fluidi quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas ad massam quæ ad eandem juxta directionem perpendiculararem afflueret, ut BE.BD, ad AB.BD, consequenter ut BE ad AB (§. 181 Arithm.). Jam si AB sumatur pro sinu toto, erit BE sinus anguli incidentiæ EAB (§. 2 Trig.). Est igitur BE ad AB, consequenter massa fluidi qua percussio indirecta fit ad massam qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA L.

309. Si fluidum aliquod in rectam AB indirecte impingit; vis qua indirecte percutitur est ad eam qua eadem recta AB ab eodem fluido CABD juxta directiones ipsi perpendiculares affluente percuteretur, in ratione duplicata sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 83. Etenim vires quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278 Mechan.), scilicet vis directa est ad indirectam, ut massa quæ in percussione directa ad rectam AB defertur ad massam quæ ad eandem in indirecta affluit, & ut celeritas absoluta ad respectivam. Enimvero & massa in percussione directa est ad massam in indirecta, & celeritas absoluta ad respectivam, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ, (§. 307, 308). Est igitur vis percutiens directa ad indirectam, in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 167 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA LI.

310. Si fluidum oblique impingat in rectam AB juxta directiones parallelas AC & BD in ipsam delatum, & ex B demittatur perpendicularis BE in AC, ex E vero denuo demittatur EG ad AB perpendicularis; vis qua fluidum urget directe rectam AB est ad vim qua eam urget indirecte, ut tota AB ad segmentum ejus BG.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AB : BE = BE : BG$ (§. 330 Geom.) & AB ad BE, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ BAC (§. 2 Trigon.); consequenter BG est tertia proportionalis ad sinum totum & sinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 216 Arithm.). Quare cum sit vis qua percutitur recta AB directe ad eam qua indirecte percutitur, in ratione duplicata sinus totius ad

Tab. ad finum anguli incidentiæ (§. 309); VIII. crit etiam illa ad hanc, ut tota recta Fig. 83. AB ad segmentum ejus BG (§. 167 Arithm.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

311. Quoniam $AB > GB$ (§. 84 Arithm.); vis quoque qua recta AB a fluido directe percutitur, est ea qua indirecte percutitur major.

COROLLARIUM II.

312. Quodsi angulus incidentiæ fuerit IAB, rectæ AB segmentum vi indirectæ respondens erit BK (§. 310). Quare cum sit, sub angulo incidentiæ CAB, vis directa ad indirectam, ut AB ad GB, & sub angulo incidentiæ minore HAB, ut AB ad KB (§. cit.); vis directa ad indirectam, sub angulo incidentiæ majore, minorem rationem habet quam sub minore (§. 205 Arithm.): consequenter vis indirecta, sub angulo incidentiæ minore, minor est, quam sub majore (§. 206 Arithm.): unde decrescente angulo incidentiæ etiam vis percussiois decrescit, atque directione AC coincidente cum AB, hoc est, si fluidum juxta directionem AB movetur, percussio nulla est.

COROLLARIUM III.

313. Quoniam vis directa sub angulo incidentiæ CAB est ad indirectam, ut AB ad GB: sub angulo vero incidentiæ HAB, ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ, sub diversis angulis incidentiæ eandem rectam AB percutientes, sunt inter se ut rectæ GB & KB (§. 196 Arithm.).

COROLLARIUM IV.

314. Quodsi fluidum feratur celeritate V, vis directa qua percutitur recta AB exponitur per $V^2 \cdot AB$ (§. 282). Quare cum sit vis directa ad indirectam, ut AB ad GB, angulo incidentiæ existente CAB (§. 310); reperietur vis indirecta $\frac{V^2 \cdot AB \cdot GB}{AB}$

$= V^2 \cdot GB$; adeoque vis indirecta exponitur
Wolffii Oper. Mathem. Tom. II.

tur per $V^2 \cdot GB$, angulo incidentiæ existente CAB.

PROBLEMA LVI.

315. Determinare vim, quam ventus indirecte impingens in alas molendini exerit ad eas convertendas.

Tab. VIII. Fig. 84.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Repræsentet recta IO axem, atque planum ADCB alam, in quam ventus secundum directiones obliquas KA & HB agit. Ala axem, cui perpendiculariter insistit, secet ad angulum obliquum AEI (§. 929 Mech.) Quoniam itaque ventus secundum directionem obliquam IE in planum AC circa axem IE convertendum agit, per hypoth. ideo investiganda est vis quam ventus ad planum ADCB circa axem IE convertendum adhibet, dato angulo obliquitatis AEI, magnitudine alæ ADCB, ejus latitudine AB, & celeritate qua aër movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendicularis; cum aër secundum directiones parallelas KA & HB deferatur ad rectam AB, non plus aëris ferit planum obliquum ad axem ADCB, cujus latitudo AB, quam planum æque altum axem ad angulos rectos secans, cujus latitudo AG. Exponit igitur recta AG quantitatem aëris planum simul ferientis. Jam porro exponat EL celeritatem, qua movetur aër, cujus densitas sit $= d$; erit massa aëris qua percussio absoluitur in puncto E, ut AG ducta in densitatem, ac porro in LE.

2. Demittatur ex L recta LM ad AB perpendicularis: evidens est perpendicularem LM exponere celeritatem

D d d

ref.

Tab. VIII. Fig. 84.

respectivam, qua ventus in planum secundum directionem obliquam in E incurrens agit (§. 245 Mech.).

3. Quoniam vero ventus planum ADCB movere nequit nisi circa axem IE, circa quem convertendum: non omnem vim quam habet a celeritate respectiva LM in actionem suam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem IE; evidens est celeritatem LM resolvi in duas alias LN & MN, & eam quæ est secundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.

4. Denique cum in P sit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 141 Mechan.), adeoque massæ totius plani ADCB; patet vim quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, concipi posse tanquam applicatam ad punctum P, & PE tanquam radium Axis in Peritrochio cuius centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per d. AG. LE. MN. EP (§. 153 Mech.).

Q. e. i.

PROBLEMA LVII.

316. Determinare situm alarum motu vi venti indirecte impingentis agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, seu eas maxima celeritate convertit.

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in Problemate præcedente, dicaturque $AB = a$, $LE = b$, $EP = c$, densitas aëris $= m$, $GB = x$; erit, ob $AE = EB = \frac{1}{2} a$, per hypoth.

& IE rectæ HB parallelam, $EO = \frac{1}{2} GB = \frac{1}{2} x$ (§. 268 Geom.), & $AG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 Geom.).

2. Quoniam in $\triangle\triangle AGB$ & LME anguli ad G & M recti, per constr. & $MEL = ABG$ (§. 255 Geom.); erit (§. 267 Geom.).

$$AB : AG = LE : LM$$

$$a : \sqrt{(a^2 - x^2)} = b : \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$$

3. Similiter quia in $\triangle\triangle AEO$ & LMN , anguli ad O & N recti, per constr. &, ob rectum LME per constr. & obliquum L, $\triangle\triangle LMN$ & LME communem, angulus $LMN = AEO$ (§. 246 Geom.); erit (§. 267 Geom.).

$$AE : EO = LM : MN.$$

$$\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} x = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : \frac{bx}{aa}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

4. Quoniam vis quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IE convertendum, est ut $m \cdot AG \cdot LE \cdot MN \cdot EP$ (§. 315); erit ea

$$= m \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot b \cdot \frac{bx}{a^2} \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot c$$

$$= b^2 cmx \frac{b^2 cmx^2}{a^2}$$

5. Habemus itaque (§. 63 Analys. infin.)

$$b^2 cmdx - \frac{3b^2 cmx^2 dx}{a^2} = 0$$

$$1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} a^2} = x$$

Quod

Tab. VIII. Fig. 84. Quodsi jam a sumatur pro sinu toto, erit $\sqrt{\frac{2}{3}} a^2$ sinus anguli GAB (§. 2 Trigon.), cujus complementum ad rectum est angulus AEI sub quo planum ADCB axem EI fecat. Sit itaque $a = 10000000$, erit $\frac{2}{3} a^2 = 3333333333333333$, adeoque $x = 5773502$, cui in Tabulis sinuum quam proxime respondent $35^\circ 16'$. Est itaque angulus GAB $35^\circ 16'$, consequenter AEI qui quaeritur $54^\circ 44'$.

SCHOLION I.

317. Cum de constructione Molendinorum vi venti agitandorum ageremus (§. 929 Mechan.); angulum IEA 54° graduum fieri praecipimus appendicem minorum negligentes: in praesente nimirum negotio parum refert, siue is fiat 54° , siue 55° . Vulgo faciunt 45° , sed nulla Theoria nixi.

SCHOLION II.

318. Quoniam resistentia quam patitur corpus intra fluidum motum, aequipollet percussioni eadem celeritate qua ipsum movetur a fluido factae; non absimili modo determinari potest optimus situs gubernaculi, cujus ope naues in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem apprehenditur, qui ante, $54^\circ 44'$.

PROBLEMA LVIII.

Tab. VIII. Fig. 85. 319. Datis radio basis majoris AE, & altitudine segmenti conici EF; invenire altitudinem conii, cujus segmentum ACDB, ita per fluidum motum ut basis minor eidem occurrat & axis EF sit ad sectionem fluidi perpendicularis seu horizonti parallelus, minimam patiatur resistentiam.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quoniam perinde est, siue aqua in frustum conicum ACDB quiescens

impingat, siue ipsum in fluido quiescente moveatur; ponamus aquam in quiescens impingere juxta rectas GE & HI. Impinget ergo in basin CD directe, in superficiem indirecte (§. 269); eodem semper manente angulo incidentiae HCG vel ACI (§. 156 Geom.), quod directiones rectae IH constanter parallelae rectam AC in quocunque puncto sub eodem angulo secant (§. 255 Geom.). Quodsi jam AC sumatur pro sinu toto, erit AI sinus anguli incidentiae ACI (§. 2 Trigon.). Sit $EF = IC = a$, $AE = b$, $AI = x$; erit $AC = \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417 Geom.). Enimvero cum sinus totus quantitas constans esse debeat, sumatur FE vel IC pro sinu toto: erit itaque ut AC ad AI, ita IC ad sinum anguli incidentiae, qui adeo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquae impingere, quam ad rectam CL ipsi AI aequalem defertur, adeoque ad totam superficiem non plus aquae allabi quam quae annulum cujus AI latitudo est directe percuteret. Percussiones directae in eodem fluido eadem celeritate lato sunt ut plana quae percutiuntur (§. 280), adeoque annulus exponit percussio-nem directam ipsius, & circulus minor CD percussio-nem quam ipse patitur directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percussio-num, circuli autem sunt ut quadrata radiorum (§. 409 Geom.); resistentia directae quam patitur circulus minor CD, recte exponitur per-

Tab.
VIII.
Fig. 84.

CF^2 five $IE^2 = b^2 - 2bx + x^2$, & resis-
tentia annuli per $AE^2 - EI^2 = 2bx - x^2$.

3. Quodsi jam inferitur: ut quadratum
sinus totius a^2 ad quadratum sinus
anguli incidentiæ $a^2 x^2 : (a^2 + x^2)$,
ita resistentia directa annuli $2bx - x^2$
ad resistentiam indirectam quam pa-
titur superficies frusti conici (§. 309);
reperietur hæc $(2bx^3 - x^4) : (a^2 + x^2)$.

4. Quodsi jam addatur resistentia dire-
cta basis minoris $ba - 2bx + x^2$, *vi num.*
2. prodibit integra resistentia frusti

$$\frac{b^2 - 2bx + x^2 + \frac{2bx^3 - x^4}{a^2 + x^2}}{a^2 + x^2} \\ = \frac{a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 + x^2}$$

5. Quoniam resistentia minima, quam
istiusmodi frustum patitur *per hypoth.*
differentiale ejus nihilo æquale (§. 63
Anal. infin.), adeoque $(-2a^2 b dx$
 $+ 2a^2 x dx + 2b^2 x dx)(a^2 + x^2) - 2x dx$
 $(a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 + b^2 x^2)$ per
 $(a^2 + x^2)^2$ div. = 0, hoc est,

$$\frac{2a^2 bx^2 dx - 2a^4 b dx + 2a^4 x dx}{(a^2 + x^2)^2} = 0 \\ \frac{bx^2 - a^2 b + a^2 x}{(a^2 + x^2)^2} = 0 \\ x^2 + \frac{a^2 x}{b} = a^2$$

Tab.
VIII.
Fig. 84.

$$x^2 + \frac{a^2 x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^2}{4b^2}$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b} \sqrt{(4b^2 + a^2)}$$

$$x = \frac{a}{2b} \sqrt{(4b^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam
per hypoth. erit (§. 268 *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

$$\text{Ergo } EG = \frac{2ab^2}{a\sqrt{(4b^2 + a^2)} - a^2} \\ = \frac{2ab^2}{\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}$$

Enimvero $b^2 = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$
in $\sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$. Quare si
hic valor substituatur; erit $EG =$
 $(\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}) + \frac{1}{2}a$.

7. Fiat itaque $EO = \frac{1}{2}a$; erit AO
 $= \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$: cui si æqualis fiat
 OG , erit $EG = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$;
atque adeo in G vertex conii, cu-
jus frustum ACDB minimam pati-
tur resistentiam, si ea conditione in
fluido moveatur quam fert hypo-
thesis Problematis.

Finis Hydraulicæ & totius Tomi II. Elementorum Mathematicos.

Fig. Hydraul: Tab: I.

Fig: 1.

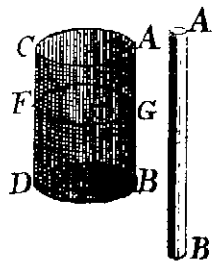


Fig: 2.

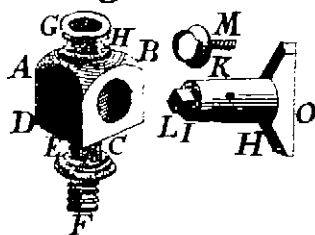


Fig: 3.

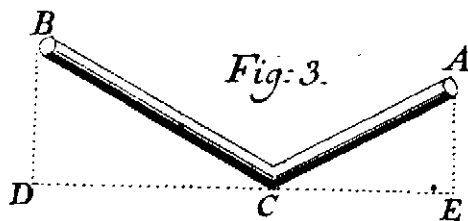


Fig: 5.

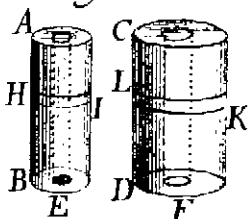


Fig: 6.

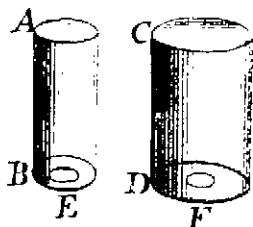


Fig: 4.



Fig: 12.

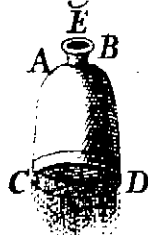


Fig: 7.

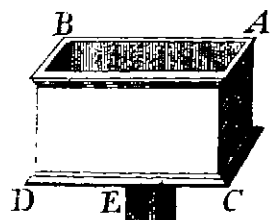
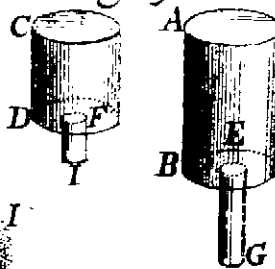


Fig: 8.

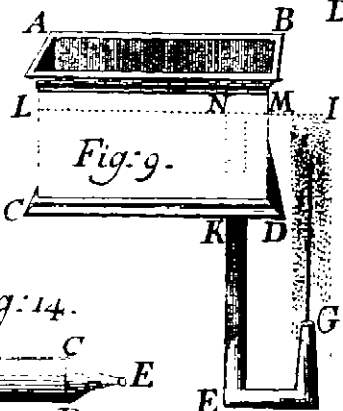


Fig: 9.

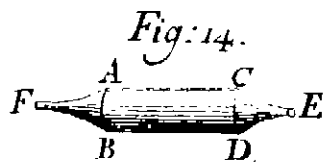


Fig: 14.

Fig: 11.

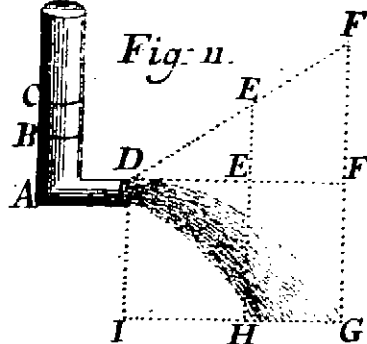


Fig: 10.

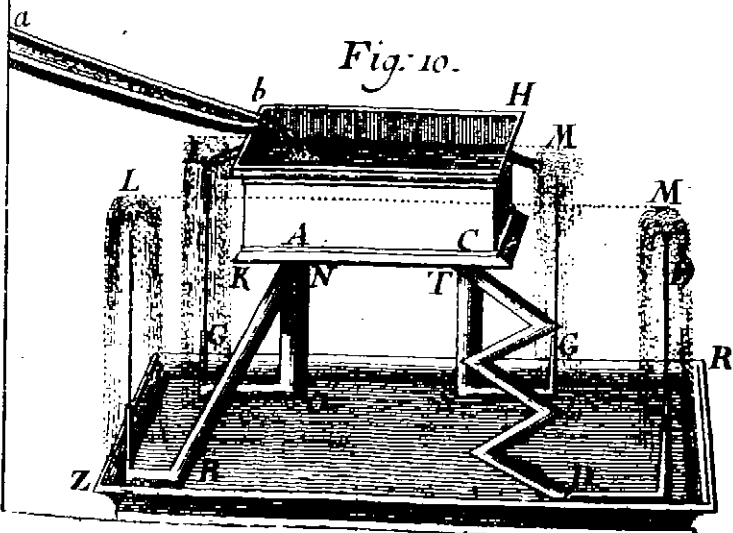


Fig: 13.



Fig: 15.

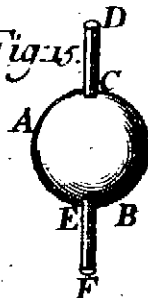


Fig: 16.

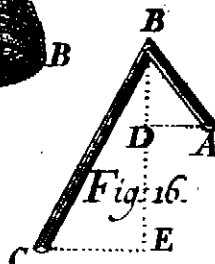


Fig:Hydraul:Tab.II.

Fig:17.

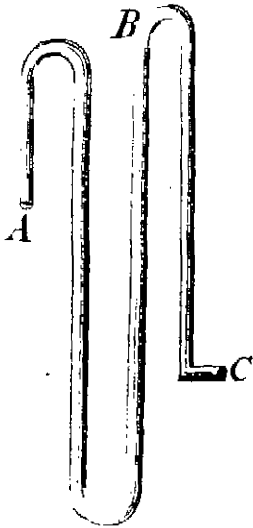


Fig:18.

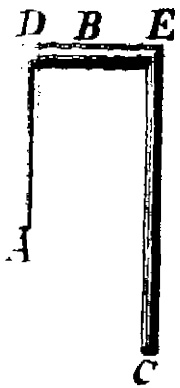


Fig:19.

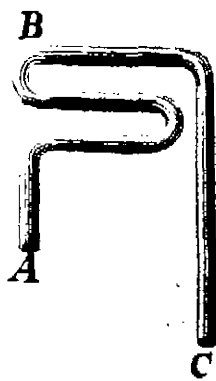


Fig:20.



Fig:22.

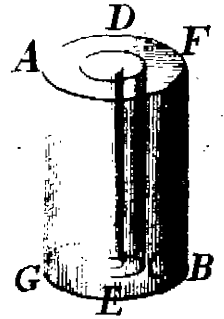


Fig:26.

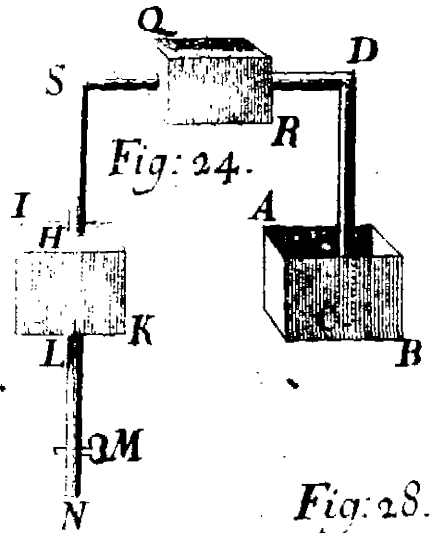
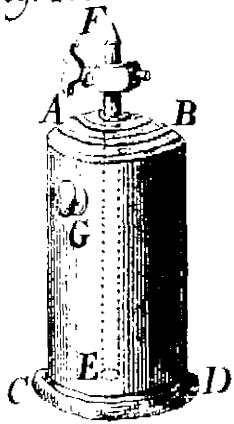


Fig:23.

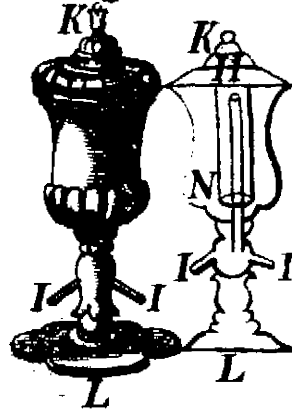


Fig:21.

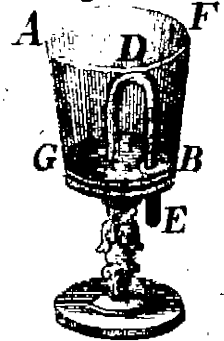


Fig:28.



Fig:31.

Fig:27.

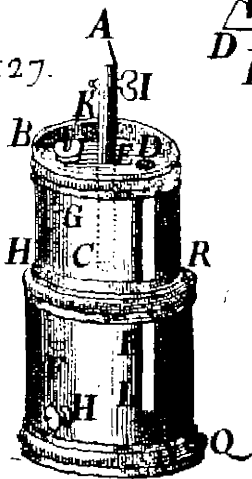


Fig:30.

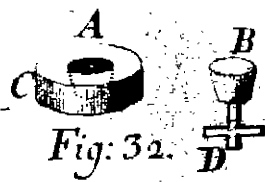
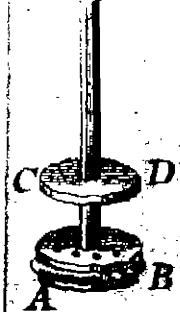


Fig:32.

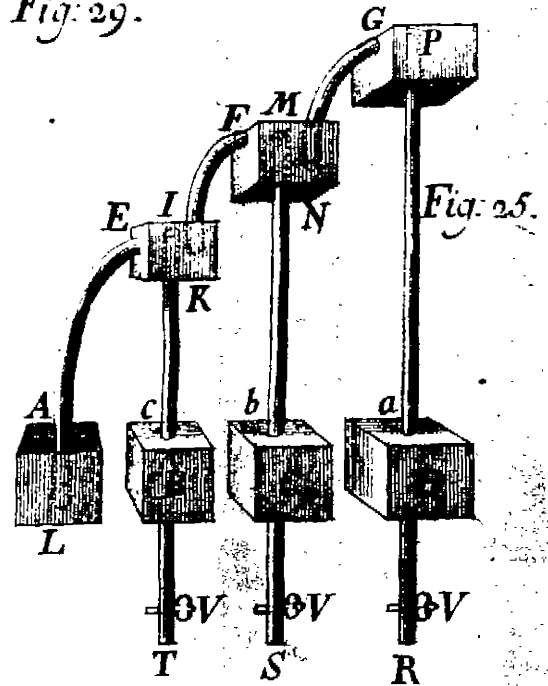


Fig:25.

Fig Hydraulic: Tab. III.

Fig: 33.

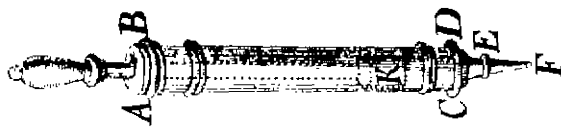


Fig: 34.

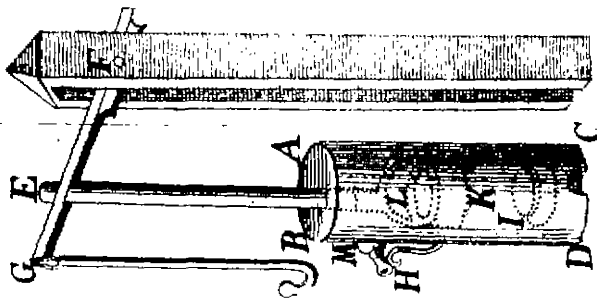


Fig: 35

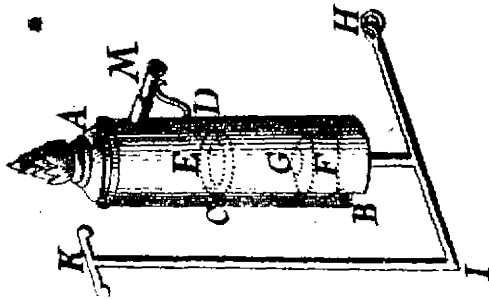


Fig: 36.

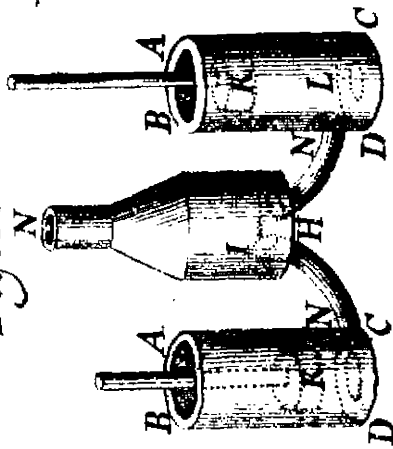


Fig: 40.

Fig: 39.

Fig. 38.

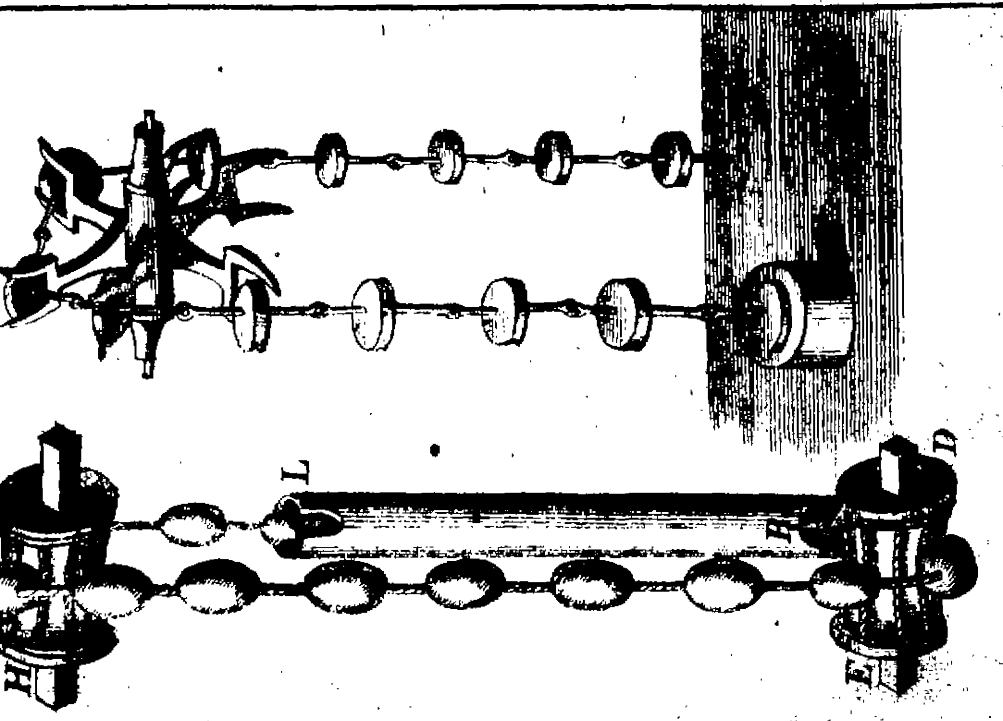


Fig. 37.

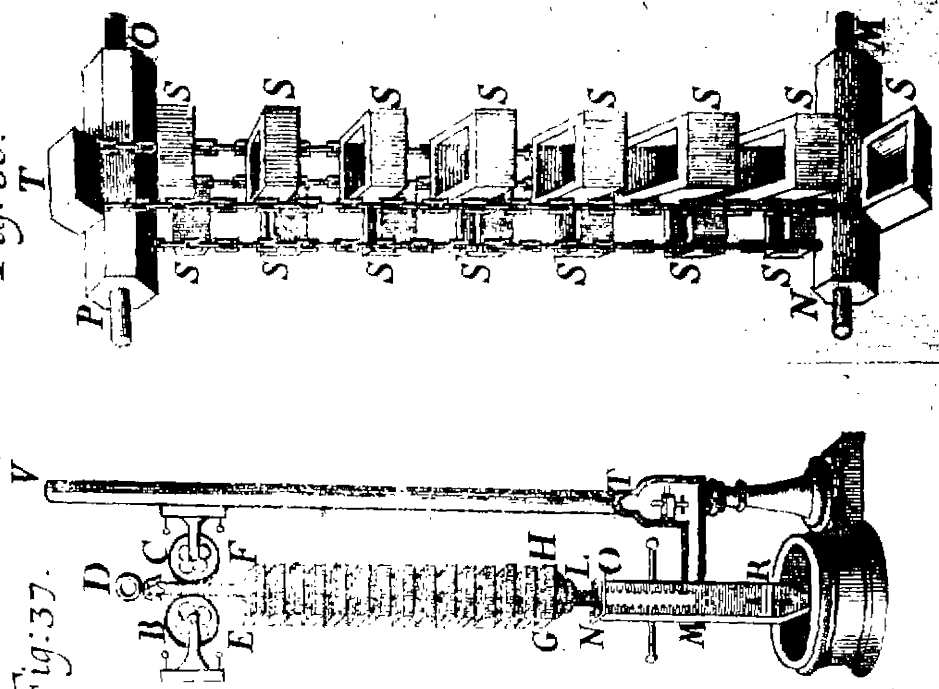


Fig: Hydraul: Tab: IV.

Fig: 41.

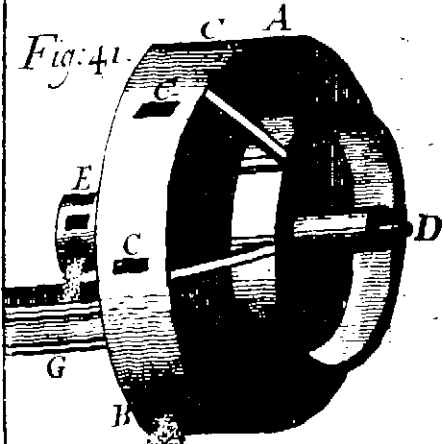


Fig: 44.

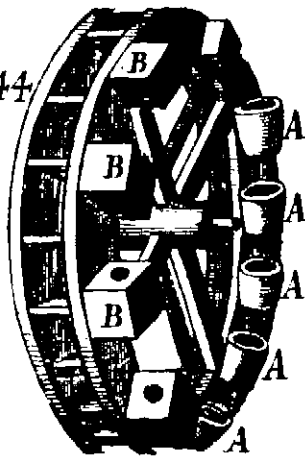


Fig: 46.

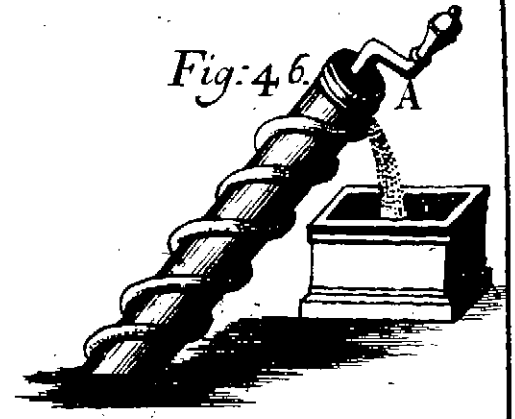


Fig: 47.

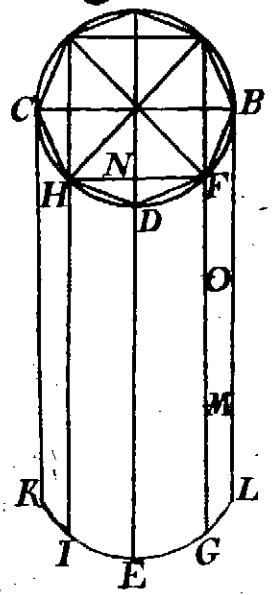


Fig: 45.

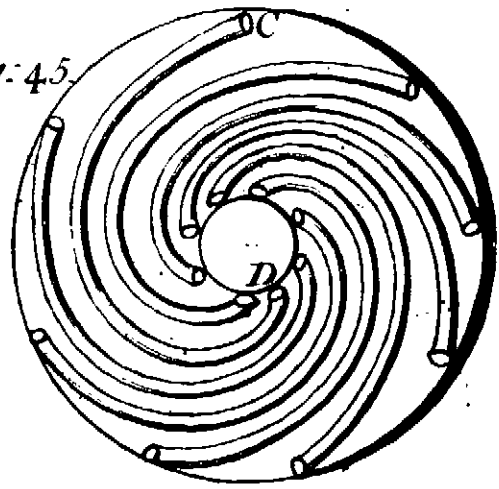


Fig: 42.

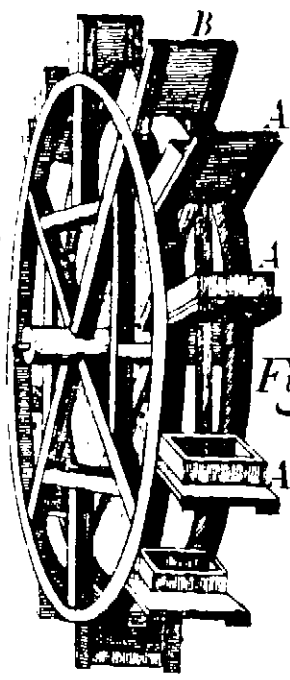


Fig: 48.

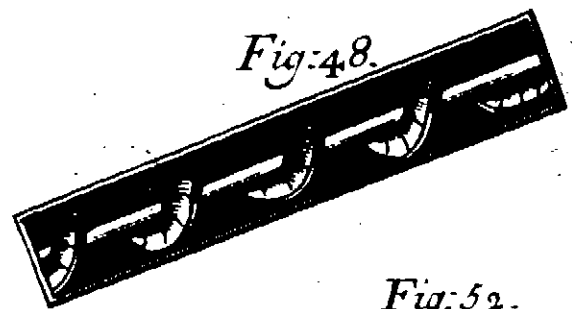


Fig: 43.

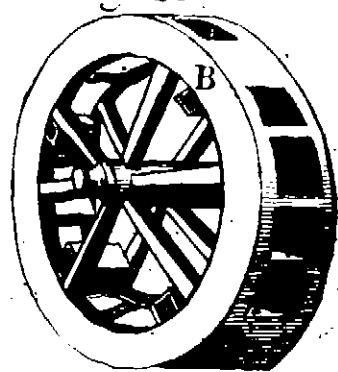


Fig: 51.

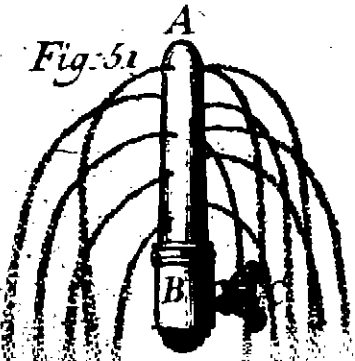


Fig: 52.

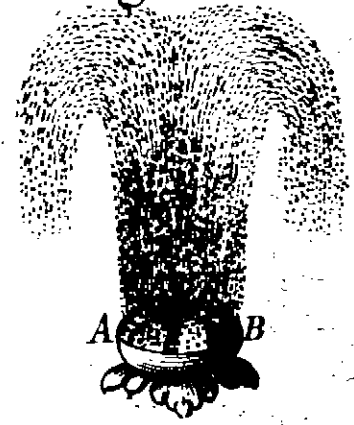
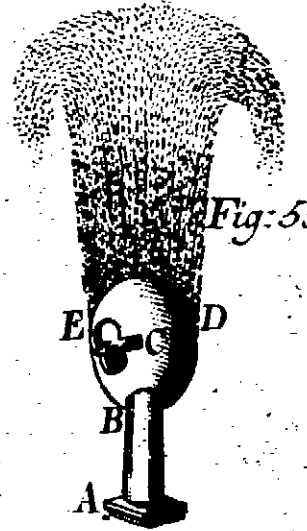


Fig: 53.



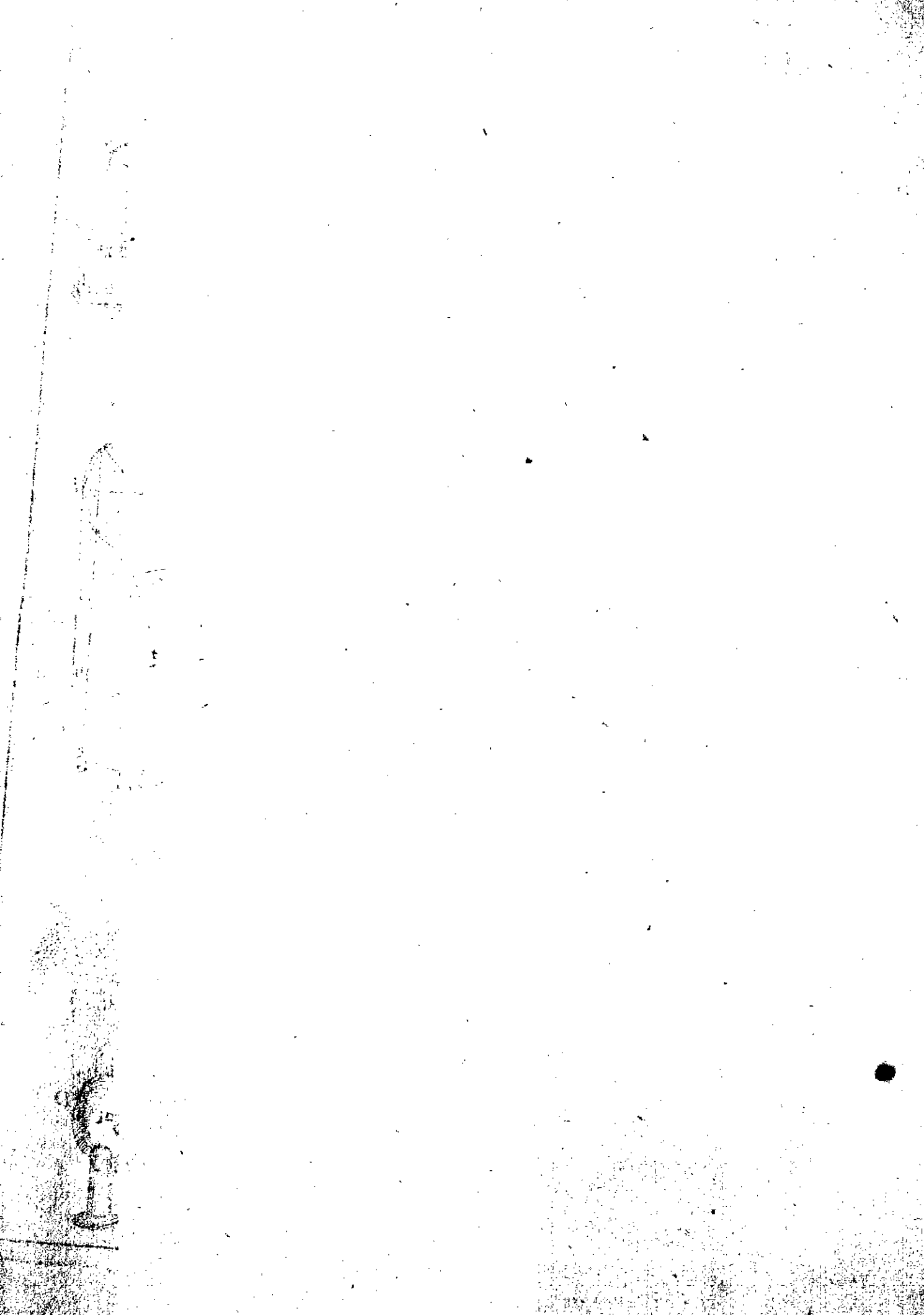


Fig. 49.

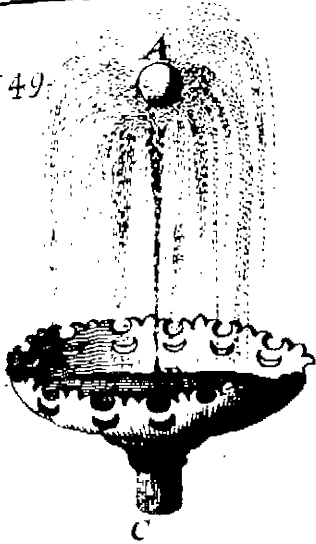


Fig. 50.

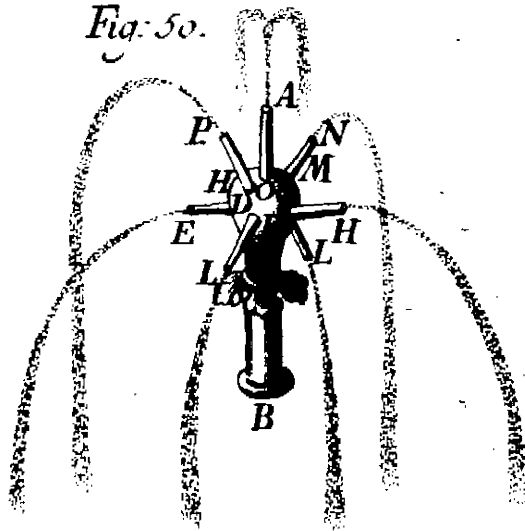


Fig. 54.

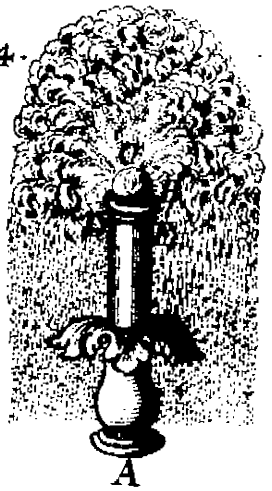


Fig. 55.

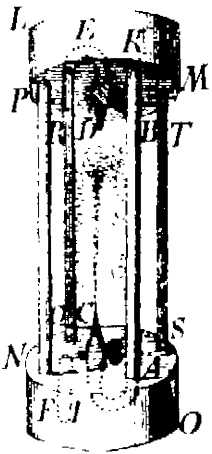


Fig. 56.

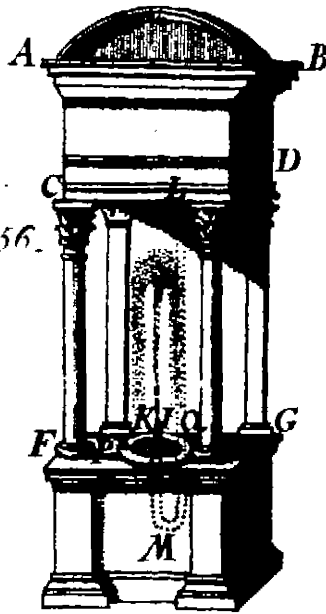


Fig. 58.

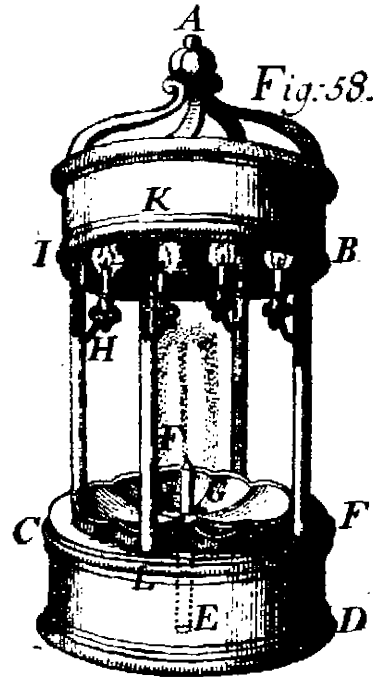


Fig. 61.

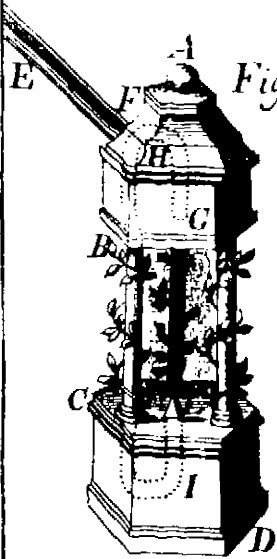


Fig. 57.

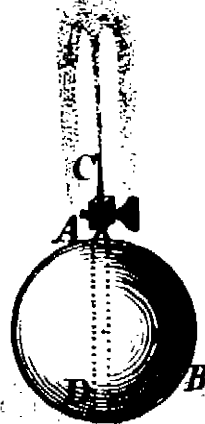


Fig. 60.

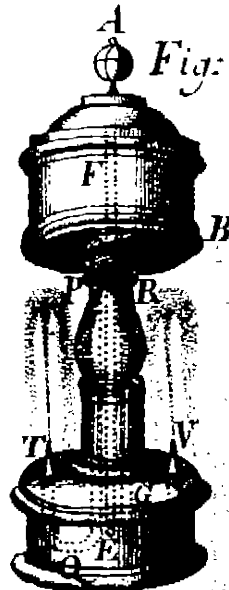


Fig. 59.

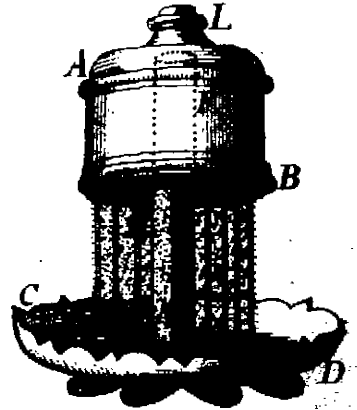


Fig. Hydraul: Tab: VI.

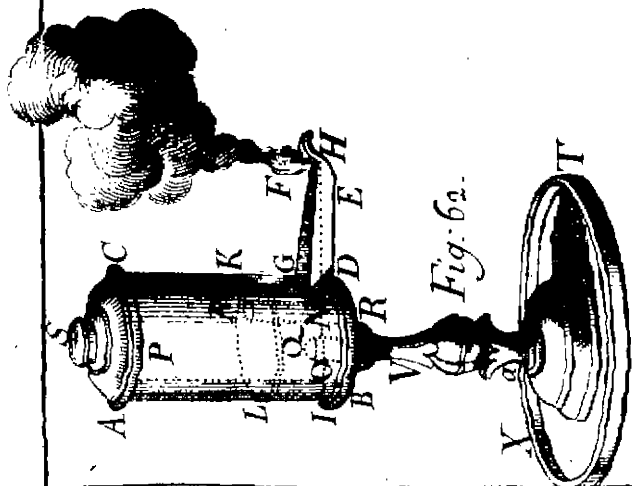


Fig: 62.

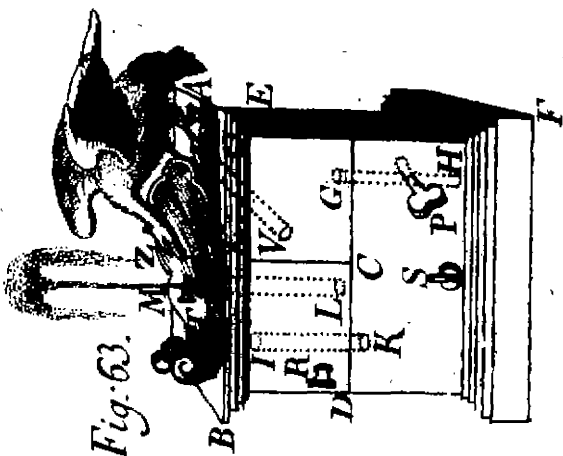


Fig: 63.

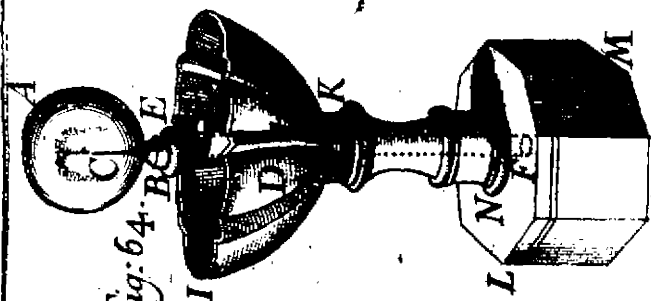


Fig: 64.

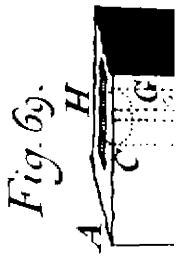


Fig: 69.

Fig: 66.

G



Fig. 65.

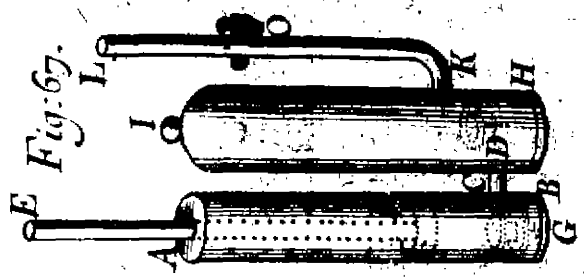
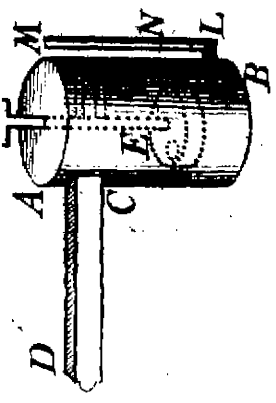
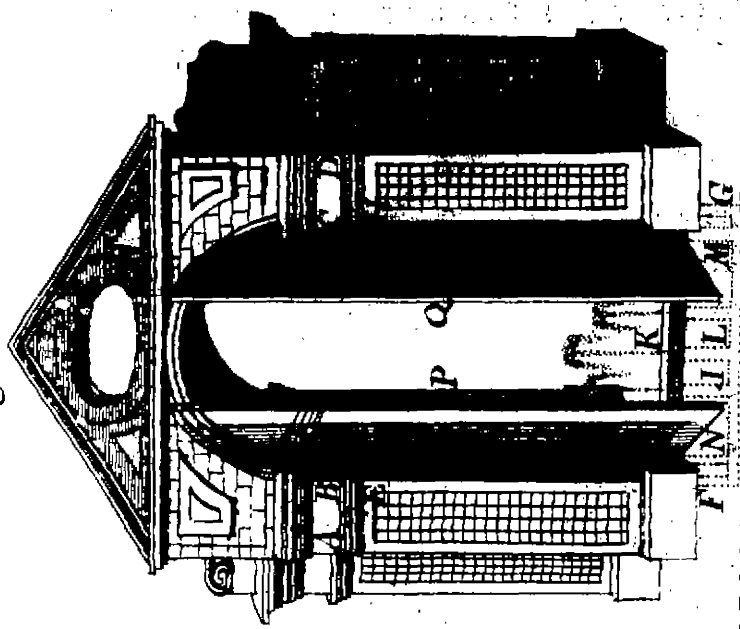


Fig. 67.

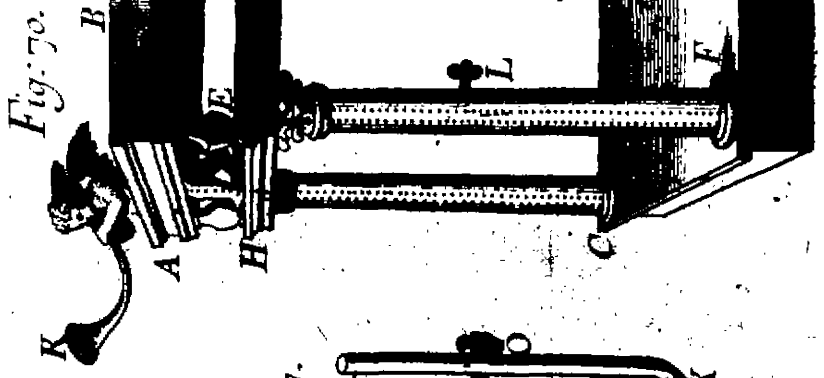


Fig. 70.

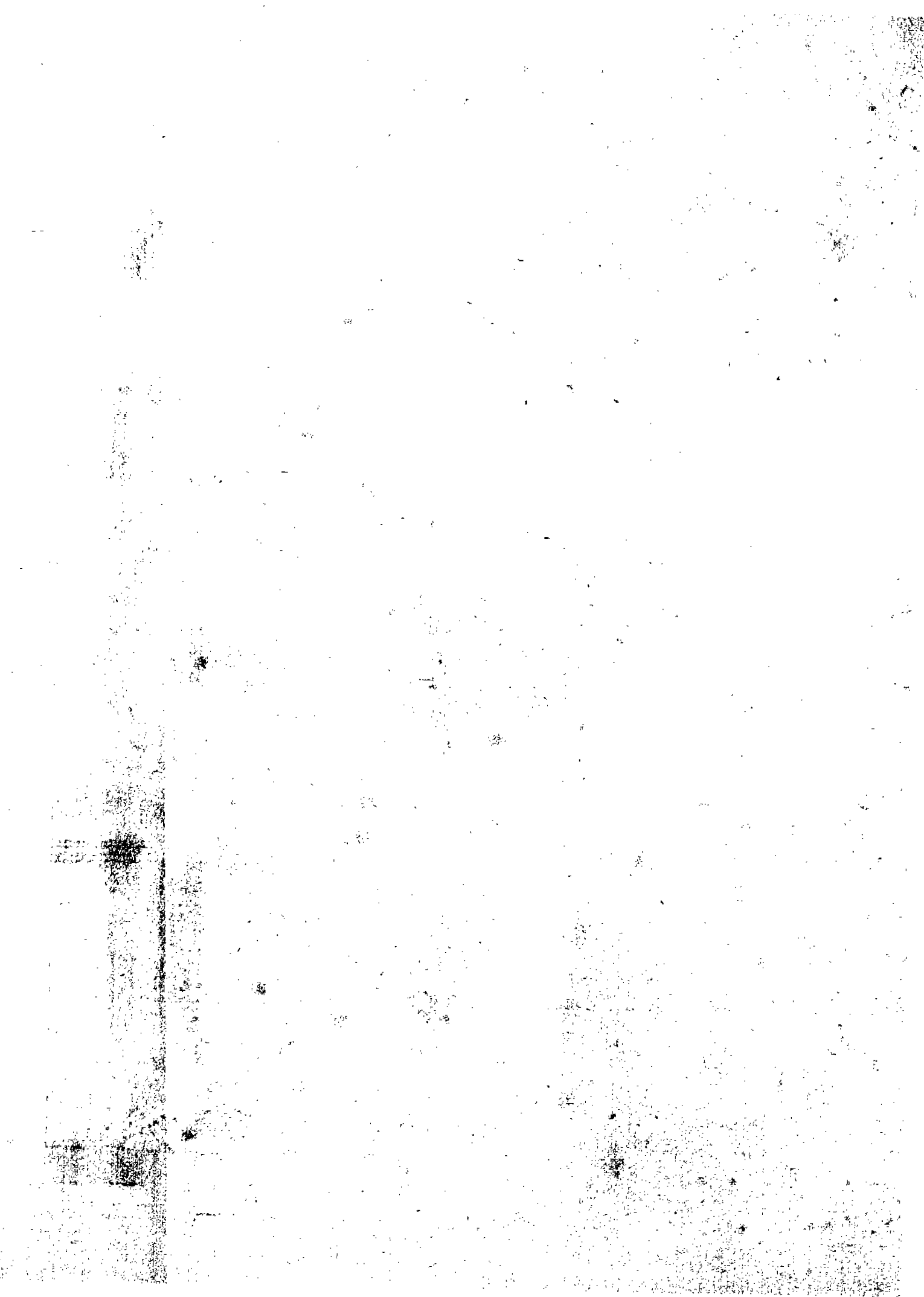


Fig: Hydraul: Tab: VII.

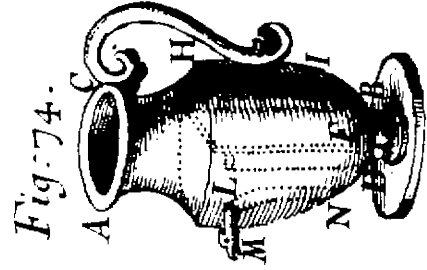
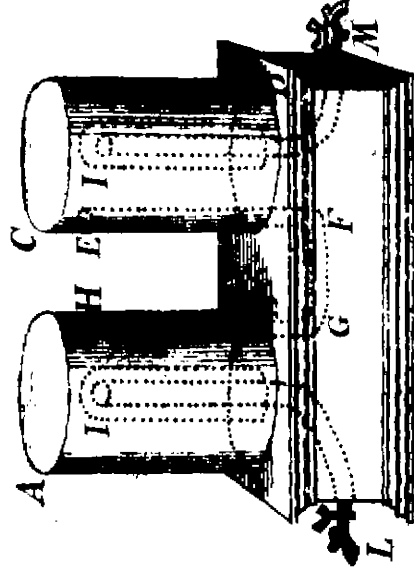
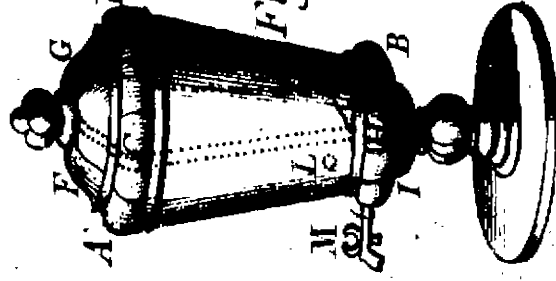
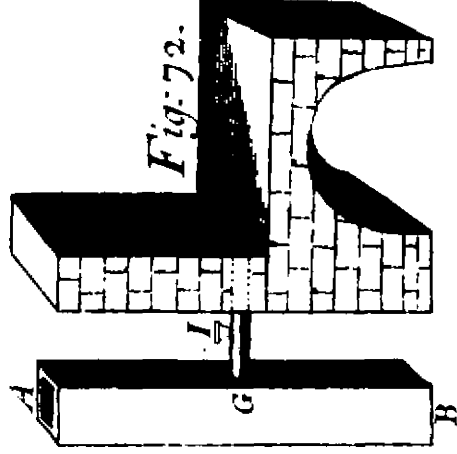
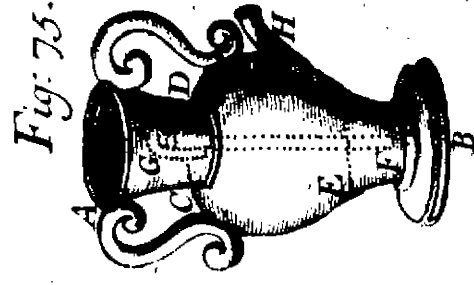
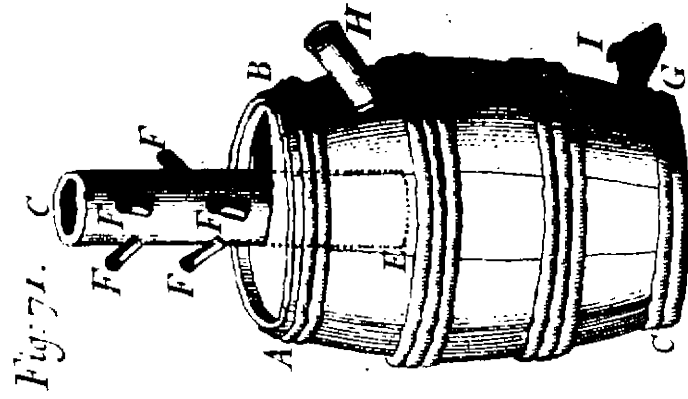
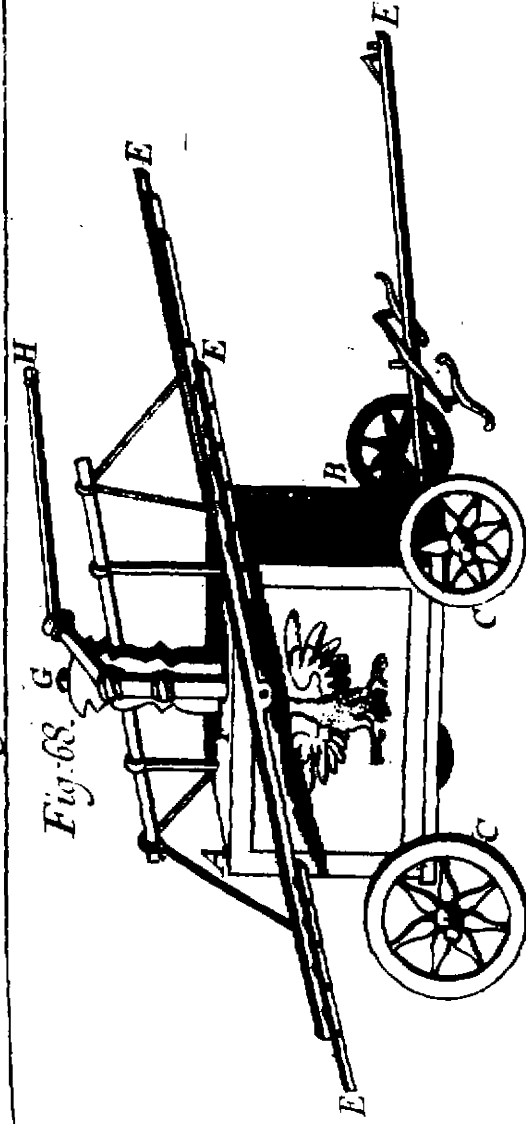




Fig. Hydraul. Tab. VIII.

