

PAULINO DE SAN JOSÉ (Sch.P.)

Institutiones analyticae earumque
usus in geometria : cum appendice de
constructione problematum solidorum /
auctore Paulino a S. Josepho... Cler.
Reg. Scholar. Piar... -- Editio prima
Neapolitana. -- Neapoli : Ex Typographia
Benedicti Gessari, 1755

[6], IV, [1], 368 p., [4] h. de grab.
pleg., a6, A-Z4, 2A-2Z4 ; 4°

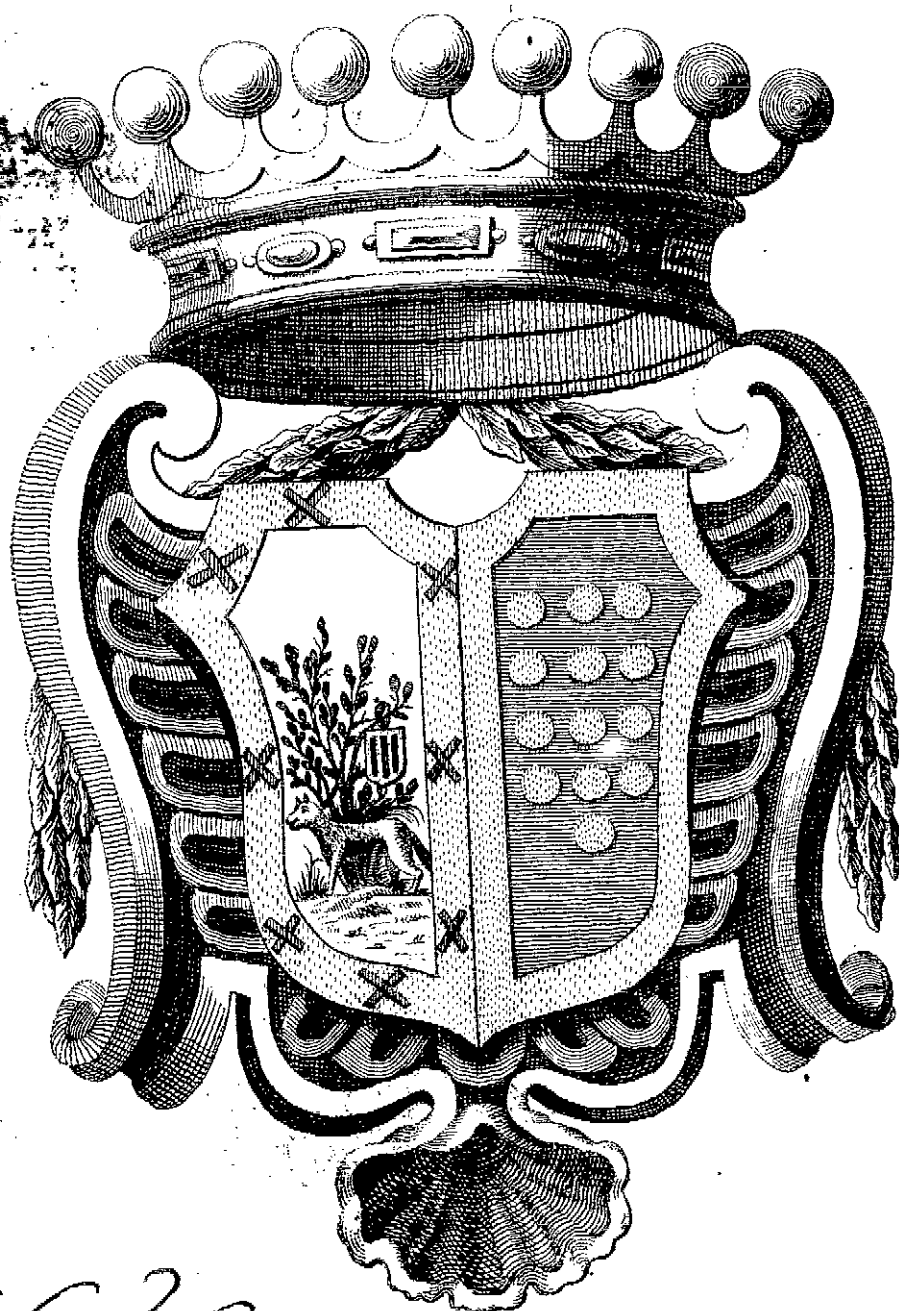
Port. con viñeta xil. -- Las h. de
grab. pleg. son calc.: "Fran Cepparuli
Inc"

1. Matemáticas-Tratados, manuales, etc.
2. Matematikak-Tratatuak, eskuliburuak,
etab. 3. Geometría-Tratados, manuales,
etc. 4. Geometria-Tratatuak,
eskuliburuak, etab. I. Título

R-6483 Enc. perg. -- Ex-libris del Conde
del Carpio

R-6483

10, 1^{re} tab^e



C.G.C. 20

Bois f^t

Reg. N.° 145/82

Arrangement of
maps also
Feb 2nd

INSTITUTIONES
ANALYTICÆ
EARUMQUE USUS
IN GEOMETRIA
CUM APPENDICE

De Constructione Problematum solidorum
AUCTORE
PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI

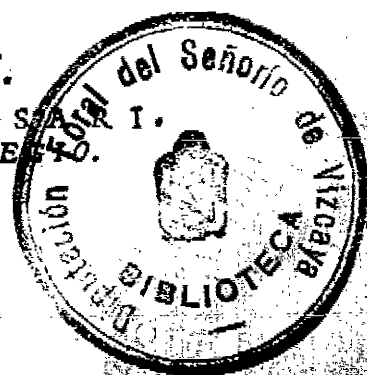
*Cler. Reg. Scholar. Piar. & in Archigymn. Romano
Eloquentiæ Professore.*

EMINENTISSIMO PRINCIPI S. R. E. C. A.
ANTONINO SERSALE
D.

EDITIO PRIMA NEAPOLITANA.



NEAPOLI, MDCCLV.
Ex Typographia BENEDICTI GESSNERI.
SUPERIORUM PERMISSU, ET PRIVILEGIO.



EMINENTISSIMO PRINCIPI
S. R. E. C A R D I N A L I
AMPLISSIMO , NEAPOLITANÆ
ECCLESIÆ ARCHIEPISCOPO
VIGILANTISSIMO
ANTONINO SERSALE
F.



UDIVI sæpe ego, EMINENTISS.
PRINCEPS, a viris doctis,
qui frequentes in meam Bi-
bliothecam conveniunt, nul-
lam esse litterarum humana-
rum partem hominum gene-
ri utiliorem, nullamque exo-
ptabiliorem, quam eam, qua ratio & mens
conformatur, atque longe lateque provehi-
tur, quod eâ fiat ut rebus humanis rite re-
cteque utamur, caste vero fruamur divinis:
hanc autem iis doctrinis confici, quæ Logi-

ca, Arithmetica, Geometria, totaque, quantacumque est, Mathefi continentur. Sic enim illi disputabant, his artibus rationem, quæ corporeis formis, quasi densa quadam caligine, septa est, sibi vindicari, & in purum æthera rapi, unde purius, quasi e specula quadam, terrena despicere, divinâ contemplari possit. Itaque eam ob rem Numerorum scientiam ac Geometriam a veteribus Ecclesiæ Doctoribus non plurimum tantum commendatam fuisse, sed excultam, in primis a Græcis atque Alexandrinis, quorum celebratissima sunt, etiam in nostra hac bonarum artium luce, opera, quibus Religionem Christianam aut constabilire inter Gentes, aut tueri aggressi sunt. His addebant, quum omni tempore hujusmodi studia fovenda sint, tum nullo tam esse Theologis etiam necessaria, quam nostro, in quo ii, qui per Summum nefas susceptas olim Religiones, sancteque a majoribus habitas, ex hominum animis evellere conantur, his præsertim disciplinis armati procedunt, iisque ferociter assultant, quos earum imperitos offenderint. Hæc me permovere quamobrem Paulini a S. Josepho Institutiones Arithmeticæ & Algebræ, quam vocant, meis typis vulgatiores
inter

inter nostros facere studuerim : audiebam enim eas tanto virorum doctorum plausu, non modo in Italia, sed quacumque per Europam utiliores litteræ pervagatæ sunt, exceptas, ut existimarem, nullum me majus operæ pretium efficere posse, quo & juventuti nostræ consulerem, & Neapolitanis typis famam nomenque conciliarem. Erat jam vero seligendus Patronus, non tam operis, quem nullo egere nemo est tam extra mores cultusque hominum projectus, qui ignoret; sed editoris, qui quo gratiora in publicum sunt, quæ ediderit, eo acriori invidentiæ obnoxius est, quando natura comparatum est præsentem aliorum fortunam ægris oculis intropicere. Ego vero undique circumspiciens alium neminem reperio, qui & mihi & operæ meæ magis justus patronus esse possit, quam Tu, EMINENTISS. PRINCEPS: Tu enim, quem difficillimis temporibus Ecclesiæ Neapolitanæ Pontificem non sine peculiari providentia Deus dedit, duas in primis ratus Pontificis partes, bonarum litterarum patrocinium suscipere, quando nequit Religio a sapientia separari; & Christianam caritatem in omnes, sine ullo discrimine, profiteri: nihil reliquum facis, ut olim in Brundu-

finā & Tarentina Ecclesia, itā nunc in hac
nostra amplissimi Regni moderatrice, quo
utriusque exemplar grave, incorruptum, at-
que indefesum te nobis demonstres, ut ex quo
tempore inter nos illuxisti, unum Te omnes
hominum catus intueantur, unum concele-
brent, sibi que felicitati ducunt emulari. Ita-
que ego te oro obtestorque, EMINENTISSIMĒ
PONTIFEX, ut, quo soles cetera, lubente ani-
mo mihi studioque in Te meo faveas, hanc-
que qualemcumque meæ de Te existimatio-
nis, & in Te obsequii, amoris in populares
meos, lætitiæ denique, qua Tu nos præsen-
tia ac virtute tua recreasti, in totum homi-
num genus, significationem, æqui bonique
facias. Ita Te Reip. Christianæ bono natum
Deus O. M. sempiternum tueatur ac sospitet.
Kalendis Maii 1755.

Em. Tuæ

Humillimus, & Obsequentiss. Famulus
Benedictus Gessari.

AD LECTOREM.



Iraberis fortasse Eloquentiæ professorem de Algebra scribere, cum illa amœnitates, elegantiam & dicendi copiam amet, hæc sicca, austera & tota ad severitatem composita esse videatur. At mirare potius me his temporibus de Algebra ipsa scribere, in quibus tot præclara de illa extant clarissimorum virorum volumina; quibus quicquam addere, arrogantia, quicquam demere, temeritatis est. Hoc quidem me, ut verum fatear, diu ancipitem habuit, diuque prohibuit, quominus publici juris facerem, quæ meo tantum privato studio selegeram. At vero cum animadverterem magna illa Analyticæ artis Autographa, quæ nobis incomparabiles viri Vieta, Cartesius, Wallisius, Newtonus, Reinan, ac Wolsius denique tradiderunt, ægre in omnium manibus posse versari, cum ob exemplorum paucitatem & pretium, tum ob multam ea percipiendi difficultatem, quæ in his subtiliora de Mathematicis & Physicis continentur; illa mihi potius conscripta esse videbantur viris jam in calculi scientia exercitatis, quam tyronibus, qui faciliora, tum etiam pauciora petunt: quamobrem his saltem hunc libellum non inutilem fore judicavi. Itaque id perpetuo præ oculis habens, me non viris doctis aliquid de Analysis novum promere, sed juventutem a primis ejusdem disciplinæ rudimentis instituendam suscepisse, quæ scilicet ultra communem Arith-

metricam, Euclidis elementa & pauca Archimedis theoremata progressa non esset: in id totus incubui, ut quæ minus dilucide ab aliis essent explicata, aut ad tyronum capzum haud satis apta viderentur, ea magis explanarem, magisque ordinare disponerem. Idcirco etiam minima, quæ ad id conferrent, consecretatus sum: quorum defectus saepe solet ab incepto cursu discentes non sine multo temporis dispendio retardare. Neque enim iuvenes omnes summo ingenio & acriori mentis vi donatos cogitare debemus. Sunt complures mediocri intellectu præditi, quibus tamen ad ejusmodi studia, unde eorum mens mirum in modum perfici ac roborari possit, iter omnino intercludi non debet. Adde plerosque aliis quoque disciplinis addictos haud posse diem integrum in calculo & Mathematicis meditationibus ponere. Quid si illis divinatione opus sit, ut auctoris mentem assequantur, diuque subobscuri, vel ambigui sermonis sensum speculari cogantur? Quo quidem nihil est ab omni Matheſi magis alienum: in cujus laudibus Geometræ omnes perspicuitati & evidentiae primas deferunt. Quocirca videant quam longe a proposito aberrant qui his de rebus obscure ac perplexe loquentes, se tamen in juventutis usum scribere profitentur. Pugnare (pace eorum dicam) secum ipsi videntur, dum scientiam alioqui reconditam obscuritate verborum & ambagibus infuscant, quam potissimum susceperant illustrandam. At vero cum in scientiis addiscendis, ut magnus Newtonus (a) inquit, exempla magis,

(a) Arithm. Univ. edit. 3. p. 179.

gis, quam præcepta profint, in iis tradendis brevitate, quam maxima potui, usus sum: omissis idcirco demonstrationibus, sicubi eas minus necessarias putaverim. Exempla vero congeffi plurima, quæ facilitate non minus ac elegantia ceteris antecellerent, ex quibus non pauca clarissimis Mathematicis, quos paulo ante nominavi, tum aliis quoque accepta refero; quorum nomina, præsertim si pulcherrimæ alicujus methodi auctores extiterint, in Scholiis apposui, ut una simul tyrones in historia Mathematica erudiantur, tum etiam ut debita unicuique laus tribuatur. Est enim benignum, uti nos Plinius (a) admonet, & plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris. Ceterum quicquid sit de facilitate ac brevitate methodi a nobis susceptæ, illud sibi studiosi juvenes persuadeant, neminem triduo vel quadriduo fieri Algebristam; neque inter ambulandum & oscitanter posse calculi scientiam obtineri. Non emitur profecto tam vili disciplina illa, quam summi ingenii & subtilitatis vir Cardanus (b) Artem Magnam, quam universæ Matheſeos clavim Oughtbredus (c), quam denique Wolfius (d) apicem totius humanæ eruditionis appellat. An ludus tibi videtur paucis lineis posse difficillima quæque in omni naturali scientia problemata solvere, ac Geometrice componere? Enim vero sedulo insistas oportet in iis maxime accurate calculandis, quæ quatuor, aut quinque

prio.

(a) In præfat. hist. Natur.

(b) Oper. Vol. 4. pag. 221.

(c) Clavis Mathem. Oxonii an. 1631. & 1693.

(d) In præfat. ad Elem. Analyſ.

prioribus hujus libri capitibus comprehenduntur. Ubi ex his vadis emergeris, omnia fere tibi plana occurrent, praesertim si quempiam via ducem habeas: quod si neminem (quod saepe usurvenit) at tute ipse tibi ductor sis & magister, macte animo, μελέτη τὸ πᾶν, inquit Perriander. Quem tibi offero libellum diligenter evolve, nec pigeat calamo excipere & ad calculum revocare sigillatim, quæ inibi traduntur: cito progressus in hoc studio non penitendos experiere.



EMINENTISS. SIGNORE.

Benedetto Gessari supplicando espone a V. E. come
deve dare alle stampe un libro intitolato : *Institu-
tiones Analyticae Auctore P. Paulino a S. Josepho &c.* per
tanto supplica V. Em. concederne la licenza con ordina-
re la revisione a chi meglio li parerà, e haverà a gra-
zia, ut Deus.

*Adm. Rev. P. Petrus Rondinelli Ord. Prædicator. S. Theol.
Mag. revideat, & referat. Datum Neapoli hac die 26.
Januarii 1755.*

JULIUS NICOLAUS EPISC. ARCAD.

CAN. DEP.

EMINENTISS. DOMINE.

Cum hæc *Institutiones Analyticae P. Paulini a S. Jose-
pho* jam dudum Romæ fuerint approbatæ, iterum-
que impressæ, cum etiam nihil contineant, nisi numera-
lia problemata ex postremis Euclidis, & Procli libris de-
prompta, denuò hic Neapoli imprimi quoque possunt.
Datum in Regali Conventu S. Petri Martyris die 14. Fe-
bruarii 1755.

Humill. & Addict. Serv.

F. Petrus Rondinelli S. Th. Mag. Ord. Præd.

*Attenta Relatione Dom. Revisoris Imprimatur. Neapoli
die 16. Februarii 1755.*

JULIUS NICOLAUS EPISC. ARCAD.

CAN. DEP.

S. R.

SIGNORE.

Benedetto Gessari posto a piedi di V.M. supplicando es-
 ne, come deve dare alle Stampe un libro intitolato:
Institutiones Analyticae Auctore P. Paulino a S. Josepho &c.
 per tanto supplica V.M. concederne la sua Real licenza,
 con ordinarne la revisione, e l'averà a grazia, ut Deus. et
Rev. P. F. Cherubinus revideat, & in scriptis referat die
23. mensis Januarii 1755.

NICOLAUS DE ROSA EPISC. PUTEOL. CAP. MAJOR. I.

Illustriss. e Reverendiss. Signore.

Nel libro *Institutiones Analyticae &c.* non si fa parola
 di giurisdizione, e per quanto osservo neppur si par-
 la contro le leggi del nostro Regno. Sono dunque di parere,
 che possa darsi alle stampe. Napoli dal Convento di S. Do-
 menico Maggiore a dì 28. Gennajo 1755.

Di V.S. Illustriss. e Reverendiss.

Umiliss. Ossequiosiss. Servo.

F. Cherubino Pellegrino de' Predic. Reg. Professore.

Die 13. mensis Februarii 1755. Neapoli

Viso Rescripto suae Regalis Majestatis sub die 8. currentis mensis, &
 anni, ac relatione Rev. P. F. Cherubini Pellegrino, de commissione
 Rev. Regii Cappellani Majoris, ordine praefatae Realis Majestatis.
 Regalis Camera S. Clarae providet, decernit, atque mandat, quod im-
 primatur cum inserta forma praesentis supplicis libelli, ac approba-
 tionis dicti Rev. Revisoris, verum in publicatione servetur Regia
 Pragmatica hoc suum.

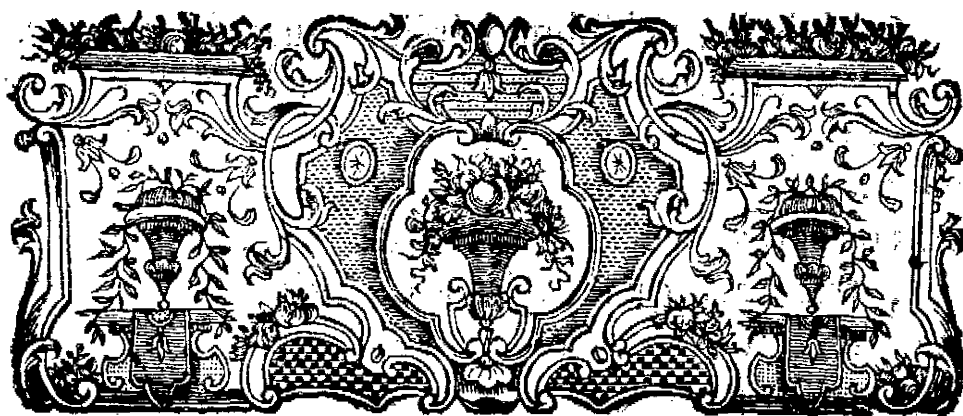
CASTAGNOLA. FRAGGIANNI. GAETA. PORCINARI.

Ill. Marchio Danza Praef. S.R.C. tempore
 subscriptionis impeditus.

Athanasius.

Reg. f. 64. t. Carulli.

INSTI.



INSTITUTIONES ANALYTICÆ.

DEFINITIONES.

I.  ALGEBRA, seu ANALYSIS SPECIOSA, quæ a quibusdam MATHESIS UNIVERSALIS dicitur, est methodus resolvendi problemata circa quantitatem.

II. *Quantum* dicitur omne id, quod augeri & minui potest, ut numerus, li-

nea, superficies, corpus, tempus, motus, velocitas &c.

III. Quantitates Analyticæ exprimuntur per Alphabeti literas, sed hoc discrimine: literæ priores *a, b, c, d* &c. adhibentur ad exprimendas quantitates *cognitas*, seu *datas*; postremæ vero *x, z, y, v* ad *incognitas* & *quæsitæ*.

IV. Conducit etiam memoriæ quantitates tam cognitas, quam incognitas designare per primam literam rei, quam significant, ut numerum per *n*, summam per *s*, tempus per *t*, velocitatem per *v*, circuli radium per *r*, tangentem per *t* &c.

V. **Multiplicia**, vel **submultiplicia** quantitatum exprimi solent indeterminate & in genere per literas m, n, r , ut mx, ny, rz , prout m, n, r numeros integros, vel fractos designant. In particulari vero & in specie exprimuntur per numeros integros, vel fractos, ut $2x, 3z, 4y$, & significant duplum, triplum, quadruplum quantitatum x, z, y . Quemadmodum $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}b, \frac{1}{4}c$, vel etiam $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}$ significant partem aliquotam quantitatum a, b, c ; hoc est dimidium a , tertiam partem b , quartam partem c .

VI. Quanta, quibus præmittitur signum PLUS +, *affirmativa*, ac *positiva* dicuntur. Quæ vero præferunt signum MINUS —, *negativa*, seu *privativa*. Quæ autem principio posita sunt & omni signo carent, habentur pro affirmativis & quasi signo + affecta.

VII. Quantitates Analyticae, quæ signis + & — non sunt connexæ, dicuntur *simplices*, *monomiae*, & *incomplexæ*, ut $ab, abc, \frac{ab}{c}$. Contra vero $a + b, ab - bb, ac + m - r$, dicuntur *compositæ*, *complexæ*, seu *polynomiae*; & si duobus terminis constant, ut $a + b$, vel $ab - bb$, *binomiae*; si tribus, ut $ac + m - r$, *trinomiae*, & sic deinceps, appellantur.

VIII. Nota *Æqualitatis* est =, ita ut $a = b$, vel $x = 6$ significet a & b esse æquales, item valorem x esse 6.

IX. Sed $a > b$ indicat a *majorem* esse, quam b . Contra $a < b$ denotat a *minorem* esse, quam b .

X. Proportionalitas Geometrica, seu quatuor terminorum Geometrice proportionalium ratio exprimitur per quatuor puncta hoc modo $a. b :: c. d$, nempe a est ad b , ut c ad d . Si sit continuata, exprimitur per signum $::$. Sic $:: a, b, c$ indicat a esse ad b , ut idem b ad c . Item $:: 2, 4, 8, 16, 32$ &c.

XI. Proportionalitas vero Arithmetica exprimitur per tria puncta hoc pacto $a.b::c.d$, nimirum eadem est differentia inter a & b , quæ inter c & d , ut 6. 8::10. 12.

XII. Numeri, qui quantitates analyticas præcedunt, ut $2x$, $3y$, & in trinomio $aa + 2b - 4c$ numeri 2 & 4, dicuntur *Coefficientes*. Ubi nullus est numerus, semper pro coefficiente intelligitur unitas. Sic ab intelligitur $1ab$, & $2a - b$ intelligitur $2a - 1b$.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Quantitates simplices addere.

I. **S**I quantitates addendæ eisdem literis sint expressæ, sufficit numeros præfixos addere, & numerorum summam eidem literæ præfigere. Sic ut addam a ad a , scribo $2a$; ut addam b ad $2b$, scribo $3b$ &c.

II. Si verò literæ sint diversæ, additio fit signo $+$. Sic $a + b$ exprimit summam quantitaturn a & b . Ecce exempla.

a	a	c	$\frac{1}{2}b$
$2a$	b	d	$2c$
a	a	e	$3x$
$4a$	$2a + b$	$c + d + e$	$\frac{1}{2}b + 2c + 3x$

SCHOLIUM. Ordo literarum non attenditur. Summa $2a + b$ idem valet ac $b + 2a$. Sicuti $10 + 5$ idem valet ac $5 + 10$, nempe 15.

PROPOSITIO II.

Quantitates simplices subtrahere.

I. SI quantitates iisdem literis sint expressæ, subtrahuntur numeri præfixi, & residuum eidem literæ præponitur. Ut subtraham $2a$ ex $5a$, scribo pro residuo $3a$. Similiter sublato b ex $2b$, remanet b . Item sublato x ab x , remanet 0, seu nihil.

II. Si quantitates diversis literis expressæ fuerint, subtractio fit signo—. Ut subtraham a ex b , scribo $b - a$. Similiter sublatis $2a$ ex $4y$, residuum erit $4y - 2a$.
Exempla.

$5a$	$5b$	a	$3c$
$3a$	$2b$	b	$4x$
$2a$	$3b$	$a - b$	$3c - 4x$

SCHOL. Intelligenti prima Arithmeticæ communis elementa nulla difficultas esse potest de duabus præcedentibus propositionibus. Nam si ponatur $a = 5$, erit summa $4a = 5 + 5 + 5 + 5$, hoc est $4a = 20$, ut in primo exemplo. Si ponatur $a = 10$ & $b = 4$, erit summa $2a + b = 20 + 4$, hoc est 24, ut in secundo exemplo. Similiter si ponatur $a = 10$ & subtrahenda sint $3a$ ex $5a$, nempe 30 ex 50 , residuum erit $2a = 20$. Tandem si ponatur $a = 20$ & $b =$

$b=15$, erit $a-b=20-15$, hoc est 5, ut ex primo & tercio subtractionis exemplo habetur.

PROPOSITIO III.

Quantitates simplices multiplicare.

I. **M**ultiplicatio fit per simplicem literarum conjunctionem, nullo interposito signo. Sic ab , vel ba (ordo literarum non attenditur) significat productum a in b , vel b in a ; unde si ponatur $a=5$ & $b=6$, erit $ab=30$.

II. Quantitates multiplicandæ a & b dicuntur *factores* & ab *factum*. Si factoribus præfixi sint numeri, hi inter se multiplicentur, ut in communi Arithmetica, eorumque productum præmittatur facto literarum. Ecce exempla:

ab	ac	$2cd$	$\frac{1}{2}afg$
c	b	$3a$	$\frac{1}{3}cm$
abc	abc	$6acd$	$\frac{1}{6}acfgm$

SCHOL. Multiplicatio aliquando indicatur per Crucem, quam S. Andreae vulgo vocant. Sic $a \times b$ indicat factum a in b , seu ab . Ceterum cum in omni multiplicatione sit unitas ad factorem unum, ut alter ad productum, erit productum quarta proportionalis, hoc est $1 : a :: b : ab$, proinde optime exprimitur per ab .

PROPOSITIO IV.

Quantitates simplices dividere.

I. **R**egula est, ex dividendo dele divisorem & habebis quotum. Sic ad dividendum ab per a , deleto a ex dividendo, restat b quotus.

II. Si adsint coefficientes, hos seorsim divides, ut in vulgari Arithmetica. Sic dividendo $6ab$ per $3b$, quotus erit $2a$; & $\frac{4ax}{2x} = 2a$.

III. Quod si dividendus & divisor nullam habeant litteram communem, tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut $\frac{ax}{c}$, $\frac{ax}{n}$, $\frac{2x}{3c}$ &c.

SCHOL. Divisio dissolvit id, quod fuit multiplicatione compositum, proinde divisor per quotientem multiplicatus restituit ipsum dividendum. Nam multiplicato quoto b per divisorem a , restituitur dividendum ab . Atque hinc apparet, cur in divisione deleto divisore ex quantitate dividenda, habeatur quotus. Nam quotus & divisor sunt duo factores, qui producunt ab , & eliso divisore a , remanet alter ex factoribus pro quoto, nempe b .

L E M M A.

*Quantitates complexas ad simplices
expressiones. reducere.*

I. **S**i quantitates iisdem literis notatae habent idem signum $+$, aut $-$, addantur earum coefficientes, & præponatur summæ idem signum. Sit reducenda ad
simpli-

simpliciores expressionem quantitas $x + 3ab + 2x + 2ab$, additis coefficientibus terminorum similium, reducitur ad $3x + 5ab$. Simili ratione quantitas $y + 2xy - 2d + xy - d$, erit $y + 3xy - 3d$.

II. Cum vero quantitates iisdem literis expressæ habent signa diversa, subducendus est minor coefficientis a majori, & residuo præponendum signum majoris. Sit quantitas $4ac + bc - 3bc$, subducto $+ bc$ ex $3bc$, & præposito signo $-$ quantitatis majoris, erit per reductionem $4ac - 2bc$. Pariter $2ax - ax + 4b - 3b$, erit $ax + b$.

PROPOSITIO V.

Quantitates compositas addere.

I. **S**I quantitates eisdem literis notatæ habent idem signum $+$, aut $-$, adduntur simul, illo eodem præfixo signo.

$-a + 3b$	$a - x$	$\frac{1}{2}cb + 2b - 3$
$-a + 2b$	$3a - 2x$	$\frac{1}{2}cb + 3b - 4$
$-2a + 5b$	$4a - 3x$	$cb + 5b - 7$

II. Quod si eisdem literis notatæ habent diversa signa, minor quantitas a majori subtrahitur, & residuo apponitur signum majoris.

$3a + 5b$	$a + d$	$ab - 2ac - 5$
$2a - 2b$	$a - 4d$	$ab + 6ac + 2$
$5a + 3b$	$2a - 3d$	$2ab + 4ac - 3$

COROLL.

COROLL. Manifestum est, ad addendum $3a + 5b$ ad $2a - 2b$, ut in primo exemplo, scribi posse unam quantitatem post aliam, nempe $3a + 5b + 2a - 2b$, & deinde reduci per Lem. ad simpliciores expressionem; habebitur enim eodem modo $5a + 3b$, & sic de aliis.

PROPOSITIO VI.

Quantitates compositas subtrahere.

Quantitas subducenda additur, mutatis signis, quantitati, ex qua subduci debet. Subducenda sit ex quantitate $x + b - c$ quantitas $a + y - d + 1$, erit differentia, seu residuum $x + b - c - a - y + d - 1$. Similiter in exemplis, quæ sequuntur, intelligantur mutata signa in quantitate subtrahenda, erit facile habere residuum.

$3a + 2b$	$2x - b$	$4c - 3x - 2$
$a + 5b$	$x - 3b$	$2c - 2x + 5$
$2a - 3b$	$x + 2b$	$2c - x - 7$

COROLL. Patet subtractionem quantitatum compositarum degenerare in additionem. Nam ad subtrahendam ex $3a + 2b$ quantitatem $a + 5b$, mutatis signis in $a + 5b$, erit $-a - 5b$. Habemus ergo $3a + 2b - a - 5b$, quæ per Lem. ad simpliciores expressionem redacta dant residuum $2a - 3b$, ut in primo exemplo. Habeat enim quis aureos 100, debeat autem alteri aureos $100 + 50$; mutatis

eatis signis in summa subducenda, habebit ille aureos
 $+100 - 100 - 50$, hoc est -50 aureos de ære alieno.

PROPOSITIO VII.

Quantitates complexas multiplicare.

Ducantur singuli unius quantitatis complexæ termini
 in singulos alterius terminos eo modo, quo factum
 est in multiplicatione simplicium; quod commode fit in-
 cipiendo a sinistra & pergendo ad dexteram.

Pro signis hæc regula observetur, eadem signa faciant
 $+$, diversa autem $-$.

Multiplicanda sint inter se A & B , dico factum esse E ,
 resultans ex factis C & D simul additis. Nam primus ter-
 minus a quantitatis B multiplicans singulos terminos quan-
 titatis A producit C ; & secundus terminus $-x$ quanti-
 tatis ejusdem B multiplicans pariter singulos terminos quan-
 titatis A , producit D , ergo si facta C & D addantur, per
Prop. v. obtinebitur factum E . Quod &c.

EXEMPL. I. $A \quad a + b - c$

$B \quad a - x$

$C \quad aa + ab - ac$

$D \quad -ax - bx + cx$

$E \quad aa + ab - ac - ax - bx + cx$

B

EXEMPL.

EXEMPL. II. $2a - 3bc + 1$
 $3a - 2b$

$$6aa - 9abc + 3a$$

$$- 4ab + 6bbc - 2b$$

$$6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b$$

EXEMPL. III. $x + ax - 2b + 3$
 $x - \frac{1}{2}a + 2b$

$$xx + axx - 2bx + 3x$$

$$- \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a$$

$$+ 2bx + 2abx - 4bb + 6b$$

$$xx + axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab$$

$$- \frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + 6b$$

Demonstr. signorum regula. Omnis multiplicatio fit per numeros. Nam quantitatis per quantitatem multiplicatio non est nisi iterata ejusdem quantitatis additio; & per multiplicationis productum aliud non exprimitur, nisi quoties sumpta fuerit aliqua quantitas. Sic productum $6a$, quod oritur ex 3 in $2a$, exprimit bis ter, seu sexies a esse sumptum; proinde ducendo $+ 2a$ in $+ 3$, oritur $6a$, de quo nemini dubium est.

At vero ducendo $+$ in $-$, vel $-$ in $+$, oritur $-$. Nam multiplicare per numerum negativum est tollere, seu negare positivum, sicuti multiplicare per numerum positivum est aliquid ponere. Itaque ducendo $+ 3a$ in $- 2$,
fit

fit $-6a$, quia bis ter, seu sexies negatur quantitas positiva a . Quod erat secundum.

Denique $-$ in $-$ dat $+$. Nam in hoc casu quantitas negativa per numerum pariter negativum tollitur & aliquid ponitur. Sicuti tollere debitum est ipsum solvere ponendo aliquid; unde ducendo $-3a$ in -2 , fit $+6a$, quia dum quantitas negativa bis ter negatur, bis ter aliquid ponitur. Ergo &c.

Vel sic, $-$ in $-$ dat $+$. Nam multiplicando quantitatem negativam per aliam negativam v.g. $-3a \times -2b$, illa toties subtrahitur, quot sunt in altera unitates. Negatio enim subtractionem importat, sicuti affirmatio additionem. Hæc autem subtractio cum sit subtractio quantitatis negativæ, signum negativum mutari debet in affirmativum per Prop. VI. proinde residuum subtractionis (seu productum multiplicationis) erit affirmativum. Sic $-3a$ in $-2b$ dat $+6ab$. Nam quantitas $-3a$ bis subtrahi debet, quot scilicet sunt unitates in altera quantitate negativa $-2b$; & mutato signo negativo in affirmativum, habetur $+6ab$ multiplicationis productum.

SCHOL. I. Hanc doctrinam si quis nunc penitus non percipiat, parum refert, percipiet postea. Interim ultra progrediatur.

SCHOL. II. Multiplicatio compositarum quantitarum exprimitur quoque aliquando per signum $\times$, ducta supra factores compositos linea sic, $a + b - c \times a - x$. Vel factores ipsi includuntur parenthesi, ut insigni calculi commodo excogitavit Leibnitijs, quo Analystæ recentiores utuntur, nempe $(a + b - c)(a - x)$. Similiter $(a + b - c) \times$, designat productum $ax + bx - cx$.

PROPOSITIO VIII.

Quantitates complexas dividere.

Hic etiam eadem signa ponunt $+$, diversa $-$. Neque refert utrum a sinistra, an vero a dextera initium ducas. Operatio eodem modo peragitur ac in vulgari Arithmetica. Exempla rem declarant. Dividendum est polynomium A per polynomium B , dico quotum esse C .

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r|l}
 B \ a + b \) & A \ an + bn - ar - br + a + b \\
 & \underline{-an - bn + ar + br - a - b} \\
 & \\
 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C \\
 + n \\
 - r \\
 + 1
 \end{array}$$

Divido an per a & pono ad dexteram in C quotum $+n$, qui habetur per *Prop. iv.* Per hunc multiplico divisorem $a + b$, ejusque productum $an + bn$ (mutatis signis per *Prop. vi.*) subduco ex dividendo A & fit 0 . Deinde eodem modo per a divido $-ar$, & pono in C quotum $-r$ inventum per *Prop. iv.* per quem multiplicato divisore $a + b$, oritur productum $-ar - br$ subducendum (mutatis signis) ex dividendo $-ar - br$ & habetur 0 . Denique dividendo a per a , quotus est 1 , per quem multiplico divisorem $a + b$, & productum $a + b$ (mutatis signis) subtraho ex dividendo, & nihil remanet. Quotus ergo C est $n - r + 1$, per quem si multiplicetur divisor $a + b$, restituitur dividendus A .

EXEM-

EXEMPLUM II.

Dividendum est polynomium B per polynomium C , dico quotum esse D .

$$\begin{array}{r|l}
 C \ 3a-1 \) \ B \ 6aa+3ab+13a-b-5 & D \\
 \underline{-6aa} & +2a \\
 & \underline{+2a} \\
 0 & +b \\
 & \underline{+b} \\
 & 0 \\
 \text{Resid. } E \ +3ab+15a-b-5 & \\
 \underline{-3ab} & \\
 0 & \\
 & \underline{+b} \\
 & 0 \\
 \text{Resid. } F \ +15a-5 & \\
 \underline{-15a+5} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Dividendo $6aa$ per $3a$ oritur quotus $2a$ per *Prop.* IV. quem pono in D , & per hunc multiplicans divisorem C $3a-1$, habeo productum $6aa-2a$, subducendum (mutatis signis) ex dividendo; quo facto habetur residuum E . Divido igitur $3ab$ per $3a$, quotus est b ponendus in D , per quem multiplicato divisore C , oritur productum $3ab-b$, subtrahendum (mutatis signis) ex dividendo, seu residuo E : quo facto, habetur residuum $F+15a-5$ loco dividendi. Diviso itaque $15a$ per $3a$, fit quotus 5 , per quem multiplicato divisore C , & producto $15a-5$ subtracto ex residuo F , nihil remanet. Est ergo quotus $D \ 2a+b+5$, per quem si multiplicetur divisor C , oritur polynomium B .

EXEM-

EXEMPLUM III.

Dividenda sit quantitas A per quantitatem B , dico quotum esse C .

$$\begin{array}{r|l}
 B \ x - 2 \) & A \ \begin{array}{l} xxx + 4x - 17 \\ - xxx + 2xx \\ \hline 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} + xx \\ + 2x \\ + 8 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } D \ + 2xx + 4x - 17 \\
 - 2xx + 4x \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } E \ \ \ \ 0 + 8x - 17 \\
 - 8x + 16 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$0 - 1$$

$$\text{Est ergo quotus } C \ xx + 2x + 8 - \frac{1}{x-2}$$

COROLL. Si facta divisione aliquid remanet, illud ponitur post quotientem cum signo $+$, vel $-$, quo afficitur ut in hoc tertio exemplo $-\frac{1}{x-2}$ supponendo illi divisorem, ut sit in communi Arithmetica.

SCHOL. I. Liberum est sumere ex divisore composito, quam libuerit, literam ad dividendum; quæ tamen semel assumpta semper adhibetur, nec mutari potest. Sic in primo exemplo pro litera a sumi potuisset litera b . In secundo exemplo loco $3a$, assumi poterat in divisorem quantitas -1 , semper enim idem quotus obtinetur.

SCHOL. II. Sæpe numeri, qui præcedunt terminos dividendi, aut divisoris, impediunt, quo minus fieri possit divisio. Tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut si
divi-

dividenda fit $3ab + c$ per $2a - c$, erit quotus $\frac{3ab + c}{2a - c}$

Idem fit cum dividendus & divisor nullam habent literam
 communem; ut $\frac{ad - ac}{d - r}$, $\frac{dx - dc}{a + x}$ &c.

SCHOL. III. Aliquando etiam divisio quantitatum compositarum fit includendo divisorem & dividendum parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta; ut $(a + b) : c$ indicat $a + b$ divisum esse per c . Similiter $(2ax - ab) : (a - c)$ designat polynomium $2ax - ab$ divisum esse per polynomium $a - c$, quod summo Leibnitii ingenio pariter debemus.

PROPOSITIO IX.

Datae quantitatis divisores omnes invenire.

I. **E**Sto numerus 150, cujus singuli divisores quærentur. Divide illum per 2 & quotum 75 pone sub ipso numero dividendo, ut in *A*, divisorem autem 2 in *B*. Deinde quia totus 75 dividi non potest per 2 sine residuo, divide illum per 3 & pone quotum 25 in *A*, divisorem autem in *B*. Postea quotum 25 (cum adæquate dividi nequeat per 3) divide per 5 & quotum pone in *A*, divisorem in *B*. Demum quotus 5 divisus per 5, dat quotum 1, ponendum in *A*, posito divisore 5 in *B*. Habentur jam omnes divisores simplices dati numeri, hoc est 2, 3, 5, 5.

Ut habeantur divisores compositi, multiplica primum divisorem 2 per secundum 3, & pone productum 6 ad dexte-

dexteram ejusdem secundi divisoris 3. Deinde duo primi divisores & productum 6 multiplicentur per tertium divisorem 5, & producta 10, 15, 30 ponantur ad dexteram ipsius divisoris 5. Demum multiplicentur per quartum divisorem 5 omnes numeri jam inventi, & habebis 25, 50, 75, 150, qui juxta ipsum ultimum divisorem apponuntur, ut infra pater. Ex compositis idem numerus bis non ponitur.

<i>A</i>	<i>B</i>
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

II. Quærantur omnes divisores numeri *M* 120. Dispone, ut in superiori exemplo factum est, omnes divisores simplices infra *N*, & omnes quotos sub dato numero infra *M*. Deinde duc primum divisorem in secundum, & productum pone ad latus secundi divisoris. Postea duo primi divisores & productum modo inventum ducantur in tertium divisorem, & singula producta, unum post aliud, ponantur ad latus ipsius tertii divisoris, & sic deinceps operando inveniuntur omnes dati numeri divisores, ut infra apparet.

<i>M</i>	<i>N</i>
120	2.
60	2. 4.
30	2. 8.
15	3. 6. 12. 24.
5	5. 10. 20. 40. 15. 30. 60. 120.
1	

III. Sit

III. Sit quantitas $aabcd$, cujus omnes divisores quærun-
tur. Inveniantur primo omnes divisores simplices $a, a,$
 b, c, d , qui ponantur infra B , singuli autem quoti infra A .
Deinde ducendo divisorem primum in secundum, habetur
productum aa , quod ponitur ad latus secundi divisoris a .
Similiter ducendo tertium divisorem b in omnes quanti-
tates supra existentes, habentur producta ab , & aab , quæ
scribuntur ad latus ipsius divisoris b , & sic deinceps pro-
sequendo habentur omnes divisores quæsitæ, ut infra.

A	B
$aabcd$	a
$abcd$	$a. aa.$
bcd	$b. ab. aab.$
cd	$c. ac. aac. bc. abc. aabc.$
d	$d. ad. aad. bd. abd. aabd. dc.$
I	$acd. aacd. bcd. abcd. aabcd.$

IV. Quæruntur omnes divisores quantitatis $2abb - 4ac$.
Dividatur primo per 2, deinde diviso quoto $abb - 2ac$
per a , remanet quotus indivisibilis $bb - 2c$. Sunt ergo di-
visores primi 2, a , & $bb - 2c$, quibus multiplicatis ordine
jam supra explicato, habentur omnes divisores, scilicet

$2abb - 4ac$	$2.$
$abb - 2ac$	$a. 2a.$
$bb - 2c$	$bb - 2c. 2bb - 4ac. abb - 2ac.$
I	$2abb - 4ac.$

COROLL. Hinc patet, quotum indivisibilem, ut in hoc
tertio exemplo $bb - 2c$, reponi debere inter divisores.
Nam qualibet quantitas summet divisor est. Unitas quo-
que primus omnium divisor intelligitur.

SCHOL. I. Divisoribus primis, ut supra, inventis, si singulos binos, ternos, quaternos &c. inter se ducas, habebis cum Neritono omnes divisores compositos. Sic numeri 60 divisores primi sunt per hanc Prop. 2. 2. 3. 5. Ex binis compositi sunt 4. 6. 10. 15; ex ternis 12. 20. 30; ex quaternis 60; qui omnes conficiunt summam divisorum 12.

SCHOL. II. Quod si inquiretur tantum summa divisorum dati numeri ex. gr. quot divisores habeat numerus 60, incluso quoque divisore 1; inventis divisoribus primis, ut supra, sub singulis eorum ponitur 2, si sint inæquales: sub binis æqualibus ponitur 3; sub ternis æqualibus 4, & sic deinceps, eorumque productum dat summam omnium divisorum. Primo divisori 1 nihil subscribitur, quia 1 in reliquas quantitates ducta nihil novi producit.

Divisores primi numeri 60 sunt 2. 2. 3. 5.

Pone sub illis numeros, nempe 3 X 2 X 2

Quorum productum 12 dat summam quesitam. Similiter primi divisores numeri 2310 sunt 2. 3. 5. 7. 11.

Sub singulis, quia sunt inæquales, pono 2, 2 X 2 X 2 X 2 X 2 quorum productum 32 dat summam omnium divisorum numeri 2310. Ratio est, quia ubi plures sunt quantitates diversæ, si duæ (omissa 1) inter se ducantur, habentur quatuor divisores, in quibus comprehenditur 1, reliquæ vero continuo duplicant ipsam divisorum summam. Sit productum abc, cujus divisores primi sunt 1. a. b. c. Subscribe singulis (omisso divisore primo 1) numerum 2, eorum productum 2 X 2 X 2 = 8 dat numerum omnium divisorum. Nam ducto a X b fiunt quatuor divisores nempe 1. a. b. ab, qui deinde duplicantur per quantitatem c in singulos ductam, & fiunt 8, scilicet c. ac. bc. abc.

Quod

Quod si productum sit $aabc$, cujus primi divisores sunt $1.a.a.b.c$, divisorum summa, erit 12 , hoc est $3 \times 2 \times 2 = 12$, ut in primo exemplo. Nam quantitates similes a , a inter se ductæ, non quatuor, sed tres duntaxat divisores efficiunt, nempe $1.a.aa$, qui duplicati per b fiunt 6 , & iterum duplicati per c fiunt 12 .

C A P U T II.

De Calculo Fractionum.

OMnia fere peraguntur ut in communi Arithmetica. Ne qua tamen tyroni difficultas in hoc calculi genere suboritur, quæ præcipua sunt, & ad præsentem usum magis faciunt, breviter illustrabimus; adjecta in fine appendice de Calculo Decimali.

A X I O M A T A.

1. **I**ntegra quantitas in fractionem degenerat, si loco denominatoris ponatur unitas, ut $\frac{ab}{1}$, $\frac{a+b}{1}$ &c.

2. Integrum in fractionem dati denominatoris convertitur, si multiplicetur per denominatorem datum, & producto supponatur ipsemet denominator, ut si a reducenda

fit ad fractionem denominatoris b , erit $\frac{ab}{b}$. Item x si reducenda fit ad fractionem dati denominatoris $a+b$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}$.

3. Multiplicatis, aut divisis per eandem quantitatem tam numeratore, quam denominatore fractionis, fractio

valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{a}{bb}$ per c fit $\frac{ac}{bc}$.

Item dividendo $\frac{b}{bc}$ per b , fit $\frac{b}{bc}$; & $\frac{ax + bx}{a + b}$ divisa per $a + b$, fit $\frac{x}{c}$.

4. Ut multiplicetur fractio per suum denominatorem, satis est delere ipsum denominatorem. Sic ad multiplicandum $\frac{ax}{c}$ per c , satis est scribere ax . Similiter $\frac{bc}{a-b}$ multiplicatum per $a-b$ erit bc ; & $\frac{a}{2x}$ multiplicatum per $2x$

erit a ; nam $\frac{2ax}{2x} = a$ per 3. *Axioma*.

PROPOSITIO I.

Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere:

Sit quantitas $a + \frac{bc}{n}$ reducenda ad unam fractionem.

Multiplicetur quantitas integra a per denominatorem fra-

ctionis n , fiet fractio quæsitæ $\frac{an + bc}{n}$. Eadem ratione

$\frac{aa}{c} - b$, erit $\frac{aa - bc}{c}$. Ratio patet ex 2. *Axiom*.

PRO.

PROPOSITIO II.

Fractiones ad simplicio rem expressionem reducere.

I. Sit fractio $\frac{ab}{ac}$ reducenda ad simplicio rem. Divida-

tur tam numerator, quam denominator per divisorem communem, nempe per a ; quoti hinc inde orti dant fractionem simplicio rem & priori æqualem per 3. *Axioma*,

scilicet $\frac{ab}{c}$. Eadem ratione $\frac{2abc}{8acd}$ erit $\frac{1b}{4d}$.

II. Quod si communis divisor non ita facile in oculos incurrat, ut in quantitativis valde compositis contingere solet; tunc inveniantur per *Prop. ix. Cap. i.* omnes tam numeratoris, quam denominatoris divisores, ex quibus ille pro communi divisore seligatur, qui fuerit numeratori &

denominatori communis. Sit fractio reducenda $\frac{aac + abc}{aa - bb}$,

omnes quidem numeratoris divisores sunt $a, c, a + b$; denominatoris autem sunt $a - b$ & $a + b$. Divisor ergo utrique communis $a + b$ est divisor quæsitus, per quem dividendo

utrumque terminum datæ fractionis $\frac{aac + abc}{aa - bb}$, fit $\frac{ac}{a - b}$.

Eadem ratione $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ fit $\frac{aa}{d}$, dividendo per $c - d$ divi-

forem communem inventum ut supra per *Prop. ix. Cap. i.*

SCHOL. *Alias regulas inveniendi divisorem communem, utpote difficiliore s, afferre, non putamus esse hujus loci.*

PRO-

DE CALCULO

PROPOSITIO III.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

I. **S**int duæ fractiones reducendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ducantur duo termini fractionis primæ in denominatorem alterius, nempe $\frac{a}{b}$ in d , & duo termini fractionis secundæ $\frac{c}{d}$ in b denominatorem primæ, seu (quod idem est) multiplicentur per crucem, ut numeri fracti; fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ ejusdem nominis & æquales prioribus ex 3. *Axiom.*

II. Sint reducendæ plures; ducantur ambo termini cujusque fractionis in productum, quod ex ceterarum fractionum denominatoribus resultat, fient fractiones quæsitæ

Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ duc terminos primæ $\frac{a}{b}$ in df , deinde terminos secundæ $\frac{c}{d}$ in bf , item terminos tertiæ $\frac{e}{f}$ in bd , habebis $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$. Ratio sequitur ex eod. 3. *Axiom.*

COROLL. Quando denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius fractionis, tunc illæ fractiones ad idem nomen satis commode reducuntur multiplicando per illum quotum numeratorem & denominatorem fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint

reducendæ $\frac{ab}{cd}$ & $\frac{ef}{c}$ quia denominator c dividit exacte deno.

denominatorem cd , multiplico per quotum d utrumque terminum fractionis $\frac{ef}{c}$, & sunt $\frac{ab}{cd}$ & $\frac{edf}{cd}$ ejusdem nominis.

Ut si reducendæ sint $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$, quia 4 dividit exacte 2, multiplicando per quotum 2 terminum utrumque fractionis $\frac{1}{2}$, erunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ ejusdem nominis, ut patet.

PROPOSITIO IV.

Additio & subtractio fractionum.

I. **A**ddendæ sunt fractiones $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, summa erit $\frac{a+b}{c}$.
Eadem ratione $\frac{ad}{a+b}$ & $\frac{cf}{a+b}$ simul additæ conficiunt summam $\frac{ad+cf}{a+b}$.

Si fuerint diversæ denominationis, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; reducuntur ad eandem per Prop. III. fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$, earumque summa $\frac{ad+cb}{bd}$.

II. Quod si addenda sint integra cum fractis $a+\frac{ac}{b}$ & $b+\frac{c}{b}$, addi possunt integra integris $a+b$, & fractiones fractionibus $\frac{ac}{b}$ & $\frac{c}{b}$ (quæ prius ad eandem denominationem reducendæ sunt per Prop. III.) eritque summa quæsitæ $a+b+\frac{abb+acc}{bc}$.

III. Vel

III. Vel possunt integra ad fractionem sibi annexam reduci per *Prop. I.* nempe $\frac{ac + ab}{c}$ & $\frac{bb - ac}{b}$, quæ redacta ad eandem denominationem per *Prop. III.* erunt $\frac{abc + abb}{bc}$ & $\frac{bbc - acc}{bc}$, earumque summa $\frac{abc + abb + bbc - acc}{bc}$

IV. Si vero subtrahenda sit $\frac{c-a}{b}$ ex $\frac{c}{b}$, differentia erit $\frac{c-a}{b}$. Si sint diversæ denominationis, semper ad eandem prius reduci debent. Sic ut $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{d}$ subtrahi possit, reducuntur ad eandem denominationem per *Propos. III.* eritque differentia quæsitæ $\frac{bc - ad}{bd}$.

V. Quod si ex integra quantitate x subduci debeat fractio $\frac{aa - ab}{a + b}$; redacta prius x ad fractionem ejusdem denominatoris per 2. *Axioma*, habetur $\frac{ax + bx}{a + b}$, ex qua subdu-

cta $\frac{aa - ab}{a + b}$, erit residuum $\frac{ax + bx - aa + ab}{a + b}$. Simili-

ter si subtrahenda sit $b + \frac{cc}{b + d}$ ex $a + b$, redacta prima quantitate ad unam fractionem per *Propos. I.* & altera ad fractionem ejusdem nominis cum prima per *Axioma 2.* erit residuum $\frac{ab + ad - cc}{b + d}$, hoc est $a - \frac{cc}{b + d}$ per *Propos. VIII.*

SCHOL. Cum numerator fractionis pluribus constat terminis, juvat aliquando fractionem illam in plures dividere.

Sic $\frac{ab - cd + dd}{a - b}$ dividi potest in $\frac{ab}{a - b} - \frac{cd}{a - b} + \frac{dd}{a - b}$.

Hoc autem præsertim fit, ubi aliqui termini numeratoris sunt per denominatorem divisibiles, alii vero non. Sit

enim $\frac{aa - 3ab - bb}{a + b}$, dividatur in $\frac{aa - bb}{a + b} \ominus \frac{3ab}{a + b}$,

quia vero $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$ per Prop. VIII. Cap. I. erit

fractio proposita $a - b - \frac{3ab}{a + b}$.

P R O P O S I T I O V.

Fractiones multiplicare.

I. **S**int multiplicandæ duæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, ducantur inter se numeratores, & denominatores pariter inter se, fiet productum quæsitum $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione fractio $\frac{a - b}{c}$ multiplicata per $\frac{ab}{x}$ producit $\frac{aab - abb}{cx}$.

II. Si multiplicanda sit fractio $\frac{a}{b}$ per integrum c , satis est numeratorem in integrum ducere, eritque productum $\frac{ac}{b}$.

Nam integro supponitur unitas, & illud ad fractionem esse redactum, nempe $\frac{c}{1}$ per I. Axiom.

III. Vel dividatur (siquidem exacte fieri possit) de-

D

no-

nominator fracti per integrum, habebitur productum.

Sit $\frac{a}{bc}$ multiplicanda per c , divido bc per c , quotus $\frac{a}{b}$ dat productum quæsitum; nam $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$, ut patet. Item sit multiplicanda $\frac{ab - cd}{ac - ad}$ per $c - d$, divido $ac - ad$ per $c - d$, quotus est a , & productum erit $\frac{ab - cd}{1}$.

IV. Si ducenda sit $a + \frac{aa}{b}$ in $b - \frac{cc}{d}$, reducantur integra ad fractiones sibi annexas per Propos. I. nempe $\frac{ab + aa}{b}$ & $\frac{bd - cc}{d}$, eritque earum productum $\frac{ab + aa}{b} \times \frac{bd - cc}{d}$ hoc est $\frac{abbd + aabd - abcc - aacc}{bd}$ seu $ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}$ per Schol. Prop. præc.

V. Fieri etiam potest multiplicatio non reductis integris in fractos, ducendo $a \times b$ & habetur ab , tum $\frac{aa}{b} \times b$, & oritur $\frac{aab}{b}$ &c.

$$\frac{ab + \frac{aab}{b} - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}}{ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}}, \text{ ut supra.}$$

Co-

COROLL. Si fractio multiplicetur per suum denominato-
rem, productum est ipsius numerator. Sic $\frac{aa}{a+b} \times a+b$
dat aa per 4. Axiom.

SCHOL. Factum ex integro in fractum, ut $\frac{ax}{b}$, quod
oritur ex $\frac{a}{b} \times x$; vel $\frac{2ac}{3}$, quod oritur ex $\frac{2}{3} \times ac$, expri-
mi etiam potest seorsum hoc pacto $\frac{a}{b} \times \frac{2}{3} ac$, quod no-
tetur.

PROPOSITIO VI.

Fractioes dividere.

I. UT dividatur $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, eliso communi denomina-
tore, divide a per c, erit quotus $\frac{a}{c}$. Eadem ratione $\frac{1aab}{2ad}$
diviso per $\frac{3ab}{3c}$, quotus erit $\frac{2c}{4d}$. Nam in divisione fra-
ctionum omnia fiunt, ut in multiplicatione, inverso ta-
men denominatore minutia dividendi; proinde dividen-
do $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, inverso divisore, factaque multiplicatione,
quam docuimus in præc. Prop., erit quotus $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$,
ut in primo exemplo.

II. Si denominatores diversi fuerint, est eadem omni-
no regula. Sic $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{c}{d}$ dat quotum $\frac{ad}{bc}$. Pari
D 2 ratio-

ratione $\frac{a-b}{c+d}$ divisa per $\frac{n}{a}$ dat quotum $\frac{aa-ab}{nc+nd}$.

III. Si fractio $\frac{ac}{b}$ dividenda fit per integrum c , divide (si fieri potest, ut in hoc exemplo) numeratorem ac per c , quotus quæsitus erit $\frac{a}{b}$. Similiter $\frac{ad-cd}{a-b}$ dividenda fit per $a-c$, divido $ad-cd$ per ipsum $a-c$, unde habetur d , & quotus quæsitus erit $\frac{d}{a-b}$.

IV. Vel si numerator fractionis dividendæ divisibilis non est, multiplicetur denominator ejusdem fractionis per integrum. Sit $\frac{ac}{b}$ dividenda per d , quia ac non est divisibilis per d , multiplico per ipsum d denominatorem, & habetur quotus quæsitus $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione $\frac{ad-cd}{a-b}$ divisa per $a+b$, dat quotum $\frac{ad-cd}{aa-bb}$, multiplicando scilicet $a-b \times a+b$. Ratio patet, si divisori integro supposita intelligatur unitas, nempe $\frac{a+b}{1}$ per 1. Axiom. quo inverso, fit multiplicatio, & producitur quotus, ut supra.

V. Si dividi oporteat $a + \frac{aa}{b}$ per $b - \frac{cc}{d}$, reducantur integri ad fractos sibi adhærentes per *Propos. 1.* deinde $\frac{ab+aa}{b}$ dividatur per $\frac{bd-cc}{d}$, invertendo diviso-

rem,

rem, & multiplicando modo supra explicato, erit quotus
 $abd + aad$

$$bbd - bcc$$

SCHOL. Si fractiones dividendæ sint valde compositæ, juvabit ad majorem facilitatem eas, antequam fiat divisio, ad terminos simpliciores reducere per Prop. II. hujus.

P R O P O S I T I O VII.

Polynomium cum fractionibus dividere.

I. **S**It polynomium A cum fractionibus sibi annexis, quod dividendum sit per polynomium B pariter cum fractionibus, dico quotientem esse $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$.

$$A \quad \frac{1}{3}axx - \frac{1}{2}bxx + \frac{2}{3}abx - \frac{1}{8}aax + \frac{3}{16}abx - \frac{1}{4}aab$$

$\circ \quad \quad \circ \quad \quad \circ \quad \quad \circ \quad \circ \quad \quad \circ \quad \quad \circ$

$$B \quad \frac{1}{2}ax - \frac{3}{4}bx + ab$$

$$Q \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$$

Nam dividendo $\frac{1}{3}axx$ per $\frac{1}{2}ax$, quotus erit $\frac{2}{3}x$ per Prop. præc. quem pono in Q , & statim deletur $\frac{1}{3}axx$ supponendo illi zerum. Per quotum inventum multiplico divisoris B residuum, hoc est $-\frac{3}{4}bx + ab$; & primo quidem $-\frac{3}{4}bx \times \frac{2}{3}x = -\frac{6}{12}bxx = -\frac{1}{2}bxx$, quod (mutato signo) subtrahitur ex $-\frac{1}{2}bxx$, cui proinde suppono zerum. Deinde $\frac{2}{3}x \times ab = \frac{2}{3}abx$, quod pariter subtrahitur ex $\frac{2}{3}abx$, supposito zero.

Rur-

Rursus per eundem divisorem $\frac{1}{2} aax$ dividendo $-\frac{1}{2} aax$, quotus erit $-\frac{1}{4} a$ per *Prop. præc.* quem pono in $\mathcal{Q}$; & statim deleto $-\frac{1}{2} aax$ per zerum illi suppositum, multiplico per ipsum quotum residuum divisoris B , eritque primo $-\frac{1}{4} a \times -\frac{3}{4} bx = \frac{3}{16} abx$, secundo $-\frac{1}{4} a \times ab = -\frac{1}{4} aab$; quæ facta, mutatis signis, subtrahuntur ex dividendo, supponendo illi zerum, & nihil remanet; pro-

inde habetur quotus $\mathcal{Q} = x - \frac{1}{4} a = \frac{4x - a}{4}$ per *Prop. III. & IV. hujus.*

II. Sit dividendum polynomium C per polynomium D ,

$$C = \frac{x^3}{6b} + \frac{axx}{12b} - \frac{xx}{2c} - \frac{ax}{4c} - \frac{1}{3}cx + b$$

$$D = \frac{xx}{2b} + \frac{ax}{4b} - c$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{c}$$

Nam dividendo $\frac{x^3}{6b}$ (hoc est $\frac{xxx}{6b}$) per $\frac{xx}{2b}$, quotus erit

per *Prop. præc.* $\frac{1}{3}x$, quem pono in $\mathcal{Q}$, & statim deleto $\frac{x^3}{6b}$ (apponendo illi zerum) multiplico residuum divisoris

foris D , nempe $+ \frac{ax}{4b} - c$, eritque $\frac{1}{3} \times X \frac{ax}{4b} = \frac{axx}{12b}$

& $\frac{1}{3} \times X - c = \frac{1}{3} cx$, quæ facta subtrahō ex dividendo, supponendo zerum.

Rursus per eundem divisorem $\frac{xx}{b}$ divido $\frac{xx}{2b}$, & oritur quotus $\frac{c}{2c}$, quem pono in Q ; & deletō $\frac{xx}{2c}$ (supposito illi zero) multiplico per ipsum quotum residuum divisoris $\frac{ax}{b} - c$, & duo facta $\frac{ax}{4b} \times \frac{b}{c} = \frac{ax}{4c}$ & $\frac{b}{c} \times \frac{c}{4b} = + b$ subtrahō ex dividendo, cumque nihil remaneat, patet quotum esse $\frac{1}{3} \times \frac{b}{c} = \frac{bx - 3b}{3c}$ per Prop. III. & IV. hujus.

SCHOL. Pro pleniori hujus secundi exempli & sequentis Propos. intelligentia sciant tyrones x^2 , vel x^3 , x^4 &c. idem esse ac xx , vel xxx , $xxxx$ &c. hoc est quantitatem x elevatam ad quadratum, ad cubum, quadrato quadratum &c. prout infra explicabitur Cap. III. At compendii causa pro xx , xxx , scribitur x^2 , x^3 , &c.

P R O P O S I T I O VIII.

Valorem fractionis, cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.

Divisa sit quantitas $aa - bb + c$ per $a + b$, quotus erit

erit $a - b$, & remanet c , hoc est fractio $\frac{c}{a+b}$ per Pro-

pos. III. Cap. I. cujus fractionis valor per infinitos termi-
nos designari potest hoc pacto.

Dividatur c per a , erit quotus $\frac{c}{a}$ per Prop. VI. hujus,

quem duc in divisorem $a + b$, & factum $\frac{ac+bc}{a}$ seu $c + \frac{bc}{a}$

per Schol. Propos. IV. hujus subtrahe (mutatis signis) ex

dividendo c , residuum erit $\frac{bc}{a}$ per Prop. hujus.

Deinde hoc residuum $\frac{bc}{a}$ divide per eundem divi-

forem a , quotus erit $\frac{bc}{aa}$ per Prop. VI. hujus, quem duc

in divisorem $a + b$, & factum $\frac{abc+bbc}{aa}$, seu $\frac{bc}{a}$

$\frac{bbc}{aa}$ subtrahe (mutatis signis) ex dividendi residuo $\frac{bc}{a}$

$\frac{bc}{aa}$, remanet $+$ $\frac{bbc}{aa}$.

Rursus hoc residuum dividatur per a ; & quotus $\frac{bbc}{a^3}$

ducatur in $a + b$, erit factum $\frac{abbc+b^3c}{a^3}$, seu $\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$

subtrahendum (mutatis signis) ex residuo $+$ $\frac{bbc}{aa}$, &

relinquitur $-\frac{b^3c}{a^3}$, & sic deinceps.

Unde

Unde apparet ratio divisionem continuandi per infinitos terminos, qui sunt proportionales, & seriem Geometricam constituunt, nempe

$$\frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \dots &c. = \frac{c}{a+b}$$

COROLL. I. Si fiat $a = 2$, $b = 1$, & $c = 1$, ita ut

$$\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \text{ \& bi valores substituantur in ter-}$$

minis seriei jam inventis, aut fractio $\frac{1}{2+1}$ eodem pacto

dividatur, quo divisa fuit fractio $\frac{c}{a+b}$, oritur series Geometrica $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c. Similiter si fiat

$a = 3$, $b = 1$, & $c = 1$ nempe $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3+1}$, oritur

series $\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. Quæ quidem series terminorum Geometricæ decrescentium, ut patet, exprimere valent quotum quam proxime verum datæ fractionis, modo talis fractionis numerator sit unitas.

COROLL. II. Series fractionum hujusmodi continuo decrescentium, quæ ad verum valorem semper magis accedunt, dicuntur convergentes. Quod si termini continuo crescant, tunc a vero valore continuo recedunt, ac divergentes appellantur. Ut si ponatur $a = 1$, $b = 2$, & $c = 1$,

boc est $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+2}$, fit series divergens $1 - 2 + 4 - 8$

$+ 16$ &c. quæ a valore fractionis $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ tanto magis

E

rece-

recedit, quanto magis continuatur, ut rem consideranti patet.

SCHOL. I. Hanc doctrinam, quam tanquam inutilem Cruzas in sua Algebra Cap. xiv. num. 40. taxavit, plurimi fecerunt Cl. Viri Leibnitius (^a), Jac. Bernoullius (^b), Guido Grandus (^c), Wolfius (^d), & alii.

SCHOL. II. Cum fractiones Decimales in omni fere Mathematici magni sint usus, easque nobis in approximatione radicum Cap. xi. adhibere mens sit, brevem de illis notitiam in sequenti Appendice subjicimus.

A P P E N D I X

De fractionibus Decimalibus.

D E F I N I T I O I.

FRactiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in 10 æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias 10 partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit: oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *secundæ*, *tertiæ*, *quartæ* &c. iisque distinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cifra 0. Sic fractio decima-

0 I II III IV
lis, 5. 8 6 4 2 significat quinque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed
satis

(a) Acta Erudit. Lips. ann. 1682. & 1683. (b) De Ser. infinit. p. m. 267.
(c) Theor. Hugen. p. 126. (d) Elem. Analy. Cap. 1. Prob. 7.

satis est virgulam ultimam apponere, & integra puncto di-

stinguere, ut 5.8642 . Quæ quidem fractio idem valet
ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$ seu $\frac{58642}{10000}$. At commo-

di gratia decimales scribuntur instar integrorum, omisso
denominatore, modo supra explicato, nempe 5.8642 .

COROLL. I. Hinc sequitur, virgulas illas, sive apices de-
cimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum;

ut in decimali 5.864 , apex unus importat denomina-
torem 10, duo apices denominatorem 100, tres denomi-
natorem 1000 &c. hoc est $\frac{8}{10} \frac{6}{100} \frac{4}{1000}$.

COROLL. II. Hinc facile decimales ad eandem denomi-
nationem reducuntur, addendo tot zéros virgulis decimali-

bus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis 3.5 redu-
cenda sit ad secundas, ad tertias vel quartas &c. scribi-

tur 3.50 , 3.500 , 3.5000 . Valor enim non mutatur,

nam $5 = 50$, $5 = 50$ &c. ut julii 5 sunt asses 50.

COROLL. III. Si integro cifrae quocunque cum virgu-
lis addantur, ejus valor idem manet, ut si ad 3 addas 000,

ut fit 3.000 , non mutatur integri valor. Significat
enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000;
nam $\frac{3000}{1000} = 3$.

SCHOL. Ubi nullum præcedit integrum, ut in decima-
libus $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ tunc loco integri ponitur zero, nem-
pe 0.8 , 0.24 , 0.725 , quæ æquivalent præcedentibus $\frac{8}{10}$,
 $\frac{24}{100}$ &c.

D E F I N I T I O . II.

Fractionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0.5679, & 0.045 notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Corol. 1.*

D E F I N I T I O . III.

Progressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v.g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut 4.^I25, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cifris interpositis supplentur: sic eadem decimalis, interpositis duabus cifris, erit 4.^{IV}2005. Similiter 3.^{IIIV}57, fiet 3.^V05007. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ scribitur 0.005, & 3 + $\frac{45}{10000}$ scribitur 3.0045. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll. 2.* & 3. fuit explicatum.

P R O P O S I T I O . I.

Decimales addere, & subtrahere.

Fractiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo

tuo respondeant per *Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua per *Defin.* 3.: deinde additio, & subtractio fiant, ut in communi Arithmetica additio & subtractio integrorum.

ADDITIONIS EXEMPLA.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \text{A} \quad 3. \overset{\text{III}}{2} \overset{\text{II}}{4} \overset{\text{I}}{5} \\
 \text{B} \quad \overset{\text{II}}{7}. \overset{\text{I}}{3} \overset{\text{I}}{9} \\
 \hline
 \text{C} \quad 10. \overset{\text{III}}{6} \overset{\text{II}}{3} \overset{\text{I}}{5}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 \overset{\text{I}}{5}. \overset{\text{I}}{2} \overset{\text{III}}{7} = \overset{\text{III}}{5}. \overset{\text{II}}{2} \overset{\text{I}}{0} \overset{\text{I}}{7} \\
 \overset{\text{I}}{6}. \overset{\text{II}}{4} \overset{\text{II}}{5} = \overset{\text{II}}{6}. \overset{\text{II}}{4} \overset{\text{II}}{5} \\
 \hline
 \text{Summa} \quad 11. \overset{\text{III}}{6} \overset{\text{II}}{5} \overset{\text{I}}{7}
 \end{array}
 \end{array}$$

COROLL. Patet ratio ex dictis: nam si decimales A & B fiant ejusdem denominationis per Coroll. 2. erunt per Coroll. 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$, proinde $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C \quad 10. \overset{\text{III}}{6} \overset{\text{II}}{3} \overset{\text{I}}{5}$ per *Defin.* 1.

SUBTRACTIONIS EXEMPLA.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \text{A} \quad 4. \overset{\text{III}}{5} \overset{\text{II}}{7} \overset{\text{I}}{2} \\
 \text{B} \quad \overset{\text{II}}{1}. \overset{\text{I}}{2} \overset{\text{I}}{9} \\
 \hline
 \text{C} \quad 3. \overset{\text{III}}{2} \overset{\text{II}}{8} \overset{\text{I}}{2}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 \overset{\text{I}}{7}. \overset{\text{II}}{4} \overset{\text{III}}{2} = \overset{\text{III}}{7}. \overset{\text{II}}{4} \overset{\text{I}}{0} \overset{\text{I}}{2} \\
 \overset{\text{II}}{3} \overset{\text{III}}{5} = \overset{\text{III}}{0}. \overset{\text{II}}{0} \overset{\text{I}}{3} \overset{\text{I}}{5} \\
 \hline
 \text{differentia} \quad 7. \overset{\text{III}}{3} \overset{\text{II}}{6} \overset{\text{I}}{7}
 \end{array}
 \end{array}$$

COROLL. Ratio est eadem ac additionis. Nam si decimales A & B ad eandem denominationem reducantur per Coroll. 2. erunt per Coroll. 1. $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{1290}{1000}$



hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000} = C 3.282$ per
Defin. I.

SCHOL. Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimales subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex 8 integris tres centesimas, hoc est 0.03, adduntur ad 8 duo zeri, ut fiat 8.00
eritque residuum 7.97, ut patet.

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRACTIONES decimales multiplicantur ut integra in communi Arithmetica, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

EXEMPLA.

^{II} I. 4.05 ^I 3.2 ----- 810 1215 ----- ^{III} 12.960	^{III} II. 0.745 ^{II} 42 ----- 1490 2980 ----- ^V 0.31290	^{VI} III. 0.000356 ^{IV} 0.0048 ----- 2848 1424 ----- ^X 0.0000017088 Co-

COROLL. I. Operandi modus ex dictis facile demonstra-

tur. Nam in primo exemplo $4.05 \stackrel{II}{=} \frac{405}{100} \text{ \& } 3.2 \stackrel{I}{=} \frac{32}{10}$ per
 Defin. 1. Ex communi autem Arithmetica $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000}$

$\stackrel{III}{=} 12.960$ per Defin. 1. & Coroll. 1., quod est ejusdem
 exempli primi productum.

COROLL. II. Pater etiam ex primo exemplo tres tan-
 tum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus
 habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores
 plures apices continent, quam productum notas, ideo ad
 complendum numerum apicum aequalem, tot adduntur ad
 sinistram zeri, quot desunt in facto notæ decimales; unus
 præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum
 indicandum.

COROLL. III. Quod si in alterutro factore progressio
 decimalis sit interrupta; ut si multiplicari oporteat 4.5

per 3.2 , primo progressio interpositis zeris fiat integra per

Defin. 3., hoc est fiat $4.5 \stackrel{I\ II\ III}{=} 405$, & $3.2 \stackrel{II\ II}{=} 302$,

deinde multiplicando 405×302 habetur productum

$1.22310.$

SCHOL. Si factorum unus sit numerus integer sine ullo
 sibi decimali annexo, in producto numerantur tot notæ,
 quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus.

P R O P O S I T I O III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera finistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cifrae, ut in III exemplo.

E X E M P L A.

$$\begin{array}{r} \text{II} \quad \text{V} \quad \text{III} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{I} \\ \text{I. } 3 \text{) } 0.13563 \mid 4.521. \text{ II. } 5.24 \text{) } 18.864 \mid 3.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3144 \\ - 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{III} \quad \text{III} \quad \text{V} \\ \text{III. } 27.589 \text{) } 0.354 \dots \mid 0.01283 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 78110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55178 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 220712 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 86080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82767 \end{array}$$

$$3313 \&c.$$

COROLL. Operandi ratio clara est. Nam in primo exem-

plo per Defin. 1. habetur $3 = \frac{3}{1.00} \text{ \& } 0.13563 = \frac{13563}{100000}$,
proinde dividendo numeratorem per numeratorem & de-
nominatorem per denominatorem ac si essent numeri inte-

gri, habetur nova fractio $\frac{4521}{1000} = 4.521$ per Defin. 1.
nempe quotus in primo exemplo inventus. In tertio exemplo
cum quinquies addita sit cifra 0, dividendi apex fit VIII,
a quo divisoris apice III subtracto, residuum V dat quoti
apicem.

SCHOL. Quod si divisoris, aut dividendi decimalis pro-
gressio interrupta sit, fiat integra per Defin. 3. deinde in-
stituatur divisio, ut supra dictum est.

PROPOSITIO IV.

*Fractionem quancunque in partes decimales
reducere.*

SI data fractio $\frac{3}{5}$ reducenda in partes v. g. millesimas;
Fiat $5.3 :: 1000. x$, erit per regulam proportionum

$x = \frac{3000}{5} = 600$, unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.600$ per
Defin. 1.

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas
millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, &
invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42857 , defectu exi-
stente minori quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis
approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope ve-
ram, ut Cl. Wolfius advertit.

F

SCHOL.

SCHOL. Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsita. Ratio autem operationis per se manifesta est.

PROPOSITIO V.

Décimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulae decimales 750^{III} . Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, infertur particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem *per De-*

fin. 1. particulae $750^{\text{III}} = \frac{750}{1000}$. Fiat jam $1000.750 :: 12.x$, erit per regulam proportionum $x = \frac{9000}{1000} = 9$. Haben-

tur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $750^{\text{III}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulae datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti Romani, quod in asses 100 dividitur, contineant decimales particulae 5610^{IV} . Cum *per Defin.* 1. sint $5610^{\text{IV}} = \frac{5610}{10000}$, si fiat $10000.5610 :: 100.x$, erit per regulam proportionum $x = \frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses $56 + \frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio per se patet.

SCHOL.

SCHOL. Simon Stevinus (^a), *decimalium auctor ingeniosissimus*, eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus (^b), Præstetus (^c), Reyneau (^d) Wolfius (^e) & alii hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.

C A P U T III.

De Calculo Exponentiali.

DEFINITIONES.

I. **S**I quantitas ex. gr. a seipsam multiplicet, ex dictis Propos. 3. Cap. 1. fit aa , quod etiam exprimitur per a^2 , & dicitur *quadratum*, seu *secunda potestas*. Cujus radix, seu latus est ipsa a , quæ prima etiam potestas dicitur. Si aa multiplicetur per idem latus a , oritur aaa , seu a^3 , nempe *cubeus*, aut *tertia potestas*. Si aaa rursus per a multiplicetur, oritur $aaaa$, seu a^4 , nempe *quadrato quadratum*, aut *quarta potestas*, & sic in infinitum. Atque hinc habetur series continue proportionalium a^1 , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , a^6 , a^7 , &c.

II. Numerus potestati adscriptus dicitur *Index*, seu *Exponens* illius potestatis. Exponit enim quo dimensionis

F 2

gradu

(^a) Oeuvres Mathemat. in f. p. m. 206. (^b) Arith. pract. l. 2. Cap. 9.

(^c) Elemens des Mathemat. Tom. 1. l. 9. (^d) Science du Calcul.

(^e) Elem. Mathefeos edit. 2. Tom. 1. Cap. 9.

gradu gaudeat talis potestas, & indicat locum, quem occupare debet in serie proportionalium. Ut index 4 indicat quatuor dimensiones ipsius a , & quantum illi locum competere in ordine proportionalium illius seriei.

III. Literæ m, n, r, s indicant exponentem potentiae indeterminatae, ut a^m, a^n, a^r, a^s , quæ possunt determinari ad quamlibet potentiam, tertiam, quartam, quintam &c.

IV. Series potestatum constituit progressionem geometricam, quæ procedit in ratione unitatis ad radicem. Exponentes vero progressionem Arithmeticam naturalem numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.

V. Potestas, cujus exponens est numerus fractus, ut $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}$ &c. designat radicem ejus potestatis, quæ indica-

tur a denominatore fractionis; nempe $a^{\frac{1}{2}}$ radicem secundam, $a^{\frac{1}{3}}$ radicem tertiam, seu cubicam &c. unde ori-

tur alia series $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}$, &c. potestatum, quæ dicuntur *imperfectæ*; & idem revera significant ac $\sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}$ &c. quæ signa dicuntur *Radicalia*.

VI. Potestas, cujus exponens est cum signo negativo, ut $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$, &c. significat unitatem divisam per talem potestatem. Sic a^{-1} idem est ac $\frac{1}{a}$, a^{-2} idem ac $\frac{1}{aa}$, a^{-3} significat $\frac{1}{aaa}$ &c. Nam si fuerit ex. gr. $\frac{aa}{aaaa}$, eliso aa

tam

tam in numeratore, quam in denominatore, habetur 1,

(nam $\frac{aa}{aa} = 1$) & remanet $\frac{1}{aa}$, quod æquivalet ipsi a^{-2} .

Atque hinc oritur series potestatum, quæ dicuntur nega-

tivæ, ut $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$, &c. huic æqualis $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ &c.

VII. Zero, seu nihilum dicitur exponens unitatis; ita ut a^0 significet idem ac unitatem. Hinc posita progressionem geometrica ab 1 incipiente, nempe 1, 2, 4, 8, 16 &c. erit $a^0 = 1, a^1 = 2, a^2 = 4, a^3 = 8, a^4 = 16$ &c.

COROLL. Calculus potestatum, de quo agitur in hoc capite, fit per Exponentes ipsarum; proinde Calculus Exponentialis nuncupatur: qui ob potestates imperfectas Defin. 5. explicatas, extractionem quoque radicum complectitur.

SCHOL. I. Nota magnum esse discrimen inter $2a$ & aa , seu a^2 . Nam $2a$ significat duplum ejusdem a , seu $a + a$; at vero a^2 significat secundam potestatem ipsius a . Hinc posita $a = 3$, erit $2a = 6$, at vero $a^2 = 9$.

SCHOL. II. Etsi nullum existat in natura solidum, quod pluribus quam tribus dimensionibus constet, in Algebra tamen alia atque alia concipiuntur solida, quorum dimensionum numerus in infinitum extenditur, ut superiora exempla docent. Usus autem est frequentissimus in seriebus Geometricis & generatim in doctrina Curvarum.

PROPOSITIO I.

Potentiam quancunque per aliam ejusdem radicis multiplicare, aut dividere.

I. **A** Dde simul exponentes, habebis factum.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 a^2 & a^{\frac{1}{2}} & a^{-2} & x^m & y^m \\
 a^3 & a^{\frac{1}{3}} & a & x^m & y^n
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 a^5 & a^{\frac{5}{6}} & a^{-2} & x^{2m} & y^{m+n}
 \end{array}$$

II. Pro divisione subtrahere exponentem potentiae dividendae ab exponente potentiae dividendae, habebis quotum.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 a^5 & a^{\frac{1}{2}} & a^2 & y^{m+n} & x^{2n} \\
 a^2 & a^{\frac{1}{3}} & a^{-3} & y^n & x^n
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 a^3 & a^{\frac{1}{6}} & a^5 & y^m & x^{2n-r}
 \end{array}$$

Demonstratio. $a^2 = aa$, & $a^3 = aaa$ ex *Defin. 1.* sed factum ex aa in aaa , si per extensum scriberetur, esset

$aaaaa$, ergo $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. Similiter $a^{-2} = \frac{1}{aa}$

per *Defin. 6*, & $a^1 = \frac{a}{1}$ per *Ax. 1. Cap. 2. Sed.* $\frac{1}{aa} \times \frac{a}{1} =$

$\frac{a}{aa}$, per *Prop. 5. Cap. 2.* & $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Ergo multipli-

cando a^{-2} per a , factum erit a^{-1} . Quod &c.

Simi-

Simili ratione a^5 divisum per $a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ hoc est, si per
 extensum fractio scribatur, $= \frac{aaaaa}{aa}$; & ablati hinc inde
 aa , residuum est $aaa = a^3$; ergo ut dividatur a^5 per a^2 ,
 quotus erit $a^{5-2} = a^3$. Pariter dividere a^2 per a^{-3} idem
 est ac dividere $\frac{aa}{1}$ per $\frac{1}{a^3}$; sed $\frac{aa}{1}$ divisum per $\frac{1}{a^3} = \frac{aa \times a^3}{1}$
 per Prop. 6. Cap. 2. ergo dividendo a^2 per a^{-3} provenit
 quotus a^5 . Quod &c.

PROPOSITIO II.

*Potestatem quancunque ad aliam dati exponen-
 tis elevare.*

EXponens potestatis ducatur in exponentem datum,
 factum erit exponens potestatis quæsitæ. Sit ele-
 vanda a^2 ad potentiam tertiam; ductis inter se exponen-
 tibus 2 & 3, habebis potestatem quæsitam a^5 . Si niliter
 sit elevanda potestas y^2 ad potestatem 6; multiplicatis ex-
 ponentibus 2 & 6, habebis y^{12} potestatem sextam quæ-
 sitam. Si elevanda sit x^n ad m , habebis x^{nm} . Quod si x^n
 elevanda sit ad secundam, tertiam, quartam &c. potesta-
 rem scribitur x^{2n} , x^{3n} , x^{4n} &c.

Demonstratio patet ex Defin. 1. Nam perspicuum est
 $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$, sic etiam $x^n \times x^n = x^{2n}$, & $x^n \times x^n$
 $= x^{2n}$ &c.

Co-

COROLL. Eodem modo eleuantur ad potestatem dati exponentis quantitates, quæ constant facto duarum, vel plurium quantitarum. Sic si ab eleuetur ad potestatem secundam, erit $a^2 b^2$ vel ab^{-2} . Potestas tertia quantitatibus $a^2 b^1 c^3$ erit $a^6 b^3 c^9$. Nam $a^{2 \times 3} b^{1 \times 3} c^{3 \times 3} = a^6 b^3 c^9$. Potestas m quantitatibus abcd erit $\overline{abcd}^m$.

SCHOL. Potestates dissimiles adduntur, subtrahuntur, multiplicuntur &c. ut ceteræ quantitates. Sint enim duæ potestates a^m & b^n , earum summa erit $a^m + b^n$, differentia $a^m - b^n$, factum $a^m b^n$, quotus $\frac{a^m}{b^n}$.

PROPOSITIO III.

Binomium ad quancunque potentiam eleuare.

I. **S**it binomium $a + b$ elevandum ad potentiam v. gr. sextam. Scribatur in primo termino prima radice pars evecta ad potestatem quæsitam, ut hic, ad 6, quæ erit a^6 . In secundo termino scribatur eadem a evecta ad potentiam unitate minorem, & ducta in alteram radice partem b , quæ erit $a^5 b$. In tertio scribatur eadem radix a evecta ad potestatem rursus unitate minorem ducta in quadratum alterius partis radice, nempe in b^2 , quæ erit $a^4 b^2$, & sic deinceps, minuendo unitate in quolibet termino potestatem primæ partis radice, & contra augendo unitate potestatem secundæ partis radice, donec veniatur ad terminum, in quo prima pars radice unica tantum dimensione constet, qui erit terminus penultimus, & in ultimo

timo reperiatur secunda radicis pars eveſta ad eandem po-
teſtatem quæſitam. Erit igitur poteſtas 6^a dati binomii
 $a + b$.

$$a^6 . a^5 b^1 . a^4 b^2 . a^3 b^3 . a^2 b^4 . a^1 b^5 . b^6 .$$

II. Pro faciliori autem methodo fieri ſolent ex dua-
bus dati binomii literis duæ progreſſiones Geometricæ,
quarum altera a potentia quæſita incipiens, deſcendat uſ-
que ad unitatem, altera viciffim ab unitate aſcendat uſ-
que ad eandem potentiam, & multiplicatis ordine termi-
nis unius progreſſionis per terminos alterius, habetur dati
binomii potentia quæſita. Quæritur potentia ſexta ipſius
 $a + b$.

Series I.	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	I.
Series II.	I.	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6

Poteſtas VI. $a^6 + a^5 b^1 + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + ab^5 + b^6$.

III. Coefficientes potentiarum, quos Ougtrhedus *un-*
cias vocat, ſic reperiuntur. Exponens primi termini dat
unciam ſecundi termini, ut in ſuperiori exemplo 6 erit
uncia ſecundi termini $a^5 b$. Pro uncia tertii termini, duc
unciam modo inventam ſecundi termini, nempe 6, in
exponentem 5, quem habet prima pars radicis in eodem
ſecundo termino, & productum 30 divide per 2, quo-
tus 15 eſt uncia tertii termini. Deinde duc hanc ipſam
unciam 15 in exponentem 4, quem habet in tertio ter-
mino radicis prima pars, nempe a^4 , & productum 60 di-
vide per 3, quotus dat unciam quarti termini, & ſic dein-
ceps. Itaque potentia ſexta binomii $a + b$ cum unciis ſuis
erit $a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$.

IV. Alii vero pro ejusmodi unciis inveniendis duas Geometricas progressionis numerorum componunt, ita ut ex terminis sibi ordine respondentibus fiat fractio, & multiplicando numeratores inter se & denominatores pariter inter se, habentur numeri unciales quæsi. Ecce exemplum pro eadem potentia sexta.

Series I.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Series II.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ est uncia secundi termini.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia tertii termini.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$ uncia quarti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{360}{24} = 15$ uncia quinti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{720}{120} = 6$ uncia sexti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1$ uncia ultimi.

Hac methodo repertæ sunt uncia potentiarum 1^x , 2^x , 3^x , 4^x , &c. binomii $a + b$, ut ex sequenti exemplo apparet.

$$1^x: a + b$$

$$2^x: a^2 + 2ab + b^2$$

$$3^x: a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4^x: a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$5^x: a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$6^x: a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

SCHOL. I. Si binonium sit positivum, omnia signa sunt affirmativa, ut patet ex superiori exemplo. Si vero secunda binomii pars sit negativa, ut $a - b$; termini, in quibus a dixit $-b$ evecta erit ad potestatem imparem, 1,

$\overline{6}$ $\overline{m}$
 $= a + b$. Similiter elevanda sit $a + b$ ad potestatem n ,
 $\overline{mn}$

scribitur $a + b$.

COROLL. II. Item sequitur, ut duæ potestates ejusdem quantitatis inter se multiplicentur, sufficere earum expo-

nentes simul addere. Sic $\overline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{2+3}$
 $a + b \times a + b$ erit $a + b$

$\overline{5}$ $\overline{m}$ $\overline{n}$ $\overline{m+n}$
 $= a + b$. Similiter $a - b \times a - b = a - b$. Con-
 tra vero ut dividantur, satis est exponentem dividendi ab

exponente dividendi subtrahere. Sic $\overline{5-2}$ $\overline{3}$
 $a - x = a - x$,

$\overline{5}$ $\overline{2}$
 significat potentiam $a - x$ divisam per potentiam $a - x$

$\overline{m-n}$ $\overline{m}$
 Item $a + b$ est quotus resultans ex divisione $a + b$

$\overline{n}$
 per $a + b$.

PROPOSITIO IV.

Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quancunque elevando assignare.

SIt binomium $p + q$ elevandum ad quamlibet potesta-
 tem indeterminatam m . Fiant duæ progressionēs
 Geometricæ sequentes:

$\overline{m}$ $\overline{m-1}$ $\overline{m-2}$ $\overline{m-3}$ $\overline{m-4}$
 I. $p.$ $p.$ $p.$ $p.$ $p.$ &c.
 II. $1.$ $q.$ $q.^2$ $q.^3$ $q.^4$ &c.

Quibus inter se ductis, habetur formula, seu Canon ge-
 nera-

neralis $p^m + p^{m-1}q + p^{m-2}q^2 + p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4$ &c.
 Ut inveniantur coefficientes, seu unciae, fiant aliae duae series Geometricae, nempe

I. $m. \quad m-1. \quad m-2. \quad m-3. \quad m-4. \quad \&c.$

II. $1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad \&c.$

Fiat fractio, & multiplicatis terminis, ut in *Propos. præc.*

erit $\frac{m}{1} \text{ uncia secundi termini: } \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \text{ uncia tertii ter-}$
 $\text{mini: } \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ uncia quarti termini \&c. quibus}$

fuo loco in superiori Canone generali dispositis, habetur formula generalis pro quocunque binomio, aut polynomio ad quamlibet potestatem elevando, nempe $p^m + m p^{m-1}q$

$+ m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 +$

$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4}q^4 \&c.$

Patet exponentem m continuo decrescere, proinde ubi fit $=0$, ibi erit ultimus terminus potentiae quaesitae. Nam fiat ex.gr. $m=3$, in quarto Canonis termino erit $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$.

Sit igitur elevandum ad tertiam potestatem binomium $2ax + bb$. Supponatur $2ax = p$, $+ bb = q$ & $m=3$. Loco ipsorum p, q, m substituantur eorum valores, nempe $2ax$, $+ bb$ & 3; adhibitaque formula generali, erit

$p^m = 8a^3x^3$, $m p^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$, $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2$
 $= 6ab^4x$, demum $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 = b^5$.
 Est

Est igitur tertia potestas quæ sita $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

Sit secundo trinomium $a + b - c$ elevandum ad quartam potestatem. Suppono $a = p$, $+b - c = q$, $m = 4$ factaque, ut modo docuimus, debita valorum substitutione, erit quarta potestas quæ sita $a^4 + 4a^3b - 4a^3c + 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$.

PROPOSITIO V.

Potestates compositas multiplicare.

Multiplicatio potestatum compositarum nullam habet difficultatem, bene perceptis iis, quæ *Prop. VII. Cap. I. & Prop. I. hujus* dicta sunt, ideoque unum, vel alterum exemplum hoc loco afferre satis erit.

I. Multiplicanda sit quantitas A per B , productum erit C , nempe:

$$A \quad a^2 - 2ab + b^2$$

$$B \quad a^2 + 2ab - b^2$$

$$a^4 - 2a^3b + a^2b^2$$

$$+ 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3$$

$$- a^2b^2 + 2ab^3 - b^4$$

$$C \quad a^4 \quad 0 \quad - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$$

II. Multiplicari oporteat quantitas $Mx^2 + 2ax - a^2 + 3bx - b^2$ per $Nx^3 - 2a$. Facilitatis gratia disponentur termini, ut sequitur, productum erit P .

$$Mx^2$$

$$M \quad \begin{array}{r} x^2 + 2ax - a^2 \\ 3bx - b^2 \end{array}$$

$$N \quad x^3 - 2a$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2ax^2 - a^2x^2 \\ + 3bx^2 - b^2x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 \\ - 6abx + 2ab^2 \end{array}$$

$$P \quad \begin{array}{r} x^3 + 2ax^2 - a^2x^2 - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 + 2ab^2 \\ + 3bx^2 - b^2x^2 - 6abx \end{array}$$

Ubi videre est terminos, in quibus x ad aliquam potestatem elevatur, ordinatim unum sub alio collocari, ita ut dignitates æquales sibi respondeant.

PROPOSITIO VI.

Potestates compositas dividere.

NEque multum negotii facessit potestatum compositionum divisio, si quæ dicta sunt *Prop. VIII. Cap. I.* & *Propos. I. hujus* ante oculos habeantur.

I. Sit dividenda quantitas $A 6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$ per $B 2a^2 - 3ab$. Diviso primo termino $6a^3$ per $2a^2$, quotus est $3a$ per *Propos. I. hujus*, quem pone in C , & per hunc multiplica totum divisorem B : productum $6a^3 - 9a^2b$ subtrahitur (mutatis signis) ex dividendo A , & remanet $-6a^2b + 9ab^2$; quod divide pariter per $2a^2$, quotus est $-3b$ per *Prop. cit.*, quem pone in C , & per ipsum multiplica, ut antea, totum divisorem B , producitur $-6a^2$

quæsitæ $a^{\frac{3}{2}}$. Similiter radix tertia ejusdem potestatis erit $a^{\frac{3}{3}} = a^1$. Item radix quinta potestatis a^5 erit $a^{\frac{5}{5}}$, seu $a^{1+\frac{2}{5}}$, & generaliter $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; eademque ratione $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

II. Si radix sit extraenda ex facto plurium quantitatum, ut $a^6 b^3 c$, eodem modo operandum. Nam divisus exponentibus ejusdem $a^6 b^3 c$ per exponentem radice quæsitæ, habetur radix. Erit ergo ipsius $a^6 b^3 c$ radix secunda $a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, hoc est $a^3 b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, ita ut $\sqrt{a^6 b^3 c} = a^3 b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}$.

Sic $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, seu $\sqrt{ab}$.

Ratio deducitur ex ipsa potestatum compositione. Nam sicuti una potestas ad aliam elevatur multiplicando earum exponentes per *Prop. 2. hujus*; sic ut radix extrahatur, contrario modo agitur, dividendo scilicet exponentem potentie per exponentem radice quæsitæ.

SCHOL. I. Sed juvabit tyronem sequentes expressiones, quæ apud auctores non raro occurrunt, hic adnotare.

$\sqrt{a^3 b} = a \sqrt{b}$, seu $a^1 b^{\frac{1}{2}}$; nam a est radix ipsius a^2 & $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. Pariter $\sqrt{a^3 b} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^1 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a \sqrt{ab}$, ubi patet quantitatem partim esse rationalem, partim irrationalem. Item $\sqrt{a^3 b^3} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} = ab \sqrt{ab}$. Hæc pauca cæteris dignoscendis facem præferunt.

H

SCHOL.

SCHOL. II. Hanc novam radices exprimendi rationem excogitavit Newtonus ^(a) magno calculi commodo. Nam sic quantitates irrationales ad formam rationalium reducuntur & eodem modo pertractantur, de quo in Cap. sequenti.

PROPOSITIO VIII.

Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.

Methodus extrahendi radices ex compositis quantitatibus non differt ab ea, qua in vulgari Arithmetica uti solemus. Sed claritatis gratia fit quantitas A , cujus radix quadrata quaeritur.

$$\begin{array}{lcl}
 C & a & \left| \begin{array}{l} A \ a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + cc \\ - a^2 - 2ab - b^2 - 2ac - 2bc - cc \end{array} \right| \begin{array}{l} B \\ a + b + c \end{array} \\
 D & 2a + b & \left| \begin{array}{l} \hline \hline \hline \end{array} \right| \\
 E & 2a + 2b + c & \left| \begin{array}{l} 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Primo radix quadrata quantitatis a^2 est a , hanc pone dextrorsum in B , & sinistrorsum in C , ejusque quadratum a^2 subtrahe ex a^2 , remanet 0. Duplica deinde inventam radicem a , quam pone in D , & per $2a$ divide $+2ab$ datae quantitatis residuum, habebis quotum b , quem adde in B priori radice termino, & sinistrorsum in D , habebis $2a + b$, quo ducto in radicem b , fit $2ab + bb$, mutatisque signis, subtrahe ex quantitate A , remanet 0.

Rursus duplicata radice $a + b$, habebis in E $2a + 2b$ divisorem, per quem divide quantitatem $2ac$, quotus erit c , quo

(a) Epist. ad Oldenburg. apud Wallisium Tom. III. pag. 622.

c , quo posito tam in B , quam in E , multiplica per hanc radicem c modo inventam totam quantitatem E , & productum $2ac + 2bc + cc$ subtrahe, mutatis signis, ex quantitate residua ipsius A , nihil remanet. Proinde

$$\sqrt{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc} = a + b + c.$$

Sit rursus extrahenda radix quadrata ex quantitate M . Operare ut supra, invenies radicem $x + b - 1$, ut in N .

$$\begin{array}{r|l}
 & M \\
 x & x^2 + 2bx - 2x + b^2 - 2b + 1 \\
 2x + b & -x^2 - 2bx \qquad -b^2 \\
 2x + 2b - 1 & \hline
 & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \end{array} \\
 & \text{Resid. } -2x - 2b + 1 \\
 & \quad + 2x + 2b - 1 \\
 & \hline
 & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} N \\ x + b - 1 \end{array}$$

COROLL. Patet ex compositione potestatum, tum etiam ex earum resolutione, in omni quadrato quantitatis compositæ contineri quadrata partium quantitatum peculiarium, ex quibus constat radix, ut in primo exemplo a^2 , b^2 , c^2 , unde radix est $a + b + c$; & ulterius contineri duplum rectanguli earundem partium, hoc est $2ab$, $2bc$, $2ac$.

SCHOL. I. Omne quadratum duplicem habet radicem, unam positivam, negativam alteram. Nam aa tam oritur ex $a \times a$, quam $-a \times -a$. Proinde in primo exemplo radix $a + b + c$ fieri potest negativa $-a - b - c$, & in secundo $x + b - 1$ fieri potest $-x - b + 1$, & tamen idem quadratum habebitur. Quod pro solutione problematum secundi gradus scire juvabit. Ex quantitate autem

negativa radix quadrata extrahi non potest. Nam $-aa$ neque oriri potest ex $a \times a$, neque ex $-a \times -a$, ut patet ex Propos. VII. Cap. I. idcirco dicitur quadratum imaginarium, quod dari revera non potest.

SCHOL. II. Si ex data quantitate radix quadrata extrahi nequit, designatur ipsa radix præfigendo quantitati propositæ signum radicale $\sqrt{}$. Sic ad extrahendam radicem secundam ex $aa + bb$, scribitur $\sqrt{aa + bb}$; & hinc oriuntur quantitates radicales, de quibus in sequenti Cap.

P R O P O S I T I O IX.

Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.

I. **S**it quantitas A , cujus radix cubica inquiretur.

1. Radix cubica extracta ex a^3 est a , per Prop. VII., quæ ponatur seorsim, ut in B , & per ejus quadrati triplum $3aa$ positum in C dividatur secundus terminus, nempe $-3aab$, oritur quotus $-b$ pro altera radice parte ponenda in B .

2. Ex $a - b$ fiat cubus, quem subtrahe ex quantitate data A ; & cum nihil remaneat, erit radix quæsitæ $a - b$.

$$\begin{array}{r|l}
 A & a^3 - 3aab + 3ab^2 - b^3 \\
 C \ 3aa) & - a^3 + 3aab - 3ab^2 + b^3 \\
 \hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{l} B \\ a - b \end{array}
 \right.$$

II. Sit extrahenda radix cubica ex quantitate F .

1. Radix cubica primi termini $8a^3$, per Prop. VII., est $2a$, quam pone in G , & per ejus quadrati triplum $12a^2$ divi-

tur. Juvabit tamen tyronem ad expressiones sequentes animam advertere. Radix quadrata quantitatis $\frac{xx+2ax+aa}{bb}$ erit $\frac{x+a}{b}$. Similiter $\frac{aa}{bc}$ erit $\frac{a}{\sqrt{bc}}$. Radix cubica quantitatis $\frac{a^3}{b^3c^3}$ erit $\frac{a}{bc}$. Item $\frac{a}{\sqrt{dm}}$ est pariter cubica quantitatis $\frac{a^3}{dm}$.

SCHOL. III. Si fractio, ex qua radix extrahenda est, integro adhæreat tunc primo integrum ad fractionem ejusdem nominis reducatur per Prop. 1. Cap. 2. Deinde extrahatur, si fieri possit, radix quæsitæ ex numeratore & denominatore. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate $6 + \frac{1}{4}$, facta reductione per Prop. cit. habetur $\frac{25}{4}$, cujus radix est $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Similiter sit quantitas $\frac{c^2 - 4c}{4}$, facta reductione per Prop. cit. oritur $\frac{c^2 - 4c + 4}{4}$, cujus radix $= \frac{c-2}{2}$ per Prop. 8. hujus.

PROPOSITIO X.

Radices quasvis extrahendi methodum generalem assignare.

Consideretur quantitas, ex qua radix eruenda est, uti quantitas elevanda ad eam potestatem, cujus
radix

radix inquiritur. Exponens pro radice quadrata ex *Defin.* 5. erit $\frac{1}{2}$, pro cubica $\frac{1}{3}$, pro quadrato quadrata $\frac{1}{4}$. Exemplis nonnullis res fiet clarissima.

I. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + cc$. Ex formula generali *Prop.* 4. hu-

jus $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2$ &c. sumantur duo

priores termini (nam alii sunt inutiles, cum radices extrahendæ sunt rationales) & ponatur $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac$ &c. $= q$, & (quia agitur de radice quadrata) erit

$m = \frac{1}{2}$, ideoque primus terminus radiceis $= p^m = a^2 \times \frac{1}{2}$

$= a$. Secundus erit $mp^{m-1}q = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{1}{2} q$, hoc est $\frac{1}{4} a^2 \times$

$2ab - 2ac$, nempe $\frac{1}{2} a^{-1} \times 2ab = a^{-1} + = a^0 b = 1b$.

Similiter $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1} + = -a^0 c = -1c$; ideoque radix quæsitæ est $a + b - c$. Neque enim ulterius est progrediendum ubi m fiat $= 0$, proinde cum hic habeatur $a^0 b$, & $-a^0 c$, habentur duo ultimi radiceis termini.

Similiter extrahenda fit radix quadrata ex quantitate $9a^2 - 12ab + 6a + 4bb - 4b + 1$.

Ex eadem formula generali $p^m + mp^{m-1}q = 0$, pone $p = 9a^2$, $q = -12ab + 6a$ &c. $m = \frac{1}{2}$, erit $p^m = 9^{\frac{1}{2}} \times a^2 \times \frac{1}{2} = 3a$, nam $9^{\frac{1}{2}} = 3$, per *Defin.* 5., & *Propos.* 7.

Est igitur $3a$ primus terminus. Deinde $mp^{m-1} = \frac{1}{2} \times 9^{\frac{1}{2}-1}$
 $= \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times a^{3m-1} = \frac{1}{6} a^{-1} \times q = \frac{1}{6} a^{-1} \times -$$

$$12ab = -\frac{12}{6} a^{-1} \times b = -2a^0b = -2b, \text{ qui erit}$$

secundus radicis terminus. Pariter $\frac{1}{6} a^{-1} \times 6a = a^{-1} \times a = 1a^0$. Unde habetur tertius terminus radicis $+1$. Est ergo radix quæsitæ $3a - 2b + 1$.

II. Quæritur radix cubica quantitatis $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Pone $a^3 = p$, & $-3a^2b + 3ab^2 - b^3 = q$, erit (ob radicem cubicam) $m = \frac{1}{3}$. Positis igitur valoribus p

& q in duobus formulæ generalis terminis $p^m + mp^{m-1}p$,

habebis $p^m = a^{3 \times \frac{1}{3}} = a$ primum radicis terminum. Dein-

de $mp^{m-1}q = \frac{1}{3} a^{3 \times \frac{2}{3}}$, hoc est $\frac{1}{3} a^{-2} q = \frac{1}{3} a^{-2} \times -3a^2b$

$= -a^{-2} \times a^2b = -a^0b = 1b$. Atque hic sistendum, ut supra monuimus. Radix ergo cubica est $a - b$.

III. Quæritur radix quadratoquadrata quantitatis $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$. Pone $a^4 = p$, & $-4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = q$, erit $m = \frac{1}{4}$ ob radicem quadratoquadratam. Positis jam valoribus in duobus formulæ generalis terminis, habebis primum terminum

radicis $p^m = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a$. Pro secundo erit $mp^{m-1}q = \frac{1}{4}$

$a^{4 \times \frac{3}{4}}$, hoc est $\frac{1}{4} a^{-3} q = \frac{1}{4} a^{-3} \times -4a^3b$; unde oritur productum $-a^0b$, ex quo admonemur haberi jam secundum radicis terminum b , nec esse ulterius progrediendum. Est ergo radix quæsitæ $a - b$.

SCHOL. Cum valor exponentis in nullibi occurrit = 0, tunc radix datæ quantitatis erit irrationalis, & extractio radice continuari poterit in infinitum, seu per infinitos terminos, id quod approximatio radicum dicitur, de quo in Prop. sequenti.

PROPOSITIO XI.

Extractiones radicum per infinitos terminos continuare.

I. **E**Xtrahenda sit ex quantitate $a^2 - b^2$ radix, ex.gr. quadrata, per terminos infinitos A, B, C, D &c. Adhibeantur formulæ generalis tot termini, per quot con-

tinuatam vis extractionem radice, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3$ &c.

pone $p = a^2$, $q = -b^2$, & (ob radicem quadratam) $m = \frac{1}{2}$, erit

$$A (= p^m = a^2 \times \frac{1}{2}) = a^1.$$

$$B (= mp^{m-1} q = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{1}{2}, \text{ hoc est } \frac{1}{2} a^{-1} q) = -\frac{b^2}{2a}.$$

$$C (= m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}, \text{ hoc est } -\frac{1}{8} a^2 \times \frac{1}{2}, \text{ hoc est } -\frac{1}{8} a^{-3} q^2) = -\frac{b^4}{8a^3}.$$

$$D (= m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \text{ hoc est } \frac{1}{16})$$

$$\text{est } \frac{1}{16} a^2 X^{-\frac{1}{2}}, \text{ hoc est } \left(\frac{1}{16} a^{-5} q^3 \right) = - \frac{b^5}{16a^5}.$$

Et sic deinceps in infinitum. Est ergo radix quæsitæ

$$A+B+C+D\&c. = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9} \&c.$$

II. At pro hac formula, qua utitur *Cl. Guisneus* (*a*), atque alii, adhibere præstat formulam Newtonianam magis quidem expeditam, & molestiæ fractionum minus obnoxiam videlicet, $P \frac{m}{n} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \frac{m-3n}{4n} D Q \&c.$ in qua *P* significat primum terminum quantitatis illius, cujus radix investigatur. *Q* reliquos terminos divisos per primum; $\frac{m}{n}$ indicem dimensionis, seu radicis quæsitæ. Termini jam inventi exprimentur literis *A, B, C, D* &c. nempe *A* exprimit primum radicis terminum $= P \frac{m}{n}$; *B*, secundum $= \frac{m}{n} A Q$; *C*, tertium $= \frac{m-n}{2n} B Q$, & sic deinceps. Sed ecce exemplum.

Extrahenda sit radix secunda ex quantitate $\sqrt{c^2 + x^2}$ seu $c^2 + x^2$ $^{\frac{1}{2}}$ per *Prop. 7. hujus*; dico radicem esse $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} \&c.$ Nam erit in hoc casu

(a) Application de l'Algebre a la Geometrie, edit. 2. Paris pag. xxx.

fu $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, proinde habetur

$$A(=P\frac{m}{n}=c^2X^{\frac{1}{2}})=c.$$

$$B(=\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}cX\frac{x^2}{c^2}=\frac{x^2}{2c}.$$

$$C(=\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}X\frac{x^2}{2c}X\frac{x^2}{c^2})=-\frac{x^4}{8c^3}.$$

$$D(=\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{1}{3}X-\frac{x^4}{8c^3}X\frac{x^2}{c^2})=-\frac{x^6}{16c^5}.$$

$$E(=\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}X\frac{x^6}{16c^5}X\frac{x^2}{c^2})=-\frac{5x^8}{128c^7}.$$

$$\text{Radix ergo quaesita} = A + B + C + D \&c. = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} \&c.$$

Similiter extrahenda fit radix tertia ex quantitate $\sqrt{a^3-b^3}$, seu a^3-b^3 per *Propos. cit.* Procedendo eadem methodo, erit $P=a^3$, $Q=-\frac{b^3}{a^3}$, $m=1$, $n=3$, proinde

$$A(=P\frac{m}{n}=a^3X^{\frac{1}{3}})=a^1.$$

$$B(=\frac{m}{n}AQ)=-\frac{b^3}{3a^2}.$$

$$C(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{b^6}{9a^5}.$$

I 2

D(=

$$D \left(= \frac{m-2n}{3n} CQ \right) = - \frac{5b^9}{81a^8}.$$

$$E \left(= \frac{m-3n}{4n} DQ \right) = - \frac{10b^{12}}{243a^{11}}.$$

Est ergo radix quæsitæ $= A + B + C + D + E \text{ \&c.} =$
 $\frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}} \text{ \&c.}$

SCHOL. I. Hac formula uti quoque possumus in divisione fractionis per terminos infinitos. Sit dividenda $\frac{1}{a+b}$ (hoc est $\frac{1}{a+b}^{-1}$ per Defin. 6.) Pone $P=a$, $Q=\frac{b}{a}$, $m=-1$,

$n=1$, erit $A \left(= P \frac{m}{n} = a^{-1} = a^{-1} = \frac{1}{a} \right)$:

$$B \left(= \frac{m}{n} AQ \right) = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{b}{a} = -\frac{b}{a^2}.$$

$$C \left(= \frac{m-n}{2n} BQ \right) = -1 \times -\frac{b}{a^2} \times \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} \text{ \&c. ut in Prop. 8. Cap. 2.}$$

SCHOL. II. Patet jam ex duplici fonte oriri series infinitas terminorum proportionalium, scilicet ex divisione, & extractione radicum. Primo modo quæsitæ fuerunt a Nicolao Mercatore Holsato (a); secundo a Newtono (b). Earum usus est ad obtinendam radicum approximationem,

ut

(a) Logarithmo-technia Londini 1668. Acta Erudit. Lips. an. 1693.

(b) Epist. ad D. Oldenburgium ann. 1676. in Tom. 3. Operum Wallisii Analy. per quantitat. series &c. in Tom. Philosophiæ Natur. Amstelod. ann. 1723.

ut vidimus; ad inveniendas areas & longitudes Curvarum, ad Solidorum superficies dimetiendas, aliaque magni momenti circa curvas Mechanicas expedienda. Nos aliquem ipsarum usum in resolutione æquationum experiemur.

C A P U T IV.

De Calculo Radicali.

DEFINITIONES.

I. **Q**uantitas, five numerica, five literalis, ex qua radix extrahi non potest, dicitur potentia imperfecta, quantitas surda, & irrationalis; & a signo $\sqrt{}$, quod *radicale* dicitur, *radicalis* denominatur, ut $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{ax+bb}$; five, ut aliis placet scribere, $\sqrt[3]{(a-b)}$, $\sqrt[4]{(ax+bb)}$.

II. Signa radicalia præfixos habent exponentes ejus potentia, cujus radicem designant. Ubi nullus est exponent, pro radice secundæ potentia accipitur, ut $\sqrt{a}$ indicat radicem secundam quantitatis a . At $\sqrt[3]{a-b}$ significat radicem tertiam, seu cubicam quantitatis $a-b$.

III. Si radicale signum præcedat numerus, aut quantitas literalis, ut $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ &c. quantitas, quæ præcedit, dicitur esse *extra signum*, nempe 2 & a . A quibusdam vero quantitates illæ vocantur *Coefficientes*. Cum quantitas nulla præcedit, ibi semper intelligitur unitas, ut $1\sqrt{2}$, & $1\sqrt{a}$ &c.

IV. Ut

IV. Ut quantitas extra signum sub signo radicali poni possit, elevari prius debet ad illam ipsam potestatem, quam indicat exponens signi radicalis, & multiplicari per quantitatem sub signo radicali existentem. Sic $2\sqrt{3}$ fiet $\sqrt{12}$. Item $a\sqrt{b-c}$, erit $\sqrt{a^2b-a^2c}$. Demum $a\sqrt[m]{bc}$, erit $\sqrt[m]{a^m bc}$.

V. Contra vero quantitas sub signo radicali existens, & eundem exponentem habens, quem habet signum radicale, est quantitas rationalis, & ponitur extra signum extracta radice. Sic $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{am^3} = m\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$. Relinquitur sub signo id, quod radicale est.

VI. Quantitas negativa sub signo radicali, cujus exponens est numerus par, dicitur radix *imaginary*, seu impossibilis, ut $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$; similiter $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ &c. nam impossibile est quadratum negativum ex dictis in *Schol. 1. Prop. 8. Cap. 3.*

VII. Duæ quantitates radicales dicuntur *commensurabiles* inter se, seu *communicantes*, cum ad simplicem expressionem redactæ, habent sub signo radicali quantitatem eandem, ut $3\sqrt{5}$ & $2\sqrt{5}$; pariter $b\sqrt{a-b}$ & $c\sqrt{a-b}$. Nam exprimi potest ratio, quam inter se habent; est enim $3\sqrt{5} : 2\sqrt{5} :: 3 : 2$. Item $b\sqrt{a-b} : c\sqrt{a-b} :: b : c$, ut patet.

VIII. Si

VIII. Si radicale signum quodcumque comprehendat sub se aliam quantitatem radicalem, ut $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, vel $\sqrt[3]{a^2 - b\sqrt{c}}$, radix *universalis* dicitur; & denominatur a signo, quod totam illam quantitatem, linea superducta, seu vinculo, complectitur. Sic $\sqrt[3]{2 + 3\sqrt{5}}$ dicitur radix universalis cubica: hoc est ex quantitate $2 + 3\sqrt{5}$ radicem cubicam esse extrahendam eo pacto, quo inferius docebitur.

PROPOSITIO I.

Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.

I. **R**educendæ sint radicales $\sqrt[2]{a}$ & $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem. Erit ex *Defin. 5. Cap. 3.* $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$, redactisque fractionibus ex communi Arithmetica ad eandem denominationem, fiunt $a^{\frac{3}{6}}$ & $b^{\frac{2}{6}}$; proinde a elevari debet ad tertiam potestatem; & b ad secundam; ut indicant novi numeratores fractionum. Signis autem radicalibus præfigendus exponens 6, communis scilicet ipsarum fractionum denominator. Erunt ergo $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b^2}$.

Similiter reducendæ sint $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ad eandem denominationem. Quia $\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[6]{20} = 20^{\frac{1}{6}}$ per *Defin.*

fin. cit. redactis fractionibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ad idem nomen, habentur $\frac{6}{12}$ & $\frac{2}{12}$, quibus ad minores terminos reductis, dividendo per 2, habentur $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$; unde patet 2 ad tertiam potestatem esse elevandum, & 20 ad primam; erunt ergo $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{20}$.

II. Vel sic: reducendæ sint ad idem signum $\sqrt[2]{c}$ & $\sqrt[6]{a}$, quia exponens 6 præcise divisibilis est per exponentem 2, multiplico per quotum 3 tam exponentem 2, quam quantitatem sub signo existentem c , eam elevando ad potentiam tertiam, eritque $\sqrt[6]{c^3}$ ejusdem nominis cum $\sqrt[6]{a}$. Eadem ratione $\sqrt[2]{3}$ & $\sqrt[4]{5}$ reductæ ad idem signum, fiunt $\sqrt[4]{9}$ & $\sqrt[4]{5}$. Praxis oritur ex *Coroll. Prop. 3. Cap. 2.*

Ratio autem est, quia una radix non fit major, etiam si ejus potentia major fiat, hoc est ad altiorem gradum elevetur. Est enim a radix tam potentia a^2 , quam potentia a^3 , a^4 , a^5 &c. proinde si $\sqrt[2]{a^2}$ per multiplicationem fiat $\sqrt[3]{a^3}$ remanet idem valor, & $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3}$.

SCHOL. I. In reducendis ad eandem denominationem, si-
ve ad idem signum radicalibus, quantitates, quæ sunt extra
signum, non immutantur, sed manent eadem. Reducendæ
sint ad idem signum $3\sqrt[2]{2}$ & $4\sqrt[3]{5}$, fient $3\sqrt[6]{8}$ & $4\sqrt[6]{25}$.
Similiter $a\sqrt[2]{b}$ & $c\sqrt[3]{n}$ fient $a\sqrt[6]{b^3}$ & $c\sqrt[6]{n^2}$. Nam
 $a\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a^2b}$ per Defin. 4. hujus, sed $\sqrt[2]{a^2b} = \sqrt[6]{a^6b^3}$
per

per hanc Propos., & $\sqrt[6]{a^6 b^6} = a \sqrt[6]{b^6}$ per Propos. 7. Cap. 3.

Ergo $a \sqrt[3]{b} = a \sqrt[6]{b^2}$. Eadem ratione $c \sqrt[3]{n} = \sqrt[6]{c^2 n^2} = \sqrt[6]{c^2 n^2}$, adeoque radicalium coefficientes non mutantur. Demonstrationem licet per se claram tyrones ex dicendis magis intelligent.

SCHOL. II. Ut radicales addi, subtrahi, multiplicari, aut dividi invicem possint, eas ad idem signum prius reducere necesse est, quod notetur.

PROPOSITIO II.

Radicales ad simpliciores expressionem reducere.

I. **D**ividatur quantitas sub signo existens per potestatem ejusdem gradus, seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale, & relicto quoto sub signo, radix potestatis, per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum: hoc est extrahatur a quantitate radicali id,

quod est rationale, & ponatur extra signum. Sit $\sqrt[3]{aac + aab}$ divide per a^3 , & quoto $c + b$ sub signo relicto, pone extra signum radicem potestatis dividensis, nempe a , erit

radicalis ad simpliciores expressionem redacta $a \sqrt[3]{c + b} =$

$\sqrt[3]{aac + aab}$.

Sit pariter $\sqrt[3]{54}$ reducenda ad simpliciores expressionem. Divide 54 per cubum 27, & relicto quoto 2 sub signo, pone extra signum radicem ejusdem cubi, nempe 3,

K

erit

erit $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{8a^3b}$ erit $2a\sqrt[3]{b}$,
 & $\sqrt[n]{ab^n}$ erit $b\sqrt[n]{a}$.

II. Quod si quantitas radicalis sit valde composita, ita ut ex sola terminorum inspectione non innotescat, an per maximam ejusdem gradus potestatem sit divisibilis, quærantur per *Prop. 9. Cap. 1.* omnes illius divisores: ex illis necessario apparebit, an sit potestas requisita. Quæri-

tur ex. gr. an $\sqrt[3]{120}$ sit reducibilis ad simpliciores expressionem. Inter ejus divisores apparet 8, qui est tertia potestas requisita. Divide ergo 120 per 8, & relicto quo-

to 15 sub signo, habebis $2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$. Item si $\sqrt[4]{48}$

reducenda sit ad simpliciores, erit $2\sqrt[4]{3}$, nam inter divisores numeri 48, est 16, qui est potestas quarta quæsitæ, ac ter dividit ipsum 48.

COROLL. I. Pro faciliiori praxi, divide quantitatem radicalem sub signo existentem per 2, per 3, per 4 &c. successive, & examina, an quoti illi sint potestas quæsitæ: quod facile agnosces si ex illis radicem extrahas. Sit $\sqrt[4]{392}$. divide 392 per 2, quotus 196 est quadratum ex radice 14, per quod si divides 392, habebis 2, proinde $\sqrt[4]{392} = 14\sqrt[4]{2}$.

Similiter sit reducenda $\sqrt[3]{192}$, divide per 3, quotus 64 dat cubum ex latere 4, per quem cubum dividendo 192,

habebis 3; ideoque $\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{2}$, & sic de aliis.

COROLL. II. Ex hac propositione dignoscitur, an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles &

com-

communicantes. Nam si scire velim, an $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$ sint communicantes, reduco illas ad simpliciores expressionem $2\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, quæ ex Defin. 6. hujus erunt inter se, ut 2 ad 3. Ita $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$ reductæ, fiunt $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$; erit ergo $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: 5 . 3$.

SCHOL. Ut id facile obtineatur, ex quantitatibus sub signo radicali existentibus fiat fractio, quæ ad minimos terminos reducatur. Sic in superiori exemplo $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$ facile dignoscuntur esse commensurabiles. Nam fractio $\frac{8}{18}$ ad minimos terminos reducta fit $\frac{4}{9}$. Sunt ergo $\sqrt{8} . \sqrt{18} :: \sqrt{4} . \sqrt{9} :: 2 . 3$. Similiter ex $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$ fiat fractio $\frac{50}{18}$, quæ reducitur ad minimos terminos $\frac{25}{9}$; unde $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: \sqrt{25} . \sqrt{9} :: 5 . 3$. Demum $\sqrt[3]{a^3b}$ & $\sqrt[3]{bc^3}$ eadem ratione inveniuntur esse ut a ad c.

PROPOSITIO III.

Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.

I. **R**adicales addendæ, aut subtrahendæ reducantur, si fieri potest, ad simpliciores expressionem per Prop. antec. Si communicantes sint, quantitates rationales extra signum addantur, vel subtrahantur, ut fieri solet in quantitatibus rationalibus, & earum summa, aut differentia præponitur signo radicali. Sint addendæ quantitates $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$, quæ reductæ per Prop. cit. sunt $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, additis quantitatibus extra signum 5 & 3, earum summa erit $8\sqrt{2}$. Subtrahenda sit $\sqrt{18}$ ex $\sqrt{50}$, hoc est $3\sqrt{2}$ ex $5\sqrt{2}$ per Prop. antec. subtrahere 3 ex 5, residuum erit $2\sqrt{2}$.

II. Quod si radicales addendæ, aut subtrahendæ non sint communicantes, sed incommensurabiles, summa fit per signum +, subtractio per signum —. Sic duarum $\sqrt{2}$ & $\sqrt{5}$ summa erit $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; differentia vero $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Similiter duarum $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt{a-b}$ summa erit $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$; differentia autem $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$.

III. Quod si radicales addendæ, vel subtrahendæ sint compositæ, eadem ratione operandum, ut exempla sequentia indicant.

ADDITIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6} \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \end{array}$$

SUBTRACTIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{6} + 5\sqrt{7} \\ \hline 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{6} - 8\sqrt{7} \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

Quantitates radicales multiplicare.

I. **M**ultiplicentur inter se quantitates extra signum, tum seorsim quantitates sub signo existentes, habe-

habebis productum quæsitum, ut $5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$.

Similiter $m\sqrt[3]{a} \times n\sqrt[3]{a} = mn\sqrt[3]{aa}$.

II. Quod si radicales habeant signum radicale quadraticum $\sqrt{}$, & sint communicantes, operatio fit brevior. Nam satis est productum, quod fit ex quantitatibus extra signum existentibus, ducere in quantitatem sub signo radicali positam. Sint multiplicandæ $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$. Duc primo inter se 3 & 5, earumque factum 15 duc in 2, erit productum 30. Oritur enim quantitas rationalis; nam $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, adeoque $15 \times 2 = 30$.

Sint pariter multiplicandæ $\sqrt{x^2 + x^2 a^2}$ & $\sqrt{x^2 a^2 + a^2}$, quæ ad simpliciores terminos redactæ per *Prop. 2. hujus*, sunt $x\sqrt{x^2 + a^2}$, & $a\sqrt{x^2 + a^2}$, proinde communicantes per *Defin. 6*. Duc itaque productum $ax \times x^2 + a^2$, in quantitatem scilicet sub signo existentem perinde ac forent quantitates rationales, habebis productum rationale $ax^3 + a^3 x$.

III. Si radicalis per rationalem, aut rationalis per radicalem fit multiplicanda (idem enim est) ex. gr. $\sqrt{a+b} \times \sqrt{c+d}$. Reducatur primo rationalis $c+d$ ad idem signum radicale, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, ita

ut fiat $\sqrt{c^2 + 2cd + d^2}$. Multiplicetur deinde $c^2 + 2cd + d^2$ per $a+b$, perinde ac essent quantitates rationales, erit

productum quæsitum $\sqrt{ac^2 + 2acd + ad^2 + bc^2 + 2bcd + bd^2}$,

quod etiam exprimi poterat hoc modo $\sqrt{c+d} \sqrt{a+b}$.

Mul.

Multiplicando pariter $3\sqrt[3]{5}$ per 2, aut per $\frac{1}{2}$, productum erit $6\sqrt[3]{5}$, aut $\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}$.

IV. Si quantitates multiplicandæ compositæ sint ex radicalibus, vel ex radicalibus simul & rationalibus, ducantur singuli termini unius per singulos alterius secundum regulas radicalium simplicium superius explicatas, servata consueta signorum + & - ratione. Exempla rem satis declarant.

$$\text{I. } \begin{array}{r} \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 5 + \sqrt{15} \\ - \sqrt{15} - 3 \\ \hline 5 - 3 = 2 \end{array}$$

$$\text{II. } \begin{array}{r} 3 + 2\sqrt{5} \\ 5 - 3\sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 15 + 10\sqrt{5} \\ = 9\sqrt{5} - 30 \\ \hline + \sqrt{5} - 15 \end{array}$$

$$\text{III. } \begin{array}{r} 2a + \sqrt{a+x} \\ b - \sqrt{a+x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline b - \sqrt{a+x} \end{array}$$

$$2ab + b\sqrt{a+x}$$

$$- 2a\sqrt{a+x} - a + x$$

$$\hline 2ab + b\sqrt{a+x} - 2a\sqrt{a+x} - a + x$$

Ratio multiplicandi quantitates radicales ita generatim demonstratur. Sit multiplicanda $\sqrt{3}$ per $\sqrt{2}$, dico productum esse unitas ad multiplicantem ($\sqrt{2}$), ut multiplicandus

du $\sqrt{3}$ ad productum, quod voco P ; erit ergo $1. \sqrt{2} :: \sqrt{3}. P$. & in eadem ratione erunt eorum quadrata, nempe $1. 2 :: 3. P^2$, sed $1. 2 :: 3. 6$, ergo $P^2 = 6$, & $P = \sqrt{6}$. Quod erat &c.

COROLL. I. Quod si binomium radicale quadraticum multiplicetur per se ipsum, mutato tamen in alterutro factore signo $+$ in $-$, vel contra $-$ in $+$, oritur monomium rationale, ut in primo exemplo $\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3}$ producit quantitatem rationalem 2 , & hoc dicitur binomium multiplicari per sui contrarium, de quo inferius.

COROLL. II. Si trinomium radicale quadraticum, ex. gr. $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ multiplicetur per se ipsum, mutato aliquo ex signis ut per $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, oritur binomium partim radicale, partim rationale, ut $3 + \sqrt{48}$, quod per Coroll. I. ad monomium omnino rationale facile reducitur.

SCHOL. Si radicales signum diversum habeant, prius reducentur ad idem signum ex dictis Schol. 3. Prop. 1. hujus, deinde fiet multiplicatio ut supra. Sint multiplican-

dæ $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$, erunt reductæ per Propos. 1. hujus $\sqrt[3]{125}$ & $\sqrt[3]{49}$, earumque productum $\sqrt[3]{6125}$.

PROPOSITIO V.

Quantitates radicales dividere.

I. **S**I divisor & dividendus sint communicantes, satis est dividere quantitates extra signum, quotus est quantitas rationalis. Sic ad dividendum $6\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$,
divi-

diviso 6 per 3, quotus est 2. Similiter $4\sqrt{2}$ diviso per $2\sqrt{4}$, habetur quotus 2. Eadem ratione $a\sqrt{a+b}$ diviso per $b\sqrt{a+b}$ habetur pro quotu $\frac{a}{b}$.

Quod sic demonstratur. Ponantur sub signo quantitates 6 & 3: erit $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$ & $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Dividatur jam $\sqrt{108}$ per $\sqrt{27}$, hoc est 108 per 27, quotus est $\sqrt{4} = 2$. Quod &c. Similiter positis sub signo a & b , erit $a\sqrt{a+b} = \sqrt{a^3+a^2b}$, & $b\sqrt{a+b} = \sqrt{ab^2+b^3}$, & dividendo $\sqrt{a^3+a^2b}$ per $\sqrt{ab^2+b^3}$ (hoc est $a^3 + a^2b$ per $ab^2 + b^3$, ut fit in rationalibus,) erit quotus $\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}} = \frac{a}{b}$. Quod &c.

II. Si divisor & dividendus non fuerint communicantes, dividantur seorsim quantitates extra signum & seorsim, quæ sub signo existunt. Sic ad dividendum $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$ habetur quotus $3\sqrt{b}$. Item dividendo $\sqrt{6}$ per $2\sqrt{3}$, quotus erit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Demum $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$ dat quotum $\sqrt{5}$.

III. Quod si dividenda sit quantitas radicalis per rationalem, vel e contrario: semper quantitas rationalis ad radicalem reducatur, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, & ponendo illam sub signo radicali. Ut

si dividenda sit a per $\sqrt[3]{ab}$, elevetur a ad tertiam potestatem ita ut fiat $\sqrt[3]{a^3}$, quæ divisa per $\sqrt[3]{ab}$ dabit quotum

tum $\frac{\sqrt[3]{aa}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{aa}{b}}$, ut in sequenti Schol. 1. hujus.

Ratio dividendi radices ita generatim demonstratur. Dividenda sit radicalis $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$, dico quotum esse $\sqrt{5}$. Nam ex communi divisionis definitione, divisor ad dividendum est, ut unitas ad quotum, quem voco Q : hoc est, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} :: 1 \cdot Q$; & in eadem ratione sunt eorum quadrata, $3 \cdot 15 :: 1 \cdot Q^2$. Sed $3 \cdot 15 :: 1 \cdot 5$, ut patet; proinde $Q^2 = 5$, & $Q = \sqrt{5}$. Quod erat &c.

SCHOL. I. Si radicalium divisio exprimatur per modum fractionis (quod non raro fit) tunc signum radicale vel seorsim numeratori, & seorsim denominatori præponitur, ut superiora exempla docent; vel toti fractioni, scilicet

$$\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}} \text{ \&c.}$$

SCHOL. II. Si ex denominatore tantum, vel ex solo numeratore extrahi possit radix, utique extrahitur, sed alteri signum radicale præfigitur. Sit $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}}$, facta divisione

erit $\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{b}}$, extractaque ex denominatore radice, fit $\frac{x}{\sqrt{b}}$.

Similiter ex $\sqrt{\frac{cb}{a^2b}}$ facta divisione, oritur $\sqrt{\frac{c}{a^2}}$, & extracta ex denominatore radice, habetur $\frac{\sqrt{c}}{a}$.

P R O P O S I T I O VI.

Radicales compositas dividere.

I. **D**ividenda sit radicalis composita $\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}$ per $\sqrt{3}$. Dividantur singula trinonii membra per $\sqrt{3}$, ut radicales simplices per *Prop. præc.* erit quotus $\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$. Eadem ratione dividendo per $\sqrt{5}$ radicalem $\sqrt{20} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$, erit quotiens $2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Rursus dividendum sit trinomium $10\sqrt{2} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{35}$ per 4, erit quotus $\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{3}{4}\sqrt{35}$.

II. Quod si dividere oporteat binomium *A* ex rationali quantitate & radicali compositum per aliud binomium simile *B*, divisa quantitate rationali 8 per rationalem 2, habetur quotus *C*, per quem multiplicando totum divisorem *B*, productum $8 + 4\sqrt{1}$ subducitur (mutatis signis) ex dividendo *A*, & nihil remanet. Idem fit in secundo exemplo. In tertio autem, per eundem divisorem *N* dividitur fractionis *M* tam numerator, quam denominator, ut habetur fractio in minimis terminis, ut in *Q*, quo exemplo infra utemur.

	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
EXEMPL. I.	$2 + \sqrt{1}$	$8 + 4\sqrt{1}$	$(+ 4 -$
		$8 + 4\sqrt{1}$	
		0 0	

EXEMPL. II.	$-1 + \sqrt{-\frac{3}{4}}$	$2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}}$	$(-2 -$
		$2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}}$	
		0 0	

EXEM-

E X E M P L U M III.

M

$$Naa + cc) \frac{a^3 \sqrt{aa + cc} + acc \sqrt{aa + cc}}{2aa + 2cc} \quad \left| \quad \frac{a \sqrt{aa + cc}}{2} \right.$$

seu $\frac{1}{2} a \sqrt{aa + cc}$

III. At si divisor sit binomium radicale ex. gr. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, per quod dividenda sit quantitas $\sqrt{18}$; tunc binomium illud reducatur ad monomium rationale per Cor.1. Prop.4. hujus, multiplicando illud per sui contrarium $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, habebitur novus divisor $5 - 2 = 3$. Deinde per idem contrarium $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ multiplicetur quoque quantitas dividenda, nempe $\sqrt{18}$, ut inter ipsam & divisorem maneat idem valor, qui antea, per Axiom.2. Cap.2. Exemplo res fit manifesta.

Divisor $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ $5 - \sqrt{10}$ $+ \sqrt{10} - 2$ $5 - 2 = 3$	Dividen. $+ \sqrt{18}$ $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ 3) $\sqrt{90} + 6$ Quotus $\frac{1}{3} \sqrt{90} + 2$

Ratio clara est, si ex divisore & dividendo fiat fractio, & tam numerator, quam denominator multiplicentur per eandem quantitatem. Sit enim dividenda radicalis quantitas A per trinomium radicale B ; fiat fractio, nempe

$$\frac{A \sqrt{5}}{B \sqrt{3} + \sqrt{1} + \sqrt{2}}$$

L 2

Mul-

Multiplicato utroque fractionis termino per denominatorem B (uno tantum signo mutato), oritur nova fractio æqualis priori per *Axiom. 2. Cap. 2.* hoc est

$$\frac{C \quad \sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}{D \quad 2 + \sqrt{12}}$$

Multiplicetur pariter uterque terminus hujus novæ fractionis per denominatorem D (mutato signo), oritur nova fractio priori æqualis per *Axiom. cit.*, in qua divisor est quantitas rationalis, scilicet

$$\frac{2\sqrt{15} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{180} - \sqrt{60} + \sqrt{120}}{-8}$$

Factaque actu divisione, erit quotus

$$-\frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{10} + \frac{1}{8}\sqrt{180} + \frac{1}{8}\sqrt{60} - \frac{1}{8}\sqrt{120}.$$

Item, ut dividatur $a - b$ per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, fit fractio

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}; \text{cujus termini per } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ multiplicati dant}$$

$$\frac{a - b \times \sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}; \text{ fiat divisio, erit quotus } \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

COROLL. I. Si divisor sit binomium, aut trinomium constans radicalibus cubicis, aut altiorum potestatum, hæc regula non sufficit. Tunc invenienda est aliqua quantitas, quæ divisor contrarius dicitur, per quam si tale binomium, aut trinomium multiplicetur, fiat rationale. En methodus generalis inveniendi ejusmodi divisores contrarios. Quantitates sub signo radicali existentes, mutato aliquo signo, eleventur ad potestatem, cujus exponens sit unitate minor

exponente radicali, neglectisque coefficientibus, habetur quantitas quaesita. Sit binomium $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, elevetur $a - b$ (mutato scilicet signo) ad potestatem secundam, quæ neglectis coefficientibus, erit $a^2 - ab + b^2$, eaque posita sub signis radicalibus dati binomii, habetur divisor contrarius $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Similiter sit datum binomium $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$, elevetur $a - b$ ad tertiam potestatem, & abjiciantur coefficientes, oritur quantitas $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, qua sub signis radicalibus binomii posita, habetur divisor contrarius $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}$; & sic de aliis.

SCHOL. II. Ceterum hujusmodi divisiones radicalium compositarum, ut monet Cl. Wolfius (a), aut vix, aut per raro occurrunt. Sed quia ejus methodus, quam Nicolao Tartaleæ (b) debemus, est non inelegans, haud erat omnino negligenda.

PROPOSITIO VII.

Radicales ad datam potestatem elevari.

I. **R**egula est: quantitates sub signis existentes ad datam potestatem attolluntur per Prop. 2., vel 3.

Cap. 3. radicali signo minime variato. Sic radicalis $\sqrt[3]{a}$, ele-
vata

(a) Elemen. Analy. edit. 2. Probl. 13. schol. 1.

(b) De Num. & mensuris par. 2. l. 5. Cap. 4.

vata ad quadratum erit $\sqrt[3]{a^2}$. Radicalis $\sqrt[2]{b}$ elevata ad cubum erit $\sqrt[2]{b^3}$. Item $\sqrt[2]{3}$ elevata ad quartam potestatem fit $\sqrt[2]{81}$.

Ratio est, quia ex communi lege multiplicationis radicalium, $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$. Similiter $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{b^3}$ per Prop.4. *bujus*.

II. Si adsit quantitas extra signum, illa quoque ad datam potestatem elevatur per Prop.2., vel 3. Cap.3. Sic radicalis $a\sqrt[3]{c}$ ad quadratum elevata, erit $a^2\sqrt[3]{c^2}$. Nam $a\sqrt[3]{c} \times a\sqrt[3]{c} = a^2\sqrt[3]{c^2}$. Eadem ratione $2\sqrt[2]{a}$ ad cubum evecta erit $8\sqrt[2]{a^3}$. Nam $2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} = 8\sqrt[2]{a^3}$ per Prop.4. *bujus*.

III. Si radicales ad datam potestatem elevandæ sint complexæ, elevantur ad illam eadem omnino ratione, qua elevantur quantitates rationales; hoc est, si elevandæ sint ad quadratum, sumi debent quadrata partium, & duplum ejus, quod oritur ex mutua earundem partium multiplicatione per Cor. Prop.8. Cap.3. Si ad cubum, sumi debent cubi partium, triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum primæ per secundam, & triplum ejus, quod oritur multiplicando vicissim quadratum secundæ per primam per Cor. Prop.9. Cap.3. Atque ita deinceps. Sic radicalis $\sqrt[3]{a+b\sqrt[3]{c}}$, ut ad secundam potestatem eleveetur, fiant per primam par-

partem *Prop. hujus* quadrata partium, nempe $\sqrt[3]{a^2}$ & $\sqrt[3]{c^2}$ earumque factum duplum $2\sqrt[3]{ac}$, proinde erit $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}$. Similiter $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ ad secundam potestatem

evecta erit $a + b - 2\sqrt[3]{ab}$. Si vero $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ elevanda sit ad cubum, fiant primo per primam partem *Prop. hujus* cubi ex $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[3]{b}$, nempe $\sqrt[3]{a^3}$ & $\sqrt[3]{b^3}$; sumatur triplum ex multiplicatione quadrati primæ radicalis, nempe a , in secundam, hoc est $3a\sqrt[3]{b}$, & vicissim triplum quadrati secundæ, nempe b , ducti in primam, hoc est $3b\sqrt[3]{a}$, iisque additis, erit $\sqrt[3]{a^3} + 3a\sqrt[3]{b} + 3b\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^3}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ ad cubum evecta, erit $\sqrt[3]{27} - 9\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{8}$.

SCHOL. I. Cum *radicales simplices considerari possint ut potentie imperfectæ* per Defin. 5. Cap. 3. *elevari possunt ad quancumque datam potestatem, sumendo duplum, triplum, quadruplum &c. earum exponentium, si ad secundam, ad tertiam, vel quartam potestatem elevandæ sint.*

Nam sit $\sqrt[3]{a}$ ad tertiam potestatem elevanda, per Def. cit.

est $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, & sumendo triplum hujus exponentis erit $a^1 = \sqrt[3]{a^3}$. Hoc autem sequitur ex Propos. 1. Cap. 3. Nam

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^1.$$

SCHOL. II. Si *radicalis elevanda sit ad potestatem, cujus exponens idem sit cum exponente ejusdem radicalis, oritur quantitas rationalis. Proinde satis est delere signum radicalis.*

radicale. Nam $\sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{9} = 3$. Sic etiam $\sqrt[3]{2}$ ad cubum eveſta erit 2. Nam $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$. Quod etiam ex Schol. 1. inferitur. Nam $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, proinde $a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = a^{\frac{2}{2}} = a$. Pariter $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$, quæ ad tertiam poteſtatem eveſta fit $c^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = c^{\frac{3}{3}} = c$.

PROPOSITIO VIII.

Ex ſimplici radicali radicem extrahere.

I. **E**Xtrahenda ſit radix quadrata ex $\sqrt[2]{a}$, quia per Defin. 5. Cap. 3. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, dividatur per exponentem radicis quæſitæ exponens ipſius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix quadrata quæſita $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Similiter extrahenda ſit radix quadrata ex $\sqrt[3]{a}$, quia per Defin. cit. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, dividendo per exponentem radicis quæſitæ exponentem ejusdem $a^{\frac{1}{3}}$, erit radix quæſita $a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

II. Demum quæritur radix cubica quantitatis $\sqrt[2]{a}$, quia $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ſi dividatur per exponentem radicis quæſitæ 3 exponens ipſius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix cubica $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

COROLL. Hinc patet, ad extrahendas ejusmodi radices satis esse multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem radicis quæsitæ. Sic radix quinta quantitatis $\sqrt[2]{2}$ erit $\sqrt[10]{2}$. Vel etiam exprimi potest sic $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}$, $\sqrt[15]{2}$ &c.

PROPOSITIO IX.

Ex binomio radicem quadratam extrahere.

I. **E**Xtrahenda sit radix quadrata ex binomio dato $7 + \sqrt{48}$. Primo auferatur quadratum minoris termini ex quadrato majoris, hoc est 48 ex 49 quadrato, quod fit ex termino rationali 7. Secundo extrahatur ex differentia horum quadratorum (quæ hic est 1) radix quadrata, nempe 1, quam adde termino rationali, habebis 8, & ab eodem subtrahe, habebis 6. Summæ hujus & differentię semisses, hoc est 4 & 3 dant radicem quadratam dati binomii, nempe $\sqrt{4 + 3}$, seu $2 + \sqrt{3}$.

Similiter quæritur radix quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$. Differentia quadratorum est 4, ejus radix quadrata 2. Hanc adde termino rationali, habebis 10: subtrahe ab eodem, habebis 6. Semisses ipsorum 10 & 6 dant radicem quæsitam $\sqrt{5 - 3}$.

II. Sit pariter extrahenda radix quadrata ex binomio $a + b - 2\sqrt{ab}$: ex quadrato $a^2 + 2ab + b^2$ primi termini aufer $4ab$ quadratum secundi termini $- 2\sqrt{ab}$, erit

M
dif-

differentia $a^2 - 2ab + b^2$, cujus radix quadrata est $a - b$. Hanc adde termino rationali $a + b$, summa erit $2a$: subtrahe ex eodem termino, differentia erit $2b$. Horum semisses a & b dant radicem quæsitam $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Ex hoc tertio exemplo facile eruitur demonstratio. Nam si binomium $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ elevetur ad secundam potestatem habetur $a + b - 2\sqrt{ab}$; ubi apparent duo termini, alter rationalis, continens summam radicem $a + b$, alter irrationalis continens duplum facti earundem radicum. Ex quadrato autem $a^2 + 2ab + b^2$, quod fit ex termino rationali, si auferatur quadratum secundi termini, nempe $4ab$, residuum $a^2 - 2ab + b^2$ est pariter quadratum, cujus radix quadrata $a - b$ est differentia quadratorum a & b . Hæc igitur differentia $a - b$ addita ad eorum summam $a + b$ dat $2a$, duplum scilicet quadrati ex $\sqrt{a}$; eademque differentia $a - b$ subducta ex eorum summa $a + b$ relinquit $2b$, duplum quadrati alterius membri $\sqrt{b}$; proinde horum semisses a & b dant terminos radicis quæsitæ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

COROLL. Hinc infertur tria requiri, ut radix quadrata extrahi possit ex binomio radicali quadratico. Primo binomium constare non potest solis radicalibus, sed uno membro rationali & altero radicali. Nam siue fiat quadratum ex duobus terminis radicalibus, ut $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, siue ex rationali & radicali, ut $3 + \sqrt{5}$; semper oritur binomium continens terminum rationalem & alterum radicalem. Secundo terminus rationalis, seu quadratum illius semper debet esse majus termino radicali, qui ab eo debet subtrahi. Tertio differentia quadratorum, quæ fiunt
ex

ex termino rationali & radicali, debet esse quadratum. Hæc omnia ex allatis exemplis satis patent.

SCHOL. De radice cubica, aliisque altioris gradus ex dato binomio, aut polynomio extrahendis, commodiori loco agemus. Ceterum si radix quadrata defectu earum conditionum extrahi nequeat ex dato binomio, tunc ejus binomii radix exprimitur signo radicali, quod utrumque binomii terminum comprehendit. Sic radix quadrata binomii

$1 + \sqrt{3}$ erit $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Idem dicendum de cubica, aliisque altioribus radicibus, si extrahi nequeant. Tunc enim

radix cubica binomii $2 - \sqrt{7}$ erit $\sqrt[3]{2 - \sqrt{7}}$ &c. quæ quidem radices ita connexæ, dicuntur radices universales, de quibus inferius.

PROPOSITIO X.

Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.

I. **D**Esignet A majorem dati binomii partem, B vero partem minorem; erit ex Newtono in *Arith-*

metica Universalis $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2}$ quadratum majoris par-

tis quæsitæ radice, & $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ quadratum partis

minoris, quæ cum majori annectenda est cum signo ipsius B .

M 2

Extra-

Extrahenda fit radix ex binomio $5 + \sqrt{24}$; ponatur

$A = 5$, & $B = \sqrt{24}$, erit $\sqrt{AA - BB} = 1$, proinde

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{5 + 1}{2} \text{ hoc est } 3, \text{ quadratum majoris}$$

$$\text{partis radicis; \& } \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2, \text{ qua-}$$

dratum partis minoris. Horum radices dant radicem quæsitam $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

II. Rursus extrahenda fit radix ex binomio $rr + 2x$

$\sqrt{rr - xx}$. Ponatur $A = rr$, & $B = 2x\sqrt{rr - xx}$, erit $AA - BB = r^2 - 4rrxx + 4x^2$, cujus radix $rr - 2xx =$

$$\sqrt{AA - BB}; \text{ proinde } \frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{2rr - 2xx}{2} =$$

$$rr - xx. \text{ Similiter } \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = xx. \text{ Ex horum}$$

radicibus habetur dati binomii radix $x + \sqrt{rr - xx}$.

III. Sit polynomium $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$, seu in terminis simplicioribus $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$ per *Prop. 2. hujus*. Intelligatur divisum in duo binomia; & ponatur $10 + 2\sqrt{6} = A$, & $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = B$, erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ per *Prop. cit.* Nam si quadratum secundi termini $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$, quod in terminis simplicioribus est $100 + 40\sqrt{6}$, auferatur ex quadrato primi termini $10 + 2\sqrt{6}$, quod pariter in terminis simplicioribus est $124 + 40\sqrt{6}$, residuum erit 24 , hoc est $2\sqrt{6}$ per *Prop. cit.* Addatur ergo hoc residuum $2\sqrt{6}$ ad

ad primum terminum $10 + 2\sqrt{6}$, erit $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2}$

$$= \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}. \text{ Ex hoc autem binomio si}$$

ex prima parte *hujus Propos.* eruatur radix, habebitur $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Auferatur jam residuum ipsum $2\sqrt{6}$ ex primo

termino $10 + 2\sqrt{6}$, erit $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10}{2} - 5,$

cujus radix quadrata, hoc est $\sqrt{5}$, si priori jam inventæ addatur, erit polynomii propositi radix quæsitæ $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Demonstratio hujus methodi eadem est, ac superioris, ut consideranti patet.

PROPOSITIO XI.

Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciores expressionem reducere.

I. **R** Educentur ad idem nomen radicales universales eodem modo, quo aliæ radicales, ut *Prop. I. hujus*. Sed claritatis gratia reducendæ sint ad eandem de-

nominationem $\sqrt[2]{b} + \sqrt[2]{cd}$ & $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{bc}$. Fractiones radicalium exponentiales $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, ut fit in communi Arithmetica, erunt novi exponentes $\frac{2}{6}$ & $\frac{4}{6}$, qui docent signum radicale commune esse

$\sqrt[6]{}$, & quantitatem $b + \sqrt[2]{cd}$ elevandam esse ad tertiam potestatem; quantitatem vero $a - \sqrt[3]{bc}$ ad secundam. Fa-

cta

Et itaque operatione, habentur aliæ duæ radicales universales æquales prioribus & ejusdem nominis, nempe

$$\sqrt[6]{b^3 + 3bcd + 3b^2 + cd} \times \sqrt[6]{cd} \& \sqrt[6]{a^3 - 2a\sqrt{bc} + \sqrt[3]{b^3 c^2}}.$$

Radicales autem illæ, quæ sub signo universalis $\sqrt[6]{}$ comprehenduntur, hoc est $\sqrt[3]{cd}$, $\sqrt[3]{bc}$, & $\sqrt[3]{b^3 c^2}$, reduci facile possunt ad idem signum $\sqrt[6]{}$ per Schol. Prop. I. hujus: erunt $\sqrt[3]{cd} = \sqrt[6]{c^3 d^3}$, $\sqrt[3]{bc} = \sqrt[6]{b^2 c^2}$, & $\sqrt[3]{b^3 c^2} = \sqrt[6]{b^4 c^4}$.

II. Reducenda fit ad simpliciores expressionem radicalis universalis ex.gr. $\sqrt[6]{a^2 b + a^2 c \sqrt{d}}$. Dividatur $a^2 b + a^2 c \sqrt{d}$ per a^2 ; & relicto quoto sub signo universalis, ponatur a extra signum, fiet $a \sqrt[6]{b + c \sqrt{d}}$ ad terminos simpliciores redacta.

Similiter fit radicalis universalis $\sqrt[6]{b^3 c + \sqrt[3]{b^4 c^2 d}}$ reducenda ad simpliciores. Reducantur primo $\sqrt[3]{b^4 c^2 d}$, dividendo illam per $b^2 c$, fiet $b^2 c \sqrt[3]{d}$, quæ si reponatur sub signo universalis, erit $\sqrt[6]{b^3 c + b^2 c \sqrt[3]{d}}$: hac demum ad simpliciores redacta, eam scilicet dividendo per b^2 , habebitur $b \sqrt[6]{c + c \sqrt[3]{d}}$, id quod quærebatur. Si fuerit $\sqrt[6]{8 + 4\sqrt{3}}$, erit eadem ratione $2\sqrt[6]{2 + \sqrt{3}}$. Similiter $\sqrt[6]{9\sqrt{12}}$, fiet $3\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$.

COROLE. I. Si habeatur radicalis universalis $a\sqrt{b+c\sqrt{d}}$ & ponenda sit sub signo universalis quantitas a , multiplicari debet per secundam potestatem ipsius a , nempe per a^2 , tota quantitas $b+c$; unde oritur $\sqrt{a^2b+a^2c\sqrt{d}}$. Quod si iterum quantitas a^2c ponenda esset sub secundo signo, elevanda hæc esset pariter ad secundam potestatem, & tunc haberetur $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4c^2d}}$. Hinc luculenter apparet ratio explicatæ reductionis.

COROLL. II. Hoc totum convenit tam radicalibus universalibus, quæ habent idem signum radicale $\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{b}}$, quam iis, quarum exponens est diversus, ut $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$, habita tamen ratione eorum, quæ dicta sunt in Prop. 2. hujus de reductionibus.

PROPOSITIO XII.

Radicalium universalium calculus.

I. **U**T addantur, & subtrahantur, reduci semper debent ad idem nomen & ad simpliciorum expressionem, si fieri possit, per Prop. antec. Deinde per signa $+$ & $-$ habetur additio, vel subtractio, ut in ceteris radicalibus. Sint addenda $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ & $2\sqrt{bc}+\sqrt{d}$, summa erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}+2\sqrt{bc}+\sqrt{d}$; residuum erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}-2\sqrt{bc}+\sqrt{d}$.

II. Quod

II. Quod si radicales habeant sub signis quantitates easdem, adduntur, vel subtrahuntur earum coefficientes,

Sic $\sqrt{8} + \sqrt{6}$ & $\sqrt{18} + \sqrt{6}$ (quæ sunt $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ & $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ per *Propos. antec.*) summa erit $5\sqrt{2} + \sqrt{6}$; residuum vero (subtrahendo primam ex secunda) erit $1\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

III. Sit multiplicanda $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ per $\sqrt{2} + \sqrt{2}$, de-
leto signo universalis, multiplicantur mutuo quantitates,
& facto præfigitur signum radicale universale.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} 3 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{2} \\ \hline 6 + 2\sqrt{5} \\ + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} \\ \hline \sqrt{6} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \hline \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} \\ + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 \\ \hline \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 + q\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \end{array}$$

IV. Si vero radix universalis per se ipsam multiplicanda sit, & signum universale sit potentiae secundae hoc est $\sqrt{\quad}$,
tunc

tunc habetur productum, deleto signo ipso universalis, quod præcedit, reliquis radicalibus, cujuscunque gradus sint, minime immutatis. Sic $\sqrt[4]{\frac{5}{4}} + \sqrt[4]{101} \times \sqrt[4]{\frac{5}{4}} + \sqrt[4]{101}$, deleto signo universalis, dat productum $\frac{5}{4} + \sqrt[4]{101}$. Similiter $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5}$ dat productum $7 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5}$. Ratio est, quia summa illa terminorum $7 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5}$ ex hypotesi erat quadratum. Deleto itaque signo radicali quadratico, habetur quadratum, hoc est quantitas illa in se ducta.

V. Dividenda fit radicalis universalis $\sqrt{15} + \sqrt{7}$ per $\sqrt{3}$; divis 15 per 3, & 7 per 3, habentur quoti 5 & $\frac{7}{3}$: quibus si præponantur signa radicalia, erit quotus quæsitus $\sqrt{5} + \sqrt{\frac{7}{3}}$.

VI. Quod si divisor fit binomium, aut polynomium, ut si dividenda fit $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ per $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, deleto signo universalis, multiplicatur per quantitatem contrariam tam divisor, quam dividendus, ut docuimus *Prop. 6. hujus*. Fiet novus divisor = 1, & dividendus $\sqrt{6} + \sqrt{20} - \sqrt{27} - \sqrt{15}$. Ecce exemplum

Divisor $\begin{array}{r} 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \\ \hline 4 + 2\sqrt{3} \\ - 2\sqrt{3} - 3 \\ \hline 4 - 3 = 1 \end{array}$ Quantitas dividen. $\begin{array}{r} 3 + \sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{3} \\ \hline 6 + 2\sqrt{5} \\ - 3\sqrt{3} - \sqrt{15} \\ \hline \sqrt{6} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - \sqrt{15} = \\ \sqrt{6} + \sqrt{20} - \sqrt{27} - \sqrt{15}. \end{array}$	N

SCHOL.

SCHOL. Ceterum hujusmodi calculus raro occurrit. In-
terea tamen tyrones in eodem exerceri non erit inutile.

PROPOSITIO XIII.

*Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum
expedire.*

I. **R** Adices imaginariæ ad idem signum radicale & ad
simpliciolem expressionem, si fieri id possit, re-
ducuntur; tum etiam adduntur, & invicem subtrahun-
tur iisdem omnino regulis, quas pro ceteris radicalibus
tradidimus, ideoque iis non immoramur.

II. Si vero multiplicandæ sint, & ambæ habeant sub
signo eandem quantitatem, observetur, an signa radicalia
præferant idem signum +, aut —; an vero diversum.
Nam in primo casu productum erit reale negativum, in
secundo reale positivum. Ecce exempla.

$$\begin{aligned} +i\sqrt{-a}x + i\sqrt{-a} &= +ix - a = -a \\ -i\sqrt{-a}x - i\sqrt{-a} &= +ix - a = -a \\ +i\sqrt{-a}x - i\sqrt{-a} &= -ix - a = +a \end{aligned}$$

Idem omnino fit, etiamsi desit unitas, quæ semper intel-
ligitur adesse tanquam radicalium coefficientis, si nullum
aliud adsit coefficientis, scilicet

$$\begin{aligned} +\sqrt{-a}x + \sqrt{-a} &= +x - a = -a \\ -\sqrt{-a}x - \sqrt{-a} &= +x - a = -a \\ +\sqrt{-a}x - \sqrt{-a} &= -x - a = +a \end{aligned}$$

Ratio horum est, quia quod oritur ex $\sqrt{-a}x\sqrt{-a}$, sem-
per

per est $-a$, utpote quadratum negativum. Sed hoc ipsum productum negativum duci debet ulterius in signum illud $+$, aut $-$, quo signa radicalia afficiuntur, proinde ex communi lege multiplicationis ducendo $-a$ in $+$, habetur $-a$, ut in primo & secundo exemplo, & in utroque casu restituitur quantitas realis negativa $-a$. At vero ducendo $-a$ in $-$ oritur quantitas positiva $+a$, ut in tertio exemplo.

III. Si vero quantitas sub signo non est eadem, aut si multiplicanda sit radix imaginaria per realem; ut tollatur omne æquivocum, præstat factum exprimere per signum multiplicationis $\times$. Multiplicanda sit $a\sqrt{-a}$ per $-\sqrt{-b}$, productum erit $-a\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, non autem $-a\sqrt{+ab}$. Per multiplicationem enim radicalium imaginariarum non oritur quantitas realis negativa, nisi cum ipsa radix imaginaria elevatur ad potestatem, cujus exponentis sit idem cum exponente signi radicalis. Sic $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ producit quantitatem realem negativam $-a$, ut supra explicavimus. In aliis vero casibus habetur quantitas imaginaria; ut si multiplicetur $\sqrt[3]{-b}$ per $\sqrt[3]{b}$, productum, quod oritur $\sqrt[3]{-b^2}$, continet radicem imaginariam, ita ut si ponere velis b extra signum, necessario exprimi debeat $b\sqrt{-1}$; ut nimirum servetur ratio radices imaginariæ, nec ipsa quantitas imaginaria b confundatur cum quantitatibus realibus. Proinde ad evitandam confusionem, quæ dari facile posset, præstat multiplicationem peragere signo $\times$. Ecce exempla

$$+a\sqrt{a}\times-\sqrt{-b}=-a\sqrt{a}\times\sqrt{-b}$$

$$+2\sqrt{3}\times-1\sqrt{-5}=-2\sqrt{3}\times\sqrt{-5}$$

$$+3\sqrt{-c}\times-2=-6\sqrt{-c}$$

IV. Simili ratione expedit divisionem per modum fra-

N 2

ctionis

tionis exprimere ad confusionem evitandam. Dividendo $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, quotus erit $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. Item dividendo $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-5}$, erit quotus $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$. Sic $\frac{c}{\sqrt{-a}}$ & $\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{m}}$ significant quantitatem realem divisam per imaginariam, & imaginariam per realem, ut patet.

V. Quod si eadem quantitas imaginaria tam in nume-
ratore, quam in denominatore reperitur, ex communi
lege divisionis utrinque deletur. Sic dividendo $a\sqrt{-d}$ per
 $b\sqrt{-d}$, scribatur $\frac{a\sqrt{-d}}{b\sqrt{-d}}$, quotus erit $\frac{a}{b}$. Item si divida-
tur $-b$ per $\sqrt{-b}$, prodit quotus $\sqrt{-b}$. Nam si fiat $-b$
 $= \sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$, erit $\frac{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{-b}$, quotus quæ-
situs. Dividendo autem $\sqrt{-b}$ per $-b$, erit divisio
 $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{-b}}$ quotus. Similiter quotus ex quanti-
tate $a\sqrt{-bb}$ divisa per $-bb$, erit $\frac{a\sqrt{-bb}}{\sqrt{-bb} \times \sqrt{-bb}} = \frac{a}{\sqrt{-bb}}$.
Tandem dividendo $+\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, erit quotus -1 .
Nam $\frac{+\sqrt{-3}}{-\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$.

SCHOL. Quidam non obscuri nominis Algebristæ docent
productum ex multiplicatione duarum quantitatum imagi-
nariarum, aut quotum ex divisione illarum, esse quanti-
tatem veram & realem. Sic multiplicando v.g. $\sqrt{-3}$ per
 $\sqrt{-2}$

$\sqrt{-2}$ oriri $\sqrt{6}$, non autem $\sqrt{-6}$. Similiter dividendo $\sqrt{-6}$ per $\sqrt{-2}$ oriri quorum realem $\sqrt{3}$, non autem $\sqrt{-3}$. Proinde libere asserunt hallucinatum fuisse Jac. Ozananum (a) qui contrarium docuit. At quicquid illi dicant, Ozananum sequitur Cl. Wolfius (b) Mathematicus nostri temporis celebratissimus, qui contendit in multiplicatione quantitatum imaginariarum signum negativum non esse mutandum, sed facto perinde ac factoribus præfigi debere semper signum —. Alias enim, inquit, factores imaginarii efficerent factum reale, quod est absurdum. Quamobrem vult signorum regulam observari tantum respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali existentium. Placet hic unum, vel alterum ipsius exemplum multiplicationis afferre.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{-3} + \sqrt{-2} \\
 + \sqrt{-3} \\
 \hline
 -3 + \sqrt{-6}
 \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r}
 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3} \\
 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} \\
 \hline
 -45 + 6\sqrt{-15} \\
 -6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6} \\
 \hline
 -45 + 6\sqrt{-15} - 6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6}
 \end{array}$$

COROLL. Ex allatis exemplis satis liquet, quantitates imaginarias complexas eodem modo multiplicari, ac ceteras

(a) Nouveaux Elemens liv. I. sect. 4.

(b) Elementa Anal. edit. 2. Cap. 2. pag. m. 315.

ras radicales complexas. Exercitationis tamen gratia nonnulla adducimus tam multiplicationis, quam divisionis complexæ exempla, in quibus quantitates imaginariæ realibus adhærent. *A* est quantitas multiplicanda, *B* multiplicans, *P* vero productum.

EXEMPL. I. $A \quad \sqrt{a} - 2\sqrt{-b}$
 $B \quad \sqrt{c} + 3\sqrt{-b}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{ac} - 2\sqrt{c}\sqrt{-b} \\ + 3\sqrt{a}\sqrt{-b} - 6\sqrt{-b} = +6b \end{array}$$

$P \quad \sqrt{ac} - 2\sqrt{c}\sqrt{-b} + 3\sqrt{a}\sqrt{-b} + 6b$

EXEMPL. II. $A \quad 2 + \sqrt{-5}$
 $B \quad 3 - \sqrt{-2}$

$$\begin{array}{r} 6 + 3\sqrt{-5} \\ - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-2} \times \sqrt{-5} \end{array}$$

$P \quad 6 + 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-2} \times \sqrt{-5}$

Divisionis exempla, in quibus *A* significat dividendum, *D* divisorem, *Q* quotum; zeri autem quantitates ex actuali divisione deletas.

EXEMPLUM I.

$A \quad x^2 - ax - x\sqrt{-b} + x\sqrt{-c} - a\sqrt{-c} - \sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$

$D \quad x + \sqrt{-c}$

$Q \quad x - a - \sqrt{-b}$

EXEM-

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 9\sqrt{-30} - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-18} - 4\sqrt{-6} \\
 \hline
 D \quad 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3} \\
 Q \quad 3\sqrt{-6} - 2\sqrt{-2}
 \end{array}$$

CAPUT V.

De Aequationibus simplicibus.

DEFINITIONES.

I. **A**equatio est comparatio duarum quantitatum, quæ signo æqualitatis junguntur, ut $x = a$, $xx + 2ax = ab$ &c.

II. Quantitates, quæ præcedunt, & quæ consequuntur æqualitatis signum, ut x & a in prima æquatione, item $xx + 2ax$ & ab in secunda, dicuntur *membra æquationis*.

III. Aequatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, ubi quantitas incognita est unius dimensionis, ut $x = a + b + c$: dicitur *quadratica*, seu *secundi gradus*, si ad duas dimensiones affurgit, ut $xx = ab$: *cubica*, seu *terti gradus* cum ad tres dimensiones, ut $x^3 = a^3 + b^3$, & generatim dicitur æquatio *quarti*, *quinti*, *sexti gradus* &c. si potestas incognitæ ad tales dimensiones ascendat: $x^n = a - b$ dicitur æquatio indeterminata, quæ determinabitur, si fiat $n = 2$, $= 3$, $= 4$ &c.

IV.

IV. Æquatio dicitur *affecta*, cum incognitæ potestas diversos habet dimensionis gradus, ut $x^2 + ax = ab$, $x^3 - ax^2 + bx = cd$ &c. unde dicuntur affectæ quadraticæ, affectæ cubicæ &c. Dicitur autem *pura*, cum incognitæ potestas eandem servat ubique dimensionem, ut $ax + bx = cd$, $xx - bxx = cdd$, $x^3 = abc$ &c.

V. *Radix* æquationis est valor incognitæ, quæ æquationem ingreditur; ut in æquatione $x = a + b$, *radix* est $a + b$: nam x tanti valet, quanti aggregatum $a + b$. Similiter in æquatione $x^2 = a - c$, extracta utrinque radice quadrata, *radix* æquationis, seu valor incognitæ x , est $\sqrt{a - c}$.

VI. Si valor incognitæ fuerit positivus, ut $x = 3$, *radix* dicitur *vera*. Si negativus, ut $x = -50$, *radix* dicitur *negativa*; seu, ut Cartesius vocat, *falsa*. Utraque tamen realis est. Nam si alteri debeam aureos 50, & non habeam, revera asseritur, me habere -50 . Quod si incognitæ valor exprimitur per radicem quadratam negativam, ut $x = \sqrt{-a^2}$, *radix* dicitur *imaginaria*, & impossibilis, per *Schol. 1. Prop. 8. Cap. 3.*

A X I O M A T A.

1. **N**on tollitur æqualitas, si unus, aut quot placuerit, termini de uno æquationis membro ad alterum, mutatis signis, transferantur. Ut si $x + 2 = 5$, non tollitur æqualitas, si fiat $x = 5 - 2$.

2. Non tollitur æqualitas, si utrique æquationis membro addatur, aut subtrahatur quantitas æqualis. Vel si per eandem, aut æqualem quantitatem multiplicentur, aut dividan-

vidantur ambo æquationis membra. Nam sit $x=3$, multiplicando per 3, erit $3x=9$; aut dividendo per 3, erit $\frac{x}{3}=1$.

3. Non tollitur æqualitas, si utrumque membrum elevetur ad eandem potestatem; vel utrinque eadem radix extrahatur. Sit enim $y=ab$, erit $y^{\overline{n}}=\overline{ab}^{\overline{n}}$. Contra vero

si $y^2=a-b$, extracta radice utrinque, erit $y=\sqrt{a-b}$.

4. Non tollitur æqualitas, si in alterutro æquationis membro, loco unius quantitatis, siue complexæ, siue incomplexæ, ponatur alia quantitas æqualis. Ut si $x^2=ay+by$, & ponatur $d=a+b$, erit $x^2=dy$. Hoc dicitur *substituere*, quod in Analyfi magnum & perpetuum usum habet, ut deinceps videbitur.

PROPOSITIO I.

Explicantur regulæ reductionis Æquationum.

OMnis æquatio continere solet quantitates notas cum incognitis permixtas secundum propositi problematis conditiones. Debent itaque quantitates illæ tandiu versari & immutari, donec æquatio illa simplicissimam formam obtineat, quæ sit velut ultima conclusio, ad quam tota problematis difficultas reducatur, eaque dicitur *æquatio finalis*. Hoc autem præstant sequentes regulæ.

Reg.^a 1.^a Æquatio reducitur ad parciore terminos transferendo terminos illius ex una parte in aliam sub signo contrario, nam *per Ax.1.* remanet æqualitas. Sit $x-3=12$, erit per transpositionem $x=12+3$, hoc est $x=15$.

$\equiv 15$. Similiter si $x - b = a$, erit $x = a + b$. Patet ratio ex 2. *Axi.*, nam additur utrinque $+3$, & in secundo exemplo additur $+b$.

Eadem ratione si fuerit $x + 3 = 5$, erit per transpositionem $x = 5 - 3$, hoc est $x = 2$. Item $x + b = a$, erit $x = a - b$. Patet ratio ex 2. *Axiom.* Nam subtrahitur utrinque -3 , & in secundo exemplo subtrahitur $-b$. Hæc transpositio vulgo *Antithesis* dicitur.

Reg.^a 2.^a Si sint fractiones, æquatio reducitur per multiplicationem, hoc est multiplicando terminos omnes per denominatores fractionum, ducendo scilicet omnes denominatores, unum post alium, in totam æquationem; seu, quod idem est, ducendo semel productum omnium denominatorum in æquationem, & deinde fractiones ad simplices terminos reducendo. Sit æquatio $\frac{abd}{c} + dx = \frac{bcd}{a}$, multiplicetur primo tota æquatio per c , deinde per a , vel semel per ac , & habetur $\frac{aabcd}{c} + acdx = \frac{abccd}{a}$, quæ, reductis terminis per *Prop. 2. Cap. 2.*, erit $aabd + acdx = bccd$.

Similiter sit æquatio cum fractionibus, ut inferius *Probl. 4.*

$$a + \frac{x-a}{n} = 2a + x - 3a - \frac{x+a}{n}$$

$$n$$

Multiplicetur primo per n , fit per *Axiom. 4. Cap. 2.*

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x+a}{n}$$

Rur.

Rursus multiplicetur per n , erit

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - 3an - x + a$$

Ac deletis ex utraque parte terminis æqualibus, & ordinata æquatione, ut in *Coroll.* 1. & 3., quæ habentur in fine hujus, explicatur, fiet æquatio $x = an^2 - 2an + a$.

Regula hæc patet ex 2. *Axiom.* Multiplicatur enim tota æquatio per æqualia. Nam sublato denominatore, fractio multiplicata intelligitur per *Axiom.* 4. *Cap.* 2.

Reg. 3.^a Reductio fit dividendo utrumque membrum per eandem quantitatem, ut si fuerit $3x = 12$, dividendo per 3, erit $x = 4$ æquatio priori æqualis per *Axiom.* 2. Similiter fit $ax + bx = ac$, dividendo per $a + b$, erit x

$$= \frac{ac}{a+b}. \text{ Demum } axx + fxx = gb, \text{ erit } xx = \frac{gb}{a+f}.$$

Reg. 4.^a Reducitur æquatio per elevationem terminorum ad aliquam potestatem, cum quantitas incognita signo

radicali implicatur. Ut si fuerit $\sqrt{xx - aa} + b = c$, relinquatur ex una parte æquationis quantitas signo radicali

affecta, ita ut sit $\sqrt{xx - aa} = c - b$: tum utraque pars æquationis elevetur ad quadratum, erit $xx - aa = c^2 -$

$2cb + b^2$. Similiter si fuerit æquatio $m - \sqrt{4dx + 4d^2}$

$= \sqrt{2dx + d^2}$, elevato utroque membro ad quadratum, habetur

$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$; factaque reductione,

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

Ponatur seorsim in altero membro quantitas radicalis, quæ remanet, erit

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m \sqrt{4dx + 4d^2}$$

& rursus elevato utroque membro ad quadratum, evanescit quantitas radicalis, & habetur per Lem. Cap. 1.

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0.$$

Pater ex 3. Ax. Hoc vulgo dicitur, *Asymmetriam* tollere.

Reg.^a 5.^a Reducitur æquatio, cum ex utroque ejus membro extrahitur radix; ut si fuerit $xx = 16$, extracta utriusque radice, erit $x = 4$. Similiter æquatio $xx = a^2 - 2ab + b^2$, extracta radice fit $x = a - b$. Demum $x^3 = 125$, radice cubica extracta, fit $x = 5$. Sequitur ex 3. Axiom.

Reg.^a 6.^a Reducitur æquatio, seu plures æquationes ad unam, substituendo valorem unius incognitæ loco ipsius. Ut si sit æquatio $x - y = d$, sit autem $a - x$ valor incognitæ y , qui substitui debet loco ipsius y : facta substitutione, habetur æquatio $x - a + x = d$, (variatis ob $-y$ signis in $a - x$) hoc est habetur per Reg. 1. $2x = a + d$,

& per Reg. 3. $x = \frac{a+d}{2}$. Eadem ratione fit æquatio x^2

$+ y^2 = d^2$, & $a - x$ valor ipsius y , qui ut substituatur loco $+y^2$, fiat quadratum ex $a - x$, nempe $a^2 - 2ax + x^2$: quo posito loco ipsius y^2 , erit æquatio $x^2 + a^2 - 2ax +$

$x^2 = d^2$; seu $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$, & $x^2 - ax = \frac{d^2 - a^2}{2}$ per Reg. 1., & 3.

COROLL. I. Ex Reg. 1. tria sequuntur valde utilia: primo relinquendo incognitam in una æquationis parte, & transfe-

transferendo omnes alias quantitates in partem alteram, habetur valor illius incognitæ. Sic æquatio $x + y = 100$ per transpositionem fiet $x = 100 - y$, & $100 - y$ dicitur valor incognitæ x .

COROLL. II. *Insuper quantitates negativæ fieri possunt positivæ, & e contrario; transferendo scilicet illas in partem appositam sub signo contrario. Sic ut in æquatione $a - x = b + c$, incognita x fiat positiva, & haberi possit ejus valor, facta transpositione quantitatum in alteram partem sub signo contrario, erit $a - b - c = x$.*

COROLL. III. *Cum in utroque membro occurrit eadem quantitas sub eodem signo, deleri potest utrinque, & æquatio simplicior fit, ut si fuerit $xx + ab - c = d - c + ab$, æquatio reducitur ad $xx = d$.*

SCHOL. *In reducendis æquationibus, illud primo curandum, ut omnes incognitæ, cujuscunque sint gradus, in uno eodemque æquationis membro consistant, in altero quantitates cognitæ, id quod per regulas jam traditas obtinetur.*

PROPOSITIO II.

Plures simplices æquationes ad unam reducere.

I. **S**int reducendæ ad unam duæ æquationes simplices
 $x + y = a$ & $x - y = b$.

Addantur simul, summa erit $2x = a + b$. Vel subtrahatur secunda ex prima, habetur $2y = a - b$. Patet ex
 2. Axiom.

II. Sint

II. Sint tres æquationes ad unam reducendæ

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = a \\ \text{II.} & x + z = b \\ \text{III.} & y + z = c \end{array}$$

In prima æquatione fumatur valor incognitæ y per *Cor. 1. Prop. ant.* ita ut habeatur $y = a - x$, & in secunda valor incognitæ z , erit $z = b - x$. Deinde hi duo valores substituantur in tertia æquatione loco y & z per *Reg. 6.* habebitur $a - x + b - x = c$; & facta reductione, erit

$$a + b - c = 2x \text{ per Reg. 1., seu } x = \frac{a + b - c}{2} \text{ per Reg. 3.}$$

III. Sint plures æquationes ad unicam reducendæ, nempe A, B, C, D .

A	$x + y + z = a$	E	$x = a - y - z$
B	$x + y + v = b$		
C	$x + z + v = c$		
D	$y + z + v = d$		

F	$a - z + v = b$	H	$z = a + v - b$
G	$a - y + v = c$	M	$y = a + v - c$

$N \quad 2a + 3v - b - c = d$
 hoc est $v = \frac{b + c + d - 2a}{3}$

Sumatur ab æquatione A valor quantitatis x , qui per *Cor. 1. Prop. ant.* erit E : quo posito in æquationibus B & C , oriuntur duæ æquationes ejusdem valoris F & G . Sumatur deinde ex æquatione F valor incognitæ z , oritur æquatio

tio

tio *H*. Similiter ex æquatione *G* sumpto valore incognitæ *y*, habetur æquatio *M*. Hi duo valores ponantur in æquatione *D*, oritur æquatio *N*, in qua non est nisi unica incognita *v*, cujus valor $\frac{b+c+d-2a}{3}$ si substitua-

tur in æquationibus *H* & *M* loco quantitatis *v*, statim innotescunt *z* & *y*, quorum valor si tandem ponatur in æquatione *E*, nota erit quoque incognita *x*. Quod &c.

COROLL. *Ut hæc reductio fieri possit, necesse est, ut eadem incognita in pluribus æquationibus reperiatur, ut ex allatis exemplis manifestum est.*

IV. Quod si non omnes incognitæ sint unius dimensionis, ut in æquationibus *A* & *B*, quæ sequuntur,

$$A \quad xyy = bc, \quad B \quad xx + yy = by - ax$$

in quibus una tantum incognita *x* est unius dimensionis; tunc quæritur valor hujus, & in alia æquatione substituitur hac ratione:

Quia $xyy = bc$, erit $x = \frac{bc}{yy}$ per Reg. 3. & $xx = \frac{b^2 c^2}{y^2}$ per Ax. 3. Item $ax = \frac{abc}{yy}$ per Axiom. 2. His valoribus in æquatione *B* substitutis per Ax. 4. habetur

$$\frac{b^2 c^2}{y^2} + yy = by - \frac{abc}{yy}$$

Et multiplicando omnes terminos per y^2 , ut fractiones exterminentur, oritur æquatio, in qua unica tantum incognita,

$$b^2 c^2 + y^6 = by^5 - abcy^2$$

$$\text{Sch. Prop. I. } y^6 - by^5 + abcy^2 = -b^2 c^2$$

PROPOSITIO III.

Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.

Theor. 1. **I**N proportionē Arithmetica trium terminorum $a, a+1, a+2$, summa termini primi, & tertii æquatur duplo secundi, nempe $a+a+2$ (hoc est $2a+2$) $= 2a+2$. Item in numeris Arithmetice proportionalibus 7, 5, 3, erit $7+3=10$.

COROLL. I. Semissis aggregati ex primo & tertio dat terminum secundum. Sic $\frac{aa+2}{2} = a+1$. Item $\frac{7+3}{2} = 5$.

COROLL. II. Datis duobus mediis quatuor continue proportionalium Arithmetice, ut a, x , facile innotescit primus, quem voco y . Nam si retrocedendo fiat $x.a::a.y$, erit per Theor. $x+y=2a$, & $y=2a-x$. Eadem ratione innotescit etiam quartus, quem item voco y . Nam si fiat $a.x::x.y$, erit per Theor. $a+y=2x$, & $y=2x-a$. Sunt ergo $2a-x, a, x, 2x-a$ quatuor termini continue proportionales Arithmetice. Quod nota ex Newtono (a).

Theor. 2. In proportionē Arithmetica quatuor terminorum, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum mediorum; ut si fuerint $a, a+1::a+2, a+3$, erit $2a+3=2a+3$. Sic etiam in numeris Arithmetice proportionalibus 2, 5::15, 18, erit $2+18=15+5$.

Theor.

(a) Arithm. Univerf. Probl. Geom. xiv.

Theor. 3. Quantitatum duarum inæqualium major æquatur aggregato ex semisumma & semidifferentia earum; minor vero differentię inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum. Sic partium inæqualium 7 & 5, quę componunt 12, semisumma est 6, semidifferentia 1, pars major erit $6 + 1$, minor $6 - 1$.

COROL. Si ponatur $\text{summa} = 2a$ & $\text{differentia} = 2y$, erit pars major $a + y$, minor $a - y$. At si semisumma ponatur x & semidifferentia y , quantitas major erit $x + y$, minor $x - y$. Quod notetur.

Theor. 4. In proportione Geometrica quatuor terminorum, factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis; hoc est si $a, b :: c, d$, erit $ad = bc$. Est Propos. 16. l. 6. Eucl.

COROLL. I. Hinc semper quartus terminus proportionalis exprimi potest per factum secundi & tertii divisum per primum. Sit enim $a, b :: c, d$, erit ex hoc Theor. $bc = ad$

& dividendo utrumque per a , erit $\frac{bc}{a} = d$; proinde a, b

bc
 $:: c, \frac{bc}{a}$.

COROLL. II. Hinc quoque certo scire possumus, an quatuor termini sint proportionales, observando, an productum ex duobus extremis æquale sit producto ex duobus mediis. Nam termini proportionales varie disponi & permutari possunt secundum varios argumentandi modos, quos in toto fere lib. 5. Euclides docuit. Ut si supponatur $a, b :: c, d$, erit permutando $a, c :: b, d$, & invertendo $c, a :: d, b$; & componendo $c + a, a :: d + b, b$, & sic ulterius. Nihilominus in omnibus his permutationibus hoc Theorema semper verum esse debet.

Theor. 5. In proportionē Geometricā continua trium terminorum factum primi & tertii termini æquatur quadrato secundi. Nam cum ex hypothesi $a : b :: b : c$, erit per *Theor. 4.* $ac = bb$.

COROLL. I. Datis primo & tertio termino, a & c , habetur medius proportionalis $= \sqrt{ac}$. Nam in tribus continue proportionalibus a, b, c , cum sit $ac = bb$, extracta secunda radice, erit $\sqrt{ac} = b$. Et generatim factum duarum quantitatum est medium proportionale inter quadrata illarum.

COROLL. II. Datis autem primo & secundo termino trium Geometricè proportionalium, habetur tertius, si fiat ex secundo quadratum & dividatur per primum. Nam sit tertius $= f$, erunt ex hypothesi a, b, f continue proportionales, sed per hoc *Theor. 5.* $af = bb$, proinde dividendo per a , erit $f = \frac{bb}{a}$. Hac ratione inveniri possunt infiniti termini Geometricè proportionales.

COROLL. III. Denique in proportionē continua Geometrica quadratum primi termini est ad quadratum secundi, ut primus terminus est ad tertium. Quod evidens est ex proportionē continua $1, a, a^2$; tum etiam ex *Propos. 20. l. 6. Euclidis*.

Theor. 6. Si quatuor termini Geometricè proportionales sint, erunt quoque proportionales ad quancunque illi dignitatem eleventur. Sit $a, b :: c, d$, erit quoque $a^2, b^2 :: c^2, d^2$. Item $a^3, b^3 :: c^3, d^3$. Demum $a^n, b^n :: c^n, d^n$. Sequitur ex *Propos. 13. l. 8. Eucl.* vel etiam potest numeris illustrari.

Co.

COROLL. Terminorum proportionalium radices sunt pariter proportionales. Nam si $a^n . b^n :: c^n . d^n$. erit quoque

$$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}.$$

SCHOL. I. Progressio Arithmetica terminorum quorumcunque, b, d, f, g, h &c. exprimi solet per iteratam differentiae additionem. Sit inter primum & secundum terminum b & d differentia c, erit progressio b. b + c. b + 2c. b + 3c. b + 4c &c. quod si progressio sit descendens, ita ut primus terminus b secundum superet excessu c, tunc exprimitur per iteratam differentiae subtractionem, nempe b. b — c. b — 2c. b — 3c. b — 4c &c.

SCHOL. II. Axiomata, reductionis regulæ & theoremata superius allata sunt fundamenta æquationum instituentiarum; neque sine illis resolvi possunt, ut mox videbimus. Eadem minute citare non solent Analystæ, unde sæpè tyronibus obscuritas. Nos in gratiam eorum in duabus sequentibus propositionibus id faciemus, quod deinde magna ex parte omittetur; siquidem memoriæ hæreant, cum eorum usus in Analyti perpetuus sit.

PROPOSITIO X.

Quæstionem datam ad æquationem redigere.

Designentur quantitates incognitæ per ultimas Alphabeti literas x, z, y , ut distinguantur a cognitis & datis, quæ literis prioribus a, b, c, d exprimi solent, ut diximus *Defin. 3. ad Cap. I.* (quanquam & ipsæ priores literæ a, b, c &c. aliquando pro incognitis & indeterminatis

is usurpentur, ut inferius in *Probl. 6.* factum videbitur.) Expendantur deinde singulæ quæstionis conditiones & relationes, quæ dantur inter cognitæ & incognitæ, seu quæsitæ quantitates; & ex utrisque simul tot formentur æquationes, quot sunt incognitæ assumptæ. Sed hæc usu magis, quam verbis addiscuntur. Ecce tibi plura exempla.

1. Invenire duos numeros, quorum summa est 100 & differentia 30.

Numerus major quæsitus sit $= x$, minor $= y$, summa $= 100$, differentia $= 30$. Ex conditione problematis oriuntur duæ æquationes, nempe

$$x + y = 100, \text{ \& } x - y = 30.$$

Vel in terminis generalibus: numerorum quæditorum summa sit $= a$, differentia $= b$, erunt duæ æquationes

$$x + y = a, \text{ \& } x - y = b$$

2. Invenire duos numeros tales, ut triplum primi superet secundum excessu $= a$, secundus vero superet primum excessu $= b$.

Sit primus quæditorum $= x$, alter $= y$, oriuntur duæ æquationes.

$$3x = y + a, \text{ \& } y = x + b$$

3. Invenire duos numeros, qui sint in ratione 1 ad 5, sed si minori addas 2 & majori 3, sint in ratione 1 ad 2. Pone minorem $= x$, majorem $= y$, erunt duæ æquationes,

I.	$x : y :: 1 : 5$	II.	$x + 2 : y + 3 :: 1 : 2$
Theor. 4.	$y = 5x$	Theor. 4.	$2x + 4 = y + 3$
			Pona.

Ponatur in secunda loco y , ejus valor ex æquatione prima inventus, hoc est $5x$, erit

$$Ax. 4. \quad 2x + 4 = 5x + 3$$

$$Sch. Prop. 1. \quad 4 - 3 = 5x - 2x$$

$$Reg. 3. \quad 1 = 3x$$

$$\frac{1}{3} = x, \text{ \& } y (= 5x) = \frac{5}{3}$$

Adde ad $\frac{1}{3}$ numerum 2, & ad $\frac{5}{3}$ numerum 3, erit $x = \frac{7}{3}$ & $y = \frac{14}{3}$, & problema omnino resolutum.

5. Numerum invenire, a quo si auferatur f , deinde g , numeri residui sint in proportionem m ad n .

Sit numerus quæsitus $= x$, erit per conditionem problematis

$$x - f. x - g :: m. n.$$

$$Theor. 4. \quad mx - mg = nx - nf$$

$$Sch. Prop. 1. \quad mx - nx = mg - nf$$

$$Reg. 3. \quad x = \frac{mg - nf}{m - n}$$

Sit $f = 15$, $g = 20$, $m = 6$, $n = 1$, erit $x = \frac{105}{5} = 21$.

Ex quo si auferas 15 & 20, habebis 6. 1 :: 6. 1.

Vel sit $f = 3$, $g = 5$, $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{7}{1} = 7$.

ex quo si auferas 3 & 5, habebis 4. 2 :: 2. 1.

5. Invenire quadratum, cui si addatur 6, fiat sui lateris quintuplum.

Sit latus quadrati quæsitum x , erit per conditionem problematis

$$xx + 6 = 5x, \text{ \& } xx - 5x = -6 \text{ per Sch. cit.}$$

6. Invenire cubum, cui si ter addatur ejus radix & ter auferatur quadratum radice ejusdem, æqualis sit unitati.

Sit

Sit latus cubi quæsitum x , erit per conditionem problematis

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 1.$$

SCHOL. I. Quo pauciores adhibentur incognitæ, eo facilius & expeditius problema solvitur. Ut si quærantur duæ quantitates, quarum una sit tripla alterius; si una denominetur x , præstat alteram denominare $3x$, quam aliam incognitam y inducere. Similiter si invenire oporteat tres continue proportionales x, z, y . præstat duas tantum incognitas assumere, cum pro tertia sumi possit $\frac{zy}{x}$ per Coroll. 2. Theor. 5.

SCHOL. II. Ceterum curent tyrones æquationes recte instituere. Nam earum efformatione facilis, aut difficilis fieri solet quæstionum propositarum solutio: proinde nos multa exempla congesimus, plura quoque mox allaturi.

P R O B L. I.

Interrogatus Socrates, quænam esset hora, respondit: horæ e media nocte elapsæ ad horas usque ad meridiem residuas, se habent ut 2 ad 3: quæritur quænam esset hora.

Sint horæ elapsæ $= x$, erunt residuæ usque ad meridiem $= 12 - x$. Habetur ergo æquatio

$$x : 12 - x :: 2 : 3.$$

Theor. 4. $3x = 24 - 2x$

Reg. 1. $5x = 24$

Reg. 3. $x = \frac{24}{5}$

Erant

Erant ergo horæ $4\frac{4}{5}$, hoc est hora quarta matutina cum min. 48.

Vel in terminis generalibus: sint horæ elapsæ a media nocte $= x$, horæ autem a media nocte ad meridiem $= a$, erit residuum ad meridiem usque $= a - x$; proportio vero horarum præteritarum ad residuas sit ut n ad m , erit æquatio

$$x. a - x :: n. m.$$

Theor. 4.

$$mx = na - nx$$

Sch. Prop. 1.

$$mx + nx = na$$

Reg. 3.

$$x = \frac{na}{m+n}$$

Sit $n = 2$, $m = 3$ & $a = 12$, erit $x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} =$ hor. 4 min. 48.

Vel sit $n = 5$, $m = 1$, $a = 12$, erit $x = \frac{60}{6} = 10$. Fuit ergo hora decima matutina.

P R O B L. II.

Canis leporem insequitur, eorumque distantia est passuum 100; velocitas autem canis ad velocitatem leporis est ut 3 ad 2: quæritur ad quot passus canis leporem assequetur.

DUm canis percurrit spatium 100, quod voco a , lepus interea spatium aliquod transcurrit $= x$, erit ergo spatium a cane percurrendum $= a + x$, proinde habetur æquatio

$$a + x. x :: 3. 2$$

Vel

Vel in terminis generalibus.

$$a + x : x :: m : n$$

Theor. 4.

$$mx = an + nx$$

Sch. Prop. I.

$$mx - nx = an$$

Reg. 3.

$$x = \frac{an}{m - n}$$

Posito igitur $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, erit $x = 200$.
& $a + x = 300$. Assequetur ergo post passus 300.

SCHOL. Hoc idem problema proponit Fr. Lucas Pacciolus ^(a) e Burgo Sancti Sepulcri, sed confuse & per ambages, quod illi Nic. Tartalea ^(b), & Hieron. Cardanus ^(c) duriter exprobrant.

P R O B L E M A III.

Lucilius in alenda familia quotannis impendit tritici modios 60, reliquos seminat. Contigit, ut singulis tribus annis sextuplum ex messe collegerit, unde factus decuplo ditior in re frumentaria, quam antea fuerat: quæritur, quot tritici modios primo haberet.

PONE primo habuisse modios $= x$, modios autem 60 pro annuo familiæ alimento esse $= a$, messem ex semine quotannis sextuplam $= m$; erunt modii, deductis familiæ alimentis, $= x - a$, qui si multiplicentur per m , dant primi anni messem $= mx - am$.

Secun-

(a) Summa de Arithm. & Geomet. proport. an. 1523. (b) Tom. 2. lib. 1. cap. 15. quæst. 22. (c) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

Secundo anno detrahe rursus a pro alimentis familiæ, erit residuum $mx - am - a$, & multiplicando per m , habetur secundi anni messis $m^2x - am^2 - am$.

Tertio anno, detractis similiter alimentis $= a$, erit residuum $m^2x - am^2 - am - a$, & multiplicando per m , obrinetur fructus tertii anni $= m^3x - am^3 - am^2 - am$.

Hæc autem quantitas ex conditione problematis debet esse decupla modiorum, quos primo habuit, proinde erit æquatio

$$m^3x - am^3 - am^2 - am = 10x$$

Schol. Prop. 1. $m^3x - 10x = am^3 + am^2 + am$

Reg. 3.
$$x = \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$$

Substituantur jam pro literis, earumque potestatibus determinati earum valores, innotescet valor ipsius x . Nam posito $a = 60$ & $m = 6$, erit $m^3 = 216$, $m^2 = 36$, am^3

$$= 12960, am^2 = 2160, am = 360; \text{ hinc } \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$$

$$\frac{15480}{206} = 75 \frac{15}{103} = x. \text{ Habuit ergo primo modios } 75$$

$$+ \frac{15}{103} \text{ unius modii.}$$

P R O B L. IV.

Metellus duos filios testamento reliquit hæredes hac ratione , ut major natu accipiat aureos 100 & quartam partem ejus , quod restat de tota hæreditate : minor vero accipiat aureos 50 & dimidium ejus , quod remansit de hæreditate , detractis prius & portione sui fratris & aureis illis 50 . Divisione facta , apparuit , utrumque filium esse ex æquo hæredem : quæritur quanta fuerit hæreditas , & quæ filiorum portio .

Pone hæreditatem fuisse $=x$, aureos 100 $=a$; erit residuum totius hæreditatis $x-a$ & ejus quarta pars.

$$\frac{x-a}{4} . \text{ Majoris igitur portio } = a + \frac{x-a}{4} .$$

Pone secundo aureos 50 $=b$, erit filii minoris portio

$$= b + \frac{x-a-b-\frac{x+a}{4}}{2} . \text{ Sed portiones inventæ fuerunt æquales, hinc.}$$

$$a + \frac{x-a}{4} = b + \frac{x-a-b-\frac{x+a}{4}}{2}$$

Et multiplicando primo per 2, deinde per 4, erit

$$2a + \frac{2x - 2a}{4} = 2b + x - a - b - \frac{x + a}{4}$$

$$8a + 2x - 2a = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a$$

$$\text{Lem. Cap. I. } 6a + 2x = 4b + 3x - 3a$$

$$\text{Reg. I. } x = 9a - 4b$$

Cum sit $a = 100$, $b = 50$, erit hæreditas x ($= 9a - 4b$) $= 500$, & valore ($9a - 4b$) in superiori æquatione posito, innotescit utriusque filii portio $= 250$.

Idem problema proponi poterat paulo universalius, quod ad tyronum exercitationem facimus.

Metellus filios suos reliquit hæredes hac lege, ut primus omnium A accipiat aureos a , & de reliqua hæreditate partem n . Secundus filius B accipiat aureos $2a$ & partem itidem n de reliqua hæreditate. Filius C habeat aureos $3a$, & de eo, quod remanet, partem similiter n , & sic de aliis. Facta inter filios divisione, repertum est singulos esse æqualiter hæredes: quaeritur quanta fuerit hæreditas, qui filiorum numerus, eorumque portio.

Sit hæreditas $= x$, & accipiat A de illa portionem $= a$, residuum erit $x - a$, cujus pars $\frac{x - a}{n}$ ad ipsam A spectans. Erit ergo filii A portio $= a + \frac{x - a}{n}$

Filii vero. *B* portio $\equiv 2a + \frac{x-3a-\frac{x+a}{n}}{n}$, quæ portiones ex hypothesi sunt æquales, proinde

$$a + \frac{x-a}{n} \equiv 2a + \frac{x-3a-\frac{x+a}{n}}{n}$$

hoc est multiplicando per n , erit $an + x - a \equiv 2an + x - 3a - \frac{x+a}{n}$

& rursus multiplicando per n totam æquationem, & aufere-
 rendo terminos, qui superfluum, habetur, ordinata æqua-
 tione, valor ipsius $x \equiv an^2 - 2an + a$, valor scilicet to-

tius hæreditatis. Quo valore in prima æquatione $a + \frac{x-a}{n}$

substituto, invenitur portio filii $A \equiv a + \frac{n^2a - 2na}{n} \equiv$

$na - a$, per quam (cum portiones sint æquales) si divi-
 datur tota hæreditas jam inventa $n^2a - 2na + a$, quotus
 $n - 1$ dat numerum filiorum.

Sit $a \equiv 100$, & $n \equiv 6$, erit $an - a \equiv 600 - 100$
 $\equiv 500$ portio singulorum. At vero $n - 1 \equiv 6 - 1 \equiv 5$
 filiorum numerus, adeoque 5×500 dat integram hære-
 ditatem 2500.

COROLL. Pro generali problematis solutione habetur
 triplex Canon. 1.º Denominator fractionis unitate multa-
 tus ($n - 1$) dat numerum filiorum. 2.º Denominator fra-
 ctionis unitate multatus in quantitatem datam ductus $n -$

$\frac{1}{n} X a$ dat filiorum portionem. 3.^o Denominatoris unitate multati quadratum in quantitatem datam ductum $\overline{n - 1}$

$\overline{X n - 1} X a$ dat integram hereditatem.

P R O B L. V.

Tres mercatores, inita societate, lucrati sunt summam quandam aureorum. Hoc unum constat, primum cum secundo accepisse summam aureorum a , & eundem primum cum tertio aureos b , secundum vero cum tertio aureos c : queritur, quantum fuerit lucrum singulorum.

Sint tres focii x, z, y , summæ vero a, b, c ; erit per conditionem Probl.

$$\begin{array}{l|l} x + z = a & z = a - x \\ x + y = b & y = b - x \\ z + y = c & \end{array}$$

Fiat reductio, ut in *Prop. 2.* docuimus, & quantitatis x

valor $\left(\frac{a + b - c}{2} \right)$ ponatur in duabus æquationibus $z = a$

$- x$, & $y = b - x$, innotescet locum singulorum, nempe

$$x = \frac{a + b - c}{2}, z = \frac{a - b + c}{2}, y = \frac{b - a + c}{2}$$

Sit $a = 100$, $b = 120$, $c = 160$, erit $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$.

Co-

COROLL. Patet singulas alternas summas excedere debere summam quamlibet tertiam, alias valor prodiret negativus. Sic in prima æquatione $a + b > c$, in secunda $a + c > b$ &c.

Idem problema aliter. Sint tres æquationes, ut prius,

$$x + z = a, \quad x + y = b, \quad z + y = c$$

Addantur simul per Prop. 2. hujus, erit nova æquatio

$$2x + 2z + 2y = a + b + c$$

Divid. per 2. $x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Ex hac æquatione subtrahe per Prop. cit. tres æquationes priores figillatim innotescet valor x , z , y .

Subtr.

$$\begin{array}{r} x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z + y = c \\ \hline x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{array}$$

Subtr.

$$\begin{array}{r} x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ x + y = b \\ \hline z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b \end{array}$$

Subtr.

$$\begin{array}{r} x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ x + z = a \\ \hline y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a \end{array}$$

Posito, ut supra, $a = 100$, $b = 120$, $c = 160$, iterum prodit $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$.

PRO-

P R O B L. VI.

Lucius ad adificandam domum lapides, calcem & sabulum comparaverat. Mutato deinde consilio, ea omnia tribus emptoribus A, B, & C vendidit, nempe.

A emit 2. currus lapidum)
 3. currus calcis) *Juliis 34*
 7. currus sabuli)

B emit 3. currus lapidum)
 4. currus calcis) *Juliis 46*
 12. currus sabuli)

C emit 4. currus lapidum)
 1. currum calcis) *Juliis 42*
 13. currus sabuli)

Quæritur singularum ejusmodi rerum pretium.

Pone pretium lapidum pro singulis curribus $= a$, pro singulis curribus calcis $= b$, & pro curribus sabuli $= c$; erunt ergo 2 currus lapidum $= 2a$: currus 3 calcis $= 3b$ & 7 currus sabuli $= 7c$, (quantitates a , b , c hic sumuntur pro incognitis & indeterminatis, ut monuimus in *Propos. 4. hujus*) habentur ergo æquationes

$$A \quad 2a + 3b + 7c = 34$$

$$B \quad 3a + 4b + 12c = 46$$

$$C \quad 4a + 1b + 13c = 42$$

Ex

Ex prima æquatione A habetur per *Schol. Prop. 1.*

$$2a = -3b - 7c + 34$$

Reg. 3. $a = -\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$

Hoc valore in secunda æquatione B posito per *Ax. 4. hujus* erit

$$-\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 51 + 4b + 12c = 46$$

Lem. Cap. 1. $-\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c + 51 = 46$

Subtr. $\begin{array}{r} 51 \\ 51 \end{array}$

$$-\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c = -5$$

Reg. 1. $-\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2}c - 5$

Reg. 2. $-b = -3c - 10$

Reg. 1. $b = 3c + 10$

Adde $+\frac{1}{2}b = \frac{3}{2}c + 5$

$$\frac{3}{2}b = \frac{9}{2}c + 15$$

Sed inventa fuit $a = -\frac{1}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$, proinde si in hac æquatione pro $-\frac{1}{2}b$ ponatur ejus valor ($\frac{9}{2}c + 15$), erit per *4. Ax. hujus.*

$$a = -\frac{9}{2}c - 15 - \frac{7}{2}c + 17$$

Lem. cir. $a = -8c + 2$

Substituantur jam in tertia æquatione C valores inventi a & b , obtinebitur æquatio

$$-32c + 8 + 3c + 10 + 13c = 42$$

Lem. cit. $-16c = 24$

Reg. 3. $c = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$

Sunt autem $a = -8c + 2$, & $b = 3c + 10$. Substitutō igitur valore ejusdem c , determinantur a & b , scilicet

$$a = 12 + 2 = 14$$

$$b = -\frac{9}{2} + 10 = 5\frac{1}{2}$$

Proin-

Proinde lapides pro singulis curribus venduntur juliis 14. calcis currus quilibet juliis $5\frac{1}{2}$. Currus autem fabuli ob valorem negativum ($c = -1\frac{1}{2}$) nihil venditur; imo ipse fabuli dominus solvit julium $1\frac{1}{2}$ emptoribus illis pro unoquoque fabuli curru e domo amovendo.

SCHOL. I. Hoc probl. a Hieronymo Cardano (a) paucis verbis propositum, visum est nobis non inelegans & tyronibus in calculo exercendis opportunum.

SCHOL. II. Poterant hæc problemata abstracte, & in terminis generalibus proponi, ut plerique faciunt. Sed quia specialia & particularibus circumstantiis deducta phantasiam magis juvant, & juvenes cum statim ab initio artis, alioquin difficilis, usum aliquem specialem agnoscunt, ad ulteriora alacriores fiunt, ea sic afferre satius duximus.

SCHOL. III. Si ex problematis propositi conditionibus haberi non possint tot æquationes, quot incognitæ fuerunt assumptæ, problema dicitur indeterminatum, quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, & tunc una ex incognitis ad arbitrium sumitur. Ut si quærantur duo numeri, quorum factum æquale sit numero dato, v.g. 12. Sint illi x & y , per conditionem problematis una tantum

haberi potest æquatio, nempe $xy = 12$; unde $y = \frac{12}{x}$.

Sumatur ad arbitrium $x = 2$, erit $y = \frac{12}{2} = 6$. Si su-

matur $x = 3$, erit $y = \frac{12}{3} = 4$. Si $x = 4$, erit $y = 3$ &c.

Hujus generis sunt problemata, quæ sequuntur.

R

PRO-

(a) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

PROBLEMATA INDETERMINATA.

P R O B L. I.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad eorum differentiam in quacunque data ratione.

Sit quæstorum unus $= x$, alter $= y$, & ratio data sit a ad b , erit per conditionem Probl.

$$x + y : x - y :: a : b$$

Theor. 4. $ax - ay = bx + by$

Schol. Prop. I. $ax - bx = ay + by$

Divid. per $a - b$ $x = \frac{ay + by}{a - b}$

Sit $a = 3$, $b = 1$, & sumatur ad arbitrium $y = 2$, erit
 $x = \frac{6 + 2}{2} = 4$, proinde $4 + 2 : 4 - 2 :: 3 : 1$.

Sit $a = 4$, $b = 3$, & sumatur, si libet, $y = 5$, erit
 $x = \frac{20 + 15}{1} = 35$. Hinc $35 + 5 : 35 - 5 :: 4 : 3$.

P R O B L. II.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad summam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data.

Sit unus numerus quæsitus $= x$, alter $= xy$, & ratio data sit a ad b , erit ex conditione problematis

$$x +$$

$$x + xy \cdot xx + xxyy :: a \cdot b$$

Theor. 4. $bx + bxy = axx + axxyy$

Reg. 3. $b + by = ax + axyy$

Reg. 3. $x = \frac{b + by}{a + ayy}$

Sit $a = 3$, $b = 1$, & fumatur ad libitum $y = 2$, erit $x = \frac{1 + 2}{3 + 12} = \frac{1}{5}$, proinde $x + xy = \frac{3}{5}$, & $xx + xxyy = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, ideoque $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} :: 3 \cdot 1$.

Sit $a = 2$, $b = 1$, & fumatur $y = 3$, erit $x = \frac{1 + 3}{2 + 18} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $x + xy = \frac{4}{5}$, & $xx + xxyy = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, proinde habetur $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} :: 2 \cdot 1$.

SCHOL. I. Eodem modo resolvitur problema, si quarantur duo numeri, quorum summa sit ad differentiam quadratorum ex ipsis in quacunque ratione data a ad b . Vel duo numeri; quorum differentia sit ad differentiam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data a ad b . Vel duo numeri, quorum differentia sit ad summam quadratorum ex ipsis, ut a ad b . Quos omnes casus Diophantus Alexandrinus ^(a) accurate resolvit.

SCHOL. II. Nota pro altero numero quæsitum non sumi simpliciter x , vel y , sed xy , ut scilicet tota æquatio multiplicata per x existat, & inde haberi possit divi-

R 2

for

(a) Arithmetic. lib. 1. & 2. cum Bacheto, & de Fermat.

for communis, & facta divisione, quadrata illa ad quantitatem unius dimensionis reducantur; quod quidem pro similibus casibus est advertendum.

P R O B L. III.

Datum numerum quadratum in alia duo quadrata dividere.

Sit latus dati quadrati $= a$, latus quæsitum $= x$, & alterius quæsitum $= y$, erit $a^2 = x^2 + y^2$. Quia vero latus a majus est alterutro latere x , vel y seorsim accepto, fieri poterit $a - \dots = y$, vel sumpto ad libitum v , fieri poterit $a - vx = y$, vel etiam $vx - a = y$; tunc enim superior æquatio $a^2 = x^2 + y^2$ in sequentem transformabitur, substituto, loco y^2 , ejus valore.

$$a^2 = x^2 + v^2 x^2 - 2avx + a^2$$

$$v^2 x + x = 2av$$

$$\text{Divid. per } v^2 + 1 \quad x = \frac{2av}{v^2 + 1}$$

Hoc valore ipsius x posito in æquatione $vx - a = y$, habetur $y = \frac{avv - a}{v^2 + 1}$.

Sit $a = 10$, assumpto ad libitum $v = 3$, erit $x = \frac{60}{10} = 6$, & $y = \frac{80}{10} = 8$. Fiant quadrata, erit $100 = 36 + 64$.

Sit $a = 12$, & ad libitum $v = 2$, erit $x = \frac{48}{5}$, & $y = \frac{36}{5}$. Fiant quadrata reducendo 12 ad fractionem ejusdem nominis, hoc est ad $\frac{60}{5}$, erit (deleto communi denominatore 25) $3600 = 2304 + 1296$.

PRO-

PROBL. IV.

Datum numerum in duos secare, quorum factum sit quadratum.

SIt numerus-datus $\equiv 2a$, partium vero, in quas dividi debet, differentia sit $\equiv 2y$, erit *per Theor. 3.* pars major $a + y$, minor autem $a - y$, earumque factum $aa - yy$, quod ex conditione problematis debet esse quadratum. Pro cuius latere, sumpto v ad libitum, fiat $a \equiv vy$, seu $vy - a$, erit

$$aa - yy \equiv v^2 y^2 - 2avy + a^2$$

Factaque reductione *per Lem. Cap. i.* habetur

$$\begin{array}{l} \text{Divid. per } y \end{array} \quad \begin{array}{l} v^2 y^2 + y^2 \equiv 2avy \\ v^2 y + y \equiv 2av \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Tum per } v^2 + 1 \end{array} \quad y \equiv \frac{2av}{v^2 + 1}$$

Sit $2a \equiv 20$, fumatur ad arbitrium $v \equiv 3$, erit $y \equiv \frac{60}{10} \equiv 6$, proinde $a + y \equiv 16$, & $a - y \equiv 4$, unde $aa - yy \equiv 100 - 36 \equiv 64 \equiv 4 \times 16$.

Sit $2a \equiv 30$, sumpto $v \equiv 2$, erit $y \equiv \frac{60}{5} \equiv 12$, proinde $a + y \equiv 27$, $a - y \equiv 3$, & $aa - yy \equiv 81$.

SCHOL. *Quantitas v est quidem arbitraria, sed talis sumi debet, ut y semper maneat minor quam a, cujus differentia esse supponitur.*

PROBL. V.

Quadratum invenire, quod sive addito, sive dempto quocumque suæ radicis multiplici, submultiplici, superparticulari, & quavis alia proportionis specie, semper sit quadratum.

Sit quæsitæ quadrati latus $= x$, & radicis addendæ, aut detrahendæ multipulum $= m$, erit $x^2 + mx$ quadratum una cum multiplo suæ radicis, cui quadratum æquale quæritur. Pro cuius latere, sumpto ad libitum v , fiat $v = x$, erit ex conditione Probl.

$$x^2 + mx = vv - 2vx + xx$$

Sch. Prop. I. $2vx + mx = vv$

Reg. 3. $x = \frac{vv}{2v + m}$

Sit $m = 2$, & sumatur ad libitum $v = 5$, erit $x = \frac{25}{12}$, hinc $x^2 + mx = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144}$, cuius $\sqrt{} = \frac{35}{12}$.

Sit $m = 3$, & ad libitum $v = 4$, erit $x = \frac{16}{11}$, & $x^2 + mx = \frac{256}{121} + \frac{48}{11} = \frac{784}{121}$, cuius $\sqrt{} = \frac{28}{11}$.

Quod si data radicis proportio non addi, sed subtrahi debeat a suo quadrato, tunc invenietur $x = \frac{v^2}{2v - m}$, ut calculum ineunti palam est.

Sit enim, ut supra, $m = 3$, $v = 4$, erit $x = \frac{16}{5}$, & $x^2 - mx = \frac{256}{25} - \frac{240}{25} = \frac{16}{25}$, cuius $\sqrt{} = \frac{4}{5}$.

Sit demum $m = 4$, $v = 5$, erit $x = \frac{25}{6}$ & $x^2 - mx = \frac{625}{36} - \frac{100}{6} = \frac{25}{36}$, cuius $\sqrt{} = \frac{5}{6}$.

SCHOL.

SCHOL. In hoc problema satis elegans casu incidit, ut ipse asserit, P. Augustinus Thomas a S. Josepho (a) Schol. Piarum Geometra & Astronomus in Germania clarissimus. Pro quo, suppressa analysi, canonem tradidit universalem

$\frac{a^2 + 2a^2 m^2}{4a^3 - 4am^2} + m^4 =$ radici quadrati quæsitæ; ubi m denotat proportionem cujuscunque speciei; a sumitur ad libitum, modo major sit quam m . At canon a nobis traditus longe simplicior est, ut patet.

P R O B L. VI.

Tres numeros invenire, quorum tum summa, tum bini quadratum efficiant.

Sint numeri quæsitæ x, y, z ; primi autem quadrati $x+y+z$ latus sit r , secundi quadrati $x+y$ latus sit s , tertii $x+z$ sit t , & quarti $y+z$ sit v , erunt quatuor æquationes

$$1.^a \quad x+y+z=rr$$

$$2.^a \quad x+y=ss$$

$$3.^a \quad x+z=tt$$

$$4.^a \quad y+z=vv$$

Ex prima & secunda æquatione habentur duo valores ipsius x , per Coroll. I. Prop. I. nempe

$$x=rr-y-z, \text{ \& } x=ss-y$$

$$rr-y-z=ss-y$$

$$\text{Axiom. 2.} \quad rr-z=ss$$

$$\text{Coroll. cit.} \quad z=rr-ss$$

Ex

(a) Sylloge Epist. Mathem. Pragæ an. 1713.

Ex tertia æquatione habetur $x = tt - z$ per Coroll. cit.,
positoque loco z ejus valore modo invento, habetur per
Axiom. 4.

$$x = tt - rr + ss$$

Cumque habeatur ex secunda æquatione $x = ss - y$, duæ
æquationes æquales erunt, scilicet

$$tt - rr + ss = ss - y$$

Ax. 2

$$tt - rr = -y$$

Ax. 1. & Cor. 2. Prop. 1. $y = rr - tt$

Positis autem in quarta æquatione $y + z = vv$, valoribus
 y & z jam inventis, erit per *Ax. 4.*

$$rr - tt + rr - ss = vv$$

$$2rr - tt - ss = vv$$

Fiat $r = m = t$, erit $rr - 2rm + m^2 = tt$. Item fiat $r = n = s$, erit $rr - 2rn + n^2 = ss$; & his valoribus in superiori æquatione substitutis loco $-tt - ss$, oritur æquatio

$$2rr - rr + 2rm - m^2 - rr + 2rn - n^2 = vv$$

Lem. Cap. 1. $2rm + 2rn - m^2 - n^2 = vv$

Ax. 1. $2rm + 2rn = vv + m^2 + n^2$

Reg. 3.

$$r = \frac{vv + m^2 + n^2}{2m + 2n}$$

m, n, v sunt ad libitum.

Sit $m = 1$, $n = 2$, $v = 7$, erit $r = \frac{54}{6} = 9$; hinc
 $r - m = t = 9 - 1 = 8$, & $r - n = s = 9 - 2 = 7$.

Proinde

$$\begin{array}{l|l} x = 32 & x + y + z = 81 \\ y = 17 & x + y = 49 \\ z = 32 & x + z = 64 \\ & y + z = 49 \end{array}$$

Sit

Sit $m = 2$, $n = 4$, $v = 8$, erit $r = \frac{84}{12} = 7$, & $r - m = 5$, $r - n = s = 3$; adeoque

$$\begin{array}{l|l} x = -15 & x + y + z = 49 \\ y = 24 & x + y = 9 \\ z = 40 & x + z = 25 \\ & y + z = 64 \end{array}$$

SCHOL. *Problemata indeterminata qui plura cupit, Diophantum adeat, qui in numeris infinita fere proponit, unde Analysis Diophantea nomen accepit. Horum solutionem recentiores alia via per analysim speciosam indagarunt, Billy (a) praesertim, Ozanam (b), & Præstetus (c). Hæc quidem determinatis difficiliora tyroni evadunt. Negligenda tamen non sunt, cum in doctrina curvarum usum habeant plurimum, ut nos opportune Wolfius (d) admonet, Quæ nos hic pauca selegimus, ad ceterorum intelligentiam, siquidem probe percepta fuerint, satis erunt.*

C A P U T VI.

De Æquationibus compositis.

HÆtenus de æquationibus simplicibus. Nunc ad compositas, quæ pluribus constant dimensionum gradibus, transitum facimus. Quarum naturam, & proprietates præcipuas hoc loco breviter explicabimus.

S

PRO.

(a) Diophant. redivivus. (b) Nouveaux elem. d'Algeb. l. 3. (c) Nouveaux elements de Mathematiqu. T. 2. (d) Elem. analy. edit. 2. Cap. 2. §. 249.

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum compositarum genesis.

Assumantur nonnullæ æquationes simplices, quæ radices positivas, vel negativas contineant, & æquentur nihilo. Deinde ad invicem multiplicentur, orientur æquationes compositæ tot graduum, quot assumptæ fuerint radices.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } x = a, \text{ seu } x - a = 0 \\ x = b \quad \quad x - b = 0 \end{array}$$

Multiplicentur inter se hæ duæ æquationes simplices, oritur

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ab = 0 \\ \quad - bx \end{array}$$

Sit deinde $x = c$, seu $x - c = 0$, & per hanc multiplicetur æquatio jam inventa, erit æquatio composita tertii gradus

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx \\ \quad - bx^2 + acx - abc = 0 \\ \quad - cx^2 + bcx \end{array}$$

Eadem ratione fit $x = 2$, seu $x - 2 = 0$

$$x = -3, \text{ seu } x + 3 = 0$$

$$x = 4, \text{ seu } x - 4 = 0$$

Multiplicentur ad invicem hæ tres æquationes simplices, fit æquatio tertii gradus

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Quæ

Quæ quidem si ulterius multiplicetur per aliam æquationem simplicem $x + 1 = 0$, fit æquatio quarti gradus, nempe

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

Atque hic nonnulla circa æquationes hujusmodi diligenter observanda sunt:

I. In qualibet æquatione tot dari radices, quot incognita primi termini dimensiones habet, seu quot habet exponens unitates; nempe duas in quadratica, tres in cubica &c.

II. Quantitatem cognitam secundi termini continere summam omnium radicum sub signo contrario, hoc est radices positivas cum signo $-$, negativas cum signo $+$. Quantitatem cognitam tertii termini exhibere productum ex singulis binis radicibus sub signo proprio: cognitam quarti productum ex singulis ternis radicibus sub signo contrario, & sic deinceps. Terminum vero ultimum (quem homogeneum comparationis vocant) esse factum omnium radicum. Hæc omnia in prima & secunda æquatione oculis patent.

III. In omni æquatione tot dari radices positivas, seu veras, quot sunt mutationes signorum de $+$ in $-$, & de $-$ in $+$; tot vero negativas, seu falsas, quot successiones signorum eorundem $++$, vel $--$. Sic in æquatione $x^2 - 5x + 6 = 0$, quia duplex est mutatio signorum $+-$, & $-+$, duplex est radix positiva, nempe $x = 2$, & $x = 3$. In æquatione vero $x^2 + 3x - 4 = 0$, quia una est signorum eorundem successio $++$, & una mutatio $+-$, una radix est negativa, nempe $x = -4$, & altera positiva

tiva $x = 1$. Si vero omnia signa sint positiva, ut in æquatione $x^2 + 5x + 6 = 0$, radices omnes falsæ sunt, nempe $x = -2$, & $x = -3$.

IV. Si radices veræ sint falsis æquales, secundus terminus æquationis evanescit, & fit æqualis zero. Sit $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$. Fiat æquatio, ut supra docuimus, oritur $x^3 - 19x + 30 = 0$, in qua secundus terminus deficit. Si radices veræ superant falsas; secundus terminus æquationis est cum signo $-$. Sit radix vera $x = 5$ major quam falsa $x = -2$, erit æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$, in qua -3 denotat excessum radices veræ $+5$ supra falsam -2 . Si denique radices falsæ majores sunt, quam veræ, secundus terminus æquationis est cum signo $+$. Sit radix falsa $x = -5$, vera autem sit $x = 2$, erit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, in qua $+3$ exprimit excessum radices falsæ -5 supra veram $+2$.

V. Duplici ratione cognoscitur, quantitatem aliquam positivam, aut negativam esse radicem æquationis. Primo si fiat binomium constans incognita, & quantitate aliqua data cum signo $-$, si sit quantitas positiva; vel cum signo $+$, si sit negativa, & per ipsum exacte, & sine ullo residuo æquatio sit divisibilis. Sic quia æquatio superior, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ divisibilis est exacte per $x - 2$, seu per $x + 3$, vel per $x - 4$, deducitur $+2$, -3 , $+4$ esse radices ejusdem æquationis: cum æquationes oriantur ex multiplicatione, & divisio sit multiplicationi contraria. Secundo si substituendo in æquatione, loco incognitæ, quantitatem datam cum signo $+$ si est positiva, aut cum signo $-$ si est negativa, & omnia producta per signa contraria sese destruant, erit illa quantitas radix æquationis. Sit eadem
æqua-

æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Substituatur loco incognitæ x , ubique ejus valor $+2$; erit $8 - 12 - 20 + 24 = 0$. Substituatur rursus loco ejusdem incognitæ x valor -3 , erit $-27 - 27 + 30 + 24 = 0$. Demum substituto valore $+4$, erit $64 - 48 - 40 + 24 = 0$.

Similiter in æquatione $x^2 - ax - ab = 0$. Radices sunt $+bx$

$+a$, $-b$, substituuntur hi valores loco incognitæ x , erit $a^2 - a^2 + ab - ab = 0$. Item $b^2 - b^2 + ab - ab = 0$.

SCHOL. I. Præter radices rationales positivas, aut negativas, de quibus hætenus locuti sumus, dantur etiam in æquationibus radices irrationales, & incommensurabiles tam positivæ, quam negativæ. Sic æquatio $x^2 - 6x + 4 = 0$ habet duas radices irrationales $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$.

SCHOL. II. Præter radices reales rationales, & irrationales jam allatas, æquatio aliquando continet radices imaginarias & impossibiles. Nam cum nonnullæ quæstiones casus impossibiles involvant, ut si quærat in circulo dato applicari rectam, quæ diametro circuli major sit, necesse est radix illi casui respondeat impossibilis. Sic æquatio $x^2 - 2x + 7 = 0$ continet duas radices imaginarias $1 + \sqrt{-6}$ & $1 - \sqrt{-6}$, quæ in æquationibus sunt semper numero pares.

SCHOL. III. Regula, quam ex Cartesio docuimus supra num. 3. pro dignoscendis ex permutatione, aut successione signorum radicibus veris ac falsis, non valet pro æquationibus, quæ radicibus imaginariis constant. Nam superior æquatio $x^2 - 2x + 7 = 0$ ex signorum permutatione continere videtur duas radices veras, quod tamen est falsum.

Multi-

Multiplicetur enim per $x + 3 = 0$, ut præter duas veras, aliam quoque falsam contineat: oritur $x^3 + 1x^2 + 1x + 21 = 0$, in qua dispositio signorum ex præcit. regula indicat, omnes radices esse falsas. Non erant ergo in æquatione duæ radices veræ, quales apparebant, sed imaginariæ $1 + \sqrt{-6}$, & $1 - \sqrt{-6}$. Proinde hic regula fallit.

PROPOSITIO II.

Æquationem quamcumque ordinare.

I. **P**onantur in uno æquationis membro omnes incognitæ, ita ut primo loco statuatur incognita maximæ potestatis, quæ dicitur *primus* æquationis terminus: secundo loco incognita potestatis uno gradu inferioris, quæ dicitur *secundus* terminus æquationis, deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decrescentes, quæ constituunt *tertium*, *quartum*, *quintum* &c. terminum æquationis. In altero æquationis membro ponantur omnes termini, qui ex cognitis quantitativibus componuntur.

Sit æquatio inventa $bx^2 + x^3 = bx - ab + cd$
erit ordinata $x^3 + bx^2 - bx = cd - ab$

Item sit æquatio $by^3 - dy + y^4 = abc + cy + mf$
erit ordinata $y^4 + by^3 - cy - dy = abc + mf$

II. Si terminus maximæ potestatis multiplicatus existat per aliam quantitatem, sive literariam, sive numericam, dividi debet per illam, ut simplex evadat. Sit $3x^3 + 6ax = ab$, dividendo per 3 totam æquationem, erit

$x^2 + 2ax = \frac{2}{3}ab$. Eadem ratione si sit æquatio $ax^2 - 2ax = abc$, dividendo per a , fit $x^2 - 2x = bc$.

III. Si terminus maximæ potestatis afficitur signo —, fieri debet per terminorum transpositionem positivus. Sic in æquatione $ax - x^2 = ab - cf$, facta terminorum transpositione, erit $x^2 - ax = cf - ab$.

IV. Omnes illi termini, in quibus incognita eandem habet dimensionem, statuuntur unus infra alium; idemque fiat de quantitatibus cognitis, si plures sint, ut

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 - bx \\ - bx^2 + cx \end{array} = abc$$

Quantitates $ax^2 - bx^2$ stant ambæ loco secundi termini, & $-bx + cx$ loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$\begin{array}{r} x^2 - ax \\ - bx \end{array} = ac - bc + mf$$

Quantitates $ac - bc + mf$ unicum terminum constituunt,

COROLL. I. Hinc habetur modus revocandi quancunque æquationem compositam ad simplicem. Si enim in superiori prima æquatione ponatur $a - b = p$, erit $ax^2 - bx^2 = px^2$. Item ponendo $-b + c = q$, erit $-bx + cx = qx$, demum ponendo $abc = r$, eadem æquatio transformabitur in hanc simplicissimam $x^3 + px^2 + qx = r$. Similiter in superiori secunda æquatione fiat $-a - b = -p$, erit $-ax - bx = -px$; fiat $ac - bc + mf = q$, ea in hanc transformabitur $x^2 - px = q$. Quod quidem quanti sit usus, ex inferius dicendis satis constabit.

COROLL. II. Præstat non raro omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ita ut omnes quantitates
nihilò

nibilo fiant æquales. Sic æquatio $x^2 - px = q$ fiet $x^2 - px - q = 0$. Item $x^3 - ax^2 + bx = a^2 b^2$, erit $x^3 - ax^2 + bx - a^2 b^2 = 0$. Quod artificium Algebræ, ut videbimus, valde commodum, Thomæ Harrioto (^a) Anglo tribuitur.

COROLL. III. Si quis terminus in æquatione desit, ut secundus, tertius, quartus &c. Notatur termini, aut terminorum (si plures desint) defectus asterismo, ut æquatio $x^3 * + ax - a^3 = 0$, quæ secundo termino caret. Pariter $x^4 * - cx^2 * + a^2 bc = 0$ caret terminis secundo & quarto. Tunc autem minime variatur sequentium terminorum ordo, aut conditio. Sed ax v.g. in prima æquatione manet terminus æquationis tertius; & in secunda $+ a^2 bc$ tenet locum æquationis quintum, licet absint duo termini, & sic de aliis.

PROPOSITIO III.

Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare.

MUtentur in æquatione signa terminorum parium, ea nempe, quæ præcedunt terminos secundum, quartum, sextum &c. radices veræ degenerabunt in falsas, & vicissim falsæ in veras. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ ex anteced. Prop. habet duas radices veras $+ 2$, $+ 4$, & unam falsam $- 3$. Variatis autem terminorum parium signis, fit $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, quæ quidem habet easdem cum priore radices, sed duas falsas $- 2$, $- 4$, & unam veram $+ 3$.

Demon-

(a) Artis analyt. praxis Londini 1631.

Demonstratio. Substituatur in eadem æquatione loco incognitæ x una ex radicibus, seu valoribus -2 , tota æquatio evanescit, nempe $-8 + 12 + 20 - 24 = 0$. Substituatur deinde -4 , iterum æquatio evanescit, nam $-64 + 48 + 40 - 24 = 0$. Idem fiat cum radice vera $+3$; erit enim $27 + 27 - 30 - 24 = 0$, ergo -2 , -4 , $+3$, sunt radices illius æquationis *per Prop. 1. hujus num. 5.* Quod &c.

PROPOSITIO IV.

Radices augere, vel minuere data quantitate.

I. **S**It æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ ex *Prop. 1. hujus* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3 , augere volo ejus radices quantitate data $= 3$.

Fiat $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$. Substituatur hic valor in æquatione loco ipsius x , erit

x^3	$= y^3 - 9y^2 + 27y - 27$
$- 3x^2$	$- 3y^2 + 18y - 27$
$- 10x$	$- 10y + 30$
$+ 24$	$+ 24$

Summa $y^3 - 12y^2 + 35y + * = 0$

Hæc nova æquatio habet singulas radices ternario auctas, nempe $+5$, $+7$, $+0$ (nam $-3 + 3 = 0$) quæ quidem prius erant $+2$, $+4$, -3 . Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, ex. gr. $+5$, fiet $125 - 300 + 175 = 0$, ergo $+5$ est radix ejusdem æquationis *per Propos. 1. num. 5.*

T

II. Mi-

II. Minuenda sit eadem æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ = numero binario. Fiat $x - 2 = y$, erit $x = y + 2$. Substituatur in eadem æquatione hic valor loco ipsius x , erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\
 - 3x^2 & - 3y^2 - 12y - 12 \\
 - 10x & - 10y - 20 \\
 + 24 & + 24 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^3 + 3y^2 - 10y + 4 = 0
 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices binario minutas, nempe 0, - 5, + 2, quæ prius erant + 2, - 3, + 4. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, v. g. - 5, erit $-125 + 75 + 50 = 0$, ergo per Prop. I. num. 5. radix - 5 est radix ejusdem æquationis.

COROLL. I. Augendo radices æquationis, singulæ radices veræ augentur. Contra vero falsæ minuuntur. Nam si ad radicem falsam - 4 addatur + 3, minuitur & fit - 1. Imo aliquando falsæ in veras transeunt, ut si ad falsam - 4 addas + 5, fit radix vera + 1. Quod evidens est.

COROLL. II. Minuendo radice æquationis, radices falsæ augentur. Nam si ex radice falsa - 3 subtrahitur quantitas + 2, fit - 5, ut patet. At veræ minuuntur, imo & aliquando fiunt falsæ, ut si ex radice + 2 auferas + 5, fiet - 3, radix scilicet falsa.

SCHOL. Augendo radices æquationis habetur methodus convertendi radices falsas in veras, nec propterea veræ fiant falsæ; quod docuit Cartesius^(a), & patet ex Cor. I.

PRO-

(a) Geometriæ lib. 3. edit. 3. pag. m. 74.

PROPOSITIO V.

Ex data æquatione secundum terminum tollere.

SI secundus terminus datæ æquationis afficitur signo $+$, augeantur radices quantitate cognita secundi termini divisa per exponentem æquationis. Si afficitur signo $-$, minuantur radices eadem quantitate; in utroque casu habebitur nova æquatio secundo termino carens.

Sit æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$, ex qua secundus terminus tolli debeat.

Divisa quantitate cognita secundi termini 6 per exponentem 2, quotus 3 est quantitas, qua augeri debent (ob signum $+$) radices æquationis.

Fiat ergo ut in *Prop. antec.* $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$, quo valore substituto in æquatione, loco ipsius x , erit.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = y^2 - 6y + 9 \\
 + 6x & + 6y - 18 \\
 - 16 & - 16 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^2 - 25 = 0
 \end{array}$$

Est ergo $y = 5$, proinde $x (= y - 3) = 5 - 3 = 2$.

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, in qua secundus terminus evanescere debeat.

Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur $\frac{12}{3} = 4$, quantitas, qua minui debent (ob signum $-$) æquationis datæ radices. Fiat ergo $x - 4$

T 2

$= y$,

$\equiv y$, erit $x \equiv y + 4$, factaque hujus valoris substitutione, oritur nova æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\ -12x^2 & -12y^2 - 96y - 192 \\ +44x & +44y + 176 \\ -48 & -48 \end{array}$$

Summa $y^3 + 4y^2 - 4y - 48 = 0$

III. Quid vero si secundus terminus ex æquatione tollendus utroque signo $+$ & $-$ afficitur?

Sit æquatio $x^2 - ax - ab = 0$, ex qua tolli debet secundus terminus. Divisa quantitate cognita $-a + b$ per exponentem 2, habetur $\frac{-a+b}{2}$, seu $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Fiat $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = y$, erit $x = y + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, factaque hujus valoris substitutione, habetur æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 + ay - by + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \\ -a & -ay + by - \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}b^2 \\ +b^x & \\ -ab & -ab \end{array}$$

Summa $y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 = 0$

Demonstratur per Coroll. 1. & 2. Præp. antec. radices veræ ac falsæ ita augeri possunt ac minui, ut fiant æquales nullitati, seu zero. Sic in primo exemplo æquatio $x^2 + 6x$

$+6x-16=0$ habet duas radices, unam falsam -8 , alteram veram $+2$, proinde augendo numero ternario utranque, prima erit $-8+3=-5$, altera vero $+2+3=5$, proinde $-5+5=0$.

Similiter fit æquatio $x^3-4x-12=0$; ut tollatur secundus terminus, minui debent ejus radices numero binario. Una ipsius radix vera est $+6$, altera falsa -2 , proinde utranque minuendo, erit prima $+6-2=4$, altera $-2-2=-4$, hinc $+4-4=0$. Atque hinc est, quod in æquatione, cujus omnes radices æquales sunt, sublato secundo termino, omnes alii evanescunt, ut videre est in æquatione $x^3-12x^2+48x-64=0$, atque aliis. Qua ratione autem regula sic augendi, vel minuendi radices, sit inventa, patebit ex sequenti *Propos. ejusque Schol. I.*

SCHOL. I. Cum sæpe divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem primi, oriatur fractio, ut in tertio exemplo superiori contigit, quo praxis facilior æquationibus præsertim altioribus evadat, præstat loco fractionis indeterminatam aliquam assumere, & binomium $x+n$, vel $x-n$ elevare ad omnes illos gradus, quos æquatio data exigit; peractaque operatione, valores indeterminatæ n^1, n^2, n^3 &c. substituere. Sic enim molestia fractionum minuitur, & facilius poterit ad examen operatio tota revocari. Data sit æquatio, ex qua secundus terminus auferri debeat, $x^3+5x^2-2x-24=0$. Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur fractio $\frac{2}{3}$, fiat $n=\frac{2}{3}$, & $x+n=y$, erit $x=y-n$, quo quidem binomio ad secundam, & tertiam potestatem elevato, hoc est

$$x=y$$

$$x = y - n$$

$$x^2 = y^2 - 2ny + n^2$$

$$x^3 = y^3 - 3ny^2 + 3n^2y - n^3$$

Positisque loco n , n^2 , n^3 eorum valoribus $n = \frac{5}{3}$, $n^2 = \frac{25}{9}$, $n^3 = \frac{125}{27}$, facili negotio invenitur

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 5y^2 + \frac{75}{9}y - \frac{125}{27} \\ + 5x^2 & + 5y^2 - \frac{50}{3}y + \frac{125}{9} \\ - 2x & - 2y + \frac{10}{3} \\ - 24 & - 24 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^3 * - \frac{23}{9}y - \frac{308}{27} = 0$$

SCHOL. II. In omni æquatione terminus secundus, qui deficit, supponi potest affectus utroque signo $+$ & $-$; sic æquatio $x^3 * - ax + b^3 = 0$ supponitur $x^3 \pm - ax + b^3 = 0$, proinde facta comparatione cum termino, qui præcedit, nempe cum $+x^3$, habetur & permutatio & successio signorum, hoc est $+-++$. Quod pariter accidit, facta comparatione cum termino, qui consequitur, nempe cum $-ax$. Nam similiter habetur $+-+-$; ideoque in utroque casu indicatur una radix vera, & altera falsa per Prop. I. hujus num. 3.

PROPOSITIO VI.

Ex æquatione terminum tertium tollere.

I. **S**It æquatio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ex qua tertius terminus sit auferendus.

In-

Inveniri debet quantitas, qua radices datæ æquationis sic augeantur, aut minuantur, ut tertius terminus evanescat, quod quidem per analysim obtinetur hoc artificio.

Sit quantitas quæsitæ $= z$, fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$; substituto hoc valore ipsius x in data æquatione, erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3zyy + 3z^2y - z^3 \\ + px^2 & + pyy - 2pz y + pz^2 \\ + qx & + qy - qz \\ - r & - r \end{array}$$

Cum igitur tertius terminus debeat evanescere, fiat æqualis zero, scilicet

$$\text{Divid. per } y \quad 3z^2y - 2pzy + q = 0$$

$$\text{Tum per } 3 \quad 3z^2 - 2pz = -q$$

$$z^2 - \frac{2}{3}pz = -\frac{1}{3}q$$

Occurrit æquatio secundi gradus resolvenda, ut docebitur infra *Prop. 1. Cap. 8.* quæ ab hac non dependet. Addatur scilicet utrinque quadratum ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe $\frac{1}{9}pp$, erit

$$z^2 - \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}pp = \frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q$$

$$\text{Extr. Rad.} \quad z - \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

$$z = \frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

Sed $x = y - z$, ergo $x = y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$. Quo valore in data æquatione substituto, fiet æquatio termino tertio carens, ut in duobus sequentibus exemplis.

I. Sit

1. Sit enim æquatio $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$, erit

$p = -4$ & $q = 4$, hinc $y = \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{3}pp} = \frac{1}{3}q = y + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3}$. Est ergo $x = y + \frac{2}{3}$, ideoque erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \\
 -4x^2 & -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9} \\
 +4x & +4y + \frac{8}{3} \\
 -6 & -6 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^3 - 2y^2 + \frac{110}{27} = 0
 \end{array}$$

2. Similiter sit æquatio data $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$,

erit $p = -3$ & $q = 3$, proinde $y = \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{3}pp} = \frac{1}{3}q = y + 1$. Fiat cum hoc valore nova æquatio, nempe

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\
 -3x^2 & -3y^2 - 6y - 3 \\
 +3x & +3y + 3 \\
 -4 & -4 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 3y + 3 - 4 = 0
 \end{array}$$

Habetur ergo æquatio termino tertio carens, in qua $y = \sqrt[3]{3}$.

II. Sit æquatio quarti gradus, ex qua tertius terminus exterminari debeat, $x^4 + px^3 + qx^2 + r = 0$.

Fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$, quo valore ipsius x in æquatione data substituto, habetur

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 - 4zy^3 + 6z^2y^2 - 4z^3y + z^4 \\
 + px^3 & + py^3 - 2pz^2y + pz^3 \\
 + qx^2 & + qy^2 - qz^2 \\
 + r & + r
 \end{array}$$

Fiat terminus $6z^2y^2 + py^3 = 0$; dividendo per y^2 , erit

$6z^2 + p = 0$, hoc est $z^2 = -\frac{p}{6}$, & $z = \sqrt{-\frac{p}{6}}$; habetur ergo valor ipsius z .

Data sit jam æquatio specialis $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$, ex qua tertius terminus auferendus sit. Facta com-

paratione terminorum hujus cum terminis æquationis superioris, erit $p = -6$, $q = -8$ &c. adeoque $z (= \sqrt{-\frac{p}{6}})$

$= \sqrt{\frac{6}{6}} = 1$. Est ergo $x = y - 1$, qui valor si ponatur in æquatione data, oritur

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\
 - 6x^2 & - 6y^2 + 12y - 6 \\
 - 8x & - 8y + 8 \\
 - 3 & - 3 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^4 - 4y^3 \quad * \quad * \quad * = 0
 \end{array}$$

Unde æquatio facillime resolvitur. Nam $y^4 = 4y^3$, proinde $y = 4$. Sed posita fuit $x = y - z$, ergo $x = 4 - 1 = 3$; est ergo 3 radix ipsius æquationis.

SCHOL. I. Hoc eodem artificio inventa est regula tollendi ex æquationibus terminum secundum, quam in Prop. ant. docuimus. Nam si ex æquatione generali superiori secundus terminus suppenatur æqualis zero: erit $-3zyy +$
V
pyy

$pyy = 0$, proinde $3z = p$, & $z = \frac{p}{3}$; unde patet, quan-

titatem addendam, vel subtrahendam radici datæ æqua-
tionis esse quantitatem cognitam secundi termini divisam
per exponentem primi termini.

SCHOL. II. Eadem plane ratione tolli possunt ex æqua-
tionibus termini quartus, quintus, sextus &c. Sed quia
pro quarto tollendo æquatio tertii gradus, pro quinto æqua-
tio quarti gradus, pro sexto æquatio quinti gradus occur-
rit, ideo non est hujus loci ulterius progredi.

PROPOSITIO VII.

Æquationem, in qua termini aliqui desunt,
compleri.

I. **A**ugeatur radix æquationis datæ quantitate aliqua per
Prop. 4. exurget æquatio completa.

Sit æquatio complenda $x^3 - 19x - 30 = 0$, in qua
deest secundus terminus. Fiat per Prop. cit. $x + 1 = y$,
erit $x = y - 1$. Substituatur hic valor loco x in data
æquatione, erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 19x & = 19y - 19 \\ - 30 & = -30 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0 \end{array}$$

Habebitur ergo æquatio completa cum secundo termino, in
qua $y^3 = x^3 + 1$. II. Sit

II. Sit æquatio incompleta $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua tertius terminus deficit. Fiat, ut supra, $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$, & facta substitutione hujus valoris loco ipsius x , erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 3x^2 & - 3y^2 + 6y - 3 \\ + 2 & + 2 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$$

En integra æquatio, in qua pariter $y = x + 1$.

Ratio est, quia secundus terminus v. g. deficit in æquatione, cum radices veræ æquantur falsis per *Prop. 1. num. 4.* ergo si una ex veris augeatur, integra æquatio restituitur.

PROPOSITIO VIII.

Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.

I. **E**st æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ multiplicandæ sunt per datam quantitatem $= c$.

Fiat $cx = y$, erit $x = y : c$ (duo puncta $(:)$ sunt divisionis signum ex *Schol. 3. Prop. 8. Cap. 1.*) Substituatur ubique hic valor in data æquatione loco ipsius x ; erit nova æquatio

$$\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} - \frac{b^2y}{c} + abb = 0$$

V 2

Et

Et multiplicatis singulis terminis per c^3 , factaque reductione, habetur.

$$y^3 - acy^2 - bbc^2y + abbc^3 = 0$$

cujus radices sunt $+ac$, $+bc$, $-bc$.

II. Similiter est æquatio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$,
cujus radices $+1$, $+2$, $+3$, multiplicari debent per quantitatem $= 2$.

Fiat $2x = y$, erit $x = y : 2$, & hoc valore substituto in data æquatione loco ipsius x , oritur

$$\frac{y^3}{8} - \frac{6y^2}{4} + \frac{11y}{2} - 6 = 0$$

Multiplicentur omnes termini per cubum 8, factaque reductione, erit nova æquatio

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

cujus radices sunt $+2$, $+4$, $+6$.

COROLL. I. Ex utroque exemplo satis apparet, ad multiplicandam æquationem per datam quantitatem, satis esse eam multiplicare per progressionem Geometricam, cujus terminus primus sit 1, terminus secundus sit denominator rationis &c. Nam multiplicandæ sint radices ejusdem prioris æquationis per c , assumpta alia incognita y loco ipsius x erit, ut prius

$$y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0$$

$$1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3.$$

$$y^3 - acy^2 - b^2c^2y + abbc^3 = 0$$

Simi-

Similiter multiplicandæ sint per 2 radices alterius æquationis: assumpta y loco ipsius x, & multiplicata æquatione per progressionem Geometricam, erit ut prius

$$\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \\ \text{I.} \quad \text{2.} \quad \text{4.} \quad \text{8.} \\ \hline y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0 \end{array}$$

PROPOSITIO IX.

Radices æquationis dividere per datam quantitatem.

I. **S**it æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ dividere oporteat per quantitatem $=c$.

Fiat $\frac{x}{c} = y$, erit $x = cy$, & substituto hoc valore in data æquatione, erit

$$c^3y^3 - ac^2y^2 - b^2cy + abb = 0$$

Dividantur singuli termini per c^3 , habetur

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

cujus radices sunt $+\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$, $-\frac{b}{c}$.

COROLL. Hinc apparet, ad dividendam æquationem per datam quantitatem, satis esse eam dividere per progressionem

tionem Geometricam, cujus primus terminus sit 1, secundus terminus sit denominator rationis. Nam assumpta nova incognita y , & progressionem Geometricam 1, c , c^2 , c^3 &c. erit æquatio, ut prius, divisa per c , nempe

$$\begin{array}{r} y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0 \\ 1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3. \\ \hline ay^2 \quad b^2y \quad abb = 0 \end{array}$$

II. Eadem ratione dividenda sit per 3 æquatio numerica superior $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices sunt +1, +2, +3. Dividatur æquatio (assumpta incognita y) per progressionem Geometricam 1, 3, 9 &c. nempe

$$\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \\ 1. \quad 3. \quad 9. \quad 27. \\ \hline y^3 - 2y^2 + \frac{11y}{9} - \frac{2}{9} = 0 \end{array}$$

Habetur nova æquatio, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. Nam harum qualibet substituta in æquatione loco ipsius y , tota æquatio evanescit, proinde sunt radices quæsitæ per Prop. I. hujus num. 5.

SCHOL. Ut æquationum radices augeantur, minuantur, multiplicentur, aut dividantur ea ratione, quam docuimus, plane non opus est, ut illæ sint cognitæ, imo a Cartesio, & cæcis tanquam prorsus incognitæ supponuntur. Nos tamen consulto, illustrandæ rei gratia, ut jam cognitæ usurpavimus.

PRO.

PROPOSITIO X.

Æquationem a fractionibus liberare.

I. **M**ultiplicetur radix æquationis per factum omnium denominatorum fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Sit æquatio data $x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$

Multiplicetur per factum omnium denominatorum bcd radix æquationis; hoc est fiat $bcdx = y$, erit $x = y : bcd$, factaque hujus valoris substitutione in data æquatione, oritur

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{by^2}{b^3c^2d^2} + \frac{aay}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0$$

Multiplicentur singuli termini per $b^3c^3d^3$, habetur æquatio sine fractionibus

$$y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y + a^3b^3c^3d^2 = 0.$$

II. Similiter sit æquatio $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - 24 = 0$. Multiplicetur radix æquationis per factum ex denominatoribus, hoc est per 10, nempe per progressionem Geometricam 1. 10. &c. per Coroll. Prop. 8. hujus.

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - 24 = 0$$

$$1. \quad 10. \quad 100. \quad 1000.$$

$$y^3 - 5y^2 + 20y - 24000 = 0$$

In qua quidem æquatione $y = 10x$, proinde erit $x = \frac{y}{10}$.

III. De

III. Demum fit æquatio $x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0$. Quia quantitas 3 metitur utrumque denominatorem, multiplicetur radix æquationis per 3 modo explicato, nempe

$$\begin{array}{r} x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0 \\ 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \\ \hline y^3 + 6y - 81 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione habetur $y = 3x$, proinde dividi debent per 3 singulæ radices hujus, ut habeantur radices æquationis datæ, quod semper advertendum.

PROPOSITIO XI.

Æquationem a radicalibus liberare.

ID non eadem via semper assequimur; ideoque plura exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio $x^3 + -5x + \sqrt{2} = 0$. Fiat $x : \sqrt{2} = y$, erit $x = y\sqrt{2}$, & hoc valore in data æquatione substituto, erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 2y^3 \sqrt{2} \\ -5x = -5y\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} = +\sqrt{2} \\ \hline \text{Summa} \quad 2y^3\sqrt{2} - 5y\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{array}$$

Et divisus omnibus terminis per $\sqrt{2}$, fit æquatio sine radicalibus

$$2y^3 - 5y + 1 = 0.$$

II. Quandoque fit progressio Geometrica ex radicalibus, per quam tota æquatio multiplicata ab irrationalibus liberatur. Ecce exemplum

x^4

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 5abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 & = & 0 \\ \text{I} & \sqrt{2}. & 2. & \sqrt{8}. & 4. & & \end{array}$$

$$y^4 + 4ay^3 + 10aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$$

Radices autem hujus æquationis dividendæ erunt per $\sqrt{2}$, ut habeantur radices æquationis datæ. Nam $y = x\sqrt{2}$.

III. Sæpe etiam tota æquatio dividitur per radicalium progressionem Geometricam.

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b & = & 0 \\ \text{I.} & \sqrt[3]{2}. & \sqrt[3]{4}. & 2. & & & \end{array}$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione est $y = x : \sqrt[3]{2}$.

IV. Radicales ex æquationibus aliquando exterminantur per multiplicationem: Sit æquatio

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 0$$

Multiplicentur radices universales per Prop. 12. Cap. 4.

$$\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

$$\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

$$\frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

$$- \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} - (\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)$$

$$\frac{1}{4}qq \quad * \quad * \quad - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$$

$$= \frac{1}{3}p, \text{ hinc } x = \frac{1}{3}p. \text{ Ex } - \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 \text{ oritur}$$

X V. Æqua-

V. Æquatio à radicalibus liberatur supponendo terminos radicales æquales literis ad libitum assumptis, quæ singulatim in uno æquationis membro collocantur, & tota æquatio elevatur ad potentiam ab exponente radicis indicatam. Sit æquatio

$$x^3 + x\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$$

Fiat $\sqrt{a} = p$, & $\sqrt{b} = q$, æquatio in hanc transformatur

$$x^3 + px + q = 0$$

Ponatur px seorsim in uno æquationis membro, nempe $px = x^3 + q$, & (ob $\sqrt{a} = p$) tota æquatio elevetur ad secundam potestatem per *Reg. 4. Cap. 5.*

$$p^2x^2 = x^6 + 2qx^3 + q^2$$

Deinde ponatur $2qx^3$ in uno æquationis membro, hoc est $2qx^3 = p^2x^2 - x^6 - q^2$, & iterum utrumque membrum ad secundam potestatem elevetur ob $\sqrt{b} = q$; per *Reg. cit.* erit

$$4q^2x^6 = p^4x^4 - 2p^2x^8 + x^{12} - 2p^2q^2x^2 + 2q^2x^6 + q^4$$

hoc est $x^{12} - 2p^2x^8 - 2q^2x^6 + p^4x^4 - 2p^2q^2x^2 + q^4 = 0$

Quod si fiat $x^2 = y$, deprimi poterit ad æquationem sexti gradus, scilicet

$$y^6 - 2p^2y^4 - 2q^2y^3 + p^4y^2 - 2p^2q^2y + q^4 = 0$$

Demum in hac ultima æquatione loco p^2, p^4, q^2, q^4 , substituantur eorum valores, nempe a, a^2, b, b^2 obtinebitur æquatio à radicalibus expedita

$$y^6 - 2ay^4 - 2by^3 + a^2b^2 - 2aby + b^4 = 0$$

SCHOL.

SCHOL. Si radicales sint cubicae, æquationis membra ad tertiam potestatem eleventur.

PROPOSITIO XII.

Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.

I. **I**Nveniri debet quantitas, per quam ita multiplicentur æquationis datæ radices, ut quantitas cognita in aliam datam commutetur.

Sit æquatio $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, quantitas data $= a$ quæ sita sit $= z$

Fiat $x = \frac{y}{z}$, & hic valor ponatur in data æquatione loco ipsius x , assumpta nova incognita y , erit

$$y^3 - pz y^2 + qz^2 y - rz^3 = 0$$

1. Fieri debeat quantitas cognita secundi termini $p = a$: si supponatur $pz = a$, erit $z = \frac{a}{p}$.

2. Quantitas cognita tertii termini q fieri debeat æqualis datæ quantitati a , erit $qz^2 = a$, proinde $z^2 = \frac{a}{q}$, atque hinc $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$.

3. Pari modo fieri debeat ultimus terminus $rz^3 = a$, erit $z^3 = \frac{a}{r}$, ideoque $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$.

X 2

Jam

Jam si multiplicetur secundus terminus cujuscunque æquationis per valorem inventum ipsius z , tertius terminus per quadratum, quartus per cubum ejusdem valoris, & sic deinceps, habebitur æquatio quæsitæ. Tyronum gratia res exemplis illustratur.

Sit æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, quæritur loco ipsius alia, in qua coefficiens secundi termini 3 fit $= 2$.

Erit ergo $p = 3$, $a = 2$; & cum sit ex dictis $z = \frac{a}{p}$, erit $z = \frac{2}{3}$, proinde si per hunc valorem multiplicentur

radices hujus æquationis, assumpta nova incognita y , ut moris est, habebitur

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27} \\ \hline y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0 \end{array}$$

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, cujus loco quæritur alia, in qua quantitas cognita tertii termini sit 4. Erit $q = 9$, $a = 4$.

Quia vero $z = \sqrt[3]{\frac{a}{q}}$ ex dictis superius, erit $z = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, per hanc igitur quantitatem multiplicandæ sunt æquationis radices, nova incognita y assumpta, hoc est

$$\begin{array}{r} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27} \\ \hline y^3 - 8y^2 + 4y - 8 = 0 \end{array}$$

III.

III. Sit pro tertio casu eadem æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, quæ in aliam commutanda, cujus terminus ultimus fit $= 1$.

Erit $r = 27$, $a = 1$: quia vero ex annotatis superius $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$, erit $z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, per quam quidem quantitatem multiplicari debent radices datæ æquationis, ut factum vides, & nova incognita y surrogari.

$$x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \\ \hline y^3 - 4y^2 + y - 1 = 0 \end{array}$$

COROLL. Nemo non videt, hujus propositionis mysterium in eo esse, ut per *Analysim* inveniatur incognitæ illius z assumptæ quantitas, per quam multiplicatis datæ cujuscumque æquationis radicibus, alia nova oritur æquatio, in qua terminorum coefficientes, sive etiam ultimus terminus, sunt datæ quantitati æquales.

P R O P O S I T I O XIII.

Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.

I. **M**Ajor æquatio, ea nempe, quæ altioris gradus incognitam continet (si sint æqualis gradus, utraque per aliam) dividatur per minorem, omnino ut fit in aliis

aliis quantitatibus compositis *per Prop. 8. Cap. 1.* & neglecto quoto, continuetur divisio, donec incognita in residuo fiat minoris dimensionis, quam in divifore. Tunc enim divisor ipse dividatur per illud residuum, neglecto quoto; & sic semper, donec nihil ex divisione remaneat. Nam talis divisor erit maximus divisor communis, qui quaeritur, per quem æquationes illæ datæ sunt divisibiles. Exemplis res illustratur.

Sint duæ æquationes $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6 = 0$, & $-12x^2 + 30x - 18 = 0$, quarum maximus divisor communis quaeritur.

Cum utraque sit multiplicata per 3, dividi poterit per 3, ut termini minores fiant; erunt $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$, & $-4x^2 + 10x - 6 = 0$, imo hæc adhuc dividi potest per 2, unde fit $-2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Quia vero dividendo primum terminum x^3 per $-2x^2$, quorus est $\frac{x^3}{-2x^2} = -\frac{x}{2}$, hinc apparet, æquationem illam actu dividi non posse, quin prius multiplicetur per denominatorem -2 . Quo facto, habetur $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$. Hæc autem divisa per $-2x^2 + 5x - 3$ (neglecto quoto) dat residuum $+3x^2 - 7x + 4$.

Continuetur divisio, & quia dividendo $3x^2$ per $-2x^2$, quorus est $= -\frac{3}{2}$, signum est, æquationem dividendam prius multiplicari debere per denominatorem -2 , unde fit $-6x^2 + 14x - 8 = 0$; factaque divisione, habetur residuum $-x + 1$, seu $x - 1 = 0$, per quod dividendo quantitatem ipsam, quæ hætenus fuit divisor, scilicet $-2x^2 + 5x$

+ $5x - 3$, nihil remanet. Est ergo $x - 1$ maximus divisor communis duarum datarum æquationum, qui tamen multiplicari debet per eandem quantitatem, per quam primo æquatio utraque communiter fuit divisa, eritque $3x - 3 = 0$

II. Sint duæ æquationes $x^3 - 16x^2 + 61x - 66 = 0$, & $x^3 + 3x^2 - 34x + 48 = 0$, quarum maxima communis mensura quæritur. Dividatur prima per secundam, & neglecto quoto 1, per residuum $-19x^2 + 95x - 114$ (quod, ut simplicius evadat, dividitur per -19 , fitque $x^2 - 5x + 6$) dividatur secunda æquatio data: neglecto quoto x , habetur residuum $8x^2 - 40x + 48$, quod divisum per 8, dabit $x^2 - 5x + 6$. Hoc autem cum sit idem ac superius residuum, si fiat divisio, nihil remanet. Sunt ergo datæ æquationes divisibiles per $x^2 - 5x + 6$ maximum earum divisorem communem.

III. Sint duæ æquationes $x^4 - 4ax^3 + 12a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$, & $x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$. Dividatur prima per secundam, habetur 1 pro quoto: quo neglecto, remanet $-ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 12a^4$, quo diviso per $-a$, habetur primum residuum $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$.

Per hoc primum residuum dividatur secunda æquatio data, habetur quotus $x - 4a$: quo neglecto, remanet $12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4$, atque hoc diviso per $12a^2$, habetur secundum residuum $x^2 - ax + 6a^2$. Per hoc secundum residuum dividatur primum, nihil remanet. Maximus ergo divisor communis est $x^2 - ax + 6a^2$.

COROLL. I. *Ex primo exemplo constat, communem divisorem inventum tunc solum esse multiplicandum per quan-*
tita-

titatem, per quam divisa fuit æquatio, cum non una tantum, sed utraque æquatio per communem quantitatem divisa fuerit. Sic $x - 1$ multiplicatur quidem per 3, per quem divisa fuerat utraque æquatio, non autem per 2, per quem una tantum æquatio fuit divisa.

COROLL. II. Reperto communi duarum æquationum divisore, habentur pariter earum radices, & problematis resolutio. Nam divisoris communis radices sunt eadem ac radices earundem æquationum. Sic in secundo exemplo divisor communis, seu æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ habet radices 3 & 2, per Prop. 1. hujus num. 5., quas datarum æquationum easdem esse facile intelligitur.

SCHOL. I. Si æquationes fuerint plures, quam duæ, reperto communi divisore inter primam & secundam, inveniri deinde eodem modo debet divisor communis inter tertiam æquationem & divisorem communem jam inventum. Sed hoc perraro accidit.

SCHOL. II. Hanc regulam eandem esse ac regulam communis Arithmeticæ, qua invenitur maxima communis mensura, seu divisor inter duos numeros datos, iisdemque principiis inniti, nemo non videt.

PROPOSITIO XIV.

*Duarum æquationum divisorem communem
alia ratione investigare.*

I. **S**int duæ æquationes Propos. præc. quarum divisor communis quæritur, nempe $A \& B$

Ax^4

$$A \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$$

$$B \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$$

Sumatur ex A primi termini valor per Coroll. 1. Prop. 1. Cap. 5. erit $x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^4$, qui surrogetur in æquatione B loco x^4 , habebitur, facta terminorum inutilium reductione, æquatio

$$\text{Div. per } a \quad ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$$

$$C \quad x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3 = 0$$

Valor ipsius x^3 ex hac æquatione C sumptus ponatur in æquatione A , non solum loco secundi termini $-4ax^3$, sed etiam loco primi x^4 (multiplicando $-ax^2 - 4a^2x - 12a^3$ per x , ut fiat $= x^4$) erit primo $x^4 = -ax^3 - 4a^2x^2 - 12a^3x$; surrogato deinde valore ejusdem x^3 tam pro $-ax^3$ hujus æquationis, quam pro $-4ax^3$ æquationis A (hoc est pro $-5ax^3$) scilicet $5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4$, æquatio prima transformatur in sequentem

$$\begin{array}{r} x^4 \\ - 5ax^3 \\ 11a^2x^2 + 20a^3x \\ + 12a^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} = -4a^2x^2 - 12a^3x \\ + 5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4 \\ + 11a^2x^2 - 20a^3x \\ + 12a^4 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad 12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4 = 0$$

$$\text{Divid. per } 12a^2 \quad x^2 - ax + 6a^2 = 0$$

Sumatur ex hac postrema æquatione valor primi termini, erit per Coroll. cit. $x^2 = ax - 6a^2$, qui surrogetur ubique

Y

in ter-

in tertia æquatione C, etiam pro primo termino (ducendo $ax - 6a^2 \times x$, ut fiat ad x^3 æqualis) factaque terminorum substitutione, invenitur

$$6a^2x - 6a^2x + 12a^3 - 12a^3 = 0$$

Cumque termini omnes per signa contraria sese destruant, signum est, æquationem $x^2 - ax + 6a^2 = 0$, ex qua terminorum contrarietas ista derivatur, esse communem divisorem maximum datarum æquationum, qualem prorsus in secundo exemplo *Prop. præc.* invenimus.

II. Quæritur divisor communis duarum æquationum, quæ sequuntur *M & N*

$$M \quad x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14x + 5 = 0$$

$$N \quad x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0$$

Sumatur ex secunda valor primi termini per *Coroll. 1. Prop. 1. Cap. 5.* nempe

$$x^2 = -4x^2 - 8x - 8$$

Quo posito in prima æquatione (multiplicando illum per x , ut fiat ad x^4 æqualis) habetur $2x^2 + 6\frac{1}{2}x + 5 = 0$, & multiplicando per 2 ad fractionem eliminandam, erit $4x^2 + 13x + 10 = 0$. Hac divisa per 4, oritur æquatio R

$$R \quad x^2 + \frac{13x + 10}{4} = 0$$

$$4x^2 + 13x + 10 = 0$$

Valor hujus x^2 ex hac æquatione R desumptus per *Coroll. 1. Prop. 1. Cap. 5.* (hoc est $\frac{-13x - 10}{4}$) surrogetur in secunda æqua-

tione

tione N modo jam explicato, invenitur $\frac{49x + 98}{16} = 0$,

& dividendo per $\frac{49}{16}$, habetur quotus $x + 2 = 0$, adeoque $x = -2$.

Ponatur demum hic valor in æquatione tertia R , provenit

$$4 - \frac{26 + 10}{4} = 0, \text{ hoc est } \frac{-26 + 26}{4} = 0.$$

Proinde arguitur $x + 2 = 0$, unde ista terminorum oritur oppositio, esse datarum æquationum divisorem communem quæsitum.

SCHOL. Hoc problema sane ingeniosum, quod Joh. Hudenius (a) Belga vir subtilissimus excogitavit, usum quoque habet ad inveniendum communem divisorem duarum quarumcumque quantitatum. Nihil enim obstat, quin illæ considerari possint instar duarum æquationum, & æquari nihilo: imo in illis sumi potest ad libitum pro incognita quæcumque litera, quæ in utraque earum reperitur. Sic in duabus sequentibus quantitatis, vel æquationibus $d^2 - ad^2 + 2a^2b - 2abd = 0$ & $d^2 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$ sumi potest ad libitum pro incognita d , a , vel b ; & procedendo eo ordine, quem nos in duobus exemplis sequuti sumus, invenietur communis earum divisor $d - a$; siquidem d pro incognita fuerit assumpta.

(a) V. in fine Geometr. Renati des Cartes edit. 3. ann. 1683.

CAPUT VII.

*De Resolutione Aëquationum com-
positarum, quæ radices
rationales habent.*

PROPOSITIO I.

*Aëquationis datæ radices rationales, si quæ sint,
invenire.*

I. **I**Nveniantur omnes ultimi termini divisores per *Prop. 9. Cap. 1.* ex quibus una cum incognita fiant totidem æquationes simplices, & per illas figillatim dividatur æquatio: nam quæ exacte, & sine ullo residuo æquationem datam dividet, erit radix rationalis quæsitæ. Sit æquatio $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$. Divisores ultimi termini per *Prop. cit.* sunt 1, 2, 4, 8. Quia vero examinatione signorum dignoscitur per *num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* radices omnes esse veras, proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt omnes cum signo —, nempe $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x - 2$, quare nec + 1, nec + 2 possunt esse radices quæsitæ. Succedit autem divisio sine ullo residuo per $x - 4$, ut instituta divisione patet.

$x - 4$)

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0 & x^3 \\
 x^3 - 4xx & - 5x \\
 \hline
 0 - 5xx + 22x & + 2 \\
 - 5xx + 20x & \\
 \hline
 0 + 2x - 8 & \\
 + 2x - 8 & \\
 \hline
 0 & 0
 \end{array}$$

Est ergo $+4$ una ex radicibus quaesitis, & ex hac divisione oritur æquatio secundi gradus, nempe $xx - 5x + 2 = 0$. Cujus radices ut inveniantur, tentanda non est divisio per $x - 1 = 0$, aut per $x - 2 = 0$. Nam cum per has quantitates tota æquatio ex dictis divisibilis non fuerit, neque una ejusdem pars divisibilis erit.

Tentetur itaque divisio per $x - 4 = 0$, & per $x - 8 = 0$; sed cum neque per hos divisores divisio exacte succedat, signum est, alias duas radices non esse rationales. Quæ tamen obtineri poterunt per *Prop. 1. Cap. 8.*, eritque altera $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17}$, per quam si dividatur eadem æquatio secundi gradus $xx - 5x + 2 = 0$, emerget tertia radix quaesita $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{17}$.

II. Sit alia æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, cujus radices rationales inquiruntur.

Divisores ultimi termini per *Prop. 9. Cap. 1.* sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ex signis autem æquationis proposita per *num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* patet radices fore duas quidem veras, & unam falsam, proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt tam cum signo

gno +, quantum cum signo —, hoc est $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$ &c. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x + 1$. Sed exacte succedit per $x - 2$, per $x + 3$, & per $x - 4$. Sunt ergo radices quæsitæ +2, —3, +4, ut computanti fit evidens.

III. Demum fit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices rationales quæruntur.

Ex signis æquationis apparet *per num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* radices tres esse veras, & unam falsam. Inveniantur omnes divisores ultimi termini *per Prop. 9. Cap. 1.* Cum divisio exacte fieri non possit per $x - 1$, neque per $x + 1$, succedat autem sine ullo residuo per $x - 2$, erit +2 una ex radicibus veris.

Ex divisione hujusmodi oritur æquatio $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$, quæ frustra dividitur per $x - 2$, vel per $x + 2$, succedit tamen exacta divisio per $x - 3$. Habetur ergo +3 radix vera, & ex divisione oritur æquatio secundi gradus $x^2 + 1x - 20 = 0$. Cujus unam radicem esse veram, alteram falsam ex signis fati apparet. Dividatur itaque per $x - 4$, divisio succedit sine residuo, & quotus est +5, proinde aliæ duæ radices habentur +4, —5 una vera, altera falsa.

SCHOL. Æquationis divisionem per tot divisores tentare si cui res molesta sit, sequenti methodo uti poterit, quæ divisores illos ad pauciores reducit. Ceterum si nullus sit divisor, qui datam æquationem exacte & sine ullo residuo dividere possit, signum est, nullam dari radicem rationalem, quod notetur.

P R O P O S I T I O II.

Radices rationales protinus investigare.

I. **S**it æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus radices rationales quærimus. Inveniantur *per Prop. 9, Cap. I* divisores ultimi termini, nempe 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deinde æquationis datæ radices minuantur unitate *per Prop. 4. Cap. 6.* hoc est fiat $x - 1 = y$, ideoque erit $x = y + 1$, unde

x^3	$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1$
$- 9x^2$	$- 9y^2 - 18y - 9$
$+ 26x$	$+ 26y + 26$
$- 24$	$- 24$

Summa $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$

Divisores ultimi termini hujus secundæ æquationis sunt 1, 2, 3, 6. Cum autem radices hujus deficient unitate a radicibus datæ æquationis, hæ, addita unitate, fient æquales prioribus, hoc est

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

$$6 + 1 = 7$$

Ex omnibus itaque divisoribus ultimi termini primæ æquationis, nempe 24, illi tantum seligantur, qui cum his convenire, & utrique æquationi communes esse reperiuntur.

riuntur, scilicet 2, 3, 4, nam 7 non reperitur inter divisores primæ æquationis. Ecce tibi tres tantum divisores, ita ut tres radices (pauciores enim esse non possunt per num. 1. Prop. 1. Cap. 5.) data æquationis.

II. Quod si æquatio data radices habeat partim veras, partim falsas, divisores ultimi termini æquationis transformatæ & augeri & minui debent ea quantitate, qua minuta fuit radix æquationis propositæ, ut detegantur radices tam veræ, quam falsæ. Exemplo res fit clarissima.

Sit æquatio $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, quæ duas habet radices veras $+2$, $+3$, & duas falsas -4 , -1 , quæ tamen supponuntur non cognitæ. Minuatur æquatio unitate per Prop. 4. Cap. 6. hoc est, fiat $x - 1 = y$, erit $x = y + 1$, proinde

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\
 -15x^2 & -15y^2 - 30y - 15 \\
 +10x & +10y + 10 \\
 +24 & +24 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^4 + 4y^3 - 9y^2 - 16y + 20 = 0
 \end{array}$$

Radices veræ hujus æquationis deficiunt unitate a radicibus veris æquationis datæ per Cor. 2. Prop. 4. Cap. 6. Contra vero radices falsæ erunt unitate majores. Itaque divisores ultimi termini 20 (inter quos quæsitæ radices latent) si augeantur unitate, fient æquales radicibus veris datæ æquationis. Contra vero si minuantur unitate, fient æquales radicibus falsis ipsius æquationis datæ. Divisores ultimi termini sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 per Prop. 9. Cap. 1. qui unitate aucti fiunt 2, 3, 5, 6, 11, 21. Conferantur

cum divisoribus ultimi termini æquationis datæ, hoc est 24; nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; tres tantum utrique æquationi communes inveniuntur, scilicet 2, 3, 6. Ex quibus duæ sunt radices veræ quæsitæ, hoc est 2 & 3. Minuti vero unitate sunt 0, 1, 3, 4, 9, 19, qui si conferantur cum divisoribus æquationis datæ, nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, inveniuntur tres tantum cum his convenire, scilicet 1, 3, 4; ex quibus habentur duæ radices falsæ quæsitæ -1 , -4 .

COROLL. *Redactis hoc pacto ad paucissimos ultimi termini divisoribus, facile inveniuntur radices rationales, vel dividendo per illos datam æquationem, ut in Propositione antecedente factum est; vel illos substituendo in æquatione proposita loco incognitæ, ut docuimus in Propos. I. Cap. 6. num. 5. Ratio autem hujus methodi fundatur in Coroll. 1. & 2. Propos. 4. Cap. 6.*

SCHOL. *Hujus inventi laudem Jacobo a Waessenaer Ultrajectino egregio Geometræ Franciscus a Schooten (a) acceptam refert.*

P R O P O S I T I O III.

Idem problema in æquationibus literalibus.

SIt æquatio ex literis composita, cujus radices rationales inquiruntur,

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 - abx + abd = 0 \\ + bx^2 + adx \\ - dx^2 - bdx \end{aligned}$$

Z

I. Cum

(a) Comment. in lib. III. Geometr. Cartes. p. m. 307.

I. Cum singulæ radices appareant in secundo termino sub signo contrario *per num.2. Prop.1. Cap.6.* tentari debet divisio per $x - a = 0$, aut per $x + b = 0$, quæ cum exacte, & sine ullo residuo succedat, patet radices datæ æquationis esse $+a$, $-b$, $+d$.

II. Quod si æquatio sit magis composita, fiat æquatio ex singulis terminis, in quibus sunt eadem literæ, & supponantur æquales zero *per Cor.2. Prop.2. Cap.6.* ut sic obtineri possit incognitæ valor. Exemplo res fit clarior. Sed data æquatio

$$\begin{aligned} x^3 - 2ax^2 + a^2x - abb &= 0 \\ - bx^2 + abx - b^2 \\ + bbx \end{aligned}$$

Fiat æquatio ex omnibus terminis, in quibus reperitur quantitas bb , & supponatur æqualis zero, idest $bbx - abb - b^2 = 0$. Hæc dividatur per bb , quotus $x - a - b = 0$ est divisor, per quem si dividas æquationem datam, nihil remanet, proinde $a + b$ est una ex illius radicibus; & ex divisione oritur æquatio secundi gradus $x^2 - ax + bb = 0$ cujus radices facile erit invenire *per Prop.1. & 3. Cap.8.*

III. Sit demum æquatio, cujus radices rationales quæ-
runtur

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx \\ - cx^2 + adx^2 - acdx \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{aligned}$$

Fiat æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur
quan-

quantitas abd , eos supponendo æquales zero, nempe $-abdx + abcd = 0$, erit $abdx = abcd$, & $x = c$.

Dividatur æquatio proposita per $x - c = 0$, nihil remanet, proinde $+c$ est una ex illius radicibus. Divisa autem ipsamet data æquatione per $x - c = 0$, oritur æquatio tertii gradus, quæ sequitur.

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abd &= 0 \\ -bx^2 + adx & \\ -dx^2 + bdx & \end{aligned}$$

Fiat iterum æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur ad , eos supponendo æquales zero, hoc est $adx - abd = 0$, erit $x = b$; & cum divisio, quæ tentatur per $x - b = 0$, exacte succedat, habetur secunda radix datæ æquationis, eademque ratione reliquæ duæ obtineri possunt.

PROPOSITIO IV.

Alia methodus æquationes compositas resolvendi.

INveniendæ sunt radices æquationis propositæ, nempe

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ -bx^3 + acx^2 - abdx & \\ -cx^3 + adx^2 - acdx & \\ -dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

Primo dividatur æquatio in duas æquationes, quarum altera contineat omnes terminos, in quibus quantitas c reperitur, altera reliquos, erit

$$\begin{aligned} 1.^a \quad & -cx^3 + acx^2 - abcx + abcd = 0 \\ & + bcx^2 - acdx \\ & + cdx^2 - bcdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.^a \quad & x^4 - ax^3 + abx^2 - abdx = 0 \\ & - bx^3 + adx^2 \\ & - dx^3 + bdx^2 \end{aligned}$$

Patet, primam dividi posse per quantitatem c , secundam per x : quo facto, habetur

$$\begin{aligned} 1.^a \quad & -x^3 + ax^2 - abx + abd = 0 \\ & + bx^2 - adx \\ & + dx^2 - bdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.^a \quad & x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ & - bx^2 + adx \\ & - dx^2 + bdx \end{aligned}$$

Harum prima per secundam exacte dividitur, ut patet, & quotus est -1 ; unde apparet, haberi ex hac secunda æquatione divisorem exactum primæ. Per hanc si æquatio proposita dividatur, habebitur $x - c = 0$, una scilicet ex radicibus quæsitis. Restat autem æquatio ipsa ad gradum inferiorem depressa, scilicet

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abd &= 0 \\ - bx^2 + adx & \\ - dx^2 + bdx & \end{aligned}$$

Hæc

Hæc similiter dividatur in duas alias æquationes, in quarum una sint termini, in quibus quantitas b reperitur, in alia reliqui, erit

$$1.^a \quad -bx^1 + abx - abd = 0 \\ + adx$$

$$2.^a \quad x^3 - ax^2 + adx = 0 \\ - dx^2$$

Dividatur prima per b , secunda per x ; erit

$$1.^a \quad -x^2 + ax - ad = 0 \\ + dx$$

$$2.^a \quad x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx$$

Quarum prima per secundam exacte dividitur: nam quotus est -1 , & nihil remanet. Per hanc secundam igitur dividatur superior tertii gradus, habebitur $x - b$ pro secunda vera radice datæ æquationis, & remanet æquatio secundi gradus, videlicet

$$x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx$$

Quæ similiter divisibilis est in alias duas, nimirum

$$-ax + ad = 0, \text{ \& } x^2 - dx = 0$$

Harum una divisa per a , altera per x , habentur $-x + d = 0$, & $x - d = 0$; ex quibus prima cum sit exacte divisi-

vifi.

visibilis per secundam (nam quotus est — 1, & nihil remanet) dividi per hanc poterit æquatio superior secundi gradus, nempe

$$x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx$$

atque erit $x - d$ tertia radix quæsitæ : quarta autem $x - a$, facta divisione, habetur ex quotæ.

COROLL. I. *Vel ex hoc uno exemplo apparet, methodum in eo esse : 1.º Ut æquatio proposita in duas dividatur æquationes, quarum qualibet contineat terminos iisdem fere literis conflatos. 2.º Ut dividendo per quantitatem, quæ in illis communiter reperitur, earum æquationum terminos, ad inferiorem gradum æquationes illæ deprimantur. 3.º Ut observetur, an una æquatio per alteram sit exacte & sine ullo residuo divisibilis: nam tunc illa erit communis mensura, hoc est dividere poterit non solum illam æquationis partem, sed etiam totam æquationem datam, & aliquam ex illius radicibus exhibere. Ratio est, quia quantitas, quæ exacte dividit partes, etiam totum dividat necesse est. Ceterum æquatio proposita dividi poterat in duas alias alio, vel alio modo, ac a nobis factum est, ut consideranti patebit.*

COROLL. II. *Quod si non omnes æquationis datæ radices hac ratione inveniri possint, indicio est, reliquas esse irracionales, de quibus inferius.*

PRO-

P R O P O S I T I O V.

Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere.

I. **S**I data æquatio duas æquales radices habere supponitur, multiplicetur per quancunque progressionem Arithmeticam, hoc est primus terminus æquationis per primum terminum progressionis, secundus terminus per secundum &c. & productum, quod inde fit, erit $= 0$, sicuti æquatio ipsa data supponitur $= 0$. Deinde inveniatur æquationem duarum, datæ & productæ, communis divisor per *Prop. 13. Cap. 6.* per quem divisa ipsamet æquatio data, quoties opus sit, exhibebit radices æquales. Sit æquatio

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 8x & - & 4 = 0 \\ 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

$$3x^3 - 10x^2 + 8x - 0 = 0$$

Hæc divisa per x fit uno gradu inferior, nempe

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Divisor autem communis hujus & datæ æquationis est $x - 2 = 0$ per *Prop. 13. Cap. 6.* per quem data æquatio bis divisa dat radices 2, 2, 1.

II. Poterat autem eadem æquatio per progressionem Arithmeticam alio, vel alio modo multiplicari, scilicet

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 8x & - & 4 = 0 \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 \end{array}$$

$$0 - 5x^2 + 16x - 12 = 0$$

Hujus

Hujus enim & propositæ æquationis communis divisor est ut antea, $x - 2 = 0$.

III. Similiter si secundum terminum auferre libeat, ita progressio Arithmetica disponitur.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & -1 & -2
 \end{array} \\
 \hline
 x^3 \quad * \quad - 8x + 8 = 0
 \end{array}$$

Cujus quidem æquationis & datæ communis divisor semper reperitur $x - 2 = 0$.

IV. Si æquatio data tres habeat radices æquales, bis multiplicentur ejus termini per terminos progressionis Arithmeticæ, ut supra: si habeat quatuor radices æquales, ter multiplicentur: si quinque radices æquales, quater &c. Sit æquatio, quæ tres radices æquales habere supponitur.

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad * \quad - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \\
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array} \\
 \hline
 0 \quad * \quad - 12x^2 + 24x - 12 = 0 \\
 \begin{array}{ccc}
 0 & 1 & 2
 \end{array} \\
 \hline
 0 \quad + 24x - 24 = 0
 \end{array}$$

Communis divisor est $x - 1$; per quem si ter dividatur æquatio proposita, quotus dabit tres radices æquales $+1$, $+1$, $+1$. Quarta vero (cum in æquatione secundus terminus desit) erit -3 per *Prop. 1. Cap. 6. num. 4.*

Demonstr. Per progressionem Arithmeticam æquatio data in aliam convertitur, quæ continet easdem radices æquales una minus. Nam ut superiora exempla docent, ea potissi-

tissimum progressio assumitur, quæ vel incipit a zero, vel definit in zerum, ut æquatio, quæ inde producitur, fiat uno gradu inferior, ideoque radicum numerus decrescit, fitque una radice minor. Per iteratas autem ejusmodi multiplicationes ad eam æquationem devenitur, in qua una tantum æqualium radicum continetur: proinde si hujus & propositæ æquationis communis divisor inveniatur, ille æqualium radicum unam dabit.

COROLL. I. *Manifestum est, hac ratione tolli posse ex æquatione data terminum quem quis voluerit, collocando sub eo zerum, ut allata exempla docent.*

COROLL. II. *Si communis divisor nullo modo reperiri possit, tunc infertur, radices æquales esse irrationales, quæ non sunt hujus loci.*

SCHOL. I. *Communis divisor non est necesse, ut inveniatur inter æquationem datam & æquationem ex Arithmetica progressionem productam, ut in primo exemplo factum est: sed commodius aliquando sumitur inter duas æquationes productas, ut inter $3x^2 - 10x + 8 = 0$, & $-5x^2 + 16x - 12 = 0$, quæ habentur in eodem primo exemplo, quarum divisor communis est $x - 2$, ut prius.*

SCHOL. II. *Pulcherrimum hoc problema; quod Johanni Huddenio^(a) Belgæ acerrimi ingenii viro debemus, quanti sit usus in Geometria sublimiori pro ducendis Tangentibus, pro determinandis quæstionibus de Maximis, & Minimis aliisque pluribus, satis intelliget, qui ad eam gradum faciet.*

A a

CA.

(a) De reductione æquat. Reg. x. in fine Geom. Cartes. pag. m. 433.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

SI æquationum radices inveniri nequeant per ea, quæ in Capite præcedenti explicavimus, signum erit, radices irrationales, vel etiam imaginarias in illis contineri, aliaque via resolutionem illarum esse ineundam. Proinde regulas peculiare pro æquationibus ejusmodi trademus, a *quadraticis* incipiendo; quæ si fractionibus, aut radicalibus implicentur, prius ab illis expediri debent per ea, quæ docuimus in *Prop. 2. 8. & 9. Cap. 6.*

PROPOSITIO I.

*Æquationes secundi gradus, seu quadraticas
resolvere.*

I. **S**I æquatio *quadratica* sit pura, ut $x^2 = ab$, extracta hinc inde secunda radice, habetur valor quaesitus, nempe $x = \sqrt{ab}$. Eadem ratione $x^2 = 14400$, extracta pariter radice, erit $x = \sqrt{14400}$; & si per communem Arithmetica actu radix extrahatur, habetur $x = 120$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 + ax = b^2$, regula hæc erit: ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe ex $\frac{1}{2}a$, fiat quadratum $\frac{1}{4}aa$, quod utrique membro æquationis addatur, ut potentia fiat completa, unde radix secunda extrahi possit. Ecce exemplum. Sit æquatio data

x^2

$$x^2 + ax = bb$$

$$\text{Adde} \quad \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2} \quad \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = bb + \frac{1}{4}a^2$$

$$\text{Extr.rad.} \quad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Sit aliud exemplum $x^2 - 3ax = b^2$. Fiat ex dimidio coefficientis $\frac{3}{2}a$ quadratum $\frac{9}{4}a^2$, quod utrinque addatur, erit

$$\text{Adde} \quad \frac{\frac{9}{4}a^2}{\frac{9}{4}a^2} \quad \frac{\frac{9}{4}a^2}{\frac{9}{4}a^2}$$

$$x^2 - 3ax + \frac{9}{4}a^2 = b^2 + \frac{9}{4}a^2$$

$$\text{Extr.rad.} \quad x - \frac{3}{2}a = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2} + \frac{3}{2}a$$

Demonstratio ex ipsa potentia secunda genesi emanat. Nam in binomio ad potentiam secundam elevato quantitas secundi termini est duplum facti ex utraque binomia radice parte. Cum igitur habeatur (in primo exemplo) x pars una, erit $\frac{1}{2}a$ pars altera radice, ex qua potentia secunda completur.

COROLL. Hinc patet, in ejusmodi æquationibus radicem secundam obtineri, accipiendo summam, vel differentiam radicum primi & tertii termini potentia completæ. Accipitur summa, cum omnes termini sunt positivi, ut $x + \frac{1}{2}a$ in primo exemplo; differentia vero, si secundus terminus sit negativus, ut $x - \frac{3}{2}a$ in secundo exemplo.

SCHOL. I. Æquationes affectæ secundi gradus resolvuntur etiam facillime, sublato secundo termino per Prop. 5. Cap. 6. Sit enim eadem æquatio resolvenda $x^2 - 3ax = b^2$, seu $x^2 - 3ax - b^2 = 0$. Ut tollatur secundus terminus, fiat $x = y + \frac{3}{2}a$, erit

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 + 3ay + \frac{9}{4}a^2 \\ - 3ax & - 3ay - \frac{9}{4}a^2 \\ - b^2 & - b^2 \\ \hline & y^2 - \frac{9}{4}a^2 - b^2 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y^2 = \frac{9}{4}a^2 + b^2$, & extracta radice, $y = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. Ponatur hic valor loco y in æquatione $x = y + \frac{3}{2}a$, erit

$$x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2} \text{ omnino ut prius}$$

SCHOL. II. Omnis æquatio quadratica duas habet radices, alteram affirmativam, negativam alteram. Nam quadratum quodlibet, v. g. 25, tam oritur ex 5 X 5, quam ex - 5 X - 5. Proinde si fuerit æquatio $x^2 = ab$, valor erit $x = \pm \sqrt{ab}$, hoc est valor ipsius x tam habetur per radicem positivam $+\sqrt{ab}$, quam per negativam $-\sqrt{ab}$. Sic etiam in exemplo superiore Schol. I. radix positiva est

$x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$, negativa vero $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. Quod adeo certum est, ut si alterutra ponatur in æquatione data loco x, termini omnes evanescunt, proinde utraque est vera radix per num. 5. Prop. 1. Cap. 6. Brevitatis autem gratia utrumque signum apponunt, unum sub alio $\pm$. Quod pro iis, quæ dicenda sunt, notetur.

PROPOSITIO II.

Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.

Sit æquatio generalis $x^2 + 2px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes secundi gradus, ita ut $+2p$ repræsentet coefficientem secundi termini cum suo signo, & $+q$ ultimum terminum cum suo pariter signo, ut explicavimus in *Coroll. 1. Prop. 2. Cap. 6.* Summa radicum ejusdem æquationis sit $= 2f$, earumque differentia $= 2g$, erit radix major $f + g$, minor vero $f - g$ per *Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5.* Cumque utraque sit unus valor ipsius incognitæ x , erit $x = f + g$, & $x = f - g$. Fiant igitur (mutatis signis) æquationes simplices $x - f - g = 0$, & $x - f + g = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^2 - 2fx + ff &= 0 \\ -gg \end{aligned}$$

Quæ ex suppositione æqualitatis radicum, erit æqualis æquationi $x^2 + 2px + q = 0$. Fiat ergo terminorum comparatio (neglecto primo utriusque termino) erit $-2f = 2p$, unde habetur $f = -p$, & $ff = p^2$. Item $ff - gg = q$, seu $gg = ff - q$, & ponendo p^2 loco ff , erit $gg = p^2$

$-q$, extractaque radice, habetur $g = \sqrt{p^2 - q}$.

Determinato ita valore ipsarum f & g , erit radix major $f + g = -p + \sqrt{p^2 - q}$, minor vero $f - g = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

Co-

COROLL. Hinc habentur quatuor illæ formulæ generales pro æquatione quacunque secundi gradus resolvenda, de quibus in sequenti Propositione.

PROPOSITIO III.

Æquationes secundi gradus per formulas generales risolvere.

I. **Æ**quationes secundi gradus affectæ quatuor modis ratione signorum variari possunt, ideoque quatuor formulis generalibus exprimi solent, in quibus $2p$ semper denotat quantitatem cognitam secundi termini, q vero quantitatem cognitam tertii, videlicet

- I. $x^2 - 2px - q = 0$
- II. $x^2 + 2px - q = 0$
- III. $x^2 + 2px + q = 0$
- IV. $x^2 - 2px + q = 0$

II. Reperto valore incognitæ x per Prop. antec. habentur sequentes formulæ generales cum duplici signo $\pm$ ob duplicem radicem affirmativam & negativam ex dictis in Schol. 2. Prop. 1. hujus.

- I. $x = p \pm \sqrt{p^2 + q}$
- II. $x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$
- III. $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$
- IV. $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$

I. Pro

1. Proposita sit igitur æquatio secundi gradus resolvenda $x^2 - 10x - 6 = 0$.

Ex signis statim apparet, hanc æquationem pertinere ad primam formulam, $x^2 - 2px - q = 0$. Comparentur mutuo termini, erit $2p = 10$, & $p = 5$. Item $q = 6$.

Est autem radix primæ formulæ generalis $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, in qua si ponantur loco p & q earum valores, erit $x = 5 + \sqrt{25 + 6}$, seu $x = 5 + \sqrt{31}$. Altera ejusdem formulæ radix $x = p - \sqrt{p^2 + q}$, hoc est $x = 5 - \sqrt{31}$.

2. Sit æquatio $x^2 + 1x - 2 = 0$, quæ, ut ex signis liquet, pertinet ad secundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Fiat comparatio terminorum, erit $2p = 1$, unde $p = \frac{1}{2}$,

& $q = 2$. Radix formulæ secundæ est $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, ideoque positis loco p & q earum valoribus, habetur

$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$, seu $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$. Altera radix ejusdem formulæ est $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$, proinde $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$.

3. Sit æquatio $x^2 + 4x + 6 = 0$ pertinens ad tertiam formulam, ut ex signis patet, $x^2 + 2px + q = 0$. Comparando terminos utriusque, erit $2p = 4$ & $p = 2$, item $q = 6$. Radix autem generalis ejusdem formulæ est $x =$

$-p + \sqrt{p^2 - q}$, substitutis in ea valoribus p & q , erit $x = -2 + \sqrt{4 - 6}$, seu $x = -2 + \sqrt{-2}$. Altera radix erit $x = -2 - \sqrt{-2}$. Hinc apparet propositæ æquationis radices esse imaginarias.

4. Sit

4. Sit æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, quæ ad quartam formulam spectat propter signorum similitudinem, nempe ad $x^2 - 2px + q = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $2p = 6$, & $p = 3$, item $q = 8$, quibus valoribus p & q positis in formula radice generalis $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, erit una radix $x = 3 + \sqrt{9 - 8}$, seu $x = 3 + \sqrt{1}$, altera vero $x = 3 - \sqrt{1}$; vel una $x = 4$, altera $x = 2$: ambæ sunt positivæ.

COROLL. Contingit non semel, ut tertiæ & quartæ formulæ radices sint imaginariæ, cum scilicet q major est, quam p^2 , ut supra in tertio exemplo, quod solutioni problematum nihil obstat. Idem quoque accidit, si in æquatione desit secundus terminus, tertius autem sit cum signo +, ut $x^2 + q = 0$. Nam una radix erit $x = -\sqrt{-q}$, altera $x = +\sqrt{-q}$, proinde ambæ imaginariæ. Ceterum ubi ultimus æquationis terminus signo negativo afficitur, radices semper sunt reales, ut ex prima & secunda formula apparet.

PROPOSITIO IV.

Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.

I. **Æ**QUATIONES tribus tantum terminis constantes, quarum primus ad quatuor, ad sex, & ad altiores quoque dimensiones ascendit, & in quibus exponentes terminorum incognitorum habent inter se & zero eandem differentiam, hoc est sunt in eadem proportione Arithmetica, ut 4, 2, 0, vel 6, 3, 0 &c. dicuntur æquationes *derivativæ*.

riativaæ secundi gradus, & resolvuntur similiter ac ipsæmet secundi gradus æquationes, ut quæ afferuntur exempla docent.

Sit æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$. Pone $x^2 = y$, erit $x^4 = y^2$, unde oritur $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ si resolvatur per primam formulam generalem *Prop. antec.* habetur $y = 3 + \sqrt{13}$.

Quia vero posita fuit $x^2 = y$, erit $x = \sqrt{y}$, adeoque $x = \sqrt{3 + \sqrt{13}}$.

II. Sit æquatio $x^6 + 4x^3 - 12 = 0$, pone $x^3 = y$, erit $x^6 = y^2$, unde oritur $y^2 + 4y - 12 = 0$. Quæ si resolvatur per formulas generales *Prop. ant.*, cum ratione signorum pertineat ad secundam formulam, erit valor ipsius $y = -2 + \sqrt{16}$, seu $y = 2$. At vero cum posita fuerit $x^3 = y$, erit $x = \sqrt[3]{y}$, hoc est $x = \sqrt[3]{2}$.

Hæc omnia ex solutione problematum, quæ sequuntur, clarius elucescent.

PROBL. I.

Invenire quadratum, cui si addatur ejus radix, fiat æquale unitati.

Sit quæsitæ quadrati latus $= x$, erit per conditionem problematis æquatio

$$xx + x = 1$$

per *Prop. I.* adde

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \\ \hline xx + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ \text{Bb} \end{array}$$

Extr.

Extr. radix

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

adde

$$xx = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$x = + \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$xx + x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

P R O B L. II.

Duos numeros invenire, quorum summa & summa quadratorum, quæ ex ipsis sunt, subtracta, relinquit 78. Ad-
dita vero ad eorum factum, efficit 39.

SI numerorum quæstitorum summa $= 2x$, eorumque
differentia $= 2y$, erit major $= x + y$, minor $= x - y$
per Coroll. Theor. 3. Cap. 5. Sit vero $b = 39$, erunt $2b = 78$.

Sit fiant quadrata, ex eorum summa $2x^2 + 2y^2$ aufe-
ratur summa numerorum $2x$, erit per primam problema-
tis conditionem æquatio

$$\text{Div. per 2) } \begin{array}{l} 2x^2 + 2y^2 - 2x = 2b \\ x^2 + y^2 - x = b \end{array}$$

Quod si ad factum eorundem numerorum $x^2 - y^2$ adda-
tur eorum summa $2x$, oritur ex secunda problematis con-
ditione æquatio altera

$$\begin{array}{l} x^2 - y^2 + 2x = b \\ \text{Prop. 2. Cap. 5. } x^2 + y^2 - x = b \end{array}$$

$$\text{Div. per 2) } \begin{array}{l} 2x^2 + 1x = 2b \\ x^2 + \frac{1}{2}x - b = 0 \end{array}$$

Hæc

Hæc autem finalis æquatio pertinet ad secundam formulam generalem *Propos. 3. hujus*, ex qua habetur radix $x = -p + \sqrt{p^2 + q} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 39} = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$. Nam $p = \frac{1}{4}$, & $q = b = 39$.

Valor autem ipsius y innotescit ex prima æquatione $x^2 + y^2 - x = b$, ex qua $y^2 = b - x^2 + x$; proinde substituto valore modo invento pro x & x^2 , habetur $y^2 = 39 - 36 + 6 = 9$, unde $y = 3$ & $x + y = 9$, $x - y = 3$.

SCHOL. Clavius (*) putavit hoc problema, quod ipse ænigma vocat, difficillimum; pro cuius solutione ipsemet Geometriæ opem implorat, contenditque illud sine Geometria vix, aut nullo modo solvi posse. Quod quidem de Algebra Numerosa, quæ id temporis obtinebat, fortasse verum. Ceterum quam facile nunc per Speciosam a summis viris Vieta & Cartesio inductam hujusmodi problema sine Geometria resolvatur, jam vidimus. Atque hinc apparet quanta sit hujus supra illam utilitas & præstantia.

PROBL. III.

Invenire tres numeros in proportionem Arithmetica, quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2 & tertius per 3, producta sint æqualia numero dato 30. Quadrata vero quæ ex ipsis numeris fiunt, æqualia sint numero 66.

POne numerum datum $30 = a$, $66 = b$, & tres numeri quæsitæ vocentur A, B, C . Sit primus quæsitum $A = x$, tertius $C = y$, eorum summa $x + y$ si bifariam

Bb 2

fariam

(*) V. Algeb. Cap. xxxi. Ænigma 58. p. m. 343.

fariam dividatur, dabit *per Coroll. Theor. I. Cap. 5.* numerum secundum $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Sunt autem ex prima problematis conditione

$$\begin{array}{lcl} A & x \times 1 & = x \\ B & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \times 2 & = x + y \\ C & y \times 3 & = 3y \end{array}$$

$$A + B + C = 2x + 4y = a$$

Proinde

$$\begin{aligned} 2x &= a - 4y \\ x &= \frac{1}{2}a - 2y (= A) \\ \frac{1}{2}x &= \frac{1}{4}a - y \end{aligned}$$

Positoque hoc valore in quantitate $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y (= B)$ erit $B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y$.

Sunt ergo tres numeri quæsit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a - 2y \\ B &= \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y \\ C &= y \text{ (nam } 2B - A = C = y) \end{aligned}$$

Eorumque quadrata erunt

$$\begin{aligned} AA &= 4y^2 - 2ay + \frac{1}{4}aa \\ BB &= \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}ay + \frac{1}{16}aa \\ CC &= yy \end{aligned}$$

$$\text{Summa} = 5\frac{1}{4}y^2 - 2\frac{1}{4}ay + \frac{5}{16}aa = b$$

$$21y^2 - 9ay + 1\frac{1}{4}aa = 4b$$

Divid. per 21 $y^2 - \frac{3}{7}ay + \frac{5}{74}aa = \frac{4}{21}b$

Et

Et substitutis loco a & b numeris datis, erit

$$\begin{array}{r}
 y^2 - 12\frac{6}{7}y + 53\frac{4}{7} = 12\frac{4}{7} \\
 \text{Subtr.} \quad \quad \quad 53\frac{4}{7} \quad 53\frac{4}{7} \\
 \hline
 y^2 - 12\frac{6}{7}y = -41
 \end{array}$$

Hinc per Prop. 1. vel 3. hujus invenietur $y = 7$, proinde innotescant reliqui

$$\begin{array}{l}
 A = \frac{1}{2}a - 2y = 1 \\
 B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y = 4 \\
 C = y = 7
 \end{array}$$

PROBL. IV.

Datum numerum 26 in tres partes continuo proportionales Geometrice dividere, ut quadratum mediæ æquetur duplo facti mediæ & minimæ, & præterea sextuplo ejusdem minimæ.

Pone numerum datum dividendum $26 = a$, & sit trium proportionalium minima $= x$, media $= y$, erit maxima $= a - x - y$. Cum autem factum maximæ & minimæ sit æquale quadrato mediæ per Theor. 5. Cap. 5. erit

$$ax - xx - xy = y^2$$

Sed ex conditione problematis $y^2 = 2xy + 6x$, ergo

Divid. per x $ax - xx - xy = 2xy + 6x$

$$a - x - y = 2y + 6$$

Hinc

Hinc habentur tres partes proportionales

$$2y + 6$$

$$+ y$$

$$+ x$$

Summa

$$3y + x + 6 = a$$

Divid. per 3

$$3y = a - x - 6$$

$$y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x - 2$$

Ponatur brevitatis causa loco a numerus datus 26, erit

$$y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$y^2 = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

Cui æqualis supponitur $2yx + 6x$. Substituto proinde in hac quantitate pro $2y$ ejus valore, oritur æquatio

$$-\frac{2}{3}x^2 + 19\frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

Subtr.

$$\frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x \quad \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x$$

$$-\frac{7}{9}x^2 + 23\frac{7}{9}x = 44\frac{4}{9}$$

Mult. per 9

$$-7x^2 + 214x = 400$$

Divid. per 7

$$x^2 - 30\frac{4}{7}x = -57\frac{1}{7}$$

Hinc per Propos. 1. vel 3. hujus innotescet $x = 2$, y ($= -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$) $= 6$, & pars maxima $= 18$. Quæ simul conficiunt numerum 26.

PROBL. V.

Datis duobus numeris, duos alios invenire, inter quos datorum alter sit Geometrice, alter Arithmetice proportionalis.

Sit ex datis numeris alter $\equiv a$, alter $\equiv b$: quæsitum primus $\equiv x$, secundus $\equiv y$, erit per primam problematis conditionem

$$x \cdot a :: a \cdot y$$

Theor. 4. Cap. 3. $xy \equiv aa$, & $x \equiv \frac{aa}{y}$

Similiter per secundam problematis conditionem erit

$$x \cdot b :: b \cdot y$$

Theor. 1. Cap. cit. $x + y \equiv 2b$, hinc $x \equiv 2b - y$

Et (ob $x \equiv \frac{aa}{y}$) $\frac{aa}{y} \equiv 2b - y$

Multiplic. per y $aa \equiv 2by - yy$

Prop. 1. hujus $yy - 2by \equiv -aa$
adde b^2 b^2

$$yy - 2by + b^2 \equiv b^2 - aa$$

Extr. rad. $y - b \equiv \sqrt{b^2 - a^2}$

$$y \equiv b + \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$x (\equiv 2b - y) \equiv b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

Sit $a \equiv 3$, $b \equiv 5$, erit $y \equiv 5 + \sqrt{25 - 9} \equiv 5 + 4 \equiv 9$,
& x

& $x = 5 - \sqrt{25 - 9} = 5 - 4 = 1$. Inventi sunt ergo 1 & 9, inter quos datorum alter 3 mediat Geometricè, alter 5 Arithmetice.

Sit $a = 4$, $b = 5$, erit $y = 8$, $x = 2$, habentur ergo 2 & 8, inter quos unum datorum 4 est medius Geometricè proportionalis, alter 5 est medius Arithmetice.

PROBL. VI.

Duo mercatores societatem ineunt. Primo summam nescio quam posuit, & mansit in societate menses 12. Alter posuit aureos 30, quos in societate reliquit mensibus 17. Invenierunt lucrum esse aureorum $18\frac{3}{4}$. Primus pro pecunia in sortem collata una cum lucro habuit aureos 26. Quæritur quantum ipsemet primus posuerit.

ESto summa a primo posita $= x$, tempus, seu menses $12 = a$: summa alterius $30 = b$, menses $17 = c$; erit summa primi cum suo tempore $= ax$, summa alterius cum tempore $= bc$, & utriusque summa $= ax + bc$: lucrum ex societate factum sit $= d$. Sors autem primi cum lucro est $26 = f$. Ut innotescat lucrum primi, fiat

$$\begin{array}{l} \text{Cor. I. Theor. 4.} \\ \text{Cap. 4.} \end{array} \quad ax + bc : d :: ax : \frac{adx}{ax + bc}$$

Cui si addatur pecunia ab ipso in sortem collata, nempe x , habetur æquatio

$$x + \frac{adx}{ax + bc} = f$$

Et

Er ad tollendas fractiones multiplicando per $ax + bc$, habetur

$$\begin{array}{l} \text{Propos. 2.} \quad axx + bcx + adx = afx + bcf \\ \text{Cap. 6.} \quad \quad axx + bcx = bcf \\ \quad \quad \quad + adx \\ \quad \quad \quad - afx \end{array}$$

Positis autem numeris determinatis loco a, b, c & f , erit

$$12x^2 + 423x = 13260$$

$$\text{Divid. per 12.} \quad x^2 + 35 \frac{1}{4}x = 1105$$

Hinc per Prop. 1. vel 3. hujus invenitur $x = 20$ pro pecunia a mercatore primo posita.

SCHOL. Hoc problema fuit Florentiæ publice propositum an. 1653. Cumque diu insolutum remansisset, ubi ad notitiam Caroli Rinaldini illud venit, fuit ab eodem statim resolutum, ut ipse testatur in Arte Analytica Mathematicum pag. 526. Expedita tamen magis hæc nostra solutio est.

Problemata Geometrica .

P R O B L. I.

Datis in triangulo rectangulo perpendiculari AB , & aggregato hypotenusæ ac basis $AC + BC$, hypotenusam & reliquum latus invenire. Fig. 1.

SIt perpendicularis $AB = a$, aggregatum hypotenusæ ac basis $AC + BC = b$, & $AC = x$, erit $BC = b - x$, proinde per 47. l. 1. Eucl.

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b} = AC$$

$$BC (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

SCHOL. Ex æquatione ultima problematum erui possunt regulæ Arithmeticæ, quarum aliquas ad ceterarum exemplum hic subijciemus.

Regula Arithm. 1. Summa quadratorum perpendicularis (a^2) & aggregati hypotenusæ & basis (b^2) dividatur per duplum ejus aggregati ($2b$) quotus dabit hypotenusam AC .

Regula Arithm. 2. Ex quadrato aggregati hypotenusæ & basis (b^2) subtrahe quadratum perpendicularis (a^2), & residuum ($b^2 - a^2$) divide per duplum ejusdem aggregati ($2b$) quotus dabit basim BC .

P R O B L. II.

Datis in triangulo rectangulo basi BC & aggregato hypotenusæ & perpendicularis $AC + AB$, hypotenusam & perpendicularem invenire. Fig. 1.

SIt basis $BC = a$, aggregatum hypotenusæ & perpendicularis $AC + AB = b$, hypotenusam vero $AC = x$,
erit

erit $AB \equiv b - x$, & per 47. l. I. *Euch.* habetur in terminis analyticis

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{b^2 + a^2}{2b} = AC$$

$$\text{Et } AB (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

Regula Aritb. Summa quadratorum basis & aggregati hypotenusæ & perpendicularis ($a^2 + b^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat hypotenusam AC . Differentia vero eorundem quadratorum ($b^2 - a^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat perpendicularem AB .

COROLL. Tam ex primo quam ex secundo problemate habetur regula inveniendi in numeris infinita triangula re-
ctangula, quorum latera per numeros integros, & ratio-
nales exprimantur. Habentur enim tria latera $BC \equiv a$,

$$AC = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \text{ \& } AB = \frac{b^2 - a^2}{2b}, \text{ quibus ad eandem}$$

denominationem reductis (multiplicando $a \times 2b$), & dele-
to communi denominatore, erunt $BC \equiv 2ab$, $AC \equiv a^2 + b^2$,
& $AB \equiv b^2 - a^2$.

Sumantur itaque ad arbitrium pro a & b duo quicunque numeri. Sit $a \equiv 1$, $b \equiv 2$, erit $2ab \equiv 4$, $a^2 + b^2 \equiv 5$,
 $b^2 - a^2 \equiv 3$. Latera ergo trianguli rectxanguli quæsitæ sunt
3, 4, 5.

Sit $a = 5$, $b = 7$, erit $2ab = 70$, $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$, & $b^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Sunt ergo latera quæsitæ, 24, 70, 74, & sic de aliis infinitis.

P R O B L. III.

In triangulo quocunque ABC datis uno angulo BAC, latere AC adjacente, & reliquorum laterum $AB + BC$ summa, latus AB invenire. Fig. 2.

EX puncto C ad latus quæsitum AB demittatur perpendicularis CD. In triangulo rectangulo ADC ob datum angulum LAC & hypotenusam AC, dantur etiam latera AD, & CD per Probl. 2. Trigonomet. Tacquet. Ex data itaque laterum $AB + BC$ summa auferatur latus AD jam notum, relinquetur summa $BD + CD$ pariter nota. Quæritur latus BD.

Sit laterum $BD + BC$ summa data $= c$, latus $CD = b$, latus quæsitum $BD = x$, erit $BC = c - x$, & $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$ per Prop. 47. l. 1. Eucl. hoc est

$$x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$$

$$2cx = c^2 - b^2$$

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2c} = BD$$

Regula Arithm. Inventis per Trigonometriam lateribus AD & CD, si quadratum lateris CD (b^2) auferas

ras a quadrato aggregati laterum $BD + BC(c^2)$, & residuum $(c^2 - b^2)$ dividas per duplum ejusdem aggregati laterum $(2c)$ dabitur latus BD , quod additum lateri jam invento AD , dat latus quæsitum AB .

SCHOL. Hinc patet, Trigonometriam quoque opem suam Algebræ conferre. Nam sine illa longiori sane calculo opus fuisset. Hoc problemate Guil. Whiston ^(a) utitur ad calculum Planetarum Geometricum supputandum. At prolixiori circuitu hanc ipsam æquationem assequitur.

P R O B L. IV.

Datis tribus cujuscunque trianguli lateribus, superficiem invenire. Fig. 3.

Producatur, si opus sit, latus BC in D , in quod cadit a vertice A perpendicularis AD . Ponatur autem $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = x$, $CD = y$, erit $BD = c + y$.

Jam habetur per Prop. 47. l. 1. Eucl.

$$\begin{array}{l|l} \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 & \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \\ x^2 = b^2 - y^2 & x^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2 \end{array}$$

Proinde $b^2 - y^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$

$2cy = a^2 - b^2 - c^2$

$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$

Hinc

(a) Prælect. Astronom. Lem. vi. pag. 272. Londini 1707.

Hinc $y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}$

Substituto valore y^2 in superiori prima æquatione, & extracta deinde radice, oritur

$$AD = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2} \right)}$$

$$\text{hoc est } AD = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2} \right)}$$

Quod si altitudo AD multiplicetur per dimidium basis BC ($= \frac{1}{2}c$) hoc est per $\frac{1}{4}cc$ (ob signum radicale ex *Prop. 4. Cap. 4.*) erit superficies quæsitæ.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 + \frac{1}{8}b^2c^2 - \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{16}c^4 \right)}$$

Regula Arithmetica ad Geometriam practicam valde utilis, quam auctores communiter tradunt, est hujusmodi: ex laterum semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur tres differentiæ, quæ inter se multiplicentur, earumque productum ducatur in ipsam semisummam laterum: nam hujus producti radix quadrata erit area trianguli quæsitæ.

Vel sic: primo multiplicetur semisumma laterum per differentiam unius lateris, & fiat productum A . Secundo multiplicentur inter se differentiæ reliquorum duorum laterum, & fiat productum B . Tertio duo illa producta A & B invicem multiplicentur, & extrahatur inde radix quadrata, quæ dabit superficiem trianguli quæsitam.

$$\text{Semisumma later.} \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

$$\text{Differ. unius later.} \quad -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

$$\text{Productum A} \quad -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$$

$$\text{Differ. duor. lat.} \quad -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$$

$$+ \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$$

$$\text{Productum B} \quad -\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}a^2$$

Ductis invicem productis $A \times B$, oritur omnino ut supra

$$\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}b^2c^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 - \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{16}c^4$$

Cujus radix quadrata dat quæsitam trianguli superficiem

Sit $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, erit summa laterum $= 42$ & semisumma $= 21$. Differentiæ inter hanc & latera sunt 8, 7, 6, quarum productum $= 336$ si multiplicetur per semisummam 21 dat 7056. Cujus radix quadrata 84 dat trianguli superficiem quæsitam.

SCHOL. I. Verum quo pacto ex superiori equatione $\sqrt{\left(\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 \&c.\right)}$ regula hæc Arithmetica eruat, non illico apparet. Sed advertatur, tres quantitates a, b, c , quæ invicem simul multiplicantur, & nusquam ternæ in producto reperiuntur, necessario elidi debere per signa negativa & alternatim opposita; tertium autem productum oriri ex omnibus illis positive sumptis, scilicet

$$\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b+c}{2}$$

Ex harum enim multiplicatione habetur productum supra inven-

inventum. Cujus coefficientes fracti oriuntur ex eo, quod singulæ summæ divise sint per $\frac{1}{2}$, ut evidens est.

SCHOL. II. Porro egregii hujus problematis, teste Adriano Metio ^(a), auctor est Theon Alexandrinus, magnus Geometra & Astronomus. Dn. de la Hire ^(b) tanti fecit, ut illud Academiæ regię Parisiensi faciliiori solutione concinnatum proposuerit.

P R O B L. V.

In dato semicirculo ducta perpendiculari DE ad diametrum AC, ducere ab extremitate diametri rectam AB, ita ut pars intercepta FB æqualis sit semidiametro AO, vel CO. Fig. 4.

E Sto factum, ductisque BG parallela perpendiculari DE, & recta BC, sit diameter $AC = a$, $AE = b$, $AB = x$, erit $AF = x - \frac{1}{2}a$, cum supponatur $FB = AO$, vel $CO = \frac{1}{2}a$.

Ob triangula BAG & EAF similia erit $AF.AE :: AB.AG$, & in terminis analyticis

$$x - \frac{1}{2}a . b :: x . \frac{bx}{x - \frac{1}{2}a} \left(= \frac{2bx}{2x - a} \right) = AG$$

Similiter ob triangula ABC & BAG similia erit per Cor. Prop. 8. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

CA

(a) Geometr. Pract. part. 2. cap. 3. num. 4. (b) Memoires de l'Acad. des sciences an. 1700. & Acta Erudit. Lipsiæ an. 1704.

$$CA . AB :: AB . AG$$

$$a . x :: x . \frac{2bx}{2x-a}$$

$$x^2 = \frac{2abx}{2x-a}$$

Multipl. per $2x-a$

$$\text{Divid. per } 2x \quad \frac{2x^3 - ax^2 = 2abx}{x^2 - \frac{1}{2}ax = ab}$$

$$\text{Propos. 1.} \quad \text{adde} \quad \frac{\frac{1}{16}a^2}{\frac{1}{16}a^2}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{16}a^2 + ab$$

$$x - \frac{1}{4}a = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

$$\text{Extr. rad.} \quad x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

Innotescit ergo quantitas chordæ quæsitæ AB , quæ ducenda est a puncto A , ut imperatur. Etenim si ponatur $a = 4$

& $b = 1$, erit $x (= \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}) = 1 + \sqrt{5}$, ideoque ipsa chorda $AB = 1 + \sqrt{5}$.

Aliter (*Fig. 5.*) Completo circulo, producat DE in F , & sit diameter $AB = a$, $AE = b$, $DE = c$, $CG = AM$, vel $BM = \frac{1}{2}a$, $AC = x$, erit $AG = x - \frac{1}{2}a$.

Cum DF secta sit bifariam in E per *Prop. 3. l. 3. Eucl.*,

& non bifariam in G , erit $\overline{DE}^2 = DG \times GF + \overline{GE}^2$ per *Prop. 5. l. 2.* sed $DG \times GF = AG \times GC$ per *Prop. 35. l. 3.*

& $\overline{GE} = \overline{AG} - \overline{AE}$ per *Propos. 47. l. 1.* ergo $\overline{DE}^2 =$

$AG \times GC + \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$, hoc est in terminis analyticis

Dd

$c^2 =$

$$c^2 = x^2 - \frac{1}{2} ax - b^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2} ax = b^2 + c^2$$

Quæ quidem æquatio resolvitur per Prop. 1. hujus, & habetur $x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + b^2 + c^2}$, quæ a superiori non differt. Nam posita $AB(a) = 4$, & $AE(b) = 1$, erit $EB = 3$: proinde $DE(c) = \sqrt{3}$, cum fit media proportionalis inter AE & EB per Cor. Prop. 13. l. 6. Eucl. Erit ergo $c^2 = 3$, adeoque $\sqrt{\frac{1}{16}a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, & $x = 1 + \sqrt{5}$; atque hinc chorda $AC = 1 + \sqrt{5}$, ut prius.

P R O B L. VI.

Datis in circuli diametro AB duobus punctis D & E a centro C æquidistantibus, invenire in peripheria punctum F , a quo ductæ FD , FC , & FE sint in continua proportionem Geometricam. Fig. 6.

ESto F punctum quæsitum, a quo demittatur perpendicularis FG . Sit $DC = CE = a$, $AD = EB = b$, $FC = CA$, vel $CB = r$, $DG = x$, erit $AG = b - x$, & $GB = 2a + b + x$.

$$AG \times GB = 2ab + b^2 - 2ax - x^2 = \overline{FG}^2$$

$$\text{adde } \overline{GD}^2 = x^2$$

Prop. 47. l. 1. $\overline{FD}^2 = 2ab + b^2 - 2ax$

At

At $GE = 2a + x$, & $\overline{GE} = 4a^2 + 4ax + x^2$

adde. $\overline{FG} = 2ab + b^2 - 2ax - x^2$

Propos. cit. $\overline{FE} = 4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax$

Sunt autem ex conditione problematis FG, FC , & FD in continua proportionem Geometricam, ergo etiam eorum quadrata per *Theor. 6. Cap. 5.*, nempe $\overline{FE}, \overline{FC}, \overline{FD}$, & in terminis analyticis

$$4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax \cdot r^2 :: r^2 \cdot 2ba + b^2 - 2ax$$

Fiant porro facilioris calculi gratia quantitates notæ $4a^2 + 2ab + b^2 = m$, & $2ba + b^2 = n$, erit

$$m + 2ax \cdot r^2 :: r^2 \cdot n - 2ax$$

Tb. 4. Cap. 5. $mn + 2anx - 2amx - 4a^2 x^2 = r^4$

Sch. Prop. 1. $4a^2 x^2 + 2amx - 2anx = mn - r^4$

Cap. 5.

Div. per $4a^2$ $x^2 + \frac{m-n}{2a} \times x = \frac{mn-r^4}{4a^2}$

Fiat $\frac{m-n}{2a} = 2p$, & $\frac{mn-r^4}{4a^2} = q$, erit per *Cor. Prop. 2.*

Cap. 6. æquatio

$$x^2 + 2px - q = 0$$

Quæ quidem per *Prop. 3. hujus* facile resolvitur, eritque nota quantitas DG , seu punctum G , ex quo elevata perpendiculari GF , obtinetur in periphæria punctum quæsitum.

SCHOL. *Problemata Geometrica fere omnia constructionem Geometricam admittunt. Nos hoc loco Arithmeticas tantum regulas deduxisse contenti Geometricam constructionem ad caput ultimum referre statuimus, ne tyrones rerum multitudine & varietate perturbentur.*

C A P U T IX.

De Æquationibus Cubicis.

QUO calculus facilius evadat, supponitur jam secundus terminus ab æquatione sublatus: item fractiones, & termini radicales, ut in *Prop. 2. 8. & 9. Cap. 6.* docuimus.

Omnes æquationes Cubicæ, sublato secundo termino, ad aliquam sequentium formularum reducuntur

$$x^3 - px + q = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

$$x^3 + px - q = 0$$

P R O P O S I T I O I.

Explicatur æquationum Cubicarum genesis.

I. **S**It æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes cubicas secundo termino carentes, quæ, ut ex signis apparet, duas habent radices positivas, & tertiam negativam duabus illis positivis æqualem, alias secundus terminus non evanesceret *per num. 4. Prop. 1. Cap. 6.* Sint

Sint igitur duæ radices positivæ $f - g$, & $f + g$, erit earum summa $= 2f$, earumque differentia $= -2g$, & radix negativa $= -2f$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, & $x + 2f = 0$, ex quarum facto oritur æquatio tertii gradus indeterminata A , tres radices reales continens, duas quidem positivas, & tertiam negativam earum summæ æqualem, scilicet:

$$A \quad x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ -ggx - 2ggf$$

Comparentur hujus termini cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, cui ex hypothese æquatur, fiunt duæ æquationes.

$$1.^a \quad 3ff + gg = p, \text{ hinc } ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$$

$$2.^a \quad 2f^3 - 2ggf = q, \text{ hinc } f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$$

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$, repræsentans omnes æquationes cubicas, in quibus (ut signa indicant) sunt duæ radices negativæ, & una positiva earum summæ æqualis, alias secundus terminus non evanisset *per num. 4. Prop. I. Cap. 6.*

Sint igitur radices negativæ $-f + g$, & $-f - g$: earum summa $= -2f$ dat radicem positivam illis æqualem, earumque differentia erit $= -2g$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x + f - g = 0$, $x + f + g = 0$, & $x - 2f = 0$, ex quarum facto oritur æquatio indeterminata B , continens tres radices reales, duas negativas, & tertiam positivam, scilicet

$$B \quad x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ -ggx + 2ggf$$

Cujus

Cujus terminis comparatis cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px - q = 0$, cui æqualis supponitur, fiunt duæ æquationes

$$1.^a - 3ff - gg = -p, \text{ hinc } ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$$

$$2.^a - 2f^3 + 2ggf = -q, \text{ hinc } -f^3 + ggf = -\frac{1}{2}q$$

Ex utraque æquatione $A \& B$, in quibus f supponitur major, quam g (alias $f - g$ non esset radix positiva, nec $-f + g$ esset radix negativa, ut fuit suppositum) nonnulla inferuntur, ex quorum notitia maxime pendet æquationum cubicarum resolutio, scilicet

1. Si duæ radices (sive positivæ, sive negativæ illæ sint) æquales existant; tunc cubus ex triente quantitatis cognitæ tertiæ termini est æqualis quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

Nam in hoc casu in duabus æquationibus simplicibus $x - f + g = 0 \& x - f - g = 0$, earum differentia seu quantitas $2g$ fit nulla, hoc est $2g = 0$, proinde in æquatione A (idem fit in æquatione B) evanescit quantitas $-ggx + 2ggf$, & remanet $x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$. Comparantur hi termini residui cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px - q = 0$, oriuntur duæ æquationes; prima $-3ff = -p$, seu $ff = \frac{1}{3}p$, secunda $-2f^3 = -q$, seu $f^3 = \frac{1}{2}q$. Harum prima elevetur ad cubum, & ad quadratum altera: erunt $f^6 = \frac{1}{27}p^3 \& f^6 = \frac{1}{4}qq$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

2. Si cubus idem ex triente quantitatis cognitæ tertiæ termini major fuerit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est si $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc tres radices reales erunt inæquales.

Nam

Nam comparatis terminis æquationis A cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, habentur æquationes illæ duæ, prima $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$, secunda $f^3 - ggf = \frac{1}{3}q$, & elevando primam ad cubum, oritur

$$f^6 + ggf^3 + \frac{1}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Elevando autem secundam ad quadratum, habetur

$$f^6 - 2ggf^3 + g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Si hæc ex illa auferatur, erit residuum

$$3ggf^3 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$$

Jam vero quia ex dictis f major est quam g , et it quoque $3ggf^3$ major quam $\frac{2}{3}g^4ff$ (nam divisa utraque per $ggff$, quotus $3ff$ major erit quam $\frac{2}{3}gg$) ideoque cum in superiori æquatione $3ggf^3 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ unum membrum sit positivum, erit quoque alterum membrum, nempe $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$, ergo $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

3. Si idem cubus fuerit minor quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, tunc æquatio duas radices imaginarias continebit. Nam si omnes reales essent, fieret ex dictis $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, vel $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

Hæc omnia vera existunt, quacunque alia formula generali assumpta, si pari ratione procedatur.

COROLL. Ubi non adsunt radices imaginariæ, sed omnes sunt reales, tertius terminus semper apparet cum signo —, nempe — p . Si duæ radices sint positivæ, & rationales, ultimus terminus erit cum signo + q . Si negativæ, & rationales, erit — q . Contra vero si duæ radices irrationales sint, ultimus terminus erit $\pm q$.

PRO.

PROPOSITIO II.

*In æquationibus cubicis an duæ radices sint æquales,
& quænam sint, explorare.*

I. **S**IT data æquatio $x^3 - 12x + 16 = 0$. Patet per *Propos. I. ejusque Coroll.* haberi tres radices reales, duas quidem positivas & tertiam negativam; quæritur an duæ illæ positivæ sint æquales. Fiat comparatio terminorum cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, erit

$$\begin{array}{l|l} p = 12 & q = 16 \\ \frac{2}{27}p^3 = 64 & \frac{1}{4}qq = 64 \end{array}$$

Habentur ergo per *Prop. præc.* duæ radices æquales.

II. Ut una ex illis inveniatur, dividatur triplum ultimi termini per duplum coefficientis tertii termini, quotus

dabit radicem quæsitam, hoc est $\frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = 2$. Tertia itaque radix erit -4 , earum summæ æqualis per *num. 4. Prop. I. Cap. 6.*

Demonstr. Nam ex *Prop. præc.* cum radices sunt æquales, tunc in æquationibus simplicibus $x - f + g = 0$ & $x - f - g = 0$ fit $g = 0$; hinc facta ex illis multiplicatione, & comparatis terminis æquationis, quæ inde oritur, cum terminis formulæ generalis, ut in *Prop. cit.* factum est, æquatio illa $3ff + gg = p$, fiet $3ff = p$; atque hinc $ff = \frac{1}{3}p$. Similiter $2f^3 - 2ggf = q$, fit $2f^3 = q$, unde oritur $f^3 = \frac{1}{2}q$. Dividatur jam hæc æquatio per illam, hoc est primum

num membrum per primum & secundum per secundum membrum, erit $f' : ff = \frac{1}{2} q : \frac{1}{2} p$, unde $f = \frac{3q}{2p}$, quæ quidem æquatio allatam regulam nobis exhibet.

P R O P O S I T I O III.

In æquationibus Cubicis an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare.

I. **S**It æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, quæ tres radices reales habet, duas quidem positivas, & tertiam duabus illis æqualem negativam, per Cor. Prop. I. hujus. Quæritur primo, an radix illa negativa, alterutra positiva major, sit rationalis.

Subtrahatur quantitas p ex quadrato proxime majori, & per residuum dividatur q . Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, erit ipse idem radix rationalis quæsitæ. Si vero successive nullum reperiatur quadratum majus p , quod hunc præstet effectum, signum est radicem illam esse irrationalem.

Sit exemplum $x^3 - 39x + 70 = 0$ (facta comparatione cum terminis formulæ generalis) erit $p = 39, q = 70$. Quadratum proxime majus quam p est $= 49$, ex quo subtracto p , erit $49 - 39 = 10$: per hoc residuum dividatur $q = 70$, quotus 7 æqualis radici quadrati assumpti dat radicem rationalem negativam quæsitam.

Explorandum deinde sit, an aliqua ex radicibus positivis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam

E e

p,

p , quod subtrahatur ex ipso p , & per residuum dividatur q . Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, ille dabit radicem rationalem quæsitam. Si vero nullum successive quadratum reperiatur minus ipso p , quod hunc præstet effectum, signum est, radices illas esse irracionales.

Sit eadem æquatio, quæ prius, $x^2 - 39x + 70 = 0$, cum sit $p = 39$, $q = 70$, quadratum proxime minus p , erit $= 36$, quo subtracto ex p , fit $39 - 36 = 3$, & dividendo per hoc residuum quantitatem $q = 70$, quotus $= 23 \frac{1}{3}$ non est radix assumpti quadrati.

Sumatur quadratum adhuc minus, nempe 25, quo subtracto ex p , erit $39 - 25 = 14$, per quod residuum dividendo $q = 70$, habetur quotus $= 5$, æqualis radici quadrati assumpti, qui dat unam ex radicibus positivis rationalem, nempe 5.

II. Sit æquatio generalis $x^2 - px - q = 0$, quam ex *Propos. I. hujus*, ejusque *Coroll.* liquet habere tres radices reales, duas quidem negativas & tertiam positivam illis æqualem, proinde alterutra negativa majorem. Quæritur, an radix illa positiva sit rationalis. Regula est eadem.

Sit exemplum $x^2 - 13x - 12 = 0$, erit $p = 13$, & $q = 12$. Quadratum proxime majus quam p est $= 16$, ex quo subtrahatur p , erit $16 - 13 = 3$, & dividendo per hoc residuum $q = 12$, habetur quotus, qui est æqualis lateri quadrati assumpti, proinde radix rationalis quæsitæ $= 4$.

Quæritur deinde, an aliqua ex radicibus negativis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam p , hoc est 9, quod ex ipso subtrahatur, erit $13 - 9 = 4$, per quod residuum diviso $q = 12$, habetur quotus æqualis lateri

teri quadrati assumpti, & radix rationalis quæsitæ, nempe -3 .

Demonstr. Positis duabus radicibus positivis (ut in *Propos. 1. hujus*) $f+g$ & $f-g$, earum summa $2f$ dat radicem negativam illis æqualem, ejusque quadratum $= 4ff$, ex quo subtrahatur $3ff + gg (=p)$, residuum est $4ff - 3ff - gg$, hoc est $ff - gg$; per quod residuum si dividatur $2f - 2ggf (=q)$ remanet $2f$, radix scilicet quadrati $4ff$ & æquationis; unde patet ratio regulæ pro prima parte.

Pro altera parte fiat ex aliqua radice, sive positiva $f-g$, sive negativa $-f+g$ quadratum $ff - 2gf + gg$, quod subtrahatur ex $3ff + gg (=p)$, residuum erit $2ff + 2gf$, per quod dividendo $2f - 2ggf (=q)$, quotus dat $f-g$ radicem scilicet quadrati & æquationis; unde evidens est ratio secundæ partis problematis.

COROLL. I. Tum ex praxi, tum ex demonstratione patet, ex quadrato assumpto subtrahi coefficientem p , ubi maxima radicum inquiritur: contra vero quadratum assumptum subtrahi debere ex coefficiente p , ubi radix una ex minoribus quæritur. Quod si in neutro casu prodeat ultimi termini q divisor talis, ex cujus divisione habeatur quotus, qui sit assumpti quadrati latus, signum est, radices illas quæsitæ esse irrationales, ut ex *Propos. sequenti* clarius apparebit.

COROLL. II. Inventa una ex radicibus rationalibus, sive illa positiva, sive negativa sit, dividitur per illam æquatio, quæ sit secundi gradus, & aliæ duæ radices facile innotescunt per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.*

SCHOL. I. Si radix inventa, quæ sit $= a$, ponatur
E c 2 dua.

duarum reliquarum summa, erit illa coefficientis secundi termini in æquatione quadratica, quæ reliquas duas radices continet; & si per illam dividatur ultimus æquationis

data terminus q , erit $\frac{q}{a}$ productum duarum ipsarum radicum in æquatione quadratica contentarum, nempe $x^2 - ax$

$+ \frac{q}{a} = 0$, si radices illæ positivæ sint; vel $x^2 + ax - \frac{q}{a} = 0$,

si negativæ; adeoque in primo casu radix una positiva erit

$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$, altera $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. In

secundo casu una negativa $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$,

altera $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. Sic in superiori æqua-

tione, $x^3 - 13x - 12 = 0$, cum inventa fuerit radix positiva $= 4$, quæ reliquis duabus negativis equalis esse de-

bet, si dicatur a , erit $\frac{q}{a} = \frac{12}{4} = 3$, proinde ex allata

formula erit una radix negativa $x = -2 - \sqrt{4 - 3}$

$= -3$, altera $x = -2 + \sqrt{4 - 3} = -1$.

SCHOL. II. Ubi duplex signum occurrit $\pm$ vel $\mp$; hæc est regula: in primo casu sumitur signum positivum, in secundo negativum. Plerunque tamen $\pm$ significat quantitatem illam tum positive, tum negative posse usurpari, ut in Schohl. 2. Prop. 1. Cap. 8. dictum est.

PROPOSITIO IV.

*Æquationes cubicas, quæ duas radices imaginarias
& realem continent, expedire.*

Æquationes cubicas secundo termino carentes tunc duas radices imaginarias continere certum est:

1. Cum tertius terminus p afficitur quidem signo $-$, sed $\frac{1}{27}p^3$ minus est quam $\frac{1}{4}qq$, ut in Prop. 1. hujus dictum est, & tunc æquatio generalis est $x^3 - px \pm q = 0$.

2. Cum tertius terminus signo $+$ afficitur, in quo casu formula generalis est $x^3 + px \pm q = 0$.

3. Demum cum æquatio secundo & tertio termino caret, (quæ æquatio pura tertii gradus dicitur) ut $x^3 \pm q = 0$, tunc autem radix realis semper erit $x = \sqrt[3]{\pm q}$.

In ejusmodi autem æquationibus habetur $-q$, ubi radices imaginariæ negativæ sunt: habetur $+q$, ubi radices imaginariæ sunt positivæ; adeoque in formulis generalibus ponitur utrumque signum $\pm q$.

In his resolvendis quæritur primum radix realis, quæ erit vel positiva, vel negativa, semper æqualis summæ duarum radicum imaginariarum, alias secundus terminus tolli non potuisset. Ipsa vero radix realis potest esse rationalis & irrationalis. An sit rationalis ita detegitur.

I. Sumatur quadratum minus, vel majus quam p , cui addatur $\pm p$; hoc est si in data æquatione sit $-p$, sumatur $-p$, si vero sit $+p$, sumatur $+p$; & per hoc residuum, vel summam dividatur q . Si divisio dat quotientem,

tum, qui sit radix quadrati assumpti, habetur radix rationalis quæsitæ, ut in primo & secundo exemplo sequenti; alias est irrationalis, ut in tertio exemplo.

Data sit æquatio $x^2 - 1x + 6 = 0$, quæ comparari debet cum formula generali $x^2 - px + q = 0$. Cum autem $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}$, minor sit quam $\frac{1}{2}qq = 9$, jam manifestum est, duas radices imaginarias, & quidem positivas ob $+q$ in ea delitescere. Sumatur quadratum 4, cumque habeatur $-p = -1$, per quadratum $4 - 1 = 3$ dividatur $q = 6$, quotus, qui est latus quadrati assumpti, dat radicem realem rationalem negativam -2 per num. 4. *Propos. 1. Cap. 6.*

Radices imaginariæ habentur per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.*, nempe $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam data æquatio si dividatur per radicem rationalem inventam, deprimitur ad secundum gradum, ut patet.

II. Data sit æquatio $x^2 + 27x - 28 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^2 + px - q = 0$, & signum $+p$ indicat duas radices imaginarias in ea contineri: quæritur radix rationalis ejusdem. Sumatur quadratum 1, cui addatur $p = 27$, & per hanc summam $1 + 27 = 28$ dividatur $q = 28$: quotus 1, cum sit latus quadrati assumpti, dat radicem rationalem quæsitam.

Radices vero imaginariæ (depressa æquatione ad secundum gradum) habentur per *Propos. 1. & 3. Cap. 8.* —

$-\sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, & $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, negativæ quidem, ut æquationis datæ signa indicant, proinde radix realis necessario positiva est.

III. Sit æquatio $x^2 - 6x - 16 = 0$, quæ convenit cum

cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, & quia $\frac{1}{2}p = 8$ minus est quam $\frac{1}{4}qq = 64$, signum est, haberi duas radices imaginarias. Videndum, an radix realis sit rationalis. Sumatur quadratum 4, cui addatur $-p = -6$, & per summam $4 - 6 = -2$ diviso $-q = -16$, habetur $+8$, quod quidem non est latus quadrati assumpti. Sumatur aliud successive quadratum, nempe 9, cui addatur $-p = -6$, & per summam hanc $9 - 6 = 3$ dividatur $-q = -16$. Sed hoc cum fieri non possit exakte & sine residuo, sumatur successive aliud quadratum majus, nempe 16, quod additum ad $-p = -6$, summa fit 10, per quam pariter non est divisibilis sine residuo quantitas $q = 16$. Et cum aliud & aliud quadratum frustra ad hunc effectum assumatur, signum est, radicem realem esse irrationalem, alia sane methodo inferius inveniendam per Prop. 6.

Demonstr. fere eadem est ac præc. Propos. Nam si supponatur duæ radices imaginariæ negativæ $-f + \sqrt{-3gg}$, & $-f - \sqrt{-3gg}$, ex quibus fiant æquationes simplices $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$ & $x + f + \sqrt{-3gg} = 0$, earum summa 2f dabit radicem realem positivam, quæ ob secundum terminum, quo æquatio caret, illis debet esse æqualis. Habetur itaque $x - 2f = 0$. Multiplicentur tres hujusmodi æquationes, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx - 2f^3 &= 0 \\ + 3ggx - 6ggf & \end{aligned}$$

Et facta comparatione cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px - q = 0$, erit

$$-3ff + 3gg = \pm p, \quad \& \quad -2f^3 - 6ggf = -q$$

Quod

Quod si radices imaginariæ positivæ fuerint, scilicet $f + \sqrt{-3gg}$, & $f - \sqrt{-3gg}$, tunc radix realis earum summæ æqualis ob secundum terminum, qui deest, necessario erit negativa, nempe $-2f$, factaque, ut supra, multiplicatione trium æquationum simplicium, oritur

$$x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ + 3ggx + 6ggf$$

Comparatis hujus terminis cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px + q = 0$, habetur

$$-3ff + 3gg = \pm p, \text{ \& } 2f^3 + 6ggf = q$$

Proinde si $4ff$ (quadrato radiceis realis $\pm 2f$) addatur $-3ff + 3gg = \pm p$, summa erit $4ff - 3ff + 3gg$, hoc est $ff + 3gg$, per quam si dividatur $-2f^3 - 6ggf = -q$ in primo casu, vel $2f^3 + 6ggf = q$ in secundo casu, quotus dabit radicem realem quæsitam $\pm 2f$.

SCHOL. In æquationibus puris tertii gradus $x^3 \pm q = 0$

præter radicem realem $x = \sqrt[3]{q}$, vel $x = \sqrt[3]{-q}$, dantur quoque aliæ duæ radices, quæ ex dictis in Prop. imaginariæ sunt. Hæ autem sic inveniuntur. Dividatur $x^3 - q$

$= 0$ per ejus radicem realem inventam $x - \sqrt[3]{q} = 0$,

quotus $x^2 + x\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q}^2$ erit æquatio secundi gradus, quæ duas radices imaginarias continebit. Fiat brevitatis gratia $q = 8$, erit $x^3 - 8 = 0$, ejusque radix realis $x - 2 = 0$, per quam dividendo $x^3 - 8 = 0$, habetur æquatio secundi gradus $x^2 + 2x + 4 = 0$, cujus radices, ut ex signis patet, imaginariæ sunt, & quidem negativæ, nempe

nempe $-1 + \sqrt{-3}$, $\bar{O} -1 - \sqrt{-3}$. Similiter divisa æquatione $x^3 + 8 = 0$ per ejus radicem $x + 2 = 0$, invenitur $x^2 - 2x + 4 = 0$, quæ dat duas radices imaginarias positivas $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$. Sic etiam si fiat $q = 1$, seu $x^3 - 1 = 0$, erunt tres ipsius unitatis radices cubicæ 1 , $-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$, $\bar{O} -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}$.

P R O P O S I T I O V.

Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.

I. Sit æquatio data $x^3 + 12x = 427$, cujus una radix rationalis inquiritur.

Quia incognitæ cubus minor est cubo cognitæ, hoc est $x^3 < 427$, nam $x^3 = 427 - 12x$; sumatur radix cubica ipsius 427 proxime minor, nempe 7, ejusque cubus 343 subtrahatur ex ipsa quantitate cognita 427, subtracto ex altera parte incognitæ cubo x^3 . Ex residuo $12x = 84$ habetur $x = 7$, radix æquationis, assumptæ radici cubicæ æqualis, nempe

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x = 427 \\ \text{Subtr.} \quad x^3 \qquad \qquad = 343 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 12x = 84 \\ \text{Divid. per 12} \quad x = 7 \end{array}$$

II. Sit æquatio proposita $x^3 - 12x = 1584$: cum sit $x^3 > 1584$, nam $x^3 = 1584 + 12x$; sumatur radix cubica proxime major ipsius 1584, nempe 12, ejusque cubus

Ff

bus

bus 1728 subtrahatur ex ipso 1584, subtracto pariter incognita cubo x^3 , habetur radix quasita 12 assumptæ radici æqualis

$$\begin{array}{r} x^3 - 12x = 1584 \\ \text{Subtr. } x^3 \quad 1728 \\ \hline \end{array}$$

$$-12x = -144$$

$$x = 12$$

III. Sit æquatio $x^3 + 27x = 28$, ut in præced. Prop. facile cognoscitur cubum x^3 minorem esse cubo ipsius 28: nam $x^3 = 28 - 27x$. Radix cubica proxime minor ejusdem 28 est 3, ejusque cubus 27, qui subductus a 28 relinquit 1: proinde fieret $x = \frac{1}{3}$, qui non est valor quasitus, ut patet. Sumpta radice cubica adhuc minori, nempe 2, factæque cubi subtractione, idem sequitur inconveniens: haberetur enim $x = \frac{20}{27}$. Sumatur itaque pro radice cubica ipsius 28 unitas, ejusque cubo 8 subtracto ex eodem 28, habetur $x = 1$ radix quasita.

$$\begin{array}{r} x^3 + 27x = 28 \\ \text{Subtr. } x^3 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

Div. per 27

$$\begin{array}{r} + 27x = 27 \\ \hline x = \frac{27}{27} = 1 \end{array}$$

COROLL. Patet ratio, cur in hoc tertio exemplo radix cubica proxime minor ad rem non fuerit; sed multo minor, imo omnium minima apte fuerit assumpta. Nam cubus incognitæ x minimam habet rationem ad quantitatem 28. Adduntur enim illi $27x$, ut habeatur æquatio. Hoc pro similibus casibus adveniat.

SCHOL.

SCHOL. *Æquationes cubicæ, de quibus hætenus egimus, in quibus scilicet una saltem radix rationalis inventa fuit, poterant certe resolvi per ea, quæ diximus in Cap. 7., sed quis non videt hanc viam esse breviorē, cum opus non sit plures ultimi termini divisores tentare, pluresque divisiones peragere? sentiant aliud qui volunt.*

PROPOSITIO VI.

Æquationes Cubicæ, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.

I. **S**it æquatio $x^3 - px - q = 0$, in qua duas radices imaginarias & realem irrationalem contineri jam constet per Prop. 4. & 5. *hujus*, inveniri debet ipsa radix irrationalis.

1. Subtrahatur $\frac{1}{27} p^3$ ex $\frac{1}{27} qq$, & ex residuo extrahatur radix quadrata, cui addatur $\frac{1}{3} q$, dimidium ultimi termini. Et ex hac summa extracta radice cubica, habetur prima pars radices realis irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27} q + \sqrt{\frac{1}{27} qq - \frac{1}{27} p^3}}$$

2. Dividatur quantitas p per triplum primæ partis radices jam inventæ, quotus dabit alteram radices partem priori addendam, scilicet

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{27} q + \sqrt{\frac{1}{27} qq - \frac{1}{27} p^3}}}$$

Ef 2

For

Formula proinde generalis quæsitæ radicis est hujusmodi

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{3}p$$

Sit exemplum æquatio $x^3 - 6x - 16 = 0$, in qua per *Prop. præc.* radix realis est irrationalis: facta terminorum comparatione cum formula generali, erit $p = 6$, & $q = 16$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = 8$, & $\frac{1}{4}qq = 64$, hinc $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = 64 - 8 = 56$.

Hujus residui radix quadrata, nempe $\sqrt{56}$, addatur ad $\frac{1}{2}q = 8$, & ex hac summa extrahatur radix cubica, erit prima pars radicis irrationalis quæsitæ $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$. Et dividendo $p = 6$ per triplum hujus primæ partis, obtinetur altera pars radicis, videlicet

$$3\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}. \text{ Tota itaque radix erit}$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$$

II. Si æquatio data sit $x^3 + px - q = 0$, in qua tertius terminus est cum signo +, eadem est regula, si duo excipias. Primo $\frac{1}{27}p^3$ & $\frac{1}{4}qq$ addi debent, non subtrahi. Secundo radicis inventæ partes non sunt addendæ, sed secunda ex prima subtrahitur, ideoque formula generalis erit

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{3}p$$

Sit

Sit exemplum $x^3 + 3x - 26 = 0$, facta comparatione cum superiori formula generali, erit $p = 3$ & $q = 26$, proinde $\frac{1}{3}p^3 = 1$, & $\frac{1}{3}qq = 169$. Hinc $\frac{1}{3}qq + \frac{1}{3}p^3 = 170$,

& $\sqrt[3]{\frac{1}{3}qq + \frac{1}{3}p^3} = \sqrt[3]{170}$, quæ radix addatur ad $\frac{1}{3}p = 1$,

& ex summa extrahatur radix cubica, erit $\sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170}$ prima pars radiceis, & dividendo per hujus triplum quantitatem $p = 3$, habetur secunda pars subtrahenda ex prima; proinde tota radix erit

$$x = \frac{1}{3} \sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170}$$

Demonstr. Sit ut in Prop. 4. æquatio, duas radices imaginarias negativas, & unam positivam illis æqualem continens

$$x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ + 3ggx - 6ggf$$

factaque comparatione cum terminis formulæ primæ generalis $x^3 - px - q = 0$, erit $-3ff + 3gg = -p$, seu $3ff - 3gg = p$, unde $ff - gg = \frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$A \quad f^3 - 3ggf^2 + 3g^2ff - g^3 = \frac{1}{27}p^3$$

Similiter quia $-2f^3 - 6ggf = -q$, erit $2f^3 + 6ggf = q$, & $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, & quadratum utriusque membri

$$B \quad f^4 + 6ggf^3 + 9g^2ff^2 = \frac{1}{4}qq$$

Jam si ex æquatione B subtrahatur æquatio A, residuum erit

$$9ggf^3 + 6g^2ff + g^3 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extra-

Extractaque radice quadrata, habetur

$$3ggff + g^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Cui addatur superior æquatio $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, fit summa

$$f^3 + 3ggf + 3ggff + g^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Ex qua si radix cubica extrahatur, prodit prima pars radicis

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Dividendo autem superiorem æquationem $ff - gg = \frac{1}{3}p$ per hanc ultimam, hoc est primum membrum per primum, & secundum per secundum, oritur

$$f - g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Quæ duæ æquationes simul junctæ dant realem radicem quæsitam $2f$, nempe

$$2f (= x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Demonstr. Quoad secundam formulam $x^3 + px - q = 0$. Sit eadem æquatio, in qua tamen supponitur g major f ,

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx - 2f^3 &= 0 \\ + 3ggx - 6ggf & \end{aligned}$$

Facta comparatione cum terminis formulæ generalis, erit $3gg - 3ff = p$, unde $gg - ff = \frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$M \quad g^3 - 3ffg + 3f^2gg - f^3 = \frac{1}{27}p^3$$

Simi.

Similiter habetur $-2f' - 6ggf = -q$, seu $f' + 3ggf = \frac{1}{2}q$ & utriusque membri quadratum

$$N \quad f'^2 + 6f'gg + 9ffg^2 = \frac{1}{4}qq$$

Addantur duæ æquationes M & N , erit summa

$$g'^2 + 6ffg^2 + 9f'gg = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2$$

Ex qua si extrahatur radix quadrata, prodit

$$g' + 3ffg = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}$$

Huic adde æquationem superiorem $f' + 3ggf = \frac{1}{2}q$, erit

$$g' + 3ffg + 2ggf + f' = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}$$

Atque hinc radice tertia extracta, oritur prima pars radicis quæsitæ, nempe

$$g + f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}$$

Ut secundam partem obtineas, divide per hanc primam partem æquationem superiorem $gg - ff = \frac{1}{3}p$, scilicet

$$\frac{gg - ff}{g + f} = \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}}, \text{ erit}$$

$$g - f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}$$

Quod si hæc ex priori parte radicis subducatur, erit radix quæsitæ

$$2f(=x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}p^2}.$$

Co.

COROLL. Si in alterutra formula haberetur $+q$, eadem manet demonstratio, eo solum discrimine, quod in eo casu radices imaginariæ essent positivæ, & radix realis illis æqualis negativa $-2f$.

SCHOL. I. Per radicem irrationalem inventam dividi debet æquatio, & ad secundum gradum deprimi, ut radices imaginariæ innotescant. Quo id commodius fiat, substituat^r loco ejusdem radice^r irrationalis quantitas rationalis. Sit v.g. æquationis $x^3 - px - q = 0$ radix irrationalis inventa $\sqrt[3]{3}$, fiat $\sqrt[3]{3} = m$, & dividendo per $x - m$ ipsam æquationem, oritur æquatio secundi gradus $x^2 + mx + m^3 - p = 0$, quæ duas radices imaginarias continet, facile inveniendas per Prop. 1. & 3. Ca. 8. Residuum autem illud $m^3 - mp - q$, quod ex hac divisione haberetur, negligitur tanquam zero, seu nihil. Hoc recte fieri hinc patet, quod si substituas loco ipsius m incognitam x , cujus valorem repræsentat, termini æquationis datæ restituuntur.

SCHOL. II. Hactenus dicta sufficerent ad plenam æquationum cubicarum notitiam. Sed æquum non est Cardani regulas prorsus omittere, quas Cartesius, Newtonus, Wolfius & fere omnes recentiores celebrarunt. Earum inventionem Scipioni Ferreo Bononiensi Cardanus tribuit. Audiunt vulgo Cardani regulæ, quod fortasse ipse omnium primus publicaverit. Miror, quod eruditi viri Fontanellus (a), & Lamy (b) easdem Varignonno tanquam auctori attribuerint.

PRO-

(a) Histoire de l'Acad. Royale des Scien. 1699.

(b) Elémens de Mathématique à Paris 1704.

PROPOSITIO VII.

Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.

I. **S** It æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$. Fiat $x = f + g$ (fieri debet $f - g$, ubi habetur $+px$) erit

$$x^3 = f^3 + 3ffg + 3ggf + g^3$$

Est autem $3ffg + 3ggf = 3fg \times \overline{f+g}$, & ex hypothesi $x = f + g$, proinde $3fg \times \overline{f+g} = 3fgx$, adeoque $3fgx = 3ffg + 3ggf$, unde

$$x^3 = f^3 + 3fgx + g^3$$

$$x^3 - 3fgx - f^3 - g^3 = 0$$

Comparando jam hujus æquationis terminos cum terminis æquationis generalis assumptæ, oriuntur duæ æquationes (duo puncta (:)) divisionem significant) scilicet

$$1.^a \quad 3fg = p$$

$$2.^a \quad f^3 + g^3 = q$$

$$g = \frac{1}{3}p : f$$

$$g^3 = \frac{1}{27}p^3 : f^3$$

Et substituendo in secunda æquatione valorem ipsius g^3 , erit

$$f^3 + \frac{1}{27}p^3 : f^3 = q$$

$$\text{Mult. per } f^3 \quad \frac{f^6 + \frac{1}{27}p^3}{f^3} = qf^3$$

Schol. Prop. I.

Cap. 5.

$$f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27}p^3$$

Gg

Hæc

Hæc autem æquatio utpote derivativa secundi gradus facile resolvitur per *Prop. 4. Cap. 8.* hoc pacto

$$f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27}p^3$$

$$\frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq$$

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extr. rad.

$$f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

$$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

$$f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

Cubica

Erat autem $f^3 + g^3 = q$, proinde $g^3 = q - f^3$; substituendo igitur loco f^3 ejus valorem, habetur

$$g^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

$$g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

Cubica

$$\text{Atque hinc } x (=f+g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Quæ quidem est formula generalis radice pro æquatione $x^3 - px - q = 0$.

COROLL. I. Si æquatio habeat $+q$, ut $x^3 - px + q = 0$, tunc in formula generali radice habetur $-\frac{1}{2}q$. In cete-

ris nihil differt, nempe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$

II. Sit æquatio generalis $x^3 + px - q = 0$, fiat $x = f - g$ (ob $+px$), erit

$$\begin{aligned} x^3 &= f^3 - 3ffg + 3ggf - g^3 \\ -3ffg + 3ggf &= -3fg \times f - g \end{aligned}$$

Sed ex hypothesi $x = f - g$, ergo $-3fg \times f - g = -3fgx$. Proinde surrogatis in superiori æquatione $-3fgx$ pro $-3ffg + 3ggf$, habetur

$$\begin{aligned} x^3 &= f^3 - 3fgx - g^3 \\ x^3 + 3fgx - f^3 + g^3 &= 0 \end{aligned}$$

Comparatis terminis hujus cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 + px - q = 0$, habentur duæ æquationes

$$\begin{array}{l|l} 1.^a & 3fg = p \\ g = \frac{1}{3}p : f & \\ g^3 = \frac{1}{27}p^3 : f^3 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2.^a \quad g^3 - f^3 = -q \\ | \end{array}$$

Ponatur in secunda valor ipsius g^3 , erit

$$\begin{array}{l} \text{Mult. per } f^3 \quad \frac{\frac{1}{27}p^3 : f^3 - f^3 = -q}{\frac{1}{27}p^3 - f^6 = -qf^3} \\ \text{Sch. Prop. 1. Cap. 5. } f^6 - qf^3 = \frac{1}{27}p^3 \end{array}$$

Ex hac æquatione derivativa secundi gradus facile extrahitur radix per Prop. 4. Cap. 8. nam addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$, habetur

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$$

Extr. rad. $f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$

$$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

Cubica

$$f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem $g^3 - f^3 = -q$, proinde $g^3 = -q + f^3$, & surrogato valore ipsius f^3 , oritur

$$g^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

Cubica

$$g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Atque hinc $x (= f - g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

$$- \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

COROLL. II. Quod si in æquatione fuerit $+q$, ut $x^3 + px + q = 0$; tunc in formula generali prima pars radicis

habet $-\frac{1}{2}q$, eritque $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

$$- \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

PROPOSITIO VIII.

*Æquationes cubicas per formulas generales Cardani
resolvere.*

OMnes æquationes Cubicæ, ut in principio hujus capituli annotavimus, ad tres sequentes formulas reduci possunt.

I. x^3

- I. $x^3 - px - q = 0$
 II. $x^3 - px + q = 0$
 III. $x^3 + px - q = 0$

Singulis autem singulæ respondent formulæ generales radicis Cubicæ earundem, quas ex Cardani methodo in præc. Prop. invenimus, scilicet

$$\begin{aligned} \text{I. } & \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \text{II. } & \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \text{III. } & \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \end{aligned}$$

Harum formularum usum celebratissimum exempla, quæ sequuntur, satis ostendent.

I. Sit data æquatio $x^3 - 15x - 4 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, erit $p = 15$, $\frac{1}{3}p = 5$, & $\frac{1}{27}p^3 = 125$. Item $q = 4$, $\frac{1}{2}q = 2$, & $\frac{1}{4}qq = 4$. Hinc $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt[3]{4 - 125} = \sqrt[3]{-121}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ prima pars radicis. Similiter $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ dat alteram partem. Unde habetur $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Quod si ex binomio Cubico $2 + \sqrt{-121}$, & $2 - \sqrt{-121}$ radix extrahatur per methodum inferius tradendam, erit
 una

una pars radicis $2 + \sqrt{-1}$, altera $2 - \sqrt{-1}$, ideoque $x = 4$.

Divisa autem æquatio data per radicem jam inventam, hoc est per $x = 4$, deprimitur ad æquationem secundi gradus, ejusque radices reliquæ facile eruuntur per *Prop. I. Cap. 8.*

II. Sit data æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $p = 1$, $\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$.

Item $q = 6$, $\frac{1}{3}q = 2$, $\frac{1}{4}qq = 9$. Hinc $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt[3]{9 - \frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{242}{27}}$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt[3]{\frac{242}{27}}}$ dat primam radicis partem. At vero

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt[3]{\frac{242}{27}}}$ dat alteram;

proinde $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt[3]{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt[3]{\frac{242}{27}}} =$ (radice cubica ex utroque membro extracta per *Prop. 10. hujus*) $= 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $= 1 + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = -2$.

III. Sit data æquatio $x^3 + 3x - 6 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 + px - q = 0$, erit $p = 3$, $\frac{1}{3}p = 1$, & $\frac{1}{27}p^3 = 1$. Item $q = 6$, $\frac{1}{3}q = 2$, $\frac{1}{4}qq = 9$, proinde $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt[3]{9 + 1} = \sqrt[3]{10}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{10}}$; atque $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{10}} - \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{10}}$.

SCHOL. Omisimus cum Wolfio quartam formulam cubicam $x^3 + px + q = 0$, utpote inutilem, seu minus necessariam, cujus radix non differt a radice tertiæ formulæ, nisi in hoc tantum, quod in prima parte radicis apponi debet $-\frac{1}{2}q$, in secunda vero $+\frac{1}{2}q$. Imo ad solvendam quan-

cum-

cumque æquationem cubicam, cui desit secundus terminus, sufficit prima Cardani formula, qua una tanquam generali Canone potest quis satis commode uti.

P R O P O S I T I O IX.

Idem problema brevius absolvitur.

SIt æquatio generalis cubicas omnes repræsentans, quæ secundo termino carent, $x^3 + px + q = 0$. Fiat $x = a + b$ (a & b sunt indeterminatæ) erit

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \times a + b, \text{ \& } x = a + b$$

Proinde $3a^2b + 3ab^2 = 3abx$

Adeoquæ $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Posito hoc valore loco ipsius x^3 in æquatione generali, habetur

$$a^3 + 3abx + b^3 + px + q = 0$$

Fiant duæ æquationes, quarum altera contineat quantitates radicales, altera rationales, & utraque æquetur zero.

$$1.^a \quad 3abx + px = 0 \quad 2.^a \quad a^3 + b^3 + q = 0$$

Ex prima habetur $b = -\frac{p}{3a}$, & $b^3 = -\frac{p^3}{27a^3}$. Hoc valore posito in secunda æquatione, oritur.

Mult.

Mult. per a^3 $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} + q = 0$

$$a^6 + qa^3 = \frac{p^3}{27}$$

Et resoluta hac æquatione derivativa secundi gradus, addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$, per Prop. 4. Cap. 8. habetur

$$a^3 = -\frac{1}{3}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem $b = -\frac{p}{3a}$, proinde secunda pars radice (ob $x = a + b$) obtinebitur dividendo $-p$ per triplum primæ partis radice inventæ, hoc est per $3a$, eritque $x =$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{3}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{3}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

I. Sit æquatio $x^3 - 7x - 6 = 0$, erit $p = -7$, & $\frac{p^3}{27} = -\frac{343}{27}$. At $q = -6$, & $\frac{1}{4}qq = 9$, hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}$$

II. Sit æquatio $x^3 - 6x + 8 = 0$: comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, erit $p = -6$, & $\frac{p^3}{27} = -8$: item $q = 8$ & $\frac{1}{4}qq = 16$. Hinc habetur

$$x = \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}$$

COROLL. Hæ formulæ radices generales conveniunt, ut patet, cum formulis, quas in Prop. 6. hujus alia via tradidimus. Sunt hæ quidem multo simpliciores illis, quas in superiori Prop. 7. explicavimus, cum hæ unicam radices extractionem, illæ duas requirant.

SCHOL. I. At dubitant hic tyrones, an per diversas ejusmodi formulas eadem omnino radix obtineatur. An ex. gr. superioris primæ æquationis $x^3 - 7x - 6 = 0$ ra-

dix per formulam Propos. hujus expressa $\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}$

$+ 3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}$ sit omnino eadem cum æquationis ejusdem radice, quæ per primam Cardani formulam habere-

tur, nempe $\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, hoc est an secunda hujus pars secundæ parti alterius formulæ sit æqualis. Sed nullum est prorsus dubium. Ponatur enim

$$3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}, \text{ seu } \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} = \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}},$$

erit ex communi lege æquationum $\frac{2}{3} = \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$

$\times \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, factaque radicalium multiplicatione per Prop. 12. Cap. 4. invenitur $\frac{2}{3} = \sqrt[3]{\frac{143}{27}} = \frac{7}{3}$. Et quidem extracta radice tertia ex binomio cubico $3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}$ per Prop. 10. hujus, habetur $1 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}}$, adeoque $1 + \sqrt{-\frac{4}{3}} \times 1 - \sqrt{-\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$, ut prius; proinde evidens est, ex utraque formula eandem radicem obtineri.

SCHOL. II. Si in æquatione cubica radix aliqua ratio-

Hh

nalis

nalis existat, tunc ejusmodi formulas inutiles quidem esse censeo, cum talis æquatio via brevissima resolvi possit per Prop. 4. vel 5. hujus; & absurdi genus sit, radicem rationalem per terminos radicales, imo etiam per radices imaginarias inquirere. Quod si æquatio duas radices imaginarias continet & unam realem irrationalem, tunc hujusmodi formulæ opportune adhibentur.

SCHOL. III. Ceterum ubi in æquatione $x^3 - px \pm q = 0$ habetur $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, adeoque tres radices reales, & inæquales sunt per Propos. 1. num. 2. & nulla earum rationalis invenitur per Propos. 3. vel 5., tunc necessario

$\sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$ erit quantitas imaginaria. Proinde radices, quæ ex natura æquationis reales esse debent, tanquam imaginariæ per Cardani, aliorumque formulas nobis exhibentur. Quod plane est absurdum. Et licet sagacissimum Analystarum ingenium, ut huic malo occurreret, ex binomio Cubico radices imaginarias involvente radicem realem erui posse docuerit, quod & nos in sequenti Propos. explicabimus, id tamen nodum non solvit. Nam hoc tunc solum bene est, cum æquatio unam saltem radicem realem & simul rationalem continet: sed ubi nulla rationalis est, & omnes reales, tunc ars deficit, nullaque ratione per Analysin radices ejusmodi exprimi possunt. Et hic dicitur casus irreductibilis, & irresolutus; in quo opus est ad Geometriam confugere, quæ radices illas per lineas exprimit: quemadmodum ipsa rationem, quam quadrati latus ad diametrum habet incommensurabilem, quæque numeris explicari non potest, per lineas opportune designat.

PROPOSITIO X.

Ex binomio Cubico radicem extrahere .

EXtrahenda sit radix cubica ex binomio $20 + \sqrt{392}$. Reducatur pars radicalis $\sqrt{392}$ ad simpliciorum expressionem per Cor. 1. Prop. 2. Cap. 4. fiet $14\sqrt{2}$.

Certum est, binomiæ radicis partem unam fore $\sqrt{2}$, vel hujus multipulum (ut in secundo exemplo) per numerum rationalem exprimendum, quem voco m . Nam si $\sqrt{2}$ non ingrederetur radicem, neque cubum ingrederetur, ut manifestum est.

Ponatur itaque binomii cubici $20 + 14\sqrt{2}$ pars rationalis $20 = a$, irrationalis autem $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$, erit tota radix $a + m\sqrt{c}$, ex qua (a, c, m sunt indeterminatæ) fiat cubus

$$a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3mmac + m^3c\sqrt{c}$$

Cujus pars rationalis est $a^3 + 3mmac$; pars irrationalis $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$. Quia vero $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^32\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{2}$, habetur

$$3a^2 + 2 = 14$$

$$3a^2 = 12$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

Valore autem ipsius a in altera radicis parte substituto, erit

$$a^3 + 3mmac = 8 + 12 = 20$$

Hh 2

Quod

Quod quidem cum hypothesi optime convenit, proinde radix cubica $a + m\sqrt{c} = 2 + \sqrt{2}$

II. Sit extrahenda radix cubica ex binomio $\sqrt[3]{18252 - 135}$. Reducatur per Prop. 2. Cap. 4. ad simplicem expressionem, fiet $78\sqrt{3} - 135$.

Ponatur radix esse $m\sqrt{c} - a$ (hoc est $78\sqrt{3} = m\sqrt{c}$ & $-135 = -a$) & fiat cubus

$$m^3 c \sqrt{c} - 3m^2 ac + 3a^2 m \sqrt{c} - a^3$$

Cum sit $\sqrt{3} = \sqrt{c}$, pars irrationalis erit

$$m^3 c \sqrt{c} + 3a^2 m \sqrt{c} = 3m^3 \sqrt{3} + 3a^2 m \sqrt{3} = 78 \sqrt{3} :$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, erit

$$3 + 3a^2 = 78$$

$$3a^2 = 75$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

Quo valore surrogato in altera radice parte, habetur

$$-a^3 - 3m^2 ac = -125 - 45 = -170$$

Quod cum hypothesi minime convenit, deberet enim esse -135 ; proinde signum est m sumptum esse justo minorem

Ponatur $m = 2$, adeoque $m\sqrt{c} = 2\sqrt{3}$, erit

$$m^3 c \sqrt{c} + 3a^2 m \sqrt{c} = 24\sqrt{3} + 6a^2 \sqrt{3} = 78 \sqrt{3}$$

$$\text{Div. per } \sqrt{3}) \quad 24 + 6a^2 = 78$$

$$6a^2 = 54$$

$$a^2 = 9, \text{ hinc } a = 3$$

Proinde

Proinde pars rationalis $-a^3 - 3m^2ac = -27 - 108 = -135$. Quod quia cum hypothefi recte convenit, inferitur, radicem cubicam $m\sqrt{c} - a = 2\sqrt{3} - 3$.

III. Sit binomium $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, cujus radix cubica quaeritur. Habetur *per Prop. 2. Cap. 4.* $\sqrt{-\frac{100}{27}} = \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$. Hinc ponatur $3 + \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}} = a + m\sqrt{c}$ radici, ex qua fiat Cubus

$$a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$$

Et quia $\sqrt{c} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$, pars radicalis erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{-\frac{4}{3}} + m^3 \times -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}.$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{-\frac{4}{3}}$; oritur

$$3a^2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \text{ \& } 3a^2 = \frac{9}{3} \\ a^2 = \frac{9}{9}, \text{ \& } a = \pm 1$$

Quo valore substituto, habetur pars rationalis

$$a^3 + 3m^2ac = -1 + 4 = 3$$

Quod convenit cum hypothefi, unde radix quaesita $a + m\sqrt{c} = 1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$.

IV. Extrahenda fit radix cubica ex binomio, cujus utraque pars est irrationalis $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, quod *per Propos. 2. Cap. 4.* fit $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$.

Ponatur prima pars radicis $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, secunda vero $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$, adeoque tota radix erit $m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$, & cubus ex illa factus

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}$$

Atque

Atque hinc ob $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, erit una pars

$$m^3 c \sqrt{c} + 3mn^2 d \sqrt{c} = 3m^3 \sqrt{3} + 6mn^2 \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, habetur

$$3 + 6n^2 = 9, \text{ \& } 6n^2 = 6$$

$$\text{hinc } n = 1$$

Ideoque hoc valore in altero membro substituto, erit

$$3m^2 nc \sqrt{d} + n^3 d \sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

Quod sane cum hypothefi convenit, unde radix cubica quæfitæ $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

COROLL. Cum substituto valore provenit numerus numero rationali major (ut in secundo exemplo pro — 135 proveniebat — 170) signum est, valorem ipsum in sumptum esse justo minorem, adeoque sumendum alium illo majorem. Sin autem pro — 135 provenisset numerus minor, tunc esset indicium in sumptum esse justo majorem; proinde si in primo casu fuit $m = 1$, & in secundo $m = 2$, sumi debet intermedium, hoc est $m = 1\frac{1}{2}$. Quo facto, si res nec bene succedat, signum est, binomii radicem, qualis quæritur, non haberi. Ceterum valor ipsius m semper debet esse vel numerus integer, vel saltem integri dimidius.

SCHOL. I. Si m non est pars aliquota quantitatis, quæ signo radicali præfigitur, radix cubica non obtinetur, quod advertatur.

SCHOL. II. Præclara hæc methodus est Jo: Wallisii ^(a), quæ, ut ipse ait, est ceteris longe simplicior. Nam quæ pri-

num

(a) Algebra Cap. 47. Oper. Tom. 2.

mum a Francisco Schootenio (a), deinde a Jacobo Ozanam (b) aliisque inde scriptoribus tradita est regula, prolixior est, & plures exigit cautiones. Quæ autem traditur a Wolfio (c) per analysim, non modo prolixior est, sed æquationis cubicæ solutionem involvit, cujus radix non ita facile occurrit; imò illa, nisi sit rationalis, inveniri non potest. Ex hac vero methodo cito certi sumus, an radix quæsitæ ex binomio dato extrahi possit.

SCHOL. III. Pro facili & expedito examine radices ex binomio cubico inventæ, satis erit investigare ejus partem rationalem tantum: quod fit addendo cubum partis rationalis ad triplum ejusdem partis multiplicatæ per quadratum partis alterius. Sic ex binomio $78\sqrt{3} - 135$ sit radix inventa $2\sqrt{3} - 3$. Adde cubum partis rationalis -3 , scilicet -27 , ad triplum ejusdem partis -9 multiplicatæ per quadratum partis alterius 12 , nempe ad -108 , summa dat -135 : quod quia convenit cum parte rationali binomii dati, constat $2\sqrt{3} - 3$ esse veram radicem. Ceterum radix cubica per superiorem Wallisii methodum inventa hoc examine probari non indiget, cum de ipsa aliunde certi simus.

SCHOL. IV. Quod si e binomio cubico radix extrahi nullo modo possit, & æquationis datæ radices per Cardani regulas expressæ valde implicatæ appareant, tunc præstat, ut Franciscus Schootenius (d) opportune admonet, æquationem illam ex sola sua constitutione innuere, quam ipsam confuse per easdem Cardani formulas exprimere. Sic data æqua-

(a) Comment. Geometr. Cartes. edit. 3. pag. m. 389. (b) Nouveaux Elemens de Algeb. Cap. 5. Probl. VIII. (c) Elementa Analys. edit. 3. Probl. 169. (d) Comment. in lib. 3. Geom. Cartes.

æquatione $x^3 = 8x + 24$, ejus naturam facilius concipies, si dicas, radicem hujus æquationis x talem esse, ut si multiplicetur per 8, & insuper addantur 24, æqualis sit futura suo cubo x^3 , quam si eandem per Cardani formu-

lam primam hoc modo exprimas $x = \sqrt[3]{12 + \sqrt{125 \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{125 \frac{1}{27}}}$. Et sic de aliis.

PROBLEMAT A CUBICA.

P R O B L. I.

Data summa duorum cuborum & differentia laterum, latera ipsa invenire.

SIt summa cuborum $= 2a$, latera $= 2x$, quorum differentia sit $= 2b$, erit latus majus $x + b$, minus $x - b$ per Theor. 3. Cap. 5. Cubi verò ex ipsis dant æquationem, quæ sequitur

$$2x^3 + 6b^2x = 2a$$

Divi per 2: $x^3 + 3b^2x = a$

$$x^3 + 3b^2x - a = 0$$

Si fiat $a = 14$, $b = 1$, erit æquatio determinata

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Quæ resolvitur per Propos. 4. hujus. Nam assumendo quadratum 4, erit $4 + 3 = 7$, per quem dividendo 14, quotus 2, (radix quadrati assumpti) dat radicem æquationis quæsitam. Erit ergo unum latus $x + b = 2 + 1$, alterum $x - b = 2 - 1$.

Bre.

Brevius resolvitur *per Prop. 5. hujus*. Nam sumpta radice cubica proxime minori ipsius 14, nempe 2, fit cubus 8, & facta hinc inde utriusque cubi subtractione, habetur statim $x = 2$

$$\begin{array}{r} \text{Subtr.} \quad x^3 + 3x = 14 \\ \quad \quad x^3 \quad \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad + 3x = 6 \\ \quad \quad \quad x = 2 \end{array}$$

P R O B L. II.

Data summa duorum cuborum & rectangulo sub lateribus, invenire ipsa cuborum latera.

SIt Cuborum summa $= 2a$, rectangulum ex lateribus $= 2b$, latus unum quaesitum $= x$, & alterum $= y$, erit $x^3 + y^3 = 2a$, & $xy = 2b$; hinc $y = \frac{2b}{x}$, & $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$. Et substituto in prima aequatione loco y^3 ejus valore, habetur

$$\begin{array}{r} x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a \\ \text{Mult. per } x^3 \\ \hline x^6 + 8b^3 = 2ax^3 \\ x^6 - 2ax^3 = -8b^3 \end{array}$$

Quæ cum sit derivativa secundi gradus, si fiat $x^3 = z$, erit *per Prop. 4. Cap. 8.* æquatio.

$$z^2 - 2az = -8b^3$$

Ii

Si

Si supponatur $2a = 72$, & $2b = 8$, æquatio convertitur in sequentem

$$\begin{array}{rcl} & z^2 - 72z = -512 \\ \text{Prop. 1. Cap. 8.} & \text{adde } 1296 & 1296 \\ \hline & z^2 - 72z + 1296 = 784 \\ \text{Extr. rad.} & & \\ & z - 36 = \sqrt{784} (= 28) \\ & z = 36 + 28 = 64 \end{array}$$

Sed posita fuit $x^3 = z$, ergo $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} = 4$. Est ergo $x = 4$, & $y (= \frac{2b}{x}) = \frac{8}{4} = 2$.

P R O B L. III.

Invenire tres numeros Arithmetice proportionales, quorum differentia & solidum ab illis factum sunt data.

SIt trium proportionalium quæditorum differentia data $= d$, solidum $= s$, & numerorum quæditorum primus $= x$, erit secundus $= x + d$, tertius $= x + 2d$ per *Schol. 1. Prop. 3. Cap. 5.*, & solidum ab illis factum

$$x^3 + 3dx^2 + 2ddx = s$$

Auferatur secundus terminus per *Propos. 5. Cap. 6.* facto $x = y - d$, oritur æquatio

$$y^3 - 3dy^2 + 3d^2y - d^3 = s$$

Proinde si supponatur $d = 3$, & $s = 28$, æquatio eadem erit

y

$$y^3 * -9y = 28$$

$$y^3 - 9y - 28 = 0$$

Hæc autem facile resolvitur *per Prop. 6. hujus*. Fiat enim $p = 9$, $q = 28$; ex formula generali $x^3 - px \pm q = 0$

invenitur $y = \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{169} + \frac{3}{\sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{169}}$. Ex hoc binomio cubico extracta radice *per Prop. 10. hujus*, habetur

$y = 2 + \sqrt{1} + \frac{3}{2 + \sqrt{1}}$, factaque reductione, hoc est

multiplicando primam partem per denominatorem alterius, & addendo illi $\frac{1}{3}p$, seu (in hoc exemplo) 3, habetur $\frac{8 + 4\sqrt{1}}{2 + \sqrt{1}}$. Fiat actu divisio *per Prop. 6. Cap. 4.*

erit quotus 4. Est ergo $y = 4$; sed posita fuit $x = y - d$, unde erit $x = 4 - 3 = 1$. Sunt ergo numeri proportionales quæsitæ 1, 4, 7, quorum solidum = 28.

COROLL. *Poterat quoque Problema resolvi per Prop. 4. vel 5. hujus, cum unam radicem rationalem habeat, ut patet: imo & per Propos. 1. Cap. 7. cum habeatur 4 unus ex ultimi termini divisoribus, positoque $y = 4$, tota æquatio evanescat. Malui tamen per Prop. 6. hujus illud resolvere, ut tyrones discant radices ex binomio Cubico extractas reducere, & alia, in quibus difficultatem quandoque solent experiri.*

P R O B L. IV.

Numerum 10 ita dividere in quatuor partes Geometricè continue proportionales, ut si prima ducatur in 8, secunda in 4, tertia in 3, & quarta in 1. summa omnium fiat 16.

Sit una dati numeri pars $= x$, & proportionis Geometricæ denominator $= y$, erit ex prima problematis conditione $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$, & ex secunda $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$. Sumptoque ex utraque æquatio valore ipsius x , erit

$$x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}, \quad x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

Proinde
$$\frac{10}{1 + y + y^2 + y^3} = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

Unde
$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

1. 3. 9. 27.

$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

Et dividendo per $y - 12$, nihil remanet, adeoque $y = 12$. Sed cum radix superioris æquationis ad fractiones tollendas multiplicata sit per progressionem Geometricam triplam, erit 12 triplum quæsitæ radice, hinc posito in alterutra æquatione $y = 4$, erit $x = \frac{2}{17}$, prima pars quæsitæ, reliquæ vero $\frac{8}{17}, \frac{32}{17}, \frac{128}{17}$, quarum summa $\frac{170}{17} = 10$,
& si

& si singulæ ducantur in numeros imperatos, erit earum summa $\frac{272}{17} = 16$, ut patet.

SCHOL. *Problematis hujus auctor est Lucas Pacioli^(a) a quo fuit particulari ratione per numeros determinatos solutum. Generalem ejusdem solutionem per Algebram tentavit Joannes Camillus Gloriosus^(b), sed cum immenso pene calculo plures paginas implevisset, opus omnino non absolvit. Concinna hæc solutio ab Antonino de Monforte^(c) tradita est.*

P R O B L. V.

Datis duabus rectis, alteram earum ita producere, ut alterius quadratum ad quadratum partis productæ eandem rationem habeat, quam pars producta ad totam rectam.

Sint rectæ datæ a & b , & producat^r b , cujus pars producta sit x , tota recta erit $b + x$, & ex conditione probl.

$$a^2 \cdot x^2 :: x \cdot b + x$$

$$\begin{aligned} \text{Theor. 4. Cap. 5.} \quad x^2 &= a^2 b + a^2 x \\ x^2 - a^2 x - a^2 b &= 0 \end{aligned}$$

Sit $a = 2$, $b = 12$, æquatio fiet

$$x^2 - 4x - 48 = 0$$

Cujus resolutio facile obtinetur per Prop. 4. vel 5. hujus,
ex

(a) Arithm. Quæst. 27. (b) Exercitat, Mathemat. 4. Neap. 1635. (c) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

ex quibus innotescit $x = 4$, unde $b + x = 16$. Quod si ponatur $a = 2$, $b = 5$, fiet æquatio, quæ nonnisi per Cardani regulas expeditur, nempe

$$x^3 - 4x - 20 = 0$$

Erit igitur $p = 4$, $\frac{1}{3}p = \frac{4}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{64}{27}$. Item $q = 20$, $\frac{1}{2}q = 10$, $\frac{1}{4}qq = 100$. Hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{\frac{2636}{27}}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{\frac{2636}{27}}}$$

Hujus autem binomii cubici radix (siquidem extrahi possit) obtinebitur per *Prop. 10. hujus*.

PROBL. VI.

Invenire triangulum ABC, cujus latera AB, AC, BC & perpendicularum DC sint in Arithmetica proportione. Fig. 7.

POnatur perpendicularum $CD = x$, differentia laterum trianguli $= d$, erit $BC = x + d$, $AC = x + 2d$, $AB = x + 3d$ per *Schol. 1. Propos. 3. Cap. 5*. Est autem $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ per *Prop. 47.*

l. 1. Eucl. erunt proinde $AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$, & $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}$; adeoque $AD = \sqrt{4dx + 4d^2}$, & $BD = \sqrt{2dx + d^2}$, proinde tota $AB (= x + 3d) = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$.

Fiat

Fiat calculi commodo $x + 3d = m$, erit

$$m = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

$$m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$$

Elevetur utrumque membrum ad quadratum, ut radicales exterminentur *per Reg. 4. Prop. 1. Cap. 5.* erit

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$$

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

Elevato rursus ad quadratum utroque hujus æquationis membro, & facta terminorum reductione *per Lem. Cap. 1.* habetur

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^2x + 9d^4 = 0$$

Substitutis autem valoribus loco m^4 & m^2 , factique reductione *per Lem. cit.* invenitur tandem æquatio

$$x^2 - 24d^2x - 48d^4 = 0$$

Quæ quidem est eadem, quam innuit Newtonus (a) in hoc eleganti problemate, cujus ipse auctor est. Retolvitur autem ultimo *per Prop. 8. vel 9. hujus.* Nam fiat $d = 1$, $p = 24$, $\frac{1}{3}p = 8$, & $\frac{1}{27}p^3 = 512$: item $q = 48$, $\frac{1}{3}q = 16$, & $\frac{1}{27}qqq = 576$, invenitur per Cardani formulas

$$x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}.$$

CA-

[a] Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV. Londini an. 1722.

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis
& aliis altiorum graduum.

Secundus terminus, radicales & fractiones supponuntur, si forte adsint, ab æquatione sublata per *Propos. 2. 8. & 9. Cap. 7.*

PROPOSITIO I.

Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus secundo termino carentes

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Cum hæc concipi possit veluti orta ex duabus æquationibus secundi gradus, quas *componentes* vocabimus, nempe

$$x^2 + yx + f = 0, \text{ \& } x^2 - yx + g = 0$$

Fiat ex earum multiplicatione æquatio æqualis priori $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, secundo termino carens (ob terminos $+yx$ & $-yx$ contrario signo affectos) nimirum

$$\begin{aligned} x^4 + fx^2 - fyx + fg &= 0 \\ + gx^2 + gyx & \\ - y^2 x^2 & \end{aligned}$$

Com-

Comparentur æquationis utriusque termini, erunt tres æquationes

$$f + g - y^2 = p, \quad gy - fy = q, \quad \& \quad fg = r$$

Ex quibus efformari debet alia, in qua non occurrat ulla incognita præter y , quæ in utraque componente est secundi termini coëfficiens.

Hinc quia $f + g - y^2 = p$, erit quoque $f + g = p + y^2$, & multiplicando omnes terminos per y , fit

$$fy + gy = py + y^3$$

Sed habetur ex secunda æquatione $gy - fy = q$; ergo hæ duæ æquationes simul additæ efficiunt $2gy = py + y^3 + q$. Si subtrahantur vero, fiunt $2fy = py + y^3 - q$; unde eruuntur ipsarum f & g valores, scilicet

$$g = \frac{py + y^3 + q}{2y}, \quad f = \frac{py + y^3 - q}{2y}$$

$$fg = \frac{py + y^3 - q}{2y} \times \frac{py + y^3 + q}{2y}$$

$$fg = \frac{p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$$

Mult. per $4y^2$

$$4fgy^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$$

Erat autem $fg = r$, proinde si utrumque membrum multiplicetur per $4y^2$, erit $4fgy^2 = 4ry^2$, ideoque fiet

$$4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$$

Et ordinata æquatione habetur æquatio generalis cubica, nimirum

$$y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - q^2 = 0 \\ - 4ry^2$$

Quæ, licet sexti gradus esse appareat, habetur tanquam cubica, cum omnes incognitæ termini sint divisibiles per 2, & dicitur *Cubica derivata*, cui innititur æquationum omnium quarti gradus resolutio, ut per exempla, quæ sequuntur, patrum fiet:

COROLL. I. Cum æquatio hæc Cubica derivata sit generalis, utpote orta ex æquatione illa generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, omnes æquationes omnes quarti gradus representare supponitur, hinc est, quod data quarti gradus æquatione speciali, poterit statim haberi ejus Cubica derivata, substituendo in cubica generali loco p, q & r valores æquationis particularis datæ. Sit data æquatio $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, erit $p = -4$, $q = -8$, & $r = 35$. Positis his valoribus in cubica generali, habetur cubica derivata particularis $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. Similiter sit data æquatio $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, erit $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$. Unde Cubica derivata erit $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$. Quæ quidem semper considerari poterit ut simpliciter cubica, & tanquam mere cubica resolvi, secundo termino sublato. Nam si ponatur $y^2 = z$, fiet $z^3 - 34z^2 + 313z - 400 = 0$, & ob $z = y^2$, erit $\sqrt{z} = y$.

COROLL. II. Si in duabus illis componentibus $x^2 + yx + f = 0$, & $x^2 - yx + g = 0$ ponatur valor duarum indeterminatarum f & g per hanc Propos. inventus, oriuntur duæ æquationes.

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Quæ quidem, cognito valore y, fiunt omnino cognitæ & determinatæ, ut patet.

SCHOL. I. Si in data æquatione particulari habeatur $+p$, tunc in utraque harum duarum ponitur $+\frac{1}{2}p$. Contra vero in utraque ponitur $-\frac{1}{2}p$, si æquatio particularis data habeat $-p$.

SCHOL. II. Si in data æquatione habeatur $+q$, tunc in una duarum, in qua scilicet habetur $+yx$, ponitur $-\frac{q}{2y}$. In altera, in qua est $-yx$, ponitur $+\frac{q}{2y}$. Contra vero si in data æquatione habeatur $-q$, ponendum est $-\frac{q}{2y}$ in illa, in qua habetur $-yx$, & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi reperitur $+yx$.

PROPOSITIO II.

Æquationes quarti gradus resolvere.

ÆQUATIO data reducatur ad cubicam per Cor. 1. Prop. præc. & ex cubica derivata extrahatur radix per Prop. 4. vel 5. Cap. 9. si sit rationalis, vel per Propos. 8. aut 9. si sit irrationalis. Radicis hujus cubicæ valor, tum etiam valores p & q æquationis datæ ponantur in duabus

illis indeterminatis secundi gradus, quæ habentur in *Coroll. 2. Prop. præc.*, facile erit obtinere quatuor æquationis datæ radices, quemadmodum exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio, qua Cartesius (^a) ipse utitur, $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, erit (facta comparatione cum formula generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$) $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, ejusque cubica derivata $y^3 - 34y^2 + 313y - 400 = 0$ per *Coroll. 1. Prop. præc.* Inveniarur valor y per *Prop. 4. vel 5. Cap. 9.* tollendo prius secundum terminum. Vel brevius reperiri potest, dividendo æquationem ipsam per aliquod quadratum, quod inter divisores ultimi termini existat, ex. gr. per $yy - 16$. Sic enim divisio exacta succedit; unde $yy = 16$, & $y = 4$.

Hoc valore una cum valoribus p & q posito in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx$

$+ \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, habentur duæ æquationes secun-

di gradus $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$ per *Coroll. 2. Prop. præc.* in quibus apparent signa $+$ & $-$, ut docuimus in *Schol. 1. & 2. Prop. cit.* earumque resolutio obtinetur per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.* Radices enim prioris ambæ negativæ sunt $-2 + \sqrt{2}$, & $-2 - \sqrt{2}$; alterius verò affirmativæ $2 + \sqrt{7}$, & $2 - \sqrt{7}$.

II. Sit æquatio $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$: comparatis terminis cum formula generali, erit $p = -12$, $q = 12$, & $r = -3$; ejusque cubica derivata $y^3 - 24y^2 + 156y - 144 = 0$ per *Coroll. 1. Prop. præc.* Cujus radix invenitur per *Prop. 4. vel 5. Cap. 9.* Vel brevius dividendo

(a) Geometr. lib. 111. edit. 3. pag. m. 80.

dendo æquationem per aliquem ultimi termini divisorem v. g. per $yy - 12$, per quem divisio exacte succedit. Est ergo $yy = 12$, & $y = 2\sqrt{3}$.

Ponatur hic valor simul & valores p & q in duabus indeterminatis secundi gradus, ut factum est supra in primo exemplo, erunt duæ secundi gradus æquationes $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ per *Coroll. 2. & Schol. 1. & 2. Prop. præc.* Quarum radices facile obtinentur per *Prop. 1. Cap. 8.* addendo utrique quadratum quantitatis cognitæ secundi termini divisæ per 2, nempe addendo $+ 3$ (nam $\frac{1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, cujus quadratum $= 3$)

Prioris ergo radices sunt $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$. Posterioris vero sunt $\sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$.

III. Sit æquatio $x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$. Comparatis terminis cum formulæ generalis terminis, erit $p = -6$, $q = 12$ & $r = -10$, & ejus cubica derivata $y^3 - 12y^2 + 76y - 144 = 0$, seu $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$ per *Coroll. 1. Prop. præc.* Hæc autem cum nullum divisorem admittat, indicio est, non habere valorem rationalem. Inveniatur ergo valor ejusdem per *Propos. 8. Cap. 9.* Sed prius auferatur ab æquatione secundus terminus hoc pacto. Fiat $z - 4 = v$, erit $z = v + 4$, factaque potestatum substitutione, habetur transformata secundo termino carens, scilicet

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 & = v^3 + 12v^2 + 48v + 64 \\
 - 12z^2 & - 12v^2 - 96v - 192 \\
 + 76z & + 76v + 304 \\
 - 144 & - 144 \\
 \hline
 \text{Summa} & v^3 + 28v + 32 = 0
 \end{array}$$

Ex hac æquatione eruitur valor v per *Schol. Propos. 8. Cap. 9.* nempe

$$v = \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}}$$

Sed posita fuit $z - 4 = v$, proinde erit

$$z = 4 + \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}}$$

Erat autem $y^2 = z$, unde $y = \sqrt{z}$, atque hinc

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{2080}{27}}}}$$

Hoc valore ipsius y simul cum valoribus p & q surrogatis in duabus illis æquationibus secundi gradus, ut in primo & secundo exemplo factum est, hæc determinantur per *Coroll. 2. Prop. præc.* & quatuor, quæ inde eruuntur, radices dant radices æquationis propositæ. Hoc autem cum calculum valde prolixum & permolestum exigat, necesse non erit ultra pergere: nam problemata, quæ ab æquationibus hujus generis dependent, ad Solidorum Geometriam amandantur.

COROLL. Valor incognitæ y ex cubica derivata inventus vel rationalis est, ut in primo exemplo; vel radices quadra-

quadraticas continet, ut in secundo; vel denique est irrationalis radicales cubicas involvens, ut in tertio. In primo & secundo casu æquatio quarti gradus dicitur plana, & in duas secundi gradus divisibilis est, ut vidimus. In tertio casu æquatio vere & proprie quarti gradus dicitur, & a nonnullis affectionem cubicam continere. Problema autem, ad quod solvendum ordinatur, dicitur solidum, quod non per regulam & circinum, sed per aliquam sectionem Conicam, cujus ope radices exhibentur, construere tantummodo potest.

PROPOSITIO III.

An biquadratica, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolvi possint.

CUM certum sit, biquadraticas, quæ duas radices reales & duas imaginarias habent, resolvi posse, ex eo quod tunc earum cubica derivata unam realem, & duas imaginarias radices contineat, adeoque solubilis sit per Prop. 4. Cap. 9.; cum tamen biquadratica quatuor imaginariis radicibus constet, tunc omnes ejus cubicæ derivatæ radices reales fiunt, proinde oritur dubium, an in eo casu resolvi valeat.

I. Sit igitur æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Comparentur hujus termini cum terminis formulæ generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = 1$, $q = 2$, $r = 6$, & ejus cubica derivata $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$ per Cor. I. Prop. I. hujus. Hæc si dividatur per $yy - 4$, nihil remanet, proinde $y = 2$: quo valore una cum valoribus p & q in duabus

bus componentibus *per Cor. 2. Prop. cit.* fiunt $x^2 - 2x + 3 = 0$, & $x^2 + 2x + 2 = 0$, earumque radices, ut ex signis patet, sunt imaginariæ; nempe $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, & $-1 + \sqrt{-1}$, $-1 - \sqrt{-1}$.

II. Sit æquatio $x^4 + 70x^2 - 3744x + 27993 = 0$, comparatis terminis cum terminis formulæ generalis ut supra, invenitur ejus cubica derivata *per Coroll. 1. Prop. 1. hujus* $y^6 + 140y^4 - 107072y^2 - 14017536 = 0$, & dividendo illam per $yy - 324$, cum divisio exacte fiat, erit $yy = 324$, & $y = 18$; quo valore in duabus componentibus posito *per Coroll. 2. Prop. cit.* fiunt $x^2 - 18x + 93 = 0$, & $x^2 + 18x + 301 = 0$, ex quibus quatuor radices imaginariæ prodeunt, $9 + \sqrt{-12}$, $9 - \sqrt{-12}$, $-9 + \sqrt{-220}$, $-9 - \sqrt{-220}$.

COROLL. II. *Atque hinc patet, biquadraticas, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, sortiri posse cubicam derivatam, quæ radicem aliquam realem & rationalem contineat, quæ quidem vel per aliquem divisorem, vel per extractionem radicis ex binomio cubico obtineatur, tunc vero tam ipsam, quam biquadraticam optime posse resolvi. Quamquam biquadratica ejusmodi ad problematis solutionem, ad quod erat ordinata, inepta sit, cum nulla radix realis ad illud construendum assignari valeat, ut Cartesius advertit.*

COROLL. II. *At generatim si cubica derivata talis sit, ut tres radices reales irrationales contineat, ita ut casum irreductibilem involvat, de quo in Schol. 3. Prop. 9. Cap. 9. tunc neque ipsa, neque biquadratica solvi poterunt, cum omnis æquationum quarti gradus resolutio a cubicæ derivatæ solutione maxime pendeat, eique tanquam fundamento innitatur.*

PRO-

P R O P O S I T I O IV.

Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.

ALia quoque methodus æquationes biquadraticas resolvendi, & illas in duas planas secundi gradus dividendi, si divisibiles sint, excogitata fuit a Cl. Hudde-
nio; quæ insuper id habet commodi, ut si adsit secundus terminus, nihil obstat.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus, etiam secundo termino præditas

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

Dividatur in duas partes, ita ut altera contineat $x^4 + px^3$, altera $x^2 + rx + s$, utraque scilicet parium dimensionum potestates x^4 & x^2 , erit

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$$

Ut prima pars quadratum fiat, ponatur radix $x^3 + \frac{1}{2}px$ $+ \frac{1}{2}y$, ejus quadratum erit

$$x^4 + px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2 + \frac{1}{2}pyx + \frac{1}{4}yy$$

Quod quidem alteri quoque æquationis parti addatur, omissis $x^4 + px^3$, cui æqualis supponitur $-qx^2 - rx - s$; ita ut loco $x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$ habeatur

$$x^4 + px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2 + \frac{1}{2}pyx + \frac{1}{4}yy = -qx^2 - rx - s$$

Cum igitur prima pars sit quadratum, altera quoque pars quadrato æquari debet. Ponatur hujus radix esse $vx + z$, ejus quadratum erit $vvx^2 + 2vzx + zz$; utque habeantur valores v & z , fiat terminorum comparatio, erit

$$vv = \frac{1}{4}pp - q + y, \text{ \& } v = \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}$$

$$2vz = \frac{1}{2}py - r, \text{ \& } z = \frac{\frac{1}{2}py - r}{2v}, \text{ hoc est}$$

$$z = \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}}. \text{ Proinde radix } vx + z, \text{ erit}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}x + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}}, \text{ cujus quadratum}$$

$$\frac{1}{4}pp - q + y \times xx + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \times x + \frac{\frac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y}$$

Comparando jam hujus quadrati terminos cum terminis quadrati secundæ partis præcedentis æquationis, destruuntur termini similes, & remanet

$$\frac{\frac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y} = \frac{1}{4}yy - s$$

Factaque multiplicatione, & ordinata æquatione, oritur cubica generalis

$$\begin{aligned} y^3 - qyy - 4sy - pps &= 0 \\ + pry + 4qs & \\ - rr & \end{aligned}$$

Cujus valoribus p, q, r, s per coefficientes æquationis specialis

cialis datæ determinatis, quæritur valor ipsius y . Quo invento, si rationalis sit, poterunt ejusdem ope determinari duæ sequentes æquationes secundi gradus, quæ ex æqualium quadratorum radicibus componuntur, & per illas æquatio proposita dividi, ut quæ inferius sequuntur exempla, rem ostendunt.

$$x^2 + \frac{1}{2}px + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}px - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

I. Data sit æquatio $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$, erit $p = -1$, $q = -3$, $r = 1$, $s = 2$, quibus valoribus in cubica generali positus, fit $y^3 + 3y^2 - 9y - 27 = 0$, quæ si dividatur per $y + 3$ nihil remanet; est ergo $y = -3$, qui valor, cum sit rationalis, indicio est, æquationem datam in duas secundi gradus esse divisibilem. Ponatur igitur hic valor una cum valoribus p, q, r in duabus præcedentibus secundi gradus, eruitur ex prima $x^2 - 1 = 0$, ex altera $x^2 - 1x - 2 = 0$, & per utranque æquatio data dividi potest, ut patet.

II. Sit Cartesii æquatio a nobis allata in *propos. præc.* $x^4 - 17x^3 - 20x - 6 = 0$. Erit $p = 0$, $q = -17$, $r = -20$, $s = -6$; & per hos valores cubica generali determinata, invenitur $y^3 + 17y^2 + 24y + 8 = 0$, quæ si dividatur per $y + 1$, nihil remanet. Est ergo $y = -1$, & hoc valore in duabus secundi gradus substituto, inveniuntur $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$, omnino ut antea per Cartesii regulam.

COROLL. Si valor ipsius y ex cubica inventus non sit rationalis, æquatio proposita quarti gradus non erit divisibilis in duos secundi gradus, sed problema erit solidum.

SCHOL. Cum præclaræ hujus methodi artificium Hud-
denius nobis occultum reliquerit, illud Antonii de Mon-
forte solertia detexit ^(a). Quod & nos, paucis mutatis,
hoc loco referre in laudem Cl. Viri de Mathesi optime me-
riti, æquum duximus.

PROPOSITIO V.

Æquationem biquadraticam puram, vel secundo
& quartæ termino carentem solvere.

I. Sit æquatio biquadratica pura $x^4 = q$, vel $x^4 = -q$,
extrahatur primo radix quadrata, erit $x^2 = \sqrt{q}$,
vel $x^2 = \sqrt{-q}$. Deinde iterum extrahatur eadem radix,
& habebitur $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, vel $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Sit ex. gr.
 $x^4 = 50$, erit $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, extractaque rursus
radice, erit $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

II. Si in æquatione biquadratica, præter secundum ter-
minum, desit etiam quartus (sæpe fit, ut auferendo se-
cundum terminum, quartus quoque evanescat) ut $x^4 - 6x^2$
 $- 4 = 0$, facile erit eam resolvere ut derivativam se-
cundi gradus per Prop. 4. Cap. 8.

COROLL. Omnes ergo biquadraticæ, quæ primum &
ultimum terminum tantum habent, vel quæ termino secun-
do,

(a) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

do, & quarto carent, ab omni affectione cubica sunt immunes, & in duas secundi gradus dividi possunt.

SCHOL. Raphael Bombelli ^(a) Bononiensis anno 1579. æquationes biquadraticas resolvendi methodum in sua Algebra tradidit, sed a Ludovico de Ferrariis eam accepisse ferunt. Quicquid sit, Italorum hominum ingenium & gloria fuit hucusque progredi ^(b). Post Vietam Cartesius nova sua methodo mirum quantum illam illustraverit, quem deinde secuti sunt ducem quotquot de *Analysi* scripserunt. Ceterum majores nostri ultra æquationes biquadraticas non sunt progressi, summam rei difficultatem prospicientes. Recentiores aliqui generalem æquationes quascunque resolvendi methodum tradiderunt; non advertentes fortasse eam methodum inutilem jure censi, quæ immensum (quod ipsi fatentur) & inexplicabilem fere calculum postulat. Nos duntaxat de reductione æquationum quarti, quinti, & sexti gradus paulo post agemus: quæ si reducibiles sint, facile possunt per ea, quæ de cubicis & biquadraticis diximus, resolvi. Sin autem reduci non poterunt, saltem constabit, problema, ad quod illæ ordinantur, esse solidum, & nonnisi per sectiones Conicas resolvendum. Sed tyronum studio obsequentes, nonnulla quarti gradus problemata ad eorum ingenii exercitationem præmittimus.

PRO-

(a) Algebra lib. 2. pag. 353. Wallisii Algeb. cap. IV. pag. 229. (b) Histoire de l'Acad. Royale des scienc. an. 1705. pag. m. 103.

PROBLEMATATA QUARTI GRADUS

P R O B L I.

Numerum datum in duos ita dividere, ut eorum quadrata inter se multiplicata producant numerum æqualem numero dato c.

ESto numerus datus dividendus $= 2a$, & partium differentia $= 2x$, erit pars major $a+x$, minor vero $a-x$ per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5. Et ex conditione problematis habetur

$$\begin{array}{r} \text{---}^2 \quad \text{---}^2 \\ a+x \times a-x = c \\ x^2 - 2a^2x^2 + a^4 = c \end{array}$$

Brevitatis gratia, ut quantitates a & c determinentur, pono $2a = 14$, & $c = 2304$; erit æquatio, & quidem derivativa secundi gradus, facile resolvenda per Prop. 4. Cap. 8.

$$\begin{array}{r} x^2 - 98x^2 + 2401 = 2304 \\ x^2 - 98x^2 = -97 \\ \text{adde} \quad \quad 2401 \quad \quad 2401 \\ \hline x^2 - 98x^2 + 2401 = 2304 \end{array}$$

Extr. rad. $x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48$
 $x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1}$
 $x = 1$

Unde

Unde $a+x=8$, & $a-x=6$, quorum quadratis invicem multiplicatis aequatur $c=2304$.

P R O B L. II.

Invenire quatuor numeros in continua proportionē Arithmetica, qui inter se multiplicati faciant numerum a.

POne numerum datum $a=100$, & terminorum differentiam $=d$. Sit primus terminus x , erit secundus $x+d$, tertius $x+2d$, & quartus $x+3d$ per Sch. i. Propos. 3. Cap. 5. quibus invicem multiplicatis, habetur æquatio

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0$$

Inventis autem per Prop. 9. Cap. i. ultimi termini divisoribus 1, 2, 4, 5 &c. tentetur divisio per $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 4$ &c. quæ non succedit sine residuo. Tollatur secundus terminus æquationis per Prop. 5. Cap. 7. Quamobrem fiat $x = z - \frac{3}{2}d$, æquatio transformabitur in sequentem derivativam secundi gradus, quæ secundo & quarto termino caret, nempe

$$z^4 - \frac{5}{2}d^2z^2 + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$$

Proinde si ponatur $d=1$, erit

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 = 99\frac{2}{16}$$

adde

$$\frac{25}{16}$$

$$\frac{25}{16}$$

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{25}{16} = 101$$

Extr. rad.

$$z^2 - \frac{5}{4} = \sqrt{101}$$

Extr.

Extr. rad.

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$$

$$z = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$$

Sed posita fuit $x = z - \frac{1}{2}d$, erit ergo primus terminus quæ-

situs $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{1}{2}$, secundus $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$

$-\frac{1}{2}$, tertius $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{1}{2}$, quartus $x + 3d$

$= \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{3}{2}$. Factum ex primo & quarto est

$-1 + \sqrt{101}$, factum vero ex secundo & tertio est $+1$

$+ \sqrt{101}$ per num. 4. Propos. 12. Cap. 4. Atque hinc

$$-1 + \sqrt{101} \times +1 + \sqrt{101} = 100.$$

Sit iterum $a = 100$, $d = 2$, æquatio superior fiet
 $z^4 - 10z^2 - 91 = 0$, seu

$$z^4 - 10z^2 = 91$$

adde

$$\frac{25}{25}$$

$$z^4 - 10z^2 + 25 = 116$$

Extr. rad.

$$z^2 - 5 = \sqrt{116}$$

$$z^2 = 5 + \sqrt{116}$$

$$z = \sqrt{5 + \sqrt{116}}$$

Sed $x = z - \frac{1}{2}d$, ergo primus terminus proportionalis

erit $x = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 1$, secundus $x + d = \sqrt{5 + \sqrt{116}}$

-1 , tertius $x + 2d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 1$, quartus $x + 3d$

$= \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 3$. Proinde factum ex primo & quar-

to est $-4 + \sqrt{116}$, factum vero ex secundo & tertio
 $+ 4 + \sqrt{116}$ per *Propos. citat.*, adeoque $-4 + \sqrt{116}$
 $\times + 4 + \sqrt{116} = 116 - 16 = 100$.

P R O B L. III.

*Tres numeros invenire, quorum quadrata sint
 harmonice proportionalia.*

Sit quæstorum primus 1, secundus x , tertius $x+1$,
 eorumque quadrata 1, xx , $x^2 + 2x + 1$: quæ cum sint
 ex hypothese harmonice proportionalia, erit maximum ad
 minimum, ut differentia maximi & medii ad differentiam
 medii & minimi, nimirum

$$x^2 + 2x + 1 : 1 :: 2x + 1 : xx - 1$$

Et multiplicatis mediis & extremis, habetur

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 2x + 1$$

$$x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0$$

Quæ quidem æquatio cum per nullum binomium divisibi-
 lis sit, tentanda est solutio per *Propos. 4. hujus*.

Sit igitur $p = 2$, $q = 0$, $r = -4$, $s = -2$, posi-
 tisque his valoribus in cubica generali, oritur $y^3 - 8 = 0$,
 hoc est $y = 2$. Quo valore una cum valoribus p, r, s sub-
 stituto in duabus secundi gradus æquationibus, fiunt

$$x^2 + 1x + 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 0, \quad \& \quad x^2 + 1x + 1 - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0$$

$\frac{3}{\sqrt{3}}$
 Mm

 $\frac{3}{\sqrt{3}}$
 Cum

Cum autem ex neutra habeatur radix, quæ numeris explicari possit, ut evidens est, aliam viam, quam Jacobus de Billy (*) innuit ex Diophanti methodo, ingredimur, & est hujusmodi.

Inveniantur duo numeri quadrati tales, ut eorum differentia addita majori faciat quadratum. Ponantur, ut supra, quadrata $x^2 + 2x + 1$, & xx , quorum differentia $2x + 1$ addita majori, fit $x^2 + 4x + 2$. Cum autem hæc summa debeat æquari quadrato, si pro ejus latere sumatur $x - 2$, erit $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$; & sublati utrinque terminis similibus, habetur $x = \frac{1}{4}$, quo valore in duobus quadratis assumptis posito, erunt $\frac{25}{16}$ & $\frac{1}{16}$, seu in integris 25 & 1 quorum differentia 24 majori quadrato addita facit quadratum 49, ut patet. Jam igitur numeri quadrati harmonice proportionales ab initio positi 1, xx , $x^2 + 2x + 1$ erunt 1, xx , $25xx$; adeoque $25xx : 1 :: 24xx : xx - 1$, & multiplicatis tum mediis, tum extremis, oritur $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$, seu $25x^2 = 49$, hoc est $x^2 = \frac{49}{25}$, & $25x^2 = \frac{1225}{25}$, proinde numeri quæsitæ sunt 1, $\frac{49}{25}$, & $\frac{1225}{25}$, vel in integris 25, 49, 1225.

COROLL. Si pro quadrati latere $x - 2$, ponatur $x - 3$, vel $x - 4$ &c. invenientur alii atque alii in infinitum tres numeri quadrati harmonice proportionales, ut supra.

SCHOL. Duo hic noverint tyrones: 1.^o Hujus problematis solutionem ab ea conditione necessario pendere, ut duorum quadratorum, quæ assumuntur, differentia majori quadrato addita quadratum efficiat: 2.^o Non esse omnino desperandum de solutione problematis, quæ primo impossibilis videatur. Nam si nequit per unam methodum, per aliam sæpe satis commode expeditur. PROBL.

(*) Diophanti Redivivi p. 2, Prob^l. xxi.

P R O B L. IV.

In rectangulo datis areæ & diametri aggregato, & differentia laterum, invenire latera, diametrum, & aream. Fig. 8.

Si areæ & diametri summa $= a$, differentia laterum $= 2d$, quæditorum eorundem laterum summa $= 2x$, erit latus minus $AB = x - d$, majus vero $BC = x + d$ per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5. & ex eorum facto innotescit rectanguli BD area $= x^2 - d^2$, quæ si auferatur ex summa data $= a$, prodit diameter $AC = a - x^2 + d^2$.

Cum igitur sit $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ per Propos. 47. lib. I. Eucl., erit in terminis analyticis

$$a - x^2 + d^2 = x + d + x - d$$

$$a^2 - 2ax^2 + 2ad^2 + x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = 2x^2 + 2d^2$$

$$x^4 - 2d^2x^2 = 2d^2 - 2ad^2 - d^4 - a^2$$

$$- 2ax^2$$

$$- 2x^2$$

Et si ponatur $a = 58$, $d = 1$, æquatio determinabitur, nempe

$$\begin{array}{r} x^4 - 120x^2 = -3479 \\ \text{Prop. 4. Cap. 8.} \quad \quad \quad 3600 \quad \quad \quad 3600 \end{array}$$

$$x^4 - 120x^2 + 3600 = 121$$

$$\text{Extr. rad.} \quad x^2 - 60 = \pm \sqrt{121}$$

$$x^2 = 60 - 11 = 49$$

$$\text{Extr. rad.} \quad x = 7$$

M m 2

Erit

Erit ergo latus minus $x - d = 6$, majus $x + d = 8$, & area rectanguli $= 48$, quæ detracta ex aggregato areae & diametri $n (= 58)$ relinquit diametrum $= 10$, ut evidens est.

P R O B L. V.

Data summa laterum trianguli, dataque ratione summæ quadratorum, quæ fiunt a lateribus, ad aream ejusdem trianguli, reperire latera. Fig. 9.

Pone summam laterum datam $= 2a$, atque hinc sume basim $AB = b$, erit aggregatum reliquorum $AC + CB = 2a - b$. Esto ex illis unum $AC = x$, erit aliud $2a - b - x$. Rati vero summæ quadratorum ad trianguli aream ponatur ut m ad n , five 8 ad 1.

Ut inveniatur trianguli ipsius area, subtrahe ex semisumma laterum $= a$ singula trianguli ejusdem latera, erunt tres differentiæ $a - b$, $a - x$, $-a + b + x$, ex quarum facto ducto in semisummam laterum obtinetur trianguli area per ea, quæ diximus in *Problem. 4. Cap. 8.* nempe

$$\sqrt{-a^4 + 2a^3b + 2a^3x - 3a^2bx - a^2x^2 - a^2b^2 + ab^2x + abx^2}, \text{ quam voco } g.$$

Summa vero quadratorum ex lateribus ejusdem trianguli erit

$$2x^2 + 2bx - 4ax + 2b^2 - 4ab + 4a^2, \text{ quam voco } f$$

Est autem ex conditione problematis

$$f \cdot g :: m \cdot n$$

$$Tb. 6. Prop. 3. Cap. 5. \quad f^2 \cdot g^2 :: m^2 \cdot n^2$$

$$Theor. 4. Prop. cit. \quad f^2 \times n^2 = g^2 \times m^2$$

Positis proinde valoribus m^2 , n^2 , f^2 & g^2 , factaque de more reductione, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 + 24a^2x^2 - 40a^3x - 40a^3b &= 0 \\ + 2bx^3 - 24abx^2 + 60a^2bx + 24a^2b^2 \\ + 3b^2x^2 - 24ab^2x - 4ab^3 \\ + 2b^3x + 20a^4 \\ + b^4 \end{aligned}$$

Jam si ponatur $a = 6$, & $b = 3$, prodit eadem æquatio determinata $x^4 - 18x^3 + 459x^2 - 3402x + 7209 = 0$. Hæc autem cum per nullum binomium dividi possit sine residuo, quærenda est, sublato secundo termino, ejus solutio *per Prop. 2. vel 3. hujus*.

Quod si manentibus, ut prius, $a = 6$, $b = 3$, fiat $m \cdot n = 8\frac{1}{3} \cdot 1$, seu $m \cdot n = 25 \cdot 3$, eademque methodo procedatur, invenietur æquatio determinata

$$x^4 - 18x^3 + 483\frac{1}{3}x^2 - 3622\frac{1}{3}x + 7650 = 0$$

1.	4.	16.	64.	256.

$$z^4 - 72z^3 + 7736z^2 - 231840z + 1958400 = 0$$

Quæ si dividatur per $z - 16$, nihil remanet; est ergo $z = 16$. Sed ob progressionem Geometricam quadruplam, qua multiplicatæ sunt radices prioris æquationis, erit $4x = z$, seu $4x = 16$, & $x = 4$. Proinde latus quæsitum $AC = 4$.

PROBL. VI.

Dato quadrato AC , & recta M producere latus DC in E , ita ut ex angulo A ducta AE , pars intercepta EF æqualis sit datæ M . Fig. 24.

Sit AB , vel $BC = a$, $BF = x$, erit $FC = a - x$. Sit M (ex hypothefi $= FE$) $= c$. Ob triangula similia CFE , & AFB , erit CF ($a - x$). FE (c) :: FB (x). $AF = \frac{cx}{a - x}$. Et ob triangulum ABF rectangulum

est $AF^2 = AB^2 + BF^2$, hoc est $\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx$;

atque hinc oritur $x^3 - 2ax^2 + 2aax^2 - 2a^2x + a^4 = 0$.
 $- ccx^2$

Ut tollatur secundus terminus, fiat $x - \frac{1}{2}a = z$, oritur

$$z^3 + \frac{1}{2}aaz^2 - a^3z + \frac{5}{16}a^4 = 0$$

$$- ccz^2 - accz - \frac{1}{4}aacc$$

Inveniendâ modo est ejus cubica derivata per Prop. 1. hujus ejusque Coroll. proinde necesse est nosse, an termini hujus biquadraticæ sint cum signo $+$, vel $-$. Quod ex ipsis dati problematis conditionibus expiscari debemus; hoc est videndum, an $a > c$, vel contra $c > a$. Certum est $FE (= M)$ esse $> AB$, vel BC ; adeoque $c > a$, item $cc > aa$, & multo magis $cc > \frac{1}{2}aa$. Igitur tertius æquationis datæ terminus est negativus, nempe $\frac{1}{2}aa - cc = -p$. Similiter $-a^3 - acc = -q$. Denum quia $cc > aa$, erit

$$cc >$$

$cc > \frac{5}{4} aa$, & multiplicando utrinque per aa , erit $aacc > \frac{5}{4} a^4$,
 & $\frac{1}{4} aacc > \frac{5}{16} a^4$, unde ultimus terminus est negativus,
 nempe $\frac{5}{16} a^4 - \frac{1}{4} aacc = -r$. Omnes ergo biquadraticæ
 termini sunt cum signo $-$. Nimirum $2p = aa - 2cc$,
 $p^2 - 4r = -a^4 + c^4$, $-q^2 = -a^4 - 2a^2 cc - aac^4$.
 Quibus in cubica generali derivata positis, habetur *per Prop.*
cit.

$$\begin{aligned} y^6 + aay^4 - a^4y^2 - a^6 &= 0 \\ -2ccy^4 + c^4y^2 - 2a^2cc & \\ -aac^4 & \end{aligned}$$

Jam videndum, an hæc divisibilis sit per aliquem ultimi
 termini divisorem sine residuo. Divisores sunt a , aa ,
 $aa + cc$, $a^3 + aacc$ *per Prop. 9. Cap. 1.* Divisio tentari po-
 test per $yy - aa$, vel $yy - aa - cc$. Et quidem dividen-
 do per hunc secundum, nihil remanet. Quotus autem est
 $y^4 - ccy^2 + 2aay^2 + a^4 + aacc = 0$, unde patet cubicam
 derivatam constare ex duabus æquationibus, una secundi,
 altera quarti gradus. At nobis satis est æquatio secundi
 gradus $yy - aa - cc = 0$, unde habemus valorem ipsius y ,
 hoc est $y = \pm \sqrt{aa + cc}$, qui valor substituendus est in
 his duabus indeterminatis secundi gradus *per Prop. 1. hujus*
cum notis & observationibus Schol. 1. § 2.

$$1.^a \quad z^2 + yz + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 - yz + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Substituto valore ipsius y , cum valoribus p & q , erit
 1.^a

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

Multiplicando autem tam numeratorem, quam denominatorem fractionis $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ per $\sqrt{aa+cc}$ remanet idem

valor, & prodit $\frac{a^3\sqrt{aa+cc} + acc\sqrt{aa+cc}}{2aa + 2cc}$; & divi-

dendo hanc per $aa+cc$, erit $\frac{a\sqrt{aa+cc}}{2}$, seu $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$,

quæ ponenda est in duabus illis secundi gradus loco ipsius

$\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$, adeoque fiunt

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$$

Ex utraque obtinetur duplex valor ipsius z per *Propos. I. Cap. 8.* si disponantur termini, ut moris est, & addatur utrinque quadratum semicoefficientis secundi termini. Sic ex priori

$$z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = -\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$$

Extracta radice secunda, habetur duplex valor, nempe

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

Et

Et quia positum fuit $x = \frac{1}{2}a = z$, adeoque $a = z + \frac{1}{2}a$, si valori invento ipsius z addatur $+\frac{1}{2}a$, habebitur valor ejusdem x , qui maxime quærebatur, nimirum

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc} + \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}$$

Qui duo valores ipsius x dant longitudinem quæsitam BF ; & sunt iidem, qui nobis a Cartesio (^a) paucissimis verbis indicantur, sed tyronibus ob multiplicem Asymmetriam non ita facile occurrunt.

SCHOL. I. Breviorem aliam præclari hujus problematis solutionem, quæ secundi gradus æquationem non excedit, trademus inferius, ubi de Geometricæ æquationum constructione Cap. 12. agetur.

SCHOL. II. Si loco quadrati detur rectangulum ABCD, ex cujus angulo A ducenda sit recta æqualis datæ M, ut supra, tunc problema esset solidum. Sit enim $AB = a$, $BC = b$, $EF = c$, & $BF = x$, erit $CF = b - x$; ob triangula CFE, BFA

similia $AF = \frac{cx}{b-x}$, & $AF = AB + BF$ hoc est $\frac{ccxx}{b^2 - 2bx + x^2} = aa + xx$, unde prodit biquadratica priori similis, sed quæ nullo modo divisibilis est in duas secundi gradus, adeoque in problema solidum transit. Hinc Pappus Alexandrinus (^b) hoc ipsum problema resolvit per hyperbolam intra Asymptotos, & Circulum.

DEFINITIONES.

- I.  Mnis æquatio composita Reducibilis dicitur, quæ per æquationes inferioris gradus exacte dividi, Nn & ad

(a) Geometr. lib. 3. pag. 83. (b) Mathemat. Collect. lib. 4. Prop. 31.

& ad inferiorem gradum deprimi potest. Sic æquatio quinti gradus, quæ dividi potest exacte per duas æquationes inferiores, alteram secundi & alteram tertii gradus, dicitur *Reducibilis*.

2. Æquatio composita, quæ per nullam æquationem inferioris gradus est divisibilis, dicitur *Irreducibilis*. Ut æquatio sexti gradus, quæ nec per duas æquationes, unam secundi, alteram quarti gradus, nec item per duas tertii gradus dividi exacte potest, dicitur *Irreducibilis*.

SCHOL. *Reductio*, de qua hic agimus, eo tendit, ut dignoscatur, an data æquatio deprimi possit ad gradum inferiorem: quod fiet, si illa sit exacte divisibilis in alias æquationes inferioris gradus. Sic ex. gr. æquatio quinti gradus deprimitur ad unam cubicam & alteram secundi gradus, si exacte valeat in illas duas dividi. Sine hac doctrina haud satis distingueretur natura æquationum & problematum, unde ipsæ æquationes oriuntur. Nam problemata inferioris gradus facile confunderentur cum iis, quæ sunt superioris ordinis, & horum instar resolverentur, quod est absurdum. Utimur autem methodo generali & pulcherrima; digna sane, cui tyrones satis diligenter incumbant.

PROPOSITIO VI.

An Æquatio biquadratica reducibilis sit, explorare.

Sit æquatio quarti gradus indeterminata, & generalis
omnes alias representans $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$,
quæri-

quæritur an dividi possit exacte in duas alias secundi gradus, & quænam illæ sint.

Concipiatur illa orta ex duabus indeterminatis secundi gradus $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + bx + i = 0$, quæ si invicem multiplicentur, oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{aligned} x^4 + fx^3 + gx^2 + gbx + ig &= 0 \\ + bx^3 + fbx^2 + ifx & \\ + ix^2 & \end{aligned}$$

Comparentur termini utriusque æquationis, & fiant æquationes particulares, erit

1.^a $f + b = p$, 2.^a $g + fb + i = q$, 3.^a $gb + if = r$, 4.^a $ig = s$.

Sumatur ex prima valor b , erit $b = p - f$, & ex quarta valor $i = \frac{s}{g}$, qui duo valores substituantur in tertia æquatione loco b & i ; fiet $pg - fg + \frac{fs}{g} = r$, & multiplicando per g , erit $pgg - fgg + fs = rg$, hoc est $fs - fgg = rg - pgg$; unde habetur $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$.

Cujus valor, ut plane innotescat, innotescere debet g . Est autem ex quarta æquatione $ig = s$; proinde g est unus ex divisoribus ultimi termini cognitis, quo cum signo $+$ vel $-$ dividi potest exacte ultimus terminus s . Tentandi sunt igitur sub utroque signo $\pm$ singuli divisores, ut docuimus *Prop. 1. Cap. 7.* Sed exemplo res illustrabitur.

I. Sit æquatio data $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$ erit $p = -4$, $q = -10$, $r = -28$, $s = -8$. Ut in-

veniat quantitas g , tentandi sunt omnes divisores ultimi termini -8 sub utroque signo, nempe ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8 . Ponatur primo esse $g = 1$, erit ex superio-

ri formula $f = \frac{-28+4}{-8-1} = \frac{24}{-9} = -\frac{8}{3}$. Item $b = -4 - \frac{8}{3}$

$= -\frac{20}{3}$, & $i = -8$. His autem valoribus positis in duabus indeterminatis $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + bx + i = 0$, fiunt $x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$, & $x^2 - \frac{20}{3}x - 8 = 0$, per quas si dividatur æquatio data $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$, divisio exacte non succedit. Non est igitur $g = 1$, ut fuit suppositum.

Neque item divisio succedit, si ponatur $g = -1$, vel $g = +2$, vel $g = -2$, bene tamen si ponatur $g = 4$; tunc enim erit $f = 2$, $b = -6$, & $i = -2$. Quibus valoribus in duabus illis æquationibus secundi gradus substitutis, habentur $x^2 + 2x + 4 = 0$, & $x^2 - 6x - 2 = 0$, per quas æquatio data exacte dividitur, ejusque radices ex resolutione duarum illarum secundi gradus facile obtinentur per *Propos. 2. Cap. 8.* nempe $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, & $x = 3 \pm \sqrt{11}$.

II. Sit æquatio $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, ea ipsa, quam Newtonus in *Arithm. Univers.* etiam per *Divisores furdos* resolvit. Concipiatur orta ex duabus illis indeterminatis secundi gradus $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + bx + i = 0$.

Inventum jam fuit supra $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$, $b = p - f$, $i = \frac{sg}{g}$. Comparatis autem æquationis datæ terminis cum formula generali, habetur $p = -1$, $q = -5$,

$r =$

$r = 12$, $s = -6$; & ultimi termini (-6) divisores, ex quibus g (ob $ig = s$) est unus, sunt $1, 2, 3, 6$, qui ponantur singulatim in superiori formula loco g cum signo $\pm$. Et cum frustra adhibeantur $\pm 1, \pm 2$, pono

$$\text{ipsum } g = 3; \text{ unde } f \left(= \frac{rg - pgg}{s - gg} \right) = \frac{36 + 9}{-6 - 9} =$$

$$\frac{45}{-15} = -3: \text{ item } b (= p - f) = -1 + 3 = 2; \text{ \&}$$

$$i \left(= \frac{s}{g} \right) = \frac{-6}{3} = -2. \text{ Per hos valores determina-}$$

tis duabus secundi gradus æquationibus, habetur $x^2 - 3x + 3 = 0$, & $x^2 + 2x - 2 = 0$, quæ æquationem datam exacte dividunt, earumque radices $x = 1 \pm \sqrt{-3}$, & $x = -1 \pm \sqrt{3}$ quatuor æquationis datæ radices exhibent.

COROLL. Substitutis ipsarum f, g, h , & i valoribus in duabus illis secundi gradus æquationibus, si æquatio data per neutram possit exacte dividi, signum est, eam esse irreducibilem. Tunc autem ejus solutio quærenda est per Prop. 2. hujus, cum ex natura sua biquadratica sit: quemadmodum cubicas quæ deprimi nequeunt ad gradum inferiorem, per Cardani regulas solvimus.

PROPOSITIO VII.

An Æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.

SIT æquatio generalis repræsentans omnes quinti gradus æquationes $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, quæritur an exacte dividi possit in alias duas inferioris gradus, alteram scilicet secundi, alteram tertii gradus, & quæ-

quænam sint tales æquationes. Supponantur illæ duæ æquationes esse $x^3 + fx + g = 0$, & $x^3 + bx^2 + ix + l = 0$, ex quarum factio habetur æquatio priori ex hypothesi æqualis, nempe

$$\begin{aligned} x^3 + fx^3 + ix^3 + lx^2 + flx + gl &= 0 \\ + bx^3 + gx^3 + gbx^2 + gix & \\ + fbx^3 + fix^2 & \end{aligned}$$

Comparatis terminis, habentur quinque æquationes :
1.^a $f + b = p$, 2.^a $i + g + fb = q$, 3.^a $l + gb + fi = r$,
4.^a $fl + gi = s$, & 5.^a $gl = t$.

Ex prima æquatione habetur $b = p - f$, & ex secunda $b = \frac{q - i - g}{f}$: erit ergo $p - f = \frac{q - i - g}{f}$, & multiplicando per f , oritur $pf - ff = q - i - g$.

Ex hac æquatione sumatur valor i , erit $i = ff - pf + q - g$, & ex quarta valor alter ipsius i , nempe $i = \frac{s - fl}{g}$, & in hac substituto valore l , qui ex æquatione quinta desumitur (hoc est $l = \frac{t}{g}$) erit $i = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$, proinde oritur $ff - pf + q - g = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$, & ordinando æquationem respectu ad incognitam f , habetur æquatio secundi gradus

$$ff - pf + q = 0$$

$$+ \frac{tf}{g} - g$$

Ex

Ex qua ut obtineatur valor ipsius f , determinari prius debet quantitas g , quæ habetur ut cognita, cum sit unus ex divisoribus ultimi termini æquationis datæ: nam ex quinta æquatione $gl = t$. Ponatur ergo $g = 1$. Sed claritatis gratia ecce exemplum.

Sit data æquatio $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$, erit $p = -4$, $q = 6$, $r = -8$, $s = 5$, $t = -1$. Positis valoribus p, q, s, t in illa æquatione secundigradus cum valore g , fiet illa $ff + 3f = 0$, unde $f = -3$. Ponantur hi valores $f = -3$, & $g = 1$ in æquatione $x^2 + fx + g = 0$, oritur $x^2 - 3x + 1 = 0$, per quam dividi debet æquatio superior datæ $x^5 - 4x^4 + 6x^3$ &c. quæ divisio exacte succedit, & habetur in quo $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, quæ quidem amplius divisibilis non est. Habentur ergo duæ æquationes quæsitæ, & æquationem datam esse reducibilem concluditur. Radices æquationis secundigradus habentur per Prop. 1. & 3. Cap. 8. Cubicæ vero per Prop. 8. vel 9. Cap. 9.

COROLL. I. Manifestum est, æquationem $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, quæ provenit ex divisione propositæ æquationis, habere pro coefficientibus valores indeterminatarum h, i, l , quæ suppositæ fuerunt, nempe $-1, +2, -1$, proinde æquationem datam per alterutram potuisse dividi. Quod & pro sequenti Propos. intelligitur.

COROLL. II. Substitutis singulis ultimi termini divisoribus $+1, -1$ in æquatione $x^2 + fx + g = 0$, si per hanc æquatio data exacte dividi minime potuisset, signum erat, illam esse irreducibilem, & solidum quinque dimensionum problema proprie constituere, cujus latera per Curvas inveniri debent.

PRO.

PROPOSITIO VIII.

An æquatio sexti gradus sit reducibilis, examinare.

SIT æquatio generalis repræsentans omnes alias sexti gradus æquationes $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$, quæritur an divisibilis sit in alias duas inferioris gradus, & quænam illæ sint.

I. Supponatur esse altera quarti gradus $x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$, altera secundi gradus $x^2 + mx + n = 0$. Ex quarum facto oritur æquatio priori æqualis, nempe.

$$\begin{aligned} x^6 + fx^5 + gx^4 + bx^3 + ix^2 + imx + in = 0 \\ + mx^5 + fm x^4 + gm x^3 + bmx^2 + bnx \\ + nx^4 + fnx^3 + gnx^2 \end{aligned}$$

Unde facta terminorum utriusque æquationis comparatione, habentur sex æquationes. 1.^a $f + m = p$, 2.^a $g + fm + n = q$, 3.^a $b + gm + fn = r$, 4.^a $i + bm + gn = s$, 5.^a $im + hn = t$, 6.^a $in = v$.

Sumatur ex prima valor f , nempe $f = p - m$, quo in secunda æquatione posito, oritur $g + pm - mm + n = q$, unde eruitur valor $g = q - pm + mm - n$. Cum autem habeatur in sexta $in = v$, erit $i = \frac{v}{n}$, quo valo-

re posito in quinta æquatione, habetur $\frac{mv}{n} + bn = t$,

ex qua eruitur valor b , nempe $b = \frac{t}{n} - \frac{mv}{nn}$. Jam va-

lor

lor ipsarum g, b, i , ponatur in quarta æquatione, oritur
 $\frac{v}{n} + \frac{tm}{n} - \frac{m^2v}{nn} + qn - pmn + m^2n - nn = s$. Duæ

fractiones $\frac{v}{n} + \frac{tm}{n}$ reducantur ad idem nomen cum alia

$-\frac{m^2v}{nn}$, fiet æquatio $\frac{vn + tmn - m^2v}{nn} + qn - pmn$

$+ m^2n - nn = s$, & multiplicando omnes terminos per
 nn , ut fractio evanescat, fit $vn + tmn - m^2v + qn^2$
 $- pmn^2 + m^2n^3 - n^4 = snn$, hoc est

$$m^2n^3 - m^2v = pmn^3 - tmn - vn - qn^3 + n^4 + sn^2.$$

Dividendo autem utrumque æquationis membrum per n^3
 $- v$, & ordinando æquationem secundi gradus in ordine
 ad incognitam m , habetur

$$\begin{array}{r} m^2 - pn^3m + vn = 0 \\ + tmn + qn^3 \\ - n^4 \\ - sn^2 \\ \hline n^3 - v \end{array}$$

Est autem quantitas n unus ex divisoribus ultimi termini
 æquationis, nam ex sexta æquatione habetur $in = v$. Ita-
 que divisores singuli, quibus æquari potest n , cum signis
 $+$ & $-$ substituendi sunt successive in superiori æquatio-
 ne una cum valoribus p, q, r, s, v ad obtinendum valo-
 rem ipsius m . Sed claritatis gratia,

Sit æquatio data $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$, erit $p = -13$, $q = 45$, $r = -71$, $s = 57$, $t = -16$, $v = 2$. Ponatur $n = 2$. Æquatio superior secundi gradus fit $m^2 + 12m + 20 = 0$, unde per *Prop. 1. Cap. 8.* habetur valor ipsius $m = -2$, substituendus in æquatione assumpta $x^2 + mx + n = 0$ una cum valore n , quæ proinde fit $x^2 - 2x + 2 = 0$. Per hanc tentari debet divisio æquationis datæ $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$, quæ quidem exacte dividitur, & in quotæ habetur æquatio altera quarti gradus $x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 7x + 1 = 0$, quæ amplius divisibilis non est. Æquatio autem $x^2 - 2x + 2 = 0$ exhibet duas radices $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ per *Prop. 1. Cap. 8.* reliquæ habentur per *Propos. 2. hujus*, aut per Curvas si biquadratica solutionem non admittat.

II. Quod si, his peractis, æquatio data secundi gradus dividi non potuisset per æquationem secundi gradus, ut supra, inventam, tunc videndum an illa ex duabus tertii gradus fuerit composita, ideoque in duas tertii gradus fit divisibilis. Sit igitur una ex his $x^3 + fx^2 + gx + b = 0$, altera $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, ex quarum facto oritur

$$\begin{aligned} & x^6 + fx^5 + gx^4 + bx^3 + bmx^2 + bnx + bl = 0 \\ & + mx^5 + fmx^4 + gmx^3 + gn x^2 + glx \\ & + nx^4 + fnx^3 + flx^2 \\ & + lx^3 \end{aligned}$$

Quæ ex hypothese est æqualis æquationi generali repræsentanti omnes sexti gradus æquationes, scilicet

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$$

Facta

Facta igitur terminorum comparatione, habentur sex æquationes, $1.^a f + m = p$, $2.^a g + fm + n = q$, $3.^a b + gm + fn + l = r$, $4.^a bm + gn + fl = s$, $5.^a bn + gl = t$, $6.^a bl = v$.

Cum ex prima deducatur $f = p - m$, multiplicando per m , erit $fm = pm - m^2$. Ponatur in secunda æquatione locò fm ejus valor, fiet $g + pm - m^2 + n = q$, hoc est $g = q - pm + m^2 - n$, seu $m^2 - pm - n + q = g$: quæ quidem æquatio si ducatur in l , erit $m^2 l - pml - nl + ql = gl$; sed ex quinta $gl = t - bn$, erit ergo $m^2 l - pml - nl + ql = t - bn$. Utraque ducatur in l , oritur $m^2 ll - pml - nll + qll = tl - bn$. Cum autem ex sexta sit $bl = v$, substituto hoc valore, habetur $m^2 ll - pml - nll + qll = tl - vn$, seu $m^2 ll - pml + qll - tl = nll - vn$, unde eruitur valor $n = \frac{m^2 ll - pml + qll - tl}{ll - v}$.

Inveniri debet jam alter ipsius n valor hac ratione. Ducatur æquatio tertia $b + gm + fn + l = r$ in l , oritur $bl + gml + fnl + ll = rl$; cumque ex sexta habeatur $bl = v$, substituto hoc valore, erit $v + gml + fnl + ll = rl$, seu $gml = rl - v - fnl - ll$. Habetur autem ex secunda æquatione $g = q - fm - n$, quæ si multiplicetur per ml , oritur $gml = qml - fm^2 l - mnl$; hinc $rl - v - fnl - ll = qml - fm^2 l - mnl$. Ponatur loco f ejus valor ex prima æquatione desumptus, erit $rl - v - pnl + mnl - ll = qml - pm^2 l + m^3 l - mnl$, seu $2mnl - pnl = m^3 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v$, atque hinc tandem obtinebitur $n = \frac{m^3 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$.

Ex duobus ejusdem n valoribus inventis deducitur

$$\frac{m^2 ll - pmll + qll - tl}{ll - v} = \frac{m^2 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$$

Factaque invicem multiplicatione, & ordinata æquatione tertii gradus, ad quem ascendit indeterminata m , erit

$$\begin{aligned} m^3 - 2pl^2 m^2 - 2tl^2 m - pql^3 &= 0 \\ - vplm^2 + p^2 l^3 m + ptl^2 \\ &+ ql^3 m - l^4 \\ &+ vqlm + rl^3 \\ &- vrl \\ &+ vv \\ \hline &l^3 + vl \end{aligned}$$

Quæritur modo valor ipsius m ; sed prius determinari debet l , qui est unus ex divisoribus ultimi termini datæ æquationis. Nam $hl = v$ ex sexta æquatione. Utque id omne clarius intelligatur,

Sit æquatio $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$. Erit $p = -8$, $q = 13$, $r = -23$, $s = 10$, $t = -7$, $v = -12$, cujus divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 12, per *Prop. 9. Cap. 1.* Ponatur igitur $l = 1$, & singulis valoribus p, q, r, t, l in superiori æquatione substitutis, invenitur æquatio ipsa $m^3 + \frac{80m^2 + 65m - 4}{11} = 0$.

Hæc ut a fractione liberetur per *Propos. 10. Cap. 6.* fiat $m = \frac{y}{11}$, oritur $y^3 + 80y^2 + 715y - 484 = 0$, quæ quidem

dem si dividatur per binomium $y + 11$, hoc est per unum ex divisoribus ultimi termini inventum per *Prop. 1. vel 2. Cap. 7.* divisio fit sine residuo, proinde innotescit $y =$

$$-11, \text{ per } \textit{Schol. 1. Prop. 1. Cap. 6.} \text{ atque hinc } m = \frac{y}{11} \\ = \frac{-11}{11} = -1. \text{ Hoc valore ipsius } m \text{ una cum valoribus}$$

$$p, q, r, l \text{ positis in æquatione } n = \frac{m^2 ll - pmll + ql - rl}{ll - v},$$

fit $n = \frac{11}{11} = 1$. Determinatis ergo jam valoribus m, n, l , determinata quoque existit æquatio assumpta $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, quæ fit $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$, per quam fieri debet divisio æquationis datae $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$, quæ quidem exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, quæ amplius non est divisibilis. Pater ergo æquationem datam reducibilem esse in duas tertii gradus $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, & $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$. Quarum radices per Cardani regulas ex *Propos. 8. Cap. 9.* obtineri facile possunt.

COROLL. Si æquationis divisio haud successisset, substituendi erant successive loco l singuli divisores ipsius $v = -12$. At si divisoribus his frustra tentatis, divisio fieri non possit, æquatio erit revera sexti gradus & irreducibilis.

SCHOL. Plerique de his reductionibus agunt, cum æquationum compositarum radices rationales inquirunt, ad quas proprie pertinent. At differre huc nobis placuit, quod tyrones sine prævia resolutione æquationum eas haud satis percipere valeant, ut ex reductionibus æquationum quinti & sexti gradus supra allatis evidens est.

CAPUT XI.

De limitibus radicum, earumque approximatione.

PROPOSITIO I.

Radicum limites invenire.

INveniri debent per Analyſim duæ quantitates, inter quas radix æquationis continetur, quæ limites dicuntur, hoc pacto:

I. Sit æquatio $x^2 + px - q = 0$, erit $x^2 + px = q$, & ſublato ex uno membro x^2 , remanet $px < q$, atque hinc $x < q : p$. Duo puncta (:) ſunt nota diviſionis.

Similiter quia $x^2 + px = q$, ſublato ex una parte px , erit $q > x^2$, & $\sqrt{q} > x$. Multiplicando autem per x , erit $x\sqrt{q} > x^2$, & addendo utrinque px , habetur $x\sqrt{q} + px > x^2 + px$; ſed $x^2 + px = q$, proinde erit quoque $x\sqrt{q} + px > q$; atque hinc habetur $x > \frac{q}{p + \sqrt{q}}$. Sunt

ergo limites quaſiti $q : p$, & $q : (p + \sqrt{q})$ unde propoſitæ æquationis radix minor eſt $q : p$, & major $q : p + \sqrt{q}$.

Sit exemplum $x^2 + 4x - 12 = 0$, erit $p = 4$, $q = 12$, unde $q : p = 12 : 4 = 3$; & $q : (p + \sqrt{q}) = 12 : 4 + 3 = 12 : 7 = 1\frac{5}{7}$. Sunt ergo limites quaſiti 3, & $1\frac{5}{7}$, proinde radix nequit eſſe major quam 3, nec minor quam $1\frac{5}{7}$. Equidem ſi tentetur diviſio per $x + 2$, minime ſuccedit;
bene

bene tamen succedit exacte per $x-2$, & habetur in quo-
to altera æquationis radix $x+6$. Unde vel hoc uno ex-
emplo patet, beneficio limitum nos multo labore liberari,
cum ex omnibus ultimi termini divisoribus duo tantum
tentandi fuerint $x+2$, & $x-2$. *Vide Coroll. 2. hujus.*

II. Sit $x^2 - px + q = 0$, erit $x^2 + q = px$, proinde
 $x^2 \leq px$, & dividendo per x , $x \leq p$. Similiter quia $x^2 + q$
 $= px$, erit $q \leq px$, & $q:p \leq x$. Sunt ergo limites quæ-
siti p , & $q:p$, ita ut radix minor sit quantitate cognita p ,
sed major quam $q:p$.

Sit exemplum $x^2 - 3x + 3 = 0$, erit $p = 3$, & $q = 3$,
cujus limites sunt $p = 3$, & $q:p = 3:3 = 1$. Radix er-
go non erit major quam 3, nec minor unitate, nempe
 $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. *Vide Coroll. 3. hujus.*

III. Sit $x^2 - px - q = 0$, erit $x^2 = px + q$, proin-
de $x^2 > q$, ideoque $x > \sqrt{q}$, & multiplicando utrinque
per $\sqrt{q}$, habetur $x\sqrt{q} > q$. Jam si in æquatione $x^2 = px$
 $+ q$ loco ipsius q ponatur $x\sqrt{q}$, erit $x^2 \leq px + x\sqrt{q}$, &
dividendo per x , erit $x \leq p + \sqrt{q}$.

Pariter quia $x^2 = px + q$, erit $x^2 > px$, & dividendo
per x , erit $x > p$, & multiplicando utrinque per p , erit
 $px > pp$; sed $x^2 = px + q$, ergo $x^2 > pp + q$, & extra-
hendo utrinque radicem secundam, habetur $x > \sqrt{pp + q}$.

Sunt ergo limites quæsi $p + \sqrt{q}$, & $\sqrt{p^2 + q}$, hoc est
radix debet esse minor quam $p + \sqrt{q}$, sed major quam

$\sqrt{pp + q}$.

IV. Sit æquatio cubica secundo termino carens $x^3 - qx$
 $+ r = 0$, erit $x^3 = qx - r$, unde $x^3 \leq qx$, & dividen-
do

do per x , $x^2 \leq q$; ideoque $x \leq \sqrt{q}$. Similiter cum sit ex hypothesi $x^3 - qx + r = 0$, erit $x^3 + r = qx$, atque hinc $qx > r$, & $x > r:q$. Sunt ergo limites quæsit $\sqrt{q}$, & $r:q$, ita ut radix æquationis nequeat esse major $\sqrt{q}$, nec minor $r:q$.

Sit exemplum $x^3 - 19x + 30 = 0$, erit $q = 19$, $r = 30$, unde $\sqrt{q} = 4$, & $r:q = \frac{30}{19} = 1 \frac{1}{2}$ circiter. Tentanda est ergo divisio per $x + 2$, vel $x - 2$, vel $x + 3$, aut $x - 3$, & quidem exacte succedit per $x - 2$, & habetur in quoto æquatio secundi gradus $x^2 + 2x - 15 = 0$, cujus una radix est $+3$, altera -5 per *Prop. 1. vel 3. Cap. 8.*

V. Sit æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$, erit $x^3 - px = q$, & dividendo per x primam partem, fit $x^2 - p \leq q$, adeoque $x^2 \leq p + q$, & $x \leq \sqrt{p + q}$. Similiter cum sit $x^3 - px = q$, auferendo ex prima parte px , erit $x^3 > q$, adeoque $x > \sqrt[3]{q}$.

Sit exemplum $x^3 - 12x - 12 = 0$, erit $p = 12$, & $q = 12$; adeoque $x \leq \sqrt{24} = 4$, item $x > \sqrt[3]{12} = 2$. Est ergo x minor quam 4, sed major quam 2, proinde radix inter 4 & 3 latet, ut inferius patebit.

VI. Denum fit æquatio cubica $x^3 + qx - r = 0$, erit $x^3 + qx = r$; & subtrahendo ex una tantum parte x^3 , erit $qx \leq r$; dividendo autem per q , habetur $x \leq r:q$ pro primo limite.

Similiter quia $x^3 + qx = r$, sublato ex una tantum parte qx , erit $x^3 \leq r$, & $x \leq \sqrt[3]{r}$, & elevando ad secundam poten-

potentiam utrunque membrum, erit $xx \leq \sqrt[3]{r^2}$, & multiplicando per x , erit $x^3 \leq x \sqrt[3]{r^2}$. Hoc autem valore in æquatione data substituto, habetur $qx + x \sqrt[3]{r^2} > r$, proinde $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$ dat alterum limitem quæsitum. Radix igitur minor est $r : q$, sed major $\frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$

VI. Sit æquatio quarti gradus $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, erit $x^4 - px^2 = qx + r$, proinde $x^4 > px^2$, alias in hac ipsa æquatione $qx + r$ non esset quantitas positiva. Est ergo $x^2 > p$, & $x > \sqrt{p}$.

Similiter quia $x^4 - px^2 - qx = r$, si dividatur primum membrum per x , erit $x^3 - px - q \leq r$, pariterque $x^3 - px \leq r + q$. Dividatur primum membrum per x , erit multo magis $x^2 - p \leq r + q$, item $x^2 \leq r + q + p$, & extracta radice, habetur $x \leq \sqrt{r + q + p}$. Sunt ergo limites $\sqrt{p}$, & $\sqrt{r + q + p}$.

Sit exemplum $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$, erit $p = 8$, $q = 4$, $r = 3$; hinc $\sqrt{p} = 2$, & $\sqrt{r + q + p} = 1 + 2 + 2 = 5$. Est ergo radix inter limites 2 & 5.

COROLL. I. Eadem ratione inveniri possunt limites pro iisdem æquationibus etiamsi nullo termino careant; tum etiam pro æquationibus altiorum graduum, quemadmodum egregie fecit Florimundus de Beaune^(a), cui tam præclarum inventum, teste Erasmo Bartolino, debemus acceptum.

Pp

Co-

(a) Introduct. ad Geometriam Cartesii Amstelodami an. 1683. pag. 121.

COROLL. II. In limitibus dignoscendis numeri integri sufficiunt; ideoque fractiones tuto negligi possunt, præsertim in extractione radicum. Item ex radicalibus, quæ in formulis limitum apparent, satis est radicem extrahere proxime minorem, neglectis fractionibus, ut limes sit quantitas a fractionibus immunis & rationalis.

COROLL. III. Quamquam in æquatione generali quantitates p, q, r &c. denotent quantitates negativas, in speciali tamen æquatione quantitates omnes tanquam positivæ accipiuntur, ut exempla superiora satis docent.

PROPOSITIO II.

Radicum limites pro quacunque æquatione methodo Newtoniana indagare.

I. **M**ultiplicentur singuli datæ æquationis termini per numerum dimensionum, quas in illis habet incognita, hoc est per progressionem Arithmeticam naturalem descendentem, ita ut ultimus terminus sit zero, & factum dividatur per radicem æquationis. Deinde æquatio, quæ oritur uno gradu inferior, multiplicetur per aliam similem progressionem Arithmeticam, & hoc factum similiter dividatur per radicem æquationis; quod quidem toties fiet, donec occurrat æquatio simplex linearis.

Sit æquatio $A \ x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Progr. $\quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0.$

Div. per $x \quad 3x^3 - 2x^2 - 14x = 0$

$B \ 3x^2$

$$B \quad 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

$$\text{Progr.} \quad 2. \quad 1. \quad 0.$$

$$6x^2 - 2x = 0$$

$$\text{Div. per } x \quad 6x - 2 = 0$$

$$C \quad 3x = 1$$

Æquationes A, B, C dicuntur æquationes limitum. Jam vero ad indagandum limitem, intra quem continentur radices positivæ datæ æquationis, hæc est regula: in æquationibus $A, B, \& C$ loco incognitæ x ponitur quilibet numerus 1, vel 2, vel 3 &c. incipiendo ab unitate: nam numerus, qui in singulis æquationibus summam positivam efficit, dat limitem quæsitum. Sic in superiori exemplo ponendo 1 loco x in æquatione C , $3x - 1 = 2$, prodit summa positiva, sed in æquatione B , $3x^2 - 2x - 14 = -13$ prodit negativa. Idem sequitur ponendo 2, & 3 loco x . Quare infertur limitem his numeris fore majorem. Pono igitur 4, & prodeunt numeri omnes positivi scilicet

$$3x - 1 = 11$$

$$3x^2 - 2x - 14 = 26$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 16$$

Omnes hi numeri positivi indicant numerum 4 esse limitem, quem nulla potest radicum positivarum transcendere. Et quidem dividendo superiorem æquationem per $x - 3$, divisio exacte & sine residuo succedit, adeoque habetur 3 una ex radicibus positivis ejusdem æquationis.

II. Pro inveniendò limite, quem maxima radicum negativarum non transcendit, examinandum est simili ratione, quinam numerus negativus positus loco x in iisdem tribus æquationibus $A, B, \& C$ efficiat summam positivam in æquationibus illis, quæ habent dimensiones numero pares, summam vero negativam in æquationibus dimensionum numero imparium. In superiori exemplo frustra tentantur $-1, -2, -3, -4$: sed posito -5 loco x , prodit summa negativa in æquationibus numero imparium dimensionum, positiva vero in æquationibus dimensionum numero parium; proinde -5 est limes, quem radix negativa non transcendit, videlicet

$$3x - 1 = -16$$

$$3x^2 - 2x - 14 = +71$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = -56$$

Itaque si superior æquatio data $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ dividatur per $x + 4$, divisio exacte succedit, unde habetur radix negativa -4 .

III. Pro obtinendo radicum negativarum limite adhiberi possunt etiam numeri affirmativi, modo mutantur signa terminorum parium in æquationibus limitum, quod in sequenti exemplo factum videbis, tunc enim radices falsæ fiunt veræ per *Prop. 3. Cap. 6.* ideoque assumi possunt numeri affirmativi.

Sit æquatio $x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$, facta eadem operatione, ut supra, habentur æquationes limitum, scilicet

$$5x - 1 = 0$$

$$10x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1 = 0$$

$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$$

In quibus si loco x substituantur 1, vel 2, vel 3, non ubique prodit summa positiva; substituendo autem 4, summa oritur in singulis positiva, proinde 4 est quantitas, quam radicum positivarum maxima non transgreditur.

Ad inveniendum limitem, quem radicum negativarum maxima non excedit, mutatis terminorum parium signis, adhibentur eodem modo numeri affirmativi. Itaque ponendo in singulis æquationibus loco x numerum 2, prodit ubique summa affirmativa. In æquatione tamen $x^5 + 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x + 4 = 0$, prodit zero, quod indicat numerum 2 non modo esse limitem quæsitum, sed etiam unam ex radicibus ejusdem æquationis, quæ proinde facit, ut omnia producta se mutuo destruant *per num. 5. Propos. 1. Cap. 6.* En limitem æquationes cum signis mutatis.

$$5x + 1 = 11$$

$$10x^2 + 4x - 7 = 41$$

$$10x^3 + 6x^2 - 21x - 1 = 61$$

$$5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4 = 28$$

$$x^5 + 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 4x + 4 = 0$$

Habentur ergo limites 4, & -2, inter quos radices omnes æquationis datæ continentur.

Ratio

Ratio methodi hujus est, quia in æquatione radicem positivam habente omnis numerus positivus loco incognitæ x substitutus vel est æqualis ipsi radici, & sic æquatio illa tota evanescit *per num. 5. Prop. 1. Cap. 6.*, vel est major, & tunc efficit omnia illa producta positiva esse; vel est ipsa radice minor, & in hoc casu aliquod ex illis productis negativum apparet. Sit brevitatis gratia æquatio secundi gradus A , $x^2 + 3x - 10 = 0$, cujus radices sunt 2 & -5 ; ex superiori canone limitum æquatio erit B $2x + 3 = 0$. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum positivum 3 radice ipsa positiva 2 majorem; erit A , $9 + 9 - 10 = 8$, & B , $6 + 3 = 9$, ideoque 3 est limes æquationis quaesitus. Quod si ponatur 1 eadem radice positiva 2 minor, erit A , $1 + 3 - 10 = -6$, & B , $2 + 3 = 5$: quod regulæ repugnat, ut patet, cum productum unum sit negativum. Proinde 1 nequit esse datæ æquationis limes.

Similiter in eadem æquatione radix negativa est -5 . Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum negativum -6 radice ipsa negativa majorem; quo quidem substituto, erit A , $36 - 18 - 10 = 8$; at B , $-12 + 3 = -9$, quod cum regula optime convenit. At si ponatur -4 , numerus scilicet radice ipsa negativa minor, tunc facta substitutione in iisdem æquationibus A & B , prodit A , $16 - 12 - 10 = -6$, at B , $-8 + 3 = -5$ quod regulæ adversatur; cum æquatio A , quæ paris dimensionis est, producta positiva debeat efficere. Igitur ex hujusmodi productis affirmativis & negativis limites æquationum recte inferuntur.

COROLL. *Inventis limitibus, non solum minimo labore inveniuntur radices rationales, si quæ sunt, quas alioquin per ultimi termini divisores inquirere valde laboriosum est; sed etiam in cognitionem devenimus, an æquatio proposita radices surdas habeat. Nam si illa per nullum numerum intra limites constitutum exacte dividi possit, signum est, ipsam non alias nisi surdas radices habere. Sic æquationis $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, quam Cl. Auctor affert in Arithm. Univers. radices consistunt inter limites $2\sqrt[5]{0} - 3$; unde tentandi sunt solummodo divisores 1, $-1\sqrt[5]{0} - 2$, qui inter eos limites continentur, ut dignoscatur an talis æquatio per eos dividi exacte possit, adeoque radices rationales habeat. At quantus labor, si ad hanc rem sub utroque signo $\pm$ omnes ultimi termini 120 divisores tentandi sint?*

PROPOSITIO III.

Æquationum radices prope veras per approximationem extrahere.

I. **S**It æquatio data $x^3 - 12x - 12 = 0$. Inveniantur limites per Prop. I. vel 2. hujus, qui sunt 4 & 3; proinde radix, cum sit media inter 4 & 3, est incommensurabilis, quæ tamen inveniri poterit prope vera hac methodo.

Sumatur semidifferentia inter duos limites 4 & 3, nempe $\frac{1}{2}$, quæ addatur limiti minori, ita ut fiat $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, & dividatur æquatio data per $x - \frac{7}{2}$, residuum est cum signo

gno —, hoc est $—11\frac{1}{2}$. Proinde sumatur iterum semidifferentia inter limitem majorem $4\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{4}$, & addatur ad $\frac{1}{2}$, fiet $=\frac{5}{4}$. Dividatur æquatio data per $x - \frac{5}{4}$, residuum adhuc est negativum, nempe $—4\frac{17}{64}$. Itaque rursus sumatur semidifferentia inter limitem majorem $4\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{4}$, nempe $\frac{1}{8}$, quæ addatur ad $\frac{5}{4}$, fit $=\frac{31}{8}$. Dividatur per $x - \frac{31}{8}$ æquatio data, residuum adhuc est negativum, nempe $—\frac{161}{512}$. Igitur semidifferentia inter majorem limitem $4\frac{1}{2}$ & $\frac{31}{8}$, quæ est $\frac{1}{16}$, addenda est ad $\frac{31}{8}$, ut fiat $=\frac{63}{16}$, factaque divisione æquationis datæ per $x - \frac{63}{16}$, habetur residuum positivum $+1\frac{3263}{4096}$, proinde $\frac{63}{16}$ est limex, qui radicem jam transcendit, adeoque propinquiores quæsitæ radices limites sunt $\frac{63}{16}$ & $\frac{31}{8}$, hoc est $\frac{63}{16}$ & $\frac{62}{16}$; & radix ipsa media est inter $3\frac{31}{16}$ & $3\frac{14}{16}$; ideoque differentia non est nisi $\frac{1}{16}$.

II. Si radix adhuc propinquior desideretur, continuari potest eodem modo approximatio. Nam in superiori exemplo cum ex additione semidifferentiæ $\frac{1}{16}$ facta ad $\frac{31}{8}$ innotescat provenire residuum positivum $+1\frac{3263}{4096}$, addi potest ad $\frac{31}{8}$ dimidium tantum ejusdem semidifferentiæ $\frac{1}{16}$, nempe $\frac{1}{32}$, ut fiat $=\frac{125}{32}$, factaque divisione æquationis datæ per $x - \frac{125}{32}$, provenit residuum pariter positivum $+ \frac{21909}{32768}$. Habentur igitur duo limites quæsitæ radices adhuc propinquiores, nempe $\frac{31}{8}$ & $\frac{125}{32}$, hoc est $\frac{124}{32}$, & $\frac{125}{32}$; proinde radix est inter $3\frac{28}{32}$ & $3\frac{29}{32}$, ita ut differentia tantum sit $\frac{1}{32}$. Hac ratione continuari potest approximatio quantum quis voluerit.

COROLL. Radix ergo datæ æquationis prope vera in notis decimalibus erit inter 3.87500 & 3.90625 , & differē.

ferentia $\frac{3125}{100000}$, quod quidem obtinetur addendo ad numeratores fractionum quinque zéros & dividendo per 32.

SCHOL. Pro æquationibus quadraticis radices approximatio habetur ex communi Arithmetica addendo ad residuum tot cyfrarum paria quot libuerit; hinc $\sqrt{13} = 3.$

^{IV}
6055, quater additis 00. Orontius Finæus id primus docuit.

PROPOSITIO IV.

Aliæ approximandi rationes expediuntur.

SIt eadem æquatio $x^3 - 12x - 12 = 0$, cujus una radix sit minor 4, sed major 3, ut in præcedenti propositione dictum est. Ponatur esse $x = 3 + y$, & hoc valore in æquatione posito, oritur

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 + 27y + 9y^2 + y^3 \\ - 12x &= - 36 - 12y \\ - 12 &= - 12 \\ \hline &= 21 + 15y + 9y^2 + y^3 \end{aligned}$$

Quia vero y hoc loco denotat fractionem, quæ additur ad 3, ut fiat ad veram radicem approximatio, & fractionum potentia continuo decrescunt, hinc tuto negliguntur $+ 9y^2 + y^3$, quod etiam in sequentibus observabitur.

Est igitur $15y = 21$, hoc est $y = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1.4$ (reducendo $\frac{7}{5}$ ad fractiones decimales facilioris calculi gratia)

est ergo $y = 1.4$. Ponatur jam $x = 3 + 1.4 + y$, hoc

Qq

est

est $x = 4.4 + y$, & hoc valore in æquatione substituto, erit

$$\begin{aligned} x' &= 85.184 + 58.08y \dots \\ -12x &= -52.800 - 12.00y \\ -12 &= -12. \end{aligned}$$

$$+ 20.384 + 46.08y \dots$$

Hinc habetur $46.08y = -20.384$, hoc est $y = -$

$$\frac{20.384}{46.08} = -4. \text{ Sed si hujus residuo divisionis addantur}$$

duæ, aut tres cyfæ, ob majorem approximationem, erit quotus -4423 , subtrahendus (ob signum $-$) ex $x = 4.$

4. hoc est ex 4.4000 , eritque residuum 3.9577 radix æquationis magis magisque approximans.

Quod si rursus ponatur $x = 3.9577 + y$, & pari ratione operatio eadem continuetur, multo major fiet ad veram radicem approximatio, sed hoc ad methodi intelligentiam satis.

COROLL. I. Hinc facile eruuntur approximandi formulæ, quæ ad hanc rem afferri solent. Sit enim, ut supra, æquatio $-21 + 15y = 0$. Si fiat $p = -21$, & $q = 15$, erit $qy = -p$, proinde $y = -p : q$, hoc est $y = \frac{21}{15} = 1.4$, omnino ut superius.

COROLL. II. Vel cum Hallejo^(a) sit eadem æquatio

-21

(a) In Transact. Anglican. n. 2. o.

$-21 + 15y + 9y^2 = 0$, & fiat $p = -21$, $q = 15$,
 & $r = 9$, erit $ry^2 + qy = -p$, & dividendo per $q + ry$,
 habetur $y = -p : (q + ry)$. Sed ex Coroll. 1. est $y =$
 $-p : q$, ergo $y = -p : (q - pr : q)$ proinde $y = 21 :$
 $(15 + \frac{189}{15}) = 21 : (15 + \frac{63}{5}) = 21 : (\frac{138}{5})$, hoc est $y =$
 $\frac{105}{138}$, & dividendo per 3, erit $y = \frac{35}{46}$: quæ fractio si ad
 decimales reducat per Prop. 4. Append. erit $y =$
 76086 . Hic valor si addatur ad 3 ^vlimitem æquationis,
 ita ut fiat $x = 3 + 76086$, & continuetur eodem mo-
 do operatio, invenitur ex eadem Halleji formula radix prope
 vera, vel quæ a vera minimum dissentiet.

SCHOL. Approximandi regulæ hætenus explicitæ sunt
 tantum pro æquationibus numericis.

PROPOSITIO V.

*Radices prope veras in æquationibus literalibus
 indagare.*

SIt data æquatio secundi gradus $x^2 - 2nx - r^2 = 0$,
 cujus radix per Prop. 1. vel 3. Cap. 8. erit $x = n +$
 $\sqrt{r^2 + n^2}$, seu $x = n + \sqrt{r^2 + n^2}$ per Defin. 5. Cap. 3. Quæ-
 ritur valor approximatus potentia imperfectæ $r^2 + n^2$,
 quod quidem duplici methodo obtineri potest.

I. Ex $r^2 + n^2$ extrahatur radix secunda, habebitur per
 Prop. 11. Cap. 3. valor quæsitus per seriem infinitam ter-

Qq 2

mino-

minorum, nempe $r + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^4}{8r^3} + \frac{n^6}{16r^5} \&c. = \sqrt{r^2 + n^2}$
 $= \sqrt{r^2 + n^2}$, & si fiat $n = 1$, erit $r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5} \&c.$

II. Supponatur $z = \sqrt{r^2 + n^2}$, erit $zz = r^2 + n^2$, & $zz - r^2 - n^2 = 0$.

Ponatur deinde z æqualis seriei infinitæ terminorum, quorum exponentes progressionem Arithmeticam, ipsi vero Geometricam servent, & multiplicati existant per litteras $a, b, c, d \&c.$ quæ hoc loco tanquam indeterminatæ considerantur. Hi autem termini proportionales constantur ex quantitate aliqua cognita datæ æquationis, ut n in hoc exemplo, nempe

Sit $z = an^0 + bn^1 + cn^2 + dn^3 + \&c.$ (primus terminus $an^0 = a$, nam $n^0 = 1$, quod semper advertatur) eleve-
 tur ad secundam potentiam utrumque hujus æquationis
 membrum, & ponatur in superiori æquatione $zz - r^2 - n^2 = 0$ loco zz ejus valor, erit

$$\begin{array}{r} a^2 + 2abn + bbn^2 + 2adn^3 + \&c. \\ + 2acn^4 + 2bcn^5 + \&c. \\ - n^2 \\ - r^2 \end{array} = 0$$

Jam singuli termini æquantur zero, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum $a, b, c, d \&c.$

Erit

Erit 1.^a $a^2 = r^2$, atque hinc $a = r$.

2.^a $2ab = 1$, & posito r loco a , erit $2rb = 1$, seu

$$b = \frac{1}{2r}$$

3.^a $2ac = -bb$, & substitutis valoribus b & a , erit $2rc$

$$= -\frac{1}{4rr} = c = -\frac{1}{8r^3}.$$

4.^a $2ad = -2bc$, hoc est $ad = -bc$, & positis valoribus a , b , c , habetur $d = \frac{1}{16r^5}$ &c.

Surrogentur hi valores in serie assumpta $an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6$ &c. erit $r + \frac{1}{2r}n^2 - \frac{1}{8r^3}n^4 + \frac{1}{16r^5}n^6$ &c.

Quod si ponatur $n = 1$, erit valor quæsitus ipsius $r^2 + n^2 = 1$
 $= r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c. ut supra.

Est ergo radix propositæ æquationis $x = 1 + r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

SCHOL. Poterat series efformari ex altera quantitate cognita r , ita ut fieret $z = ar^0 + br^2 + cr^4$ &c. si r minor fuisset quam n . Nam series, ut ad verum valorem magis accedat, debet esse convergens. Quod ut fiat, necesse est numerator fractionis denominatore sit minor per Coroll. 2. Prop. 8. Cap. 2. unde in hoc casu quantitas n fieret in seriei terminis denominator. Hoc semper erit in ejusmodi seriebus efformandis observandum.

PRO.

PROPOSITIO VI.

Idem problema alio modo resolvitur.

I. **S**it eadem $x^2 - 2nx - r^2 = 0$, cujus radix per approximationem quæritur. Supponatur statim valor incognitæ x æqualis seriei indeterminatæ quorumcumque terminorum, nempe

Sit $x = an^0 + bn^1 + cn^2 + dn^3 + en^4 \&c.$ Quantitates $a, b, c \&c.$ sunt indeterminatæ, & $n^0 = 1$, unde $an^0 = a$. Elevetur series ad singulos gradus, quos habet x in data æquatione, ita ut æquatio transformetur in aliam indeterminatam, scilicet

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = a^2 + 2abn + 2acn^2 + 2adn^3 + 2aen^4 \&c. \\
 & + bbn^1 + 2bcn^2 + 2bdn^3 \&c. \\
 - 2nx & - 2an - 2bn^2 - 2cn^3 + ccn^4 \&c. \\
 - r^2 & - r^2 \qquad \qquad \qquad - 2dn^4 \&c.
 \end{array}$$

Jam singuli termini æquantur zero, ut determinetur valor ipsarum $a, b, c, d \&c.$ ex æquationibus particularibus, quæ sequuntur.

- 1.^o $a^2 - r^2 = 0$, atque hinc $a^2 = r^2$, & $a = r$.
- 2.^o $2ab - 2a = 0$, & posito r loco a , erit $rb = r$, hoc est $b = 1$.
- 3.^o $2ac + bb - 2b = 0$, & $2ac + bb = 2b$, in qua positis valoribus a & b , habetur $2rc + 1 = 2$, atque hinc $c = \frac{1}{2r}$.

4.^o $2ad$

4.^a $2ad + 2bc - 2c = 0$, & $ad + bc = c$, in eaque substitutis valoribus ipsarum a, b, c , erit $d = 0$.

5.^a $2ae + 2bd + cc - 2d = 0$, & abjectis (ob $d = 0$) terminis $2bd - 2d$, remanet $2ae = -cc$, unde eruitur

$$e = -\frac{I}{8r^3}.$$

His valoribus surrogatis in serie $a + bn^r + cn^r + dn^r$ &c.

oritur series determinata $r + n^r + \frac{I}{2r}n^r - \frac{I}{8r^3}n^r - \frac{I}{32r^5}$

n^r &c. ac posito $n = 1$, erit $x = r + 1 + \frac{I}{2r} - \frac{I}{8r^3} - \frac{I}{32r^5}$ &c. Ex his paucissimis terminis patet, hanc se-

riem magis, quam duas superiores, esse convergentem.

II. Sit æquatio cubica $x^3 + bbx - 2b^3 = 0$
 $+ abx - a^3$

Fiat series ex quantitate cognita omnium minima, quæ sit a , multiplicata per indeterminatas f, g, b, i &c. & eidem æqualis ponatur incognita x , erit $x = fa^r + ga^r + ba^r + ia^r + la^r$ &c. quæ series elevetur ad omnes gradus, quos habet x in æquatione data, erit

$x^3 =$	$f^3 + 3ffga + 3fgga^2 + g^3a^3 + 3fbba^2$ &c.
	$+ 3ffbba^2 + 3ffia^3 + 3ggba^3$ &c.
	$+ 6fgba^3 + 3ffla^4$ &c.
	$+ 6fgia^4$ &c.
$+ bbx$	$+ bbfa + bbga + bbbba^2 + bbia^3 + bblba^4$ &c.
$+ abx$	$+ bfa + bga + bba^2 + bia^3$ &c.
$- 2b^3$	$- 2b^3$
$- a^3$	$- a^3$

Fiant

Fiant singuli termini zero æquales, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum f, g, b, i &c.

1.^a $f^3 + fbb - 2b^3 = 0$, quæ si dividatur per $f - b$, divisio exacte succedit, proinde b est radix vera ejusdem æquationis, per num. 5. Propos. 1. Cap. 6. eritque $f = b$.

2.^a $3ffg + bbg + bf = 0$, & $3ffg + bbg = -bf$, & posito b loco f , habetur $g = -\frac{1}{4}$. Nam $g = -\frac{bf}{4bb} = -\frac{1}{4}$.

3.^a $3ffb + bbb = -bg - 3fgg$, in qua posito valore ipsarum f & g , invenitur $b = \frac{1}{64b}$.

4.^a $3ffi + bbi = -bb - g^3 - 6fgh + 1$, & substitutis valoribus jam inventis loco f, g, b , habetur $i = \frac{131}{512b^2}$.

5.^a $3ffl + bbl = -bi - 6fgi - 3ggb - 3fbb$, ex qua eodem modo eruitur valor $l = \frac{509}{16384b^3}$.

Porro his valoribus substitutis in serie $fa^0 + ga^1 + ba^2 + ia^3$ &c. habetur $x = b - \frac{1}{4}a + \frac{1}{64b}a^2 + \frac{131}{512b^2}a^3 + \frac{509}{16384b^3}a^4$ &c. Et posito $a = 1$, erit $x = b - \frac{1}{4} +$

$\frac{1}{64b} + \frac{131}{512b^2} + \frac{509}{16384b^3}$.

SCHOL. I. Si æquatio data duas incognitas x & y contineat, ut sæpe in Geometria composita contingit, tunc

ter.

termini seriem componentes desumuntur ex incognita, quæ minor est, ut series convergens fiat, quemadmodum in Sch. Prop. præc. dictum est. Ut si x major quam y , fiat series $x = ay^2 + by^1 + cy^2 + dy^1 + ey^2 + fy^1$ &c. Cetera peraguntur, ut supra. At plura his addere non est hujus loci.

SCHOL. II. Cum series infinitæ primo a Mercatore Hol-
sato per divisiones, secundo a Cl. Newtono per radicum
extractiones quæsitæ fuerint, ut in Schol. 2. Propos. 11.

Cap. 3. innuimus, demum celeberrimus Leibnitius (^a) ad
eas pervenit per suppositionem ipsius seriei quæsitæ tanquam
inventæ; ita ut coefficientes terminorum ejusdem seriei po-
stea determinantur, ut series ipsa determinata fiat: quæ
sane methodus commodior est longeque ceteris universalior,
cum hæc non modo in calculo communi, sed etiam in Dif-
ferentiali & Integrali usum habere possit plurimum. Nos
facile & ad discentium intelligentiam aptum specimen in
hac Propositione duntaxat exhibuimus.

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

Geometricam æquationum constructionem aggredi-
mur. Intelligent hinc tyrones ingentem Analy-
seos in Geometria usum. Intelligent qua ratione
Euclides, Apollonius, magnus Archimedes aliique veteres

R r

Geo-

(a) Acta Erudit. Lipsiæ an. 1683.

Geometræ, quæ per Analysin problemata subtiliter invenerant, ea deinde, suppresso calculo, composuerint ac synthetice demonstraverint. Horum vestigiis insistentes *Sim- plices* tantum & *Quadraticas Æquationes* in hoc capite constituimus. Nam quæ altioris sunt gradus, Curvarum doctrinam ad constructionem requirunt. Præmittimus autem his quantitates Analyticas Geometrice exprimendi rationem, cum id tyronibus soleat negotium facessere.

P O R I S M A I.

Fractiones in terminos proportionales resolvere.

FRactiones Analyticæ, quibus incognita æqualis existit in terminos proportionales resolvuntur variis quidem modis.

I. Sit $x = \frac{ab}{c}$, erit $c.a :: b.x$, nimirum est x quarta proportionalis *per Prop. 12. l. 6. Eucl.*

II. Sit $x = \frac{aa - bb}{c - d}$, quia $a + b \times a - b = aa - bb$, erit $c - d, a + b :: a - b.x$ *per Propos. cit.*

III. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n}$. Inveniatur $\frac{ab}{c} = n$, & $\frac{adc}{n} = m$, *per Propos. cit.*; erit $x = n + m$.

IV. Sit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, quia nulla litera in numeratore bis habetur, fiat $a.d :: c.$ ad quartam proportionalem $= r$,

$=r$, erit $ar = cd$ per Prop. 16. l. 6. Eucl. proinde æquatio mutatur in hanc $\frac{ab+ar}{m+n}$, in qua reperitur bis a , adeoque sic resolvitur $m+n.b+r :: a.x$.

V. Sit $x = \frac{aabc}{ddf}$, fiat primo $d.a :: a$. ad quartam proportionalem $=m$, erit $aa = dm$, proinde ponendo dm loco aa , erit $x = \frac{dmabc}{ddf}$, seu $x = \frac{mbc}{df}$. Secundo fiat $d.m :: b$ ad quartam proportionalem $=n$, erit $dn = mb$; unde irrogando dn loco ipsius mb , erit $x = \frac{dnc}{df}$, seu $x = \frac{n}{f}$, itaque habetur $f.n :: c.x$, ut supra num. 1.

aut si sit $f.n :: c.l$, erit $x = l$, cum sit $\frac{nc}{f} = l$, ut patet.

COROLL. Hinc facile invenitur recta æqualis pluribus fractionibus datis. Nam sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n} + \frac{cn}{f}$ &c. si reperiat, ut superius factum est, per Prop. 12. l. 6. $\frac{ab}{c} = n \frac{dc}{n} = m$, & $\frac{cn}{f} = l$, erit $x = n + m + l$, nempe $x =$ rectæ lineæ compositæ ex rectis n, m, l &c.

P O R I S M A II.

Summam, differentiam quadratorum, & radicem extractiones Geometrice exprimere. Fig. 10.

I. **S**It triangulum ABC rectangulum in B , cujus hypotenusa sit $AC = a$, unum latus $AB = b$, & alterum $BC = c$, quia $AC^2 = AB^2 + BC^2$ per 47. l. 1. *Eucl.* erit $aa = bb + cc$, & $AC (a) = \sqrt{bb + cc}$. Similiter quia $AB^2 = AC^2 - BC^2$, erit $bb = aa - cc$, & $AB (b) = \sqrt{aa - cc}$. Item $cc = aa - bb$, & $BC (c) = \sqrt{aa - bb}$.

II. Quod si demittatur perpendicularum BD , ita ut basis segmentum sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & ob angulum rectum in D , erit $BD^2 = BC^2 - DC^2 = cc - xx$, unde $BD = \sqrt{cc - xx}$. Similiter quia $BD^2 = AB^2 - AD^2 = bb - aa + 2ax - xx$, erit $BD = \sqrt{bb - aa + 2ax - xx}$.

III. Similiter (*Fig. 11.*) si in semicirculo AFC ducantur duæ quælibet chordæ AB & BC , erit angulus ABC rectus per 20. l. 3. *Eucl.* Hinc posita diametro $AC = a$, $AB = b$, & $BC = c$, habentur eadem omnino quantitates, quæ supra. Erit enim $AC (a) = \sqrt{bb + cc}$. Item

$$AB (b) = \sqrt{aa - cc}, \text{ \& } BC (c) = \sqrt{aa - bb}$$

IV.

IV. Demisso autem ex quovis circuli puncto perpendiculari $BD = y$, sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & per Coroll. Propos. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet $BD^2 = AD \times DC$, hoc est $yy = ax - xx$, unde $BD (y) = \sqrt{ax - xx}$. Vel sit $ED = x$, $DB = y$, & CE , vel $BE = a$, erit $BD^2 = EB^2 - ED^2$, hoc est $yy = aa - xx$, & $BD (y) = \sqrt{aa - xx}$.

COROLL. I. Ex his patet quomodo exprimi possit Geometrice hæc, aut alia similis quantitas Analytica $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc}$.

Nam inveniatur ut supra, $a = \sqrt{bb + cc}$, fiet $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc} = \frac{ar}{n}$, quæ quantitas si per Poris. I. in analogiam resolvatur, haberi potest $\frac{ar}{n} = 1$, unde $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc} = 1$.

COROLL. II. Patet quo pacto media proportionalis per quantitatem radicalem designata, Geometrice sit exprimenda. Nam (Fig. 11.) si fiat $AD = a$ & $DC = b$, & ducatur BD perpendicularis ad diametrum AC , erit $BD = \sqrt{ab}$ per Cor. Prop. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

COROLL. III. Patet demum qua ratione dato plano $= ab$ reperitur quadratum illi æquale cc . Nam sit, ut prius, $AD = a$, $DC = b$, & ducatur in circulo ad diametrum AC perpendicularis $DB = c$, erit $DB = AD \times DC$ per Cor. cit. hoc est $cc = ab$. Contra vero dato quadrato cc , & al.

¶ alterutro plani bd latere, facile est invenire ipsum planum.

P O R I S M A III.

Æquationes secundi gradus Geometrice construere.

Quatuor formulis comprehendi solent omnes secundi gradus æquationes, earumque radices ob duplicem valorem affirmativum, & negativum duplici signo afficiuntur $\pm$ ut sæpe diximus, scilicet

<i>Formulae.</i>	<i>Radices.</i>
1. $x^2 = ax + bb$	$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + bb}$
2. $x^2 = -ax + bb$	$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + bb}$
3. $x^2 = ax - bb$	$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - bb}$
4. $x^2 = -ax - bb$	$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - bb}$

I. Pro prima formula construenda (*Fig. 12.*) fiat triangulum ABC rectangulum in B , cujus latus $BC = b$, & $AB = \frac{1}{2} a$, erit per *Porif. 2.* basis $AC = \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Centro igitur A & intervallo AB fiat circulus ABE , & producat AC in D , erit recta $CD = x = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$, ut patet.

Vel sic (*Fig. 13.*) fiat $AB = \frac{1}{2} a$, & perpendicularis $BC = b$; tum centro A cum intervallo basis AC fiat semicirculus DCE , in quo producat AB hinc inde ad peripheriam, erit $DB = x$. Nam

Nam $DB = AB + AD$ vel AC , sed $AB = \frac{1}{2}a$, &
 $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ergo $DB = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

II. Pro secunda formula constructio est eadem: nam in
Fig. 12. (non producta AC in D) erit $CE = x$. Nam CE
 $= CA - AE$, seu AB : sed $AB = \frac{1}{2}a$, & $CA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$,
 ergo $CE = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

Vel in *Fig. 13.* $EB = AE$, (vel AC) $- AB$, proinde
 $EB = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

III. Pro tertia formula construenda (*Fig. 14.*), quæ
 quidem duas habet radices positivas, ut signorum dispositio
 docet *per num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* sit in semicirculo AEB dia-
 meter $AB = a$, erit semidiameter AC , vel CB , vel CE
 $= \frac{1}{2}a$. Elevetur ex puncto B perpendicularis $BF = b$,
 & ducatur diametro AB parallela EF , quæ secabit circ u-
 lum in E . Tum ex puncto E ducta ED ad diametrum
 perpendiculari, erit $AD = x$.

Nam $AD = AC + CD$; sed $AC = \frac{1}{2}a$, & $CD =$
 $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ergo $AD = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

Erit autem DB altera radix positiva. Nam $DB = BC$
 $- CD$, proinde $DB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

IV. Formula autem quarta, cujus constructio est omni-
 no eadem, ambas radices habet negativas, ut ex signorum
 dispositione dignoscitur *per num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* quarum
 prima erit $-AD = -AC - CD$, hoc est $-\frac{1}{2}a -$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$. Altera vero $-DB = -CB + CD$,
 hoc est $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

SCHOL.

SCHOL. I. Ceterum ad absolutam problematis resolutionem una radix & quidem positiva sufficit. Proinde Cartesius de radicibus negativis construendis sollicitus nunquam fuit. Recentiores tamen singulas construunt, ut & nos in tertia & quarta formula. Pro prima autem formula radix negativa (Fig. 13.) erit EB. Nam $EB = -AE$ (seu

$-AC$) $+ AB$; proinde $EB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. Pro secundâ formula radix negativa erit $-DB$. Nam $-DB = -BA - AD$ (seu $-AC$) idest $= -\frac{1}{2}a$

$- \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. Hinc apparet constructionem esse eandem, sed radices negativas ad partem oppositam esse desumendas; hoc est si radix positiva DB desumpta fuit ex B versus D, e contrario radix negativa BE desumi debet ex B versus E: quæ regula in Geometricis constructionibus semper observatur.

SCHOL. II. Si in tertia vel quarta formula BF (= b) major sit, quam CB (= $\frac{1}{2}a$) fieri non poterit, ut parallela EF circumulum secet, & in hoc casu problema erit impossibile. Ratio est, quia ubi $b > \frac{1}{2}a$, erit quoque $bb > \frac{1}{4}aa$,

ideoque $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ fit quantitas imaginaria, & problema contradictionem involvere signum est. Quod si $BF = CB$, hoc est $b = \frac{1}{2}a$, tunc parallela EF non secat circumulum, sed illum tangit in puncto, ex quo si ducatur perpendicularis ED, hæc in centro consistit, & recta CD evanescit, pro-

inde $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bb} = 0$. Hac ex ipsa constructione patent.

SCHOL. III. Ut obtineantur æquationes supra allatæ, vel aliæ similes, proposito problemate, delineatur figura, in qua

in qua problema ipsum quasi solutum ponitur, ducendo in ea lineas perpendiculares, parallelas, angulos æquales, circulos, triangula similia, vel rectangula, aliasque figuras, quarum notæ relationes & proprietates Algebraicas æquationes nobis exhibent. Quæ quidem plenius docent problemata, quæ sequuntur, fere omnia ab Euclide, Archimede, aliisque summis Geometris de industria accepta: cum in his primo versari ex usu discientium esse putaverim.

PROBL. I.

Datam rectam AB sectam utcumque in C ita producere in E, ut rectangulum AEB sit æquale quadrato CE.

Factum jam sit, (Fig. 15.) & esto data $AB = a$, $CB = b$, quæsitæ $BE = x$, erit tota $AE = a + x$, & ex conditione problematis $AE \times EB = CE$, hoc est

$$ax + xx = b^2 + 2bx + xx$$

$$ax = b^2 + 2bx$$

$$ax - 2bx = b^2$$

$$x(a - 2b) = b^2$$

$$\text{Div. per } a - 2b \quad x = \frac{b^2}{a - 2b}$$

Qua æquatione in terminos proportionales resoluta per Poris. 1. habetur $a - 2b . b :: b . x$. Est ergo $BE = x$ tertia proportionalis, unde oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio (Fig. 16.) Sumatur in AB pars $CD = CB$. erit $DB = 2b$, & $AD = a - 2b$. Fiat $AD (a - 2b)$,

Ss

DC

$DC (b) :: DC, \text{ vel } CB (b). BE (x)$ tertiam proportionalem quæsitam.

Demonstr. Cum ex construct. sit $AD.DC, \text{ vel } CB :: CB.BE$, erit componendo per *Propos. 18. l. 5.* $AC.DC, \text{ vel } CB :: CE.BE$. Est autem ut AC antecedens ad CB consequentem, ita CE antecedens ad BE consequentem, ergo AE summa antecedentium erit ad CE summam consequentium, ut CE una antecedentium ad BE unam consequentium per *Prop. 12. l. 5.* ergo rectangulum sub extremis $AE \times BE$, nempe AF , erit æquale quadrato sub mediis $CE \times CE$, idest CH per *Prop. 17. l. 6.* Quod erat &c.

SCHOL. Hinc apparet methodus, aut alia huic affinis, quam Euclides, Archimedes, Apollonius aliique veteres in suis problematibus investigandis, construendis, ac demonstrandis tenuerunt.

PROBL. II.

In dato triangulo ABC quadratum inscribere.

Fig. 17.

E Sto factum, & quadratum inscriptum sit $EDFG$. Ducatur perpendicularis AM , quæ ob triangulum datum erit pariter data. Sit $BC = a$, $AH = b$, & HL seu $FG = x$, erit $AL = b - x$. Jam ob triangula similia BAC & FAG erit $AH (b). BC (a) :: AL (b - x). FG (x)$, proinde

$$bx = ab - ax$$

$$bx + ax = ab$$

$$ab$$

Divid. per $a + b$

$$x = \frac{ab}{a + b}$$

Reso.

Resoluta æquatione in terminos proportionales, habetur $a + b . a :: b . x$ per Porif. I. unde patet quæsitam $LH = x$ esse quartam proportionalem. Hinc oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio. Producta BC indefinite, fiat $HM = BC$, & $MN = AH$, erit $HM + MN = a + b$. Jungatur AN , cui ex puncto M parallela ducatur LM , quæ secabit AH in puncto quæsito L .

Demonstr. Ob parallelas AN & LM triangula AHN , & LHM sunt similia, proinde MN , seu $AH . AL :: HM$ seu $BC . LH$. Item ob triangula similia BAC & FAG est $AH . AL :: BC . FG$; ergo $AH . AL :: BC . LH$, ideoque BC ad duas FG & LH eandem rationem habet, quæ idcirco sunt æquales per Propos. 9. lib. 5. Est ergo $EDFG$ quadratum. Quod &c.

COROLL. Tam ex hoc, quam ex præc. problemate apparet, fractiones, quibus quantitas incognita in æquatione finali æquatur, in terminos proportionales esse resolvendas, ut in Porif. I. docuimus.

P R O B L. III

In quadrilatero $ABDE$ circulo inscripto rectanguli, quod fit ex diagonalibus $AD \times EB$ ad rectangula, quæ fiunt ex lateribus oppositis $AE \times BD$, & $AB \times DE$, rationem invenire. Fig. 18.

DUcatur DF faciens angulum EDF æqualem angulo ADB , erunt triangula ADB & EDF similia, cum etiam anguli DAB & BED sint æquales, utpote eidem
S s 2 arcui

arculi BD insistentes, proinde $AD.DE::AB.EF$; & si ponatur $AD=a$, $DE=b$, $AB=c$, & $EF=x$, erit $a.b::c.x$, adeoque $ax=bc$.

Similiter triangula ADE & BDF sunt æquiangularia & similia. Nam si æqualibus ex constructione angulis EDF , & ADB addatur communis ADF , erit $ADE=BDF$. Item $DAE=DBF$, cum eidem arcui DE insistant, & hinc $BF.AE::BD.AD$. Jam si ponatur tota $BE=f$, erit $BF=f-x$. Sit $AE=d$, & $BD=e$, erit $f-x.d::e.a$; ideoque $af-ax=ed$. Addatur huic æquationi altera $ax=bc$, erit $af=ed+bc$; unde patet rectangulum, quod fit ex diagonalibus $AD \times BE=af$, æquari duobus rectangulis, quæ fiunt ex lateribus oppositis $AE \times BD=ed$, & $AB \times DE=bc$ simul sumptis.

Demonstr. Ob triangula similia ADB & EDF est $AD.DE::AB.EF$: ergo per 16. l. 6. $AD \times EF=DE \times AB$. Item ob triangula similia ADE & BDF est $BF.AE::BD.AD$; ergo per Prop. cit. $AD \times BF=AE \times BD$. Sed $AD \times BF$ & $AD \times EF=AD \times EB$ totam per 1. l. 2.; ergo $AD \times EB=DE \times AB+AE \times BD$. Quod erat &c.

SCHOL. Præclarum hinc oritur Ptolomæi (a) theorema: In quadrilatero inscripto in circulo rectangulum sub diagonalibus æquale est rectangulis, quæ a lateribus oppositis fiunt. Quod quidem magnum habet in Trigonometria usum.

PROBL.

(a) Almagesti lib. 1. Cap. 9.

P R O B L. IV.

*Datam rectam AB media & extrema ratione
secare. Fig. 19.*

Secta sit AB in puncto C , ut imperatur; & sit ipsa $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis cum tota AB debeat esse ad majus segmentum AC , ut AC ad segmentum minus CB , erit $a : x :: x : a - x$, hinc

$$xx = aa - ax$$

$$xx + ax = aa$$

Prop. I. Cap. 8.

$$\frac{1}{4} a^2 \quad \frac{1}{4} a^2$$

Extra. rad.

$$x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{5}{4} a^2$$

$$x + \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

$$x = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

Construct. A rectæ AB puncto B elevetur perpendicularis $BD = \frac{1}{2} a$; ductaque AD , secetur $ED = DB (= \frac{1}{2} a)$. Facto deinde centro in A cum intervallo AE , secetur $AC = AE$, erit C punctum quæsitum.

Demonstr. Triangulum ABD est rectangulum in B ,

ergo $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4} aa = \frac{5}{4} a^2$; unde $AD = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$. Est autem $DE = DB = \frac{1}{2} a$; ergo $AE = AD - DE = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a = AC$.

Insuper $CB = a - x$, erit $= \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$. Sunt autem $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a$, & $CB = \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$
tales

tales inter se, ut rectangulum sub extremis $AB \times CB$ sit æquale quadrato mediæ AC , hoc est $\frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, hinc AB , AC & CB sunt continue proportionales per 17. l.6. proinde AB secta est in C media & extrema ratione.

COROLL. I. Hinc facile eruitur synthetica demonstratio. Nam si data AB secetur in C , ita ut rectangulum $AB \times CB$ sit æquale quadrato AC , ut docet Prop. 11. l.2. erit $AB.AC :: AC.CB$ per 17. lib.6. ergo AB secta est in C secundum mediam & extremam rationem per Defin. 3. lib.8.

SCHOL. Certum est quadratum $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$ posse ori-
ri tam ex radice positiva $x + \frac{1}{2}a$, quam ex negativa $-x - \frac{1}{2}a$. In primo casu habetur radix positiva, quam supra construximus $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; in secundo radix negativa & æqualis nibilo $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, quæ tamen construi potest hac ratione.

Supposita superiori constructione, producat BA ver-
sus F , & fiat $AF = DB = \frac{1}{2}a$, & $FG = AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$,
erit tota $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -x$, & $GB (= a - x)$
 $= \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Sunt porro tres continue proportionales
 $BA = a$, $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, & $GB = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Nam $BA \times GB = AG^2$, cum utrinque oriatur $\frac{3}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

COROLL. II. In constructione radicum negativarum quan-
titates cognite signo — affectæ desumi debent ad partem
oppositam radicum positivarum; quod in Schol. I. Porif. 3.
fuit prænotatum, & ex hac constructione apparet.

PROBL.

PROBL. V.

Datam rectam AB inæqualiter ita secare in C, ut quadrata totius AB, & minoris segmenti BC sint tripla quadrati, quod fit a segmento majori AC. Fig. eadem.

S It $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis.

$$a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2$$

$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$

$$x^2 + ax = a^2$$

Prop. 1. Cap. 8.

$$\frac{\frac{1}{4}a^2}{x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

Extr. rad.

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$$

Quæ quidem æquatio cum fit eadem ac superioris problematis, indicio est rectam AB secandam esse media & extrema ratione, ut duo quadrata $\overline{AB}^2$ & $\overline{BC}^2$ sint tripla qua-

drati $\overline{AC}^2$. Facta igitur eadem constructione, sectaque AB in C media & extrema ratione, erunt tres continue proportionales $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $BC = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$; atque hinc quadrata $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3\overline{AC}^2$, hoc est $\frac{5}{2}a^2 = 3a\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$.

COROLL. Hinc oritur Theorema 4. l. 13. Euclidis : Si recta linea media & extrema ratione secta fuerit, totius & minoris portionis utraque simul quadrata tripla sunt quadrati ejus, quod a majori fit portione. Cujus demonstratio ex superiori æquatione & constructione sponte sua sequitur.

PROBL. VI.

A dato puncto E rectam ducere, quæ datum circumulum tangat. Fig. 20.

Punctum E positione datur, circulus vero *ABGD* positione & magnitudine; proinde ducta *AE*, dantur *AD* & *DE*. Sit ergo $AD = a$, $DE = b$ & $EG = x$; producta autem *AD* in *B*, erit tota $BE = 2a + b$, & $BE \times ED = EG^2$ per 36. l. 3. Eucl. hinc habetur æquatio $2ab + b^2 = x^2$

Constr. Centrum circuli *A* & punctum datum connectantur recta *AE*, super qua describatur semicirculus *AEG*, in quo ducantur cordæ *AG* & *EG*.

Demonstr. Angulus *AGE* in semicirculo rectus est per Prop. 31. l. 3. ergo $AE^2 = AG^2 + EG^2$ per 47. l. 1. hoc est $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + x^2$, seu $x^2 = 2ab + b^2$, proinde $x = \sqrt{2ab + b^2} = EG$.

Verum

Verum demonstratio synthetica unico verbo potest absolvi. Nam angulus AGE in semicirculo est rectus; ergo EG circulum tangit in G per 16. l. 3. Quod erat &c.

P R O B L. VII.

Dato circulo invenire latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscribendi. Fig. 21.

SIt $AB = x$ latus trianguli quæsitæ, & ducatur chorda BC æqualis semidiametro $CD = a$, quæ erit latus hexagoni per 15. l. 4. *Eucl.* eritque $AC = 2a$. Ob angulum ABC in semicirculo rectum $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, hoc est

$$xx + a^2 = 4a^2$$

$$xx = 3a^2$$

$$x = \sqrt{3a^2}$$

Est ergo latus trianguli æquilateri medium proportionale inter circuli, cui inscribitur, radius, ejusque triplum, nempe inter a & $3a$. Hinc si ponatur $a = 1$, erit trianguli æquilateri latus ad radius ut $\sqrt{3}$ ad 1.

Constructio tamen facilior est, quæ vulgo traditur. (*Fig. 22.*) Super diametro AB describatur triangulum æquilaterum ABC , & ducatur CD , erit CD latus quæsitum. Nam in triangulo rectangulo CDB erit $CB = 2a$, $DB = a$, & $CD = x$, unde $x = \sqrt{3aa}$.

COROLL. *Hinc infertur non omnes concinniores constructiones Geometricas ex calculo Analytico derivari, nec pro-*

T t

inde

inde eidem semper esse inherendum; cum in solutione problematum Geometricorum elegantiora quandoque media operantis ingenium, quam talis determinata æquatio suppeditet, quæ quidem respicit problema illud solitarie sumptum & ab omnibus aliis independens, ut Cl. Wolfius observat, & ex hoc ipso problemate intelligi potest: quod quidem multis aliis modis eleganter & a superiori æquatione independenter constructur.

SCHOL. Ex penultima æquatione habetur egregium theorema, quod est Prop. 12. lib. 13. Euclidis: Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, quadratum ex trianguli latere triplum est ejus, quod fit ex circuli semidiametro. Nam si ponatur $BC = a$, & $AC = 2a$, erit
 $AC - BC = AB$, proinde $AB = 3a^2$, & $AB \cdot BC : : 3a^2 \cdot a^2 :: 3 \cdot 1$. adeoque BC , seu $CD = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Fig. 21.

P R O B L. III.

Rationem invenire, quam pentagoni latus habet ad hexagoni & decagoni simul sumpta latera in eodem circulo inscriptorum. Fig. 23.

SI AC latus pentagoni, divisoque bifariam arcu AC in B , chorda AB , seu BC erit latus decagoni; & circuli radius AF , vel FC latus hexagoni, ut patet. Ducatur FD perpendiculariter super AB , quam bifariam secabit in D per 3. l. 3. & ducatur EB . Duo triangula ACF , ECF sunt æquiangula & similia; nam præter angulum communem C , angulus $CFE = FAC$: est enim arcus BC gr. 36. & BD

& $\angle BD$ gr. 18. ergo totus $\angle DC$, nempe $\angle CFE$, gr. 54. Similiter cum in trigono isoscele AFC $\angle$ ad centrum sit gr. 72., erunt singuli ad basim gr. 54. proinde $\angle FAC = \angle CFE$.

Sit $AF = a$, $AC = b$, $EC = x$, erit $AE = b - x$, $AB = c$. Ratione triangulorum similium ACF , ECF est $AC : AF :: AF : EC$, hoc est $b : a :: a : x$, hinc $bx = aa$. Deinde triangulum isoscele AEB simile est triangulo isosceli ABC . Habent enim $\angle$ communem, proinde omnes alios æquales, ut patet. Sunt ergo proportionales $AE : AB :: AB : AC$, hoc est $b - x : c :: c : b$, unde $bb - bx = cc$. Addatur huic altera æquatio, habetur $bb = aa + cc$, hoc est latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum, ut in *Prop. 10. lib. 13.* proposuit Euclides.

P R O B L. IX.

Dato quadrato ABCD, ex angulo A ducere rectam AE, ut pars FE a latere DC continuato intercepta sit æqualis datæ rectæ M. Fig. 24.

EX puncto E demittatur EG perpendicularis ad AE , quæ lateri producto AB occurrat in G . Ducta perpendiculari EH , facile erit ostendere EG æqualem esse AF : cum trianguula EHG & ABF sint rectangula, similia per *Prop. 8. lib. 6.* & etiam æqualia; & $EH = CB = AB$, proinde EG & AF latera homologa & æqualia.

Sit ergo AB , vel $BC = a$, $FE = M = b$, $AF = EG = y$, & $BG = x$, erit $AE = y + b$, & $AG = a + x$.

Tum ob triangula similia ABE & AEG , erit $AB : AF :: AE : AG$, hoc est $a : y :: y + b : a + x$; unde habetur $ay + ax = yy + by$. Deinde ob triangulum AEG rectangu-

lum in E , $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$, hoc est $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + bb$. In hac secunda æquatione ponatur pro $y^2 + by$ ejus valor ex prima inventus $ay + ax$, habebitur $ay + 2ax + x^2 = 2ay + 2ax + b^2$, quæ reducitur ad simplicif-

simam secundi gradus $xx = aa + bb$, atque $x = \sqrt{aa + bb}$, $= BG$.

Constr. (Fig. 25.) Producat quadrati latus AD in O , ita ut AO sit æqualis rectæ datæ M , erit $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2$ (ob triangulum rectangulum OAB) $= aa + bb$, & $BO = \sqrt{aa + bb} = x$. Producat ergo latus AB in G , ita ut BG sit æqualis BO , & super AG diametro describatur semicirculus AEG , qui secabit quadrati latus DC productum in E ; & jungatur AE , erit EF recta quæsitæ.

SCHOL. Hæc constructio eadem est, quæ a Pappo fuit allata, & a Cartesio indicatur, tum ad usum reductionis æquationum ostendendum, tum ad docendum nos plurimum interesse unam vel aliam quantitatem incognitam assumere. Sive enim pro incognita assumatur BF , sive EC , vel AF aut CE , semper oritur æquatio biquadratica. Sumpta autem BG , prodit æquatio simplicissima secundi gradus, ut vidimus. Jure igitur in hoc ipso problemate solvendo post Cartesium recentiores Analystæ fere omnes ingenium suum exercuerunt, apud quos illud passim invenias.

PROBLE.

P R O B L. X.

Circulum invenire datæ superficiei conicæ æqualem.

Fig. 26.

Sit circuli quæſiti radius $= x$, & ratio radii ad peripheriam fit $r . p$. Si fiat $r . p :: x . \frac{px}{r}$, erit $\frac{px}{r}$ peripheria circuli; & inde innotescit area circuli $= \frac{px^2}{2r}$ per *Coroll. 1. Prop. 5. Archim. ex Tacquet.*

Sit conî datî latus $= a$, peripheria circuli basis ejusdem $= p$, erit superficies conicæ $= \frac{1}{2} ap$ per *Coroll. 1. Prop. 13. ex Archim. cit.*

Erit ergo ex hypothesi $\frac{px^2}{2r} = \frac{1}{2} ap$,

& multiplicando per $2r$

$$px^2 = arp$$

$$x^2 = ar$$

$$x = \sqrt{ar}$$

COROLL. *Hinc oritur Archimedis theorema: Circulus, cujus radius est medius proportionalis inter conî recti latus & radium basis conicæ, æqualis est superficiei conicæ. Est ejusdem Prop. 13. de Sphæ. & Cylin.*

Demonstr. (Fig. 26. & 27.) Sit conus rectus datus R . Fiat circulus MLN , cujus radius OL sit medius proportionalis inter conî latus AB , & conicæ basis radium BC : hoc est ponatur radius OL medius proportionalis inter AB & BC ;

& BC ; erit per *Prop. 7. Archim. cit.* peripheria BED ad peripheriam MLN ut BC ad OL , five ut OL ad AB : proinde rectangulum sub prima, nempe peripheria BED & quarta AB , five ejus dimidium (nempe triangulum, cujus basis est peripheria BED & quarta AB altitudo) æquatur rectangulo sub secunda, seu peripheria MLN & tertia OL , seu triangulo sub eadem secunda MLN & tertia OL , quod est ejusdem rectanguli dimidium. Sed triangulum, cujus basis est peripheria BED , & altitudo AB æquatur dati conii superficiei per *Coroll. 1. Propos. 13. ex Archim. cit.* & triangulum sub peripheria MLN & tertia OL æquatur circulo OLM per *Propos. 5. ex Archim. cit.* ergo habetur circulus æqualis conicæ superficiei quæsitus. Quod &c.

P R O B L. XL

Dato cono recto ABC , circulum invenire æqualem superficiei conicæ $BDCE$ planis parallelis BC & DE interceptæ. Fig. 38.

Sectus fit conus per axem triangulo ABC , erunt rectæ BC & DE parallelæ per *Prop. 16. l. 11. Eucl.* cum sint sectiones communes ejusdem trianguli cum planis parallelis BHC & DEL . Sit conii latus $AB = l$, $AD = m$, erit $BD = l - m$: item esto BF radius circuli basis $= r$, DG radius circuli paralleli $= s$, & circuli quæsitii radius $= x$. Ob triacula similia ABC & ADE est $AB.BF :: AD.DG$, hoc est $l.m :: r.s$, atque hinc $ls = mr$, & $ls - mr = 0$.

Superficies autem conica ABC æquatur circulo (per
Theor.

Theor. præc.) *cujus radius* $\equiv \sqrt{lr}$, seu *cujus radii quadratum* $\equiv lr$: item superficies conica *ADE* æquatur circulo, *cujus radius* $\equiv \sqrt{ms}$, seu *cujus radii quadratum* $\equiv ms$; erit ergo radius circuli quæsitæ, five ejus quadratum

$$x^2 \equiv lr - ms$$

$$x \equiv \sqrt{lr - ms}$$

COROLL. *Si superior æquatio* $x^2 \equiv lr - ms$ *in proportionem resolvatur, erit* $l - m : x :: x : r + s$. Nam $l - m$

$xr + s \equiv lr + ls - mr - ms$, *Inventum autem fuit supra*

$ls - mr \equiv 0$, proinde $l - m : x :: x : r + s \equiv lr - ms$; atque hinc oritur theorema Archimedis, quod est *Propos. 15. de Sphær. & Cylin.* Circulus habens radium proportionem medium inter interceptam parallelis planis *BC* & *DE* partem lateris *DB* ($\equiv l - m$) & summam radiorum *BF* + *DG* ($\equiv r + s$) circulorum, qui sunt in planis parallelis, æquatur superficiei conicæ *BDCE* parallelis planis interceptæ.

P R O B L E M A XII.

Dato cylindro spheram æqualem invenire.

Fig. 29. & 30.

SUPPONATUR factum, & sphaera *M* sit æqualis cylindro *ABCD*. Concipiatur sphaeræ *M* circumscriptus cylindrus *EFGH*, habens tam latus *FH*, quam diametrum basis *HG*, utrumque æquale diametro sphaeræ *LN*; erit cylindrus

lindrus $EFGH$ sphaera circumscriptus ejusdem sesquialter; hoc est $\equiv \frac{3}{2}$ sphaerae per *Propos. 32. Archim. ex Tacquet.* Proinde si fiat $PC \equiv \frac{3}{2} DC$, erit cylindrus $BP \equiv \frac{3}{2}$ cylindri BD per *Prop. 14. l. 12.* & aequalis cylindro circumscripto $EFGH$, cum sphaera & cylindrus BD ex hypothesi sint aequales.

Sit jam cylindri dati diameter $BC = a$, altitudo $DC = b$, erit altitudo $PC = \frac{3}{2} b$. Sit autem sphaerae diameter LN , vel $FH = x$.

In cylindris aequalibus BP & FG erit basis BCK ad ba-

sim CHZ (vel quadrata diametrorum earundem $\overline{BC}$, $\overline{GH}$ per *Prop. 2. l. 12.*) ut reciproce altitudo FH ad altitudinem PC , hoc est

$$a^2 \cdot x^2 :: x \cdot \frac{3}{2} b$$

$$x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} a^2 b}$$

Ex quo patet problema esse solidum, & ad ejus solutionem duas medias proportionales esse inveniendas inter a

& $\frac{3}{2} b$; nempe $\div a$, x , $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$. Nam ex quadratis diametrorum a^2 & x^2 habentur tres continue proportionales

$\div a$, x , $\frac{x^2}{a}$ per *Prop. 20. l. 6. Eucl.*, ex superiori autem

aequatione $x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$ eruitur $\frac{x^3}{a^2} = \frac{3}{2} b$ dividendo per a^2 ,

proinde $\div a$, x , $\frac{x^2}{a}$, $\frac{3}{2} b$.

SCHOL.

SCHOL. Egregium hoc Archimedis problema, quod ipse statim initio lib. 2. de Sphæ. & Cyl. Analytico fere modo proposuit, illud deinde componit per duas medias proportionales, & nos eodem modo, sed aliquanto brevius absolvemus.

Demonstr. Sit $CD = \frac{2}{3} CP$, erit cylindrus $BD = \frac{2}{3} BP$ cylindri. Tum inter BC & CP inveniantur duæ mediæ proportionales LN & R per modum aliquem mechanicum ex allatis a P. Tacquet ad Prop. 13. lib. 6. Eucl. Dico LN esse diametrum sphæræ æqualis cylindro dato BD . Nam sphæræ M concipiatur circumscriptus cylindrus $EFGH$, cuius basis diameter & altitudo sint æquales diametro sphæræ LN , vel EG , erit eadem sphæra $= \frac{2}{3}$ cylindri circumscripti $EFGH$ per Propos. 32. Archim. ex Tacquet. Idem autem cylindrus circumscriptus æquatur cylindro BP . Nam cum sint quatuor continue proportionales BC , LN , R , CP , erit vicissim $BC : R :: LN : CP$ per 16. lib. 5. Eucl.

Sed $BC : LN :: BC : LN$ per 2. lib. 12. Eucl. ergo erit BC ad LN , basis ad basim, ut LN vel EG altitudo cylindri GF ad CP altitudinem cylindri BP ; ergo hi duo cylindri æquantur per 15. l. 12. Eucl. proinde etiam sphæra M & cylindrus BD æquabuntur, cum ambo sint $= \frac{2}{3}$ æqualium cylindrorum BP , GF . Quod &c.

A P P E N D I X

De constructione problematum solidorum.

CUM toties in hoc tractatu de resolutione problematum solidorum per curvas obtinenda mentio facta

Vu

fit,

fit, abs re non erit hoc loco de illa breve aliquod specimen exhibere. Cum autem nulla sit methodus, quantum ego opinor, Cartesiana brevior, aut facilior, quæ nimirum circulum duntaxat & parabolam adhibet, hanc ipsam ex Cl. Halleji ^(a) annotatis explicare conabimur, præmissis, quæ ad rei intelligentiam viam sternunt. Hæc autem methodus secundum terminum ex æquatione sublatum petit.

DEFINITIONES.

I. **C**urva Algebraica illa dicitur, quæ per æquationem Algebraicam definiri potest, vel illa, in qua per lineas rectas explicari potest ratio, quam singula curvæ puncta ad axem, vel diametros dicunt. Sic in circulo *AMB* (*Fig. 31.*) ex quovis diametri puncto *B* ducta perpendiculari *PM*, ponatur $AB = a$ & $AP = x$, erit $BR = a - x$; sit $PM = y$, erit $\overline{MP}^2 = AP \times PB$ per *Propos. 35. lib. 3. Eucl.*, hoc est $y^2 = ax - xx$; & cum talis æquatio, seu circuli proprietas semper eadem repèriatur ex quocunque diametri puncto ducatur perpendicularis *PM*, dicitur æquatio circuli, & ipse circulus *curva Algebraica*, licet ob summam in ejus descriptione facilitatem tanquam figura plana consideretur. Perpendicularis *PM* dicitur *semiordinata*, seu *applicata* ad axem, vel ad diametrum *AB*; portio vero diametri *AP* dicitur *abscissa*. Utraque quantitas dicitur *variabilis*, quia utraque crescit & decrescit, adeoque exprimi solent per x & y . *Semidiameter* vero circuli, & in parabolâ aliisque curvis

(a) In *Transact. Anglicanis* m. 183, p. 335.

curvis *latus rectum*, seu *parameter*, dicuntur quantitates *constantes*: nam aliis crescentibus, vel decreascentibus, ipsæ eadem manent.

II. *Parabola* est curva Algebraica (*Fig. 32.*) in qua semiordinatæ quadratum æquatur facto ex abscissa in parametrum. Sit parabola *BAC*, cujus vertex punctum *A*, recta *AD* indefinite producta *axis*, *AL* *latus rectum*, seu *parameter*: perpendiculæres ad axem *PM*, *pm*, dicuntur *semiordinatæ*; *AM*, vel *Am* *abscissæ*. Quælibet vero recta *ON*, vel *PQ* axi *AD* parallela dicitur *Parabolæ diameter*.

Ponatur semiordinata $PM = x$, & abscissa $AM = y$, parameter $AL = a$, cum ex *Propos. II. lib. I. Conic. Apollonii* sit $MP^2 = AM \times AL$, erit $xx = ay$: quæ quidem est proprietas & natura parabolæ, quæ per talem æquationem Algebraicam designatur.

COROLL: Est ergo $x = \sqrt{ay}$, hoc est semiordinata *MP* est media proportionalis inter parametrum *AL* & abscissam *AM*. Nam $a.x :: x.y$, unde $x = \sqrt{ay}$.

P O R I S M A I.

Parabolam in plano describere. Fig. 33.

SInt in eodem plano duæ rectæ *AZ* & *BX* indefinite productæ, & ad angulos rectos sibi invicem occurrentes in *A*. Sumatur in *AZ* parametri longitudo *AD*, & in *BX* axis *AB*. Tum ex puncto *D* ducatur *DE* axi *AB* parallela. Postea somantur aliæ duæ rectæ *AR* & *CT*, quarum prior *AR* circa punctum fixum *A* revolvatur, al-

tera vero CT , servato semper ad axim AB , vel ad diametrum DE situ parallelo; progrediatur in recta AZ , quæ rectæ tamen sic moveantur, ut jugiter sit $DF = AC$. Nam si notentur puncta intersectionum duarum illarum rectarum AR & CT , prodibit curva quæsitæ, quam dico esse parabolam.

Demonstr. Ex aliquo curvæ puncto M ducatur recta MP parallela rectæ AD & ad axem AB ordinata, erit $MP = AC$, & $CM = AP$ per *Prop. 44. l. 1. Eucl.* Jam vero ob triangula similia FAD & MAC est $AD : DF$ (seu AC ex constructione) $:: AC : CM$, seu AP . Habetur ergo AC , seu PM ($=x$) media proportionalis inter AD parametrum ($=a$) & abscissam AP ($=y$), proinde $x^2 = ay$, ideoque curva AFL est parabola ex *Defin. 2. hujus*.

SCHOL. Ad praxim loco rectarum AR & CT , quas modo explicato moveri concipimus, apponi solent duæ regulæ mobiles, quarum prima circa clavum in A fixum revolvatur, altera in situ ad axem parallelo progreditur, ex quarum mutua intersectione habentur puncta pro descriptione parabolæ, ut *Fig. 34.* satis ostendit.

P O R I S M A II.

Parabolam in plano alia ratione describere.

Fig. 35.

Parabolæ parameter AL producat indefinite in N , & ex puncto A , quod erit parabolæ vertex, eleve-
tur perpendicularis indefinita AO . Deinde sumptis in NL
centris quocumque pro arbitrio (circino tamen usque ad

L

L aperto) fiant arcus rectam *AO* intersecantes in punctis *M*, *M*, *M*, tum etiam rectam *AN* in punctis *P*, *P*, *P*. Patet quamlibet ex his *AM* esse mediam proportionalem inter datam parametrum *AL* & abscissas *AP*, *AP*, *AP* per *Coroll. Propos. 13. l. 6. Eucl. ex Tacquet*. Igitur positis pro parametro *AL*, & *AQ* pro axe parabolæ describendæ, si abscissæ *AP*, *AP*, *AP* transferantur in axem *AQ* in punctis 1, 2, 3 &c. & ex iisdem punctis ducantur ad axem *AQ* normales 1*N*, 2*N*, 3*N* &c. quæ æquales sint ipsi *AM*, *AM*, *AM* &c. curva per extrema harum perpendicularium transiens erit parabola *BAC*. Quæ quidem parabolæ descriptio ceteris longe tutior esse censetur, cum mechanicis instrumentis, quæ plerumque vitio laborant, minus sit obnoxia. Innititur autem *Coroll. post defin. 2.* ut patet.

P R O P O S I T I O I.

Explicatur constructionis Cartesianæ methodus.

Fig. 36.

1. **D** Escribatur parabola *OAN* per *Poris. 1. aut 2.* cujus vertex *A* & axis *AQ*, parameter autem *AL* ponatur $a = 1$, & transferatur parametri dimidium $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$ ex vertex *A* in *C*.

2. Ex puncto *C* secetur $CD = \frac{1}{2} p$ in ipso axe deorsum, si in æquatione habeatur $-p$; vel sursum retrogrediendo versus *A*, si fuerit $+p$, & producendo (si opus sit) axem ad partes ipsius *A*. Quod si punctum $p = 0$, hoc est si æquatio tertio termino careat, tunc *CD* non ducitur.

3. Ex

3. Ex puncto D (vel ex C , si desit CD) erigatur ad axem perpendicularis $ED = \frac{1}{2}q$ dextrorsum quidem si fuerit in æquatione $-q$ (ut in hac figura) at sinistrorsum si fuerit $+q$, erit EA radius circuli describendi.

4. Centro E cum intervallo AE describatur circulus, qui parabolam secat in punctis O, B, N , ex quibus ducta ad axem perpendiculara OP, BC & FN dant radices æquationis quæsitæ; hoc est, quæ sunt ad axis dexteram (ut FN) semper sunt veræ, quæ vero ad sinistram ut BC , & OP sunt falsæ. Hæ simul sumptæ radicem veram FN æquare debent, cum æquatio cubica secundo termino careat, ut supponitur. At quæ sequuntur exempla rem clare ostendunt.

SCHOL. Ratio hujus methodi a locorum Geometricorum doctrinæ pendet, quæ docet modum combinandi circulum cum parabola, ceterisque sectionibus Conicis, sublati incognitarum secundis terminis. Sed Cartesius rem dissimulavit, sola praxi contentus. Nos digitum ad fontem tantummodo intendimus, ne propositæ appendicis limites transgrediamur.

PROPOSITIO II.

Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur. Fig. 37.

I. **C**onstruenda sit æquatio $x^3 - px - q = 0$. Describatur parabola per Poris. I. vel 2. OAN , cujus parameter AL sit $a = 1$, vertex A , & axis AQ . Sumatur $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$, & $CD = \frac{1}{2}p$. Deinde elevetur
ex

ex puncto D perpendicularis $ED = \frac{1}{2}q$ dextrorsus quidem ob $-q$; & centro E cum intervallo EA describatur circulus QAN , qui secabit parabolam in punctis O , B , & N , ex quibus ducta perpendiculara OP , BC , FN dant propositæ æquationis radices, duas quidem falsas OP & BC ad sinistram axis, & tertiam FN veram ad dexteram, quæ duabus prioribus æquatur.

Demonstr. Sit $FN = x$, ut supponitur; abscissa $AF = y$, & parameter $AL = 1$, erit ex natura parabolæ $FN = AF \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$ per *Defin.* 2. unde $AF = x^2$, & FD (seu EM) $= AF - AC - CD = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$. Item $MN = FN - FM$ (seu DE) $= x - \frac{1}{2}q$, adeoque in triangulo rectangulo EMN erit $\overline{EN}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MN}^2 = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$.

Similiter in triangulo rectangulo ADE erit $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$. Ex radiorum autem AE , EN æqualitate habetur æquatio, proinde deletis utrinque terminis similibus remanet.

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

Quod si fumatur aliqua ex radicibus falsis v. g. $OP = -x$, eadem manet demonstratio. Nam sit abscissa $AP = y$, semiordinata $OP = -x$, parameter $AL = 1$, erit ex natura parabolæ per *Defin.* 2. $OP = AP \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$; unde $AP = x^2$. Est autem $PT = DE$ ($= \frac{1}{2}q$); unde

unde $OT (= OP + PT) = -x + \frac{1}{2}q$, & $AD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$;
 proinde $DP (= DA - AP) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - x^2$.

Jam in triangulo rectangulo ETO est $\overline{EO} = \overline{OT} + \overline{ET}$ seu

$$\overline{DP} = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}qq + \frac{1}{2}. \text{ Item}$$

in triangulo rectangulo EDA est $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pp + \frac{1}{2}qq + \frac{1}{2}$, adeoque ob radiorum EO & AE æqualitatem habetur æquatio; deletis proinde utrinque terminis similibus, remanet

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

II. Sit æquatio construenda $x^3 + px - q = 0$, seu $x^3 + 3x - 6 = 0$. Descripta parabola (Fig. 38.) NAM , cujus axis AO , vertex A . Assumpta parametro $= 1$, fecetur $AC = \frac{1}{2}$, & sumatur $CD (= \frac{1}{2}p) = \frac{1}{2}$ supra punctum A , cum adfit in æquatione $+p$. Elevata deinde perpendiculari ad axem $ED (= \frac{1}{2}q) = 3$, dextrorsum ob $-q$, fiat centrum in E , & intervallo EA describatur circulus EAM , qui parabolam secat in unico puncto M , ex quo ducta normalis PM ad axem dat radicem veram PM .

Demonstr. Producta PM in F , cui occurrat perpendicularis EF demissa ex puncto E , quæ parallela & æqualis erit ipsi DP , ut patet; fit $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}p$, $ED = PF = \frac{1}{2}q$, $PM = x$, $AP = y$, & parameter $= 1$. Erit $FM (= PF - PM) = \frac{1}{2}q - x$, & $DA (= DC - AC) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$.

Jam

Jam ex natura parabolæ $\overline{PM}^2 = 1x \cdot AP$, hoc est $xx = 1y$, unde $AP = xx$, & $PD (= PA + AD) = xx + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$. Ob duo triangula rectangula EDA , EFM est $\overline{AE} = \overline{ED} + \overline{AD} = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Similiter $\overline{EM} = \overline{EF} + \overline{MF} = x^4 + px^2 - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Sed EA & EM sunt æquales, ergo & eorum quadrata, proinde habetur æquatio, & deletis terminis similibus utrinque, remanet

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 - qx &= 0 \\ x^3 + px - q &= 0 \end{aligned}$$

Surrogatis autem valoribus p, q ; erit $x^3 + 3x - 6 = 0$.

COROLL. Ubi circulus parabolam non secat (ut in hoc casu) nisi in unico puncto, signum est alias duas æquationis datæ radices esse imaginarias. Quod optime convenit cum iis, quæ diximus in Propos. 4. Cap. 9. nimirum duas radices imaginarias haberi, si in æquatione fuerit $+p$.

III. Construenda sit æquatio $x^3 + px + q = 0$, seu $x^3 + 1x + 1 = 0$. Describatur parabola (Fig. 39.) cujus paraméter $= 1$, vertex A , axis AR . Secetur $AC = \frac{1}{2}$, & a puncto C versus A sumatur $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$. Punctum D cadit præcise in A , & ex puncto A , vel D ducatur perpendicularis $AE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$ sinistrorsus ob $+q$, factoque centro in E cum intervallo EA , fiat circulus EA secans parabolam in F , ex qua intersectione ducta ad axem normali FM , habetur radix falsa FC (cum sit ad axis sinistram) & aliæ duæ imaginariæ ex *super. Coroll.*

Demonstr. Sit parameter $AL = 1$, abscissa $AC = y$, & applicata FC ex hypothesi $= -x$, erit ex natura parabolæ $FC = AC \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde AC , seu EN (quæ ex centro E ducitur ad FC perpendicularis) $= x^2$, & ED , seu $NC = \frac{1}{2}$; ideoque $FN = (FC - CN) = -x - \frac{1}{2}$. Jam igitur in triangulo rectangulo ENF est $EF = EN + FN$, hoc est

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= x^4 + x^2 + 1x + \frac{1}{4} \\ x^4 + x^2 + 1x &= 0 \\ x^3 + x + 1 &= 0\end{aligned}$$

SCHOL. Si circulus parabolam tangit, duæ intersectiones coincidunt perinde ac illam in duobus punctis perexiguâ ac fere nullo intervallo distantibus secaret, & sectiones illæ in puncto contactus coirent; adeoque tunc æquatio duas habet radices æquales. Quod si eam nec tangit, nec secat, radices omnes sunt impossibiles.

PROPOSITIO III.

Æquationes biquadraticas construere. Fig. 40.

DEscripta parabola cum parametro, vertice & axe omnino, ut in præc. Prop. factum est, debet insuper pro æquatione biquadratica construenda augeri, vel minui circuli describendi radius AE ; hoc est si in æquatione fuerit $-r$, additur; si fuerit $+r$, subtrahitur ex quadrato radii AE rectangulum *ar* factum ex parametro *a* & ex.

ex data quantitate r . Nam circuli hujus intersectiones cum parabola dant quæsitæ æquationis radices, veras quidem semper ad axis dexteram, falsas ad sinistram. Res fiet exemplis clarissima.

I. Construenda sit æquatio $x^2 - qx - r = 0$, quæ præter secundum etiam tercio termino caret. Descripta parabola FAG , cujus latus rectum $AL = a = 1$, vertex A , axis AN , ex puncto C dextrorsum (ob $-q$) eleve-
tur normalis $CE = \frac{1}{2}q$. Circuli describendi radius AE au-
geri debet ob $-r$ rectangulo ar . Igitur producat AE
hinc inde indefinite, & AB secetur æqualis parametro AL
 $= a$, $AS = r$. Tum descripto super BS semicirculo BDS ,
& ex puncto A elevata perpendiculari AD ad diametrum
 BS , erit $\overline{AD}^2 = BAX AS = ar$, ductaque ED , erit $\overline{ED}^2$
 $= \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$. Habetur ergo DE circuli describendi ra-
dius quæsitus auctus rectangulo ar ; factoque centro E cum
intervallo ED , fiat circulus DRG , qui parabolam secabit
in punctis R & G , ex quibus ducta ad axem perpendicu-
la RM & NG dant radices æquationis propositæ, NG ve-
ram utpote ad axis dexteram, & MR falsam ad sinistram.
Ducatur ex puncto E perpendicularis EQ .

Demonstr. Sit $NG = x$, & abscissa $AN = y$. $\overline{AD}^2$
 $= AB \times AS = ar$, unde $AD = \sqrt{ar}$. $QG = CE - NG$
 $= \frac{1}{2}q - x$; & ex natura parabolæ $\overline{NG}^2 = NAX a$, nem-
pe $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{xx}{a} = AN$. Similiter EQ
($= AN - AC$) $= \frac{xx}{a} - \frac{1}{2}a$.

Jam in triangulo rectangulo ECA est $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa$. Item in triangulo rectangulo EQG est $\overline{EG}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{x^4}{a^2} - qx + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa$. Tandem in triangulo EAD est $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa + ar$. Igitur ob æqualitatem radiorum ED & EG erit

$$ar = \frac{x^4}{a^2} - qx$$

$$x^4 - a^2 qx = a^3 r$$

(ob $a = 1$)

$$x^4 - qx = r$$

$$x^4 - qx - r = 0$$

Idem demonstrari potest assumpta radice negativa $RM = -x$.

II. Sit (*Fig. 41.*) construenda æquatio $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$, seu $x^4 - px^2 + qx + r = 0$. Describatur parabola, cujus latus rectum $a = 1$, vertex A , & axis AD , in quo secetur $AC = \frac{1}{2}$ & $CD = \frac{1}{2} p$. Tum sinistrorsum ob $+q$ eleveur perpendicularis ad axem $DE = \frac{1}{2} q$. Liqueat ex dictis minuendum esse ob $+r$ circuli describendi radium rectangulo ar . Proinde producta utrimque AE indefinite, secetur $AB = a$, & $AH = r$: tum super diametro BH describatur semicirculus HMB , & ex puncto A eleveur perpendicularis AM . Similiter super AE describatur semicirculus ANE , in quo ducatur chorda $= AM$; seu (quod idem est) secetur arcus AN , posito circino in A cum intervallo AM . Igitur intervallum EN erit radius quæ-

quæsitus circuli centro E describendi. Nam $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$ in triangulo rectangulo ENA , & $\overline{AN}^2 (= \overline{AM}^2) = BA \times AH = ar$. Itaque descripto sic circulo, parabola intersecatur in punctis G, F, P & Q , ex quibus demissæ ad axem normales Gc, FR, OP & CQ , habentur quatuor æquationis datæ radices, duæ quidem ad axis dexteram veræ, & duæ falsæ ad sinistram.

Demonstr. Sumatur quælibet radix v.g. $OP = x$, & sit abscissa $AO = y$, erit ex natura parabolæ $\overline{OP}^2 = AO \times a$, hoc est $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{x^2}{a} = AO$. Deinde $\overline{AM}^2$, seu $\overline{AN}^2 = BA \times AH = ar$, unde $AN = \sqrt{ar}$, & in triangulo rectangulo ENA (ductis rectis EN & AN) erit $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - ar$.

Similiter quia $PK = x + \frac{1}{2}q$, & OD , seu $EK = AO - AC - CD = \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$, in triangulo rectangulo EKP erit $\overline{EP}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx + \frac{1}{4}q^2$. Igitur propter radiorum EP & EN æqualitatem habetur æquatio.

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = -ar$$

$$x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$$

Hinc

Hinc posito $a = 1$, & surrogatis valoribus p , q & r , erit $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, qualis proposita fuit.

COROLL. Constructiones æquationum tertii & quarti gradus fere omnino conveniunt. In hoc tamen differunt, quod in cubicis circulus transit per parabolæ verticem, non autem in biquadraticis.

SCHOL. I. Præclara hæc Cartesii methodus id incommodi nonnullis habere visa est, quod secundum æquationis terminum, si adsit, tolli jubeat. Huic molestiæ Thomas Bakerus ^(a) Anglus occurri posse animadvertit, si loco axis parabolæ, uti Cartesius fecit, adhiberetur aliqua parabolæ ipsius diameter, ad quam ducerentur ex intersectionibus parabolæ & circuli ea perpendiculara, quæ ut vidimus, dant radices quæsitæ. Hac regula, quam a ratione tradita circuli centrum determinandi, Centralem vocat, æquationes omnes cubicas & biquadraticas quomolibet affectas & completas sine ulla prævia reductione construere docet. At vero tot illa nodis intricata est, & tot cautionibus de signis $+$ & $-$ obnoxia, ut remoto libro, vix possit quis omnes memoria retinere, ut Cl. Halleyus ^(b) testatur, qui multis annotationibus et plurimum lucis attulit; quemadmodum deinde Christophorus Sturmius ^(c) & Wolfius ^(d) fecerunt, apud quos videant, qui volunt.

SCHOL. II. Sicuti parabolam & circulum mutuo intersecari vidimus, & inde obtineri datarum tertii & quarti gradus æquationum radices, ita circulus cum ellipsi, vel

(a) Clavis Geometrica Cathol. Londini 1684. (b) Trans. Anglic. n. 188. p. 135. an. 1687.
(c) Mathes. enucl. p. 342. (d) Construct. æquat. probl. 254.

vel hyperbole, aut duæ quælibet ex iisdem Conicis sectionibus pari ratione combinari possunt ad problemata cujuscunque gradus construenda, quemadmodum Dn. de la Hire ^(a) & Marchio ^(b) Hospitalis egregie fecerunt. Nos duas medias continue proportionales ex duarum parabolarum intersectione mox inveniemus. Menechmus id primus docuit.

P R O B L. I.

Inter datas a & q duas medias proportionales invenire. Fig. 42.

I. **S**It prior quæsitæ $= x$, erunt quatuor continue proportionales $a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2}$, proinde $\frac{x^3}{a^2} = q$, & $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$.

Vel sic: sit prior quæsitæ $= x$, altera $= y$. Quoniam ex hypothesi $\div a \cdot x \cdot y \cdot q$ sunt continue proportionales, erit $a^2 \cdot x^2 :: x \cdot q$ per Coroll. Prop. 20. l. 6. Eucl. adeoque $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut prius.

Pro Constructione descripta parabola FAP , cujus parameter $a = 1$, vertex A , & axis AQ , secetur $AC = \frac{1}{2}$, & ex puncto C elevetur normalis $CE = \frac{1}{2}q$ dextrorsum quidem ob $-q$. Tum centro E cum intervallo AE describatur circulus EAP , parabolam secans in puncto P , erit applicata PM radix quæsitæ $= x$.

Demonstratio a ceteris non differt, ductis recta EP & perpendicularo EN . Nam sit parameter $= a$, $AC = \frac{1}{2}a$,
EC

(a) Sections Coniques liv. 9. & 10. (b) Construct. desæquat. Analyt.

$EC = \frac{1}{2} q$, $AM = y$, & $MP = x$, erit $PN (= PM - MN) = x - \frac{1}{2} q$. Cum autem ex natura parabolæ fit $AM \times a = \overline{PM}^2$, hoc est $ay = xx$, erit $y = \frac{xx}{a}$, adeo-

que $AM = \frac{xx}{a}$, & MC , seu $EN (= AM - AC) = \frac{xx}{a}$

$-\frac{1}{2} a$. Jam in triangulo rectangulo ENP est $\overline{EP}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{PN}^2 = \frac{x^4}{aa} - qx + \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} qq$; eademque ratione in triangulo rectangulo ACE est $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} qq$, quæ duæ æquationes sunt æquales ob æqualitatem radiorum ejusdem circuli EP & AE , proinde æqualibus utrinque detractis, remanet

$$\frac{x^4}{aa} - qx = 0$$

$$x^4 - aaqx = 0$$

$$x^3 - aaq = 0$$

COROLL. Hinc habetur modus inveniendi inter duas datas tot medias proportionales, quot volueris. Sint datae a & q , & quæsitæ primæ $= x$. Continuetur progressio

Geometrica $\therefore a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2} \cdot \frac{x^4}{a^3} \cdot \frac{x^5}{a^4} \cdot \frac{x^6}{a^5}$ &c. & numerus

terminorum, qui binario superat quæsitæ proportionalem numerum, fiat æqualis alteri quantitati datæ q . Sic

ut habeantur tres mediæ proportionales, fiat $\frac{x^4}{a^3} = q$, unde

de erit

de erit $x^2 = a^2 q$. Item si querantur quatuor proportionē mediæ, fiat $\frac{x^2}{a^2} = q$, erit $x^2 = a^2 q$ & sic de ceteris.

II. Sint, ut prius, datæ a & q , inter quas inveniendæ sint duæ mediæ proportionales x & y , erit $a \cdot x :: x \cdot y$, unde $ay = x^2$. Similiter $x \cdot y :: y \cdot q$, adeoque $qx = y^2$, quæ duæ æquationes parabolæ naturam exprimunt ex *Defin. 2. hujus*. Ex prima habetur $y = \frac{x^2}{a}$; quo valore posito in secunda, oritur $qx = \frac{x^2}{a^2}$, atque hinc $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut superius.

Pro construct. (*Fig. 43.*) decant se ad angulos rectos in A duæ rectæ DB & EC . Secetur $AB = a$ datarum priori, & $AC = q$ alteri datæ. Tum super axe AD cum parametro AB describatur parabola AMP . Item super axe AE cum parametro CA describatur parabola AMN ; & ex punctis intersectionum ducantur ad suos axes semiordinatæ MP & MN , erunt AN & AP duæ mediæ proportionales quæsitæ, hoc est $AB \cdot AN :: AN \cdot AP :: AP \cdot AC$.

Démonstr. Sit $AN (= PM) = x$, & $AP (= MN) = y$, æquatio ad parabolam AMP est $\overline{PM}^2 = AP \times AB$, hoc est $x^2 = ay$. Eadem ratione æquatio ad parabolam MAN est $\overline{MN}^2 = AN \times AC$, hoc est $y^2 = qx$. Cum igitur ex priori habeatur $a \cdot x :: x \cdot y$, ex altera vero $x \cdot y :: y \cdot q$, evidens est in continua esse ratione $a \cdot x \cdot y \cdot q$, nempe $AB \cdot AN \cdot AP \cdot AC$. Quod &c.

COROLL. *Ex inventione duarum proportionum mediarum sequitur celebratissima cubi duplicatio, quæ tamdiu veterum Geometrarum mentem exercuit. Sint enim in continua proportionem $a . x . y . q$, seu (positis $a = 1$ & $q = 2$) $1 . x . y . 2$. habebit prima 1 ad quartam 2 rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima 1 ad secundam x per Defin. 10. lib. 5. Eucl. Sed cubus ex prima 1 ad eundem ex secunda x habet pariter rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima 1 ad secundam x , hoc est quam habet 1 ad 2 per Propos. 33. lib. 11. Eucl. ergo cubus ex secunda x duplus est cubi dati 1.*

SCHOL. D. Guido Grandus ^(a) celeberrimus in Academia Pisana Matheseos Professor Mesolabium expeditissimum pro inventionem duarum mediarum inter duas datas publicavit Florentiæ anno 1728., cujus ope non modo duplicatio cubi, sed anguli quoque trisectio, divisio sphaeræ in partes datæ rationis, & omne prorsus problema solidum potest facillime solvi.

P R O B L. II.

Datum angulum AED, vel arcum ABCD in tres æquales partes dividere. Fig. 44.

Supponatur divisio jam facta in punctis B & C , erit chorda $AB = BC = CD$. Ducantur radii EA , EB , EC & ED , tum chorda AD ; at BN sit parallela radio CE .

Triangula AEB , BEC , CED sunt æqualia, isoscelia & similia, quod evidens est. Item triangula EAB & BAR simi-

(a) Flores Geometrici in Appendice.

similia sunt: nam præter angulum ABR communem, angulo quoque ad centrum AEB æquatur angulus BAD ad circumferentiam *per Prop. 20. lib. 3. Eucl.* cum subtendat arcum duplum, unde EB , seu $EA.AB::AB.BR$; & cum triangulum AEB sit isoscele, erit quoque BAR isoscele, proinde $AB=AR$. Idem omnino demonstrari potest de triangulo DEC respectu trianguli CMD , quod pariter est isoscele, unde $CD=MD$.

Jam in isoscele BAR anguli ABR & ARB ad basim æquantur, itaque angulus $CBE(=ABR)=BRA$, seu MRE ad verticem, ideoque BC & RM sunt parallelæ. At vero triacula ABR & BRN sunt æquiangula: nam, præter angulum communem BRN , angulus quoque $NBR=(\text{ob parallelas } BN, CM) CEB=BEA=BAR$, & tertius $ABR=BNR$ tertio. Cum autem triangulum ABR sit isoscele, erit quoque NBR isoscele; hinc $BN=BR$, & ob triangulorum similitudinem, AR , seu $AB.BR::BR.RN$. Erat autem $EA.AB::AB.BR$; sunt ergo in continua ratione $EA.AB.BR.RN$.

Sit jam radius $EA=1$, chorda $AB=x$, erunt quatuor termini continuo proportionales $1.x.x'.x'$. At quia in isoscele BAR est $AB=AR$, item in isoscele CDM est $CD=MD$, in parallelogrammo autem NC est $BC=NM$, sequitur chordam AD (quam voco q), addita NR , æqualem esse tribus rectis AB, BC & CD ; hoc est $AD+NR=AB+BC+CD$, proinde $q+x'=3x$. Habetur ergo æquatio $x'^2-3x+q=0$.

Constr. Describatur parabola (*Fig. 45.*) MAN , cujus parameter AL sit $a=1$, vertex A , & axis AQ , in quo secantur $AC=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}$, & $CD(=\frac{1}{2}p)=\frac{1}{2}$. Tum ex pun-

Ad D elevetur normalis ad axem $DE = \frac{1}{2}q$ ad sinistrum axis latus ob $\frac{1}{2}q$. Factoque centro E cum intervallo EA fiat circulus $EANM$, secans parabolam in punctis P , N & M ; ex quibus ad axem applicata PT est æqualis chordæ quæsitæ $AB = BC = CD$. At RN est radix æqualis chordæ AF , quæ tripartito dividit alterum arcum AFD . Tertia MQ est radix falsa duabus PT & RN veris æqualis.

Demonstr. Sit abscissa $AT = y$, & semiordinata $TP = x$,

parameter $AL = 1$; erit ex natura parabolæ $TP = AT \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde $AT = x^2$. Est autem $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; & in triangulo rectangulo

AED est $AE = AD + ED = 1 + \frac{1}{4}qq$.

Deinde $DT (= EG) = DA - AT = 1 - x^2$, & $GP = GT$ (seu ED) $+ TP = \frac{1}{4}q + x$, proinde in triangulo

rectangulo EGP est $EP = EG + GP = 1 - 4x^2 + x^4 + x^2 + qx + \frac{1}{4}qq$, adeoque ob radiorum EP & AE æqualitatem oritur æquatio

$$1 + \frac{1}{4}qq = x^4 - 3x^2 + qx + 1 + \frac{1}{4}qq$$

$$x^4 - 3x^2 + qx = 0$$

$$x^3 - 3x + q = 0$$

COROLL. Hinc liquet oleum & operam perdere Geometriæ tyrones, dum anguli trisectioni per lineam rectam & circulum inveniendæ insudant, cum sit problema solidum.

P R O B L. III.

In æquationibus cubicis usus præcedentis problematis peculiaris ostenditur.

SIt æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$, in qua cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major sit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{2}{3}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc erunt tres radices reales & inæquales *per Propos. I. num. 2. Cap. 9.*, quæ quidem per Algebram obtineri non possunt, & occurrit casus ille *irreducibilis* de quo diximus *in Schol. 3. Prop. 9. Cap. 9.* Adhibitis enim Cardani formulis, æquationis radix, quæ realis esse debet, per quantitates imaginarias exprimitur, quod est absurdum. At vero per subtensas arcuum, seu per anguli trisectionem æquationis ejusdem radices opportune designantur modo nunc explicando. *Fig. 44.*

Radio $AE = \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$, qui sit proportionē medius inter quantitatis cognitæ p trientem & unitatem (*Vide Schol. Probl. 7. Cap. 12.*) describatur circulus ADF , in quo ducatur corda $AD = \frac{3q}{p}$, quæ nempe sit ad datam quantitatem q , ut 1 ad $\frac{1}{3}p$, adeoque obtinebitur, si fiat ut $\frac{1}{3}p : 1 :: q : \frac{3q}{p}$. Deinde supponatur divisus arcus $ABCD$ in tres æquales partes AB, BC, CD *per Probl. præc.* ita ut AB , vel BC , aut CD sit $= -x$: patet enim ex signis in data æquatione haberi duas radices falsas & unam
ve.

veram . Cum triangula AEB , BAR & RBN similia sint, erit $AE (\sqrt{\frac{1}{3}p}) \cdot AB (-x) :: AB (-x) \cdot BR (\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}})$
 $:: BR (\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}) \cdot RN (\frac{x^2}{-\frac{1}{3}px}) = -\frac{x^3}{\frac{1}{3}p}$. Est autem recta $AD + NR = AB + BC + CD$, ut in *præc. Probl.* vidimus, proinde $\frac{3q}{p} - \frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = -3x$, atque hinc $\frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = 3x - \frac{3q}{p}$, hoc est $x^3 = px + q$, seu $x^3 - px - q = 0$.

Descripta igitur parabola OAN (*Fig. 37.*) per *Porif. 1. aut 2.* tum etiam circulo ENO , qui eam secat in punctis O , B , N , si ex his applicentur ad axem rectæ BC , OP & FN , prodibunt radices æquationis datæ, nimirum BC æqualis chordæ $AB = -x$, OP æqualis chordæ $AF = -x$, & $FN = x$; quæ quidem est vera & duabus prioribus (ad finistram positis) falsis æqualis. Itaque casus in Algebra *irreducibilis* ex Geometria per anguli trisectionem facile solvitur.

SCHOL. Albertus Girardus (*a*) hanc methodum, cujus est auctor, fuisse demonstrat, quam Nic. de Martino (*b*) in Neapolitano Lyceo Regius Mathematicum professor egregie contraxit.

PROBL.

(*a*) Invention Nouvelle en l'Algebre an. 1629. Vide Fr. a Schooten in Append. de Cubic. æquat. resolut.

(*b*) Nova Algeb. Elem. lib. 2. Cap. 7. num. vi.

P R O B L. IV.

Quæstionem Pappi resolvere.

PAppus Alexandrinus initio *lib. 7. Collect. Mathemat.* mentionem facit de problemate quodam perplexo, ac difficili cujus solutionem neque Euclides, neque Apollonius invenerant. Hanc vero Cartesius ^(a) novo Analyseos præsidio post quinque, aut sex hebdomadas extricavit, ibique Geometriæ suæ initia auspicatus est; ubi veteres terminum sibi statuerant. Infinitos autem casus quæstio illa complectitur: ex quibus nos unum vel alterum ex facilioribus, quique per circulum & parabolam construi possint, expendemus, ne tyrones tam famosæ quæstionis notitia diutius lateat. En igitur qualis a Cartesio ^(b) luculenter exponitur, quæ a Pappo tantum fuerat verbis subobscuris indicata.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis, quæritur primo punctum, a quo totidem aliæ rectæ lineæ singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsius datos efficiant angulos, & quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum datarum, si sint quatuor; aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data. Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat ratio-

(a) Epist. 71. Tom. 2.

(b) Geomtr. lib. 1. pag. m. 10.

rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum &c. Atque ita porro quæstionem hanc ad omnem alium linearum numerum extendere licet.

I. Datae sint (*Fig. 46.*) quinque rectæ inter se parallelæ Aa, Bb, Dd, Ee, Ff , quæritur punctum C ; ex quo si ad quinque rectas datas ducantur CA, CB, CD, CE, CF , quæ cum prioribus faciant angulum datum gr. 80., parallelepipedum sub $CA \times CD \times CE$ sit ad parallelepipedum sub $CB \times CF$ & recta data $2a$, ut 2 ad 1.

Esto factum, & quia datis parallelis datur quoque earum distantia, seu rectæ AB, BD, DE , sint hæ singulæ $= a$, $EF = \frac{1}{2}a$, & $CB = x$, erit $CA = x + a$, $CD = x - a$, $CE = x - 2a$, $CF = x - \frac{5}{2}a$. Atque hinc erit ex conditione problematis.

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 : 2ax^2 - 5a^2x :: 2 : 1$$

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = 4ax^2 - 10a^2x$$

$$x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 2a^3 = 0$$

Hæc autem æquatio cum per nullum binomium dividi possit, tolli debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construi possit. Fiat igitur $x - 2a = y$, erit $x = y + 2a$; factaque terminorum substitutione, oritur æquatio secundo termino carens per *Prop. 5. Cap. 6.*

$$y^3 - 3a^2y + 4a^3 = 0$$

Hinc ex formula generali $y^3 - py + q = 0$, erit $-3a^2 = -p$, $4a^3 = q$, descriptaque parabola cum parametro $a = 1$, tum etiam circulo omnino ut in *Propos. 1. hujus* factum est, invenietur y , cui si addantur $2a$, innotescet punctum $x (= y + 2a) = BC$. Ducta jam Cc ceteris Aa, Bb &c.

Bb &c. parallela, ex quovis puncto ejusdem ducantur rectæ datas parallelas in angulo dato secantes, solvitur quæstio.

II. Datæ sint (*Fig. 47.*) positione septem parallelæ, quarum sit æqualis distantia $= a$, quæ faciant quemcunque angulum cum recta *AG*: quæritur punctum *M*, ita ut solidum $MC \times MA \times ME \times MG = MD \times MB \times MF \times 4a$. Sit $MD = x$, erit $MC = x + a$, $MB = x + 2a$, $MA = x + 3a$, $ME = MD - DE = x - a$, $MF = FE + ED - DM = 2a - x$, $MG = GD - DM = 3a - x$. Atque hinc oritur æquatio

$$-x^4 + 10a^2x^2 - 9a^4 = 16a^3x - 4ax^3$$

$$x^4 - 4ax^3 - 10a^2x^2 + 16a^3x + 9a^4 = 0$$

Quæ quidem cum per nullum binomium dividi possit, auferri debet secundus terminus, ut per parabolam & circumulum construatur. Itaque sumatur $x - a = y$, erit $x = y + a$, & per *Prop. 5. Cap. 6.* oritur æquatio secundo termino carens

$$y^4 - 16a^2y^2 - 12a^3y + 12a^4 = 0$$

Et comparatis hujus terminis cum formula generali, erit $-16a^2 = -p$, $-12a^3 = -q$, $+12a^4 = r$. Proinde facile construatur per *Prop. 3. hujus*, & invenitur *y*, cui si addatur $+a$, innotescet punctum quæsitum $x = y + a$, a quo ducta *Mm* ceteris *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. parallela, ex quocunque illius puncto ducatur recta parallelas *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. secans in angulo dato, erit problema solutum.

F I N I S.

Zz

IN-

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones.

pag. 1

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

Prop. I. <i>Quantitates simplices addere.</i>	3	Prop. V. <i>Quantitates compositas addere.</i>	7
Prop. II. <i>Quantitates simplices subtrahere.</i>	4	Prop. VI. <i>Quantitates compositas subtrahere.</i>	8
Prop. III. <i>Quantitates simplices multiplicare.</i>	5	Prop. VII. <i>Quantitates complexas multiplicare.</i>	9
Prop. IV. <i>Quantitates simplices dividere.</i>	6	Prop. VIII. <i>Quantitates complexas dividere.</i>	12
Lemma. <i>Quantitates complexas ad simpliciores expressiones reducere.</i>	6	Prop. IX. <i>Datae quantitatis diviso- res omnes invenire.</i>	15

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

Axiomata.	19	Prop. III. <i>Fractioes ad eandem denominationem reducere.</i>	22
Prop. I. <i>Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.</i>	20	Prop. IV. <i>Additio, & subtractio fractionum.</i>	23
Prop. II. <i>Fractioes ad simpliciores expressionem reducere.</i>	21	Prop. V. <i>Fractioes multiplicare.</i>	25
		Prop. VI. <i>Fractioes dividere.</i>	27
		Prop.	

Prop. VII. <i>Polynomium cum fractionibus dividere.</i>	29	<i>cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.</i>	31
Prop. VIII. <i>Valorem fractionis,</i>			

APPENDIX

De Fractionibus Decimalibus.

Definitiones.	34	Prop. IV. <i>Fractionem quancunque in partes decimales reducere.</i>	41
Prop. I. <i>Decimales addere, & subtrahere.</i>	36	Prop. V. <i>Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.</i>	42
Prop. II. <i>Decimales multiplicare.</i>	38		
Prop. III. <i>Decimales dividere.</i>	40		

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

Definitiones.	43	Prop. VI. <i>Potestates compositas dividere.</i>	55
Prop. I. <i>Potentiam quancunque per aliam ejusdem radicis multiplicare, aut dividere.</i>	46	Prop. VII. <i>Ex potestatibus radicem extrahere.</i>	56
Prop. II. <i>Potestatem quancunque ad aliam dati exponentis elevare.</i>	47	Prop. VIII. <i>Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.</i>	58
Prop. III. <i>Binomium ad quancunque potentiam elevare,</i>	48	Prop. IX. <i>Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.</i>	60
Prop. IV. <i>Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quancunque elevando assignare.</i>	52	Prop. X. <i>Radices quascunque extrahendi methodum generalem assignare.</i>	62
Prop. V. <i>Potestates compositas multiplicare.</i>	54	Prop. XI. <i>Extractiones radicum per infinitos terminos continuare.</i>	65

C A P U T IV.

De Calculo Radicali.

Definitiones.	69	Prop. VIII. Ex simplici radicali radicem extrahere.	88
Prop. I. Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.	71	Prop. IX. Ex binomio radicem quadratam extrahere.	89
Prop. II. Radicales ad simpliciorum expressionem reducere.	73	Prop. X. Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.	91
Prop. III. Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.	75	Prop. XI. Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciorum expressionem reducere.	93
Prop. IV. Quantitates radicales multiplicare.	76	Prop. XII. Radicalium universalium calculus.	95
Prop. V. Quantitates radicales dividere.	79	Prop. XIII. Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire.	98
Prop. VI. Radicales compositas dividere.	82		
Prop. VII. Radicales ad datam potestatem elevare.	85		

C A P U T V.

De Æquationibus simplicibus.

Definitiones.	103	explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.	112
Axiomata.	104	Prop. IV. Quæstionem datam ad æquationem redigere.	115
Prop. I. Explicantur regulæ reductionis æquationum.	105	Problemata.	118
Prop. II. Plures simplices æquationes ad unam reducere.	109	Problem. Indeterminata.	130
Prop. III. Theoremata nonnulla			

C A P U T VI.

De Æquationibus compositis.

- Prop. I. *Explicatur æquationum compositarum genesis.* 138
- Prop. II. *Æquationem quancunque ordinare.* 142
- Prop. III. *Radices veras in falsas; & falsas in veras commutare.* 144
- Prop. IV. *Radices augere, vel minuere data quantitate.* 145
- Prop. V. *Ex data æquatione secundum terminum tollere.* 147
- Prop. VI. *Ex æquatione terminum tertium tollere.* 150
- Prop. VII. *Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.* 154
- Prop. VIII. *Æquationis Radices per datam quantitatem multiplicare.* 155
- Prop. IX. *Radices æquationis dividere per datam quantitatem.* 157
- Prop. X. *Æquationem a fractionibus liberare.* 159
- Prop. XI. *Æquationem a radicalibus liberare.* 160
- Prop. XII. *Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.* 163
- Prop. XIII. *Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.* 165
- Prop. XIV. *Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.* 168

C A P U T VII.

De resolutione æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

- Prop. I. *Æquationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire.* 172
- Prop. II. *Radices rationales propius investigare.* 175
- Prop. III. *Idem problema in æquationibus literalibus.* 177
- Prop. V. *Alia methodus æquationes compositas resolvendi.* 179
- Prop. VI. *Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere.* 183

C A P U T VIII.

De *Æquationibus Quadraticis.*

Prop. I. <i>Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.</i>	186	<i>per formulas generales resolvere.</i>	190
Prop. II. <i>Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.</i>	189	Prop. IV. <i>Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.</i>	192
Prop. III. <i>Æquationes secundi gradus</i>		Problemata.	193
		Problemata Geometrica.	201

C A P U T IX.

De *Æquationibus Cubicis.*

Prop. I. <i>Explicatur æquationum Cubicarum genesis.</i>	212	Prop. VI. <i>Æquationes Cubicas, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.</i>	227
Prop. II. <i>In æquationibus Cubicis an duæ radices sunt æquales, & quæ am sint, explorare.</i>	216	Prop. VII. <i>Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.</i>	233
Prop. III. <i>In æquationibus Cubicis an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare.</i>	217	Prop. VIII. <i>Æquationes Cubicas per formulas generales Cardani resolvere.</i>	236
Prop. IV. <i>Æquationes Cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem continent, expedire.</i>	221	Prop. IX. <i>Idem problema brevius absolvitur.</i>	239
Prop. V. <i>Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.</i>	225	Prop. X. <i>Ex binomio cubico radicem extrahere.</i>	243
		Problemata Cubica.	248

C A P U T X.

De Æquationibus biquadraticis, & aliis
altiorum graduum.

Prop. I. Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere. 256	re. 268
Prop. II. Æquationes quarti gra- dus resolvere. 259	Problemata quarti gradus. 270
Prop. III. An biquadraticæ, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolveri possint. 263	Definitiones. 281
Prop. IV. Æquationes quarti gra- dus alia ratione resolvere. 265	Prop. VI. An æquatio biquadra- tica reducibilis sit, explora- re. 282
Prop. V. Æquationem biquadrati- cam puram, vel secundo, & quarto termino carentem solve- re. 268	Prop. VII. An æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquire- re. 285
	Prop. VIII. An æquatio sexti gradus sit reducibilis, exami- nare. 288

C A P U T XI.

De limitibus radicum, earumque appro-
ximatione.

Prop. I. Radicum limites inve- nire. 294	Prop. IV. Aliæ approximandi ra- tiones expediuntur. 305
Prop. II. Radicum limites pro quacunque æquatione methodo Newtoniana indagare. 298	Prop. V. Radices prope veras in æquationibus literalibus indaga- re. 307
Prop. III. Æquationum radices prope veras per approximatio- nem extrahere. 303	Prop. VI. Idem problema alio mo- do resolvitur. 310

C A P U T XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

Porisma I. <i>Fractiones inter terminos proportionales resolvere.</i>	314	primere.	316
Porisma II. <i>Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones Geometrice ex-</i>		Porisma III. <i>Æquationes secundæ gradus Geometricè construere.</i>	318
		Problemata.	321

A P P E N D I X

De constructione Problematum solidorum.

Definitiones.	338	Prop. II. <i>Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur.</i>	342
Porisma I. <i>Parabolam in plano describere.</i>	339	Prop. III. <i>Æquationes biquadraticas construere.</i>	346
Porisma II. <i>Parabolam in plano alia ratione describere.</i>	340	Problemata.	351
Prop. I. <i>Explicatur constructionis Cartesiane methodus.</i>	341		

F I N I S.

